Rédactions N°103 et N°078

COTE : PSMS 004

AUTEURS : Samuel Eilenberg et André Weil

TITRE : TOPOLOGIE
RAPPORTS SEAW et EILENBERG

(Textes reliés et annotés à la main par Pierre Samuel)

FONDS : PIERRE SAMUEL

Nombre de pages numérisées 128
Nombre de feuilles prises en compte 085

Le professeur de Mathématiques " Bourbachi veut dire celui qui, le premier, découvre les secrets de la Topologie et de l'Algèbre, le Lord Protecteur des Fibres, le Grand Maître des compacts, le président de la Société de Class Field archeology, ... "

Monsieur Jourdain " quelle belle langue ce Turc ! Que l'on dit de choses en peu de mots "

PSMS 004 2

103

TOPOLOGIE

RAPPORTS SEAW et EILENBERG

R103 PSMS 004 3

RAPPORT SEAW sur la TOPOLOGIE PRÉHOMOLOGIQUE.

[Les rapporteurs ne se sont pas proposé de faire une synthèse définitive du sujet, ce qui serait prématuré. Il s'agit d'un premier regroupement de questions variées, comprenant deux morceaux de théorie importants (théorie préhomologique des espaces fibrés, théorie préhomologique des groupes d'homotopie), auxquels se rattachent des résultats et notions variés dont la répartition est à examiner].

[On renvoie à l'homologie pour les grands laïus sur théories "singulières" et "tchékistes" (dans les premières, on s'attache principalement, pour étudier un espace E , aux applications dans E d'espaces simples de nature prescrite à l'avance, e.g. sphères, complexes, etc.; dans les autres, on applique E dans des espaces de comparaison ; il existe donc une sorte de dualité (métamathématique) entre les deux théories, qui néanmoins donnent des résultats concordants lorsque E est un complexe, ou plus généralement satisfait à certaines conditions assez larges "toujours vérifiées dans la pratique" (quelle pratique ?). On avertit seulement qu'on s'est tenu principalement à la théorie "singulière", qui paraît plus "naturelle" lorsqu'il s'agit d'homotopie].

I. - Groupoïdes. (cf. Algèbre Chap.I, p.95-96, ex. 22).

Un ensemble G est dit groupoïde si on y a donné une loi de composition non partout définie, associative (chaque fois que xy et yz sont définis, (xy)z et x(yz) le sont aussi, et ont même valeur), avec l'axiome suivant : si on appelle unité tout e tel que ex = x chaque fois que ~~ex = x chaque fois que~~ ex est défini, et ye = y chaque fois que ye est défini, tout élément x a un inverse x' tel que xx' et x'x soient des unités (dites unités à gauche et à droite de x) ; on pourra écrire $x' = x^{-1}$, $xx' = e_x$, $x'x = e'_x$; pour que xy soit défini, il faut et il suffit qu'on ait $e'_x = e_y$. Si e et e' sont deux unités, et qu'on note g(e,e') l'ensemble des x tels que $e_x = e$, $e'_x = e'$, alors , pour tout e , g(e,e) est un groupe ; si $x \in g(e,e')$, $z \to x^{-1}zx$ est un isomorphisme de g(e,e) sur g(e',e'), et $y \to yx$ est une application biunivoque de g(e,e) sur g(e,e'). La relation $g(e,e') \neq \emptyset$ est une relation d'équivalence entre unités ; s'il n'y a pour cette relation qu'une seule classe d'équivalence, le groupoïde est dit <u>connexe</u> : en ce cas, les groupes g(e,e) sont tous isomorphes entre eux, par des isomorphismes déterminés canoniquement à des automorphismes intérieurs près (donc déterminés canoniquement si ces groupes sont abéliens).

En particulier, soit E un espace topologique ; dans l'ensemble des <u>chemins</u> dans E (= applications continues de $[0,1]$ dans E), on définit une loi de composition $(p,q) \to pq$, définie chaque fois que l'origine de q coïncide avec l'extrémité de p comme l'application qui, sur $[0,1/2]$ et $[1/2, 1]$ respectivement, coïncide avec $p\circ\varphi$ et $q\circ\psi$, où φ , ψ sont définies, sur ces intervalles respectivement, par $\varphi(t) = 2t$, $\psi(t) = 2t-1$. Sur cet ensemble, on définit la relation d'équivalence : $p \equiv q$ si p est homotope à q relativement à la partie $\{0\} \cup \{1\}$ de $[0,1]$ (deux applications f,g d'un espace X dans un espace Y sont dites homotopes relativement à une partie X' de X si elles coïncident sur X', et s'il existe une application continue F(x,t) de $X \times [0,1]$ dans Y telle que $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ quel que soit $x \in X$, et $F(x',t) = f(x') = g(x')$ quels que soient $x' \in X'$ et $t \in [0,1]$)
Par construction explicite d'applications, on montre facilement :
a) que $p \equiv q$ est bien une relation d'équivalence (vrai pour l'homotopie relative) ; b) que cette relation est compatible avec la loi de composition $(p,q) \to pq$; c) qu'avec la loi de composition qui se déduit de celle-ci par passage au quotient, l'ensemble quotient est un groupoïde

dit groupoïde fondamental de E . Les unités sont en correspondance biunivoque avec les points de E : à **a** $\in$ E correspond l'unité e_a qui est la classe du chemin réduit à **a** . Le groupoïde est connexe si E est "pathwise connected" (terminologie ?), ce qui implique naturellement la connexion au sens habituel (réciproque pas vraie : la réunion de $x = 0$, $y \in [-1,+1]$ et de $x \in]0,1]$, $y = \sin(\pi/x)$ est un compact connexe, avec deux composantes au sens des chemins). L'ensemble des éléments du groupoïde qui ont e_a pour unité à gauche et à droite se note $\pi(E,a)$. Sur un espace connexe au sens des chemins, et où par suite tous les $\pi(E,a)$ sont isomorphes, on appellera par abus de langage groupe fondamental de E tout groupe isomorphe aux $\pi(E,a)$. Pour la détermination de ce groupe, on dispose principalement de deux méthodes : 1) par les revêtements (étudiés plus loin comme cas particulier d'espaces fibrés) ; 2) par les théorèmes de cascades pour les groupes d'homotopie, on peut dans certains cas obtenir un isomorphisme canonique entre $\pi(E,a)$ et $\pi(A,a)$, où A est une partie fermée de E ; en particulier, si E est un complexe, on peut prendre pour A le squelette à 2 dimensions de E , et pour celui-ci $\pi(A,a)$ peut s'écrire explicitement par générateurs et relations.

Annexe I (Note pour Top.Gén. chap.X).

Lemme. Soit $f(x,p)$ une application continue d'un produit $X \times E$ dans un espace F ; soit K une partie de E , ayant la propriété de Borel-Lebesgue ; soit U une partie ouverte de F . Alors l'ensemble $W(K,U)$ des $x \in X$ tels que $f(x,p) \in U$ quel que soit $p \in K$ est ouvert dans X . [En effet : soit $a \in W(K,U)$; à tout $p \in K$ on peut faire correspondre un voisinage V_p de p dans E , et un voisinage W_p de a dans X , tels que $f(W_p \times V_p) \subset U$; il y a des p_i en nombre fini tels que $K \subset \bigcup_i V_{p_i}$; soit $W = \bigcap_i W_{p_i}$; on a $a \in W \subset W(K,U)$] .

Soit C un ensemble d'applications continues de E dans F ; on munit C d'une topologie quelconque. A toute application, continue ou non, $x \rightarrow f(x)$, d'un espace X dans C , correspond une application $(x,p) \rightarrow F(x,p) = f(x)(p)$ de $X \times E$ dans F .

(I) Les propositions suivantes sont équivalentes (trivialement) :

(Ia) $(f,p) \rightarrow f(p)$ est une application continue de $C \times E$ dans F .

(Ib) Quels que soient X et l'application $x \rightarrow f(x)$ de X dans C , la continuité de l'application $x \rightarrow f(x)$ entraîne celle de l'application $(x,p) \rightarrow F(x,p) = f(x)(p)$ de $X \times E$ dans F .

(II) Des propositions suivantes, IIb entraîne IIa (trivialement) ; et IIa entraîne IIb pourvu que E soit localement compact :

(IIa) Si C' désigne l'ensemble C muni d'une autre topologie, la continuité de l'application $(f,p) \rightarrow f(p)$ de $C' \times E$ dans F entraîne que la topologie de C' est plus fine que celle de C .

(IIb) Quels que soient X et f(x), la continuité de l'application $(x,p) \rightarrow F(x,p) = f(x)(p)$ de $X \times E$ dans F entraîne celle de l'application f(x) de X dans C .

[Démonstration du second point : on met sur C la topologie dans laquelle $U \subset C$ est ouvert chaque fois que $\overset{-1}{f}(U)$ est ouvert dans X ; d'après (IIa), il suffit de montrer qu'avec cette topologie $(f,p) \rightarrow f(p)$ est continu en tout point (f_o,p_o) de $C \times E$. Si $f_o \notin f(X)$, f_o est un point isolé de C, et la continuité revient à celle de $f_o(p)$; il suffit donc de vérifier la continuité en un point $(f(t_o),p_o)$; ou, ce qui revient au même, il suffit de vérifier que, si U est un voisinage de $F(t_o,p_o)=f(t_o)(p_o)$ dans F , il existe un voisinage V de p_o dans E , et un ensemble ouvert W dans X , saturé pour la relation d'équivalence $f(x)=f(x')$, tels que $t_o \in W$, et que $x \in W$, $p \in V$ entraîne $F(x,p) \in U$. On peut supposer U ouvert ;

7

Dit ce qui se passe à l'∞.

et on peut choisir V compact (puisque E est localement compact), et tel que $p \in V$ entraîne $F(t_0,p) \in U$; alors, d'après le lemme, on satisfait aux conditions ci-dessus en prenant $W = W(V,U)$] .

Soit T_c la topologie sur C , engendrée par les $W(K,U)$ (au moyen de l'application $(f,p) \rightarrow f(p)$ de $C \times E$ dans F) ; d'après le lemme, T_c a la propriété (IIb), donc aussi (IIa). C'est naturellement la topologie de la convergence compacte ("open-compact topology" des américains). On peut aussi la définir ainsi : si $f \in C$, et si Γ_f est le graphe de f, un système fondamental de voisinages de f dans C sera donné par les $\Psi(K,\Omega)$, où K est une partie de E ayant la propriété de B.L., Ω un voisinage de Γ_f dans $E \times F$, et $\Psi(K,\Omega)$ est l'ensemble des $f' \in C$ tels que $\Gamma_{f'} \cap (K \times F) \subset \Omega$. Si de plus E est localement compact, T_c a la propriété (Ia), donc aussi (Ib).

II. <u>La notion d'homotopie</u>.

Cette notion a été définie plus haut, l'homotopie des applications continues de X dans Y se définissant au moyen des applications continues de $X \times [0,1]$ dans Y . On peut avoir à la préciser, au moyen de conditions restrictives imposées aux applications de $X \times [0,1]$ dans Y qu'on admet pour définir l'homotopie ; p.ex. (Fox, Bull.AMS, vol.49, p.555 et p.733), on peut se donner un voisinage U de la diagonale dans $Y \times Y$, et n'admettre $F(x,t)$ que s'il existe ε tel que $|t'-t| \leqslant \varepsilon$ entraîne $(F(x,t),F(x,t')) \in U$ quel que soit $x \in X$: l'homotopie ainsi définie s'appellera U-homotopie ; on peut aussi supposer une structure uniforme donnée sur Y , et demander que cette condition soit remplie pour tous les entourages U dans $Y \times Y$.

Ces notions sont très voisines de la connection "pathwise" ou "au sens des chemins" dans divers espaces fonctionnels. Par exemple, si X est localement compact, les classes d'homotopie d'applications de X dans Y sont les composantes "au sens des chemins" de l'espace des applications continues de X dans Y , muni de la topologie de la convergence compacte (cf. Annexe, p.2 bis) ; de même pour l'homotopie relative, en se bornant au sous-espace des applications de X dans Y qui, sur une partie fermée donnée A de X , induisent une application donnée de A dans Y . L'homotopie définie plus haut au moyen d'une structure uniforme se ramène de même aux composantes "pathwise" dans l'espace des applications de X dans Y avec la topologie de la convergence uniforme. Quant à la U-homotopie (définie au moyen d'un seul U), il y aurait lieu de chercher à la définir de même ; son rôle n'est d'ailleurs pas bien éclairci. De beaucoup le cas le plus fréquent est celui où X est un compact, auquel cas toutes ces notions coïncident. On peut se demander aussi pourquoi on considère la connexion "pathwise" plutôt que la connexeion ordinaire : cela tient, d'une part à l'adoption du point de vue "singulier" (v. plus haut), d'autre part au fait que c'est nécessaire pour pouvoir remonter d'une dimension à la suivante dans l'étude des groupes d'homotopie. Bien entendu, les deux coïncident pour les espaces "habituels".

Il est intéressant d'observer que, sous certaines hypothèses, deux applications suffisamment voisines l'une de l'autre, de X dans Y, sont nécessairement homotopes (connexion locale d'espaces fonctionnels). P. ex. (Fox, loc.cit.), on peut observer d'abord que, si U et V sont deux voisinages de la diagonale dans $Y \times Y$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) Quels que soient l'espace X, la partie fermée A de X , et l'application continue f de X dans Y , toute application f' de X dans Y , induisant sur A l'application $f'_A = f_A$, et satisfaisant à $(f(x),f'(x)) \in V$ quel que soit $x \in X$, est U-homotope à f relativement à A .

b) Il existe une application $\phi(y,y',t)$ de $V \times [0,1]$ dans Y, telle que $\phi(y,y',0) = y$, $\phi(y,y',1) = y'$, $\phi(y,y,t) = y$ chaque fois que les premiers membres sont définis, et qu'il y ait un $\varepsilon > 0$ tel que $|t'-t| \leq \varepsilon$ entraîne $(\phi(y,y',t), \phi(y,y',t')) \in U$.

[En effet : b) est un cas particulier de a), pour $X = V$, $A = \Delta_Y$, $f(y,y') = y$, $f'(y,y')=y'$. Réciproquement, b) entraîne a), comme le montre la considération de l'homotopie $\phi(f(x),f'(x),t)$.]

En particulier, b) est satisfait si Y est compact et "rétracte absolu de voisinage" (Borsuk), pour V convenablement choisi (U étant donné) ; la propriété de rétracte absolu de voisinage est apparentée à celle de connexion locale dans toutes les dimensions. On a aussi le résultat suivant, intéressant dans l'étude des variétés. Convenons de dire qu'un espace E a la <u>propriété d'extension</u> si, chaque fois qu'on a une application continue dans E d'une partie fermée A d'une espace normal X, cette application peut être prolongée à X ; il en est ainsi par exemple si E est homéomorphe à R^n (i.e. à une boule ouverte), ou si c'est un "rétracte absolu" (Top.Gén.chap.IX, p.69, ex. 16).

Disons aussi qu'une famille de parties $(X_\iota)_{\iota \in I}$ d'un ensemble E est star-finie si, pour tout ι, l'ensemble des $\varkappa$ tels que $X_\iota \cap X_\varkappa \neq \emptyset$ soit fini. Alors :

<u>Proposition</u>. Soit (X_ι) une famille star-finie de parties fermées d'un espace normal E. Pour tout $F \subset I$ tel que $X_F = \bigcap_{\iota \in F} X_\iota \neq \emptyset$, supposons donné un ensemble $B_F \supset X_F$ ayant la propriété d'extension, de telle façon que $F \supset F'$ entraîne $B_F \subset B_{F'}$. Soient $U = \bigcup_\iota (B_\iota \times B_\iota)$, où $B_\iota = B_{\{\iota\}}$, et $V = \bigcup_\iota (X_\iota \times X_\iota)$. Alors, si deux applications f, f' d'un espace E' dans E sont telles que $(f(z),f'(z)) \in V$ quel que soit $z \in E'$, elles sont U-homotopes ; si de plus elles coïncident sur une partie fermée A' de E', elles sont U-homotopes relativement à A'.

D'après ce qu'on a vu, il suffit de construire une application ϕ de $V\times[0,1]$ dans E, ayant les propriétés énoncées plus haut en b). Pour cela, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des F tels que $X_F\neq\emptyset$; pour tout $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$, posons $V(\mathcal{F}')=\bigcup_{F\in\mathcal{F}'}(X_F\times X_F)$. Considérons toutes les applications continues ϕ' d'un ensemble $V(\mathcal{F}')\times[0,1]$ dans E, satisfaisant, partout où elles sont définies, aux conditions suivantes : (A) $\phi'(x,y,0)=x$, $\phi'(x,y,1)=y$, $\phi'(x,x,t)=x$; (B) $(x,y)\in X_F\times X_F$ entraîne $\phi'(x,y,t)\in B_F$. On peut Zornifier (en vérifiant la continuité, on tient compte du fait qu'un point de $E\times E$ ne peut appartenir qu'à un nombre fini d'ensembles fermés de la forme $X_F\times X_F$). Soit donc ϕ' maximale. Supposons qu'il existe des F tels que $X_F\times X_F\not\subset V(\mathcal{F}')$; parmi eux, prenons-en un maximal (on en prend un quelconque, puis un maximal parmi ceux en nombre fini qui contiennent celui-là). Soit ψ une application de $X_F\times X_F\times[0,1]$ dans B_F qui, dans son domaine de définition, satisfasse à (A), et, dans l'intersection de ce domaine avec $V(\mathcal{F}')\times[0,1]$, coïncide avec ϕ' (cette intersection est un ensemble fermé, toujours d'après la propriété star-finie des X_i) : l'existence en résulte de la propriété d'extension de B_F. Montrons que la fonction qui coïncide respectivement avec ϕ' et ψ dans leurs domaines de définition a les propriétés (A), (B), contrairement au caractère maximal de ϕ'. Pour cela, il y a seulement à vérifier que, si $(x,y)\in X_F\times X_F$ et $(x,y)\in X_{F'}\times X_{F'}$, on a $\psi(x,y,t)\in B_{F'}$. C'est vrai si $F'\subset F$, puisqu'alors $B_{F'}\supset B_F$; supposons donc $F'\not\subset F$, donc $F''=F\cup F'\neq F$, et par suite, en vertu de la propriété maximale de F, $X_{F''}\times X_{F''}\subset V(\mathcal{F}')$, donc $(x,y)\in V(\mathcal{F}')$ et $\psi(x,y,t)=\phi'(x,y,t)$, d'où la conclusion. Il s'ensuite que ϕ' est définie sur $V\times[0,1]$; on n'a alors qu'à prendre $\phi=\phi'$.

Le cas le plus intéressant est celui où on a un recouvrement ouvert (A_ι) de E , star-fini, tel que, si on pose $A_F = \bigcap_{\iota \in F} A_\iota$, les A_F non vides, ou bien encore les $\overline{A}_F$ non vides, aient la propriété d'extension ; on pourra alors appliquer la prop. ci-dessus, en prenant $B_F=A_F$ resp. $\overline{A}_F$, et prenant pour X_ι une partie fermée quelconque de A_ι pour tout ι ; si E est normal, on pourra supposer en particulier que les X_ι soient adhérences d'ensembles ouverts A'_ι formant eux-mêmes un recouvrement de E (Top.Gén.chap.IX, § 4, n°3, où on a eu tort de se borner aux recouvrements finis, les résultats restant vrais par Zornification chaque fois que tout point de E a un voisinage qui n'a de points communs qu'avec un nombre fini d'ensembles du recouvrement, et a fortiori pour les recouvrements star-finis, les deux conditions étant du reste équivalentes quand les ensembles du recouvrement sont relativement compacts. Cf. Dieudonné, J. de Liouville 1944, p. 71).

Appelons <u>épiderme</u> d'un espace E (? pourquoi pas ?!) un recouvrement ouvert, star-fini, (A_ι), tel que les $A_F = \bigcap_{\iota \in F} A_\iota$ non vides aient la propriété d'extension. Comme onverra plus loin, il y a intérêt à avoir des conditions qui assurent l'existence d'un épiderme. C'est ce qui va être fait pour les variétés compactes p fois différentiables, pour $p \geqslant 2$. Soit E une telle variété, à n dimensions. On commence par la plonger dans un espace euclidien R^N [méthode d'Urysohn : on recouvre E par $V_1, \ldots, V_M$, tels qu'il y ait un système de coordonnées locales $(x_{i1}, \ldots, x_{in})$ valable dans $\overline{V}_i$ pour chaque i ; soit W_i un recouvrement de E , tel que $\overline{W}_i \subset V_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant M$; soit φ_i une fonction $\geqslant 0$, p fois différentiable sur E , = 1 sur $\overline{W}_i$ et = 0 sur $\complement V_i$; soit $y_{i0}=\varphi_i$ et $y_{i\nu} = \varphi_i x_{i\nu}$ pour $1 \leqslant \nu \leqslant n$; les M(n+1) fonctions y_i plongent E dans R^N , avec $N = M(n+1)$]. Puis, identifiant E avec son image dans R^N , on démontre le lemme suivant : il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si p et q sont deux points de E , à une distance (euclidienne)

$d(p,q) < \varepsilon$, la projection orthogonale sur le plan tangent en p de l'intersection de E avec la boule (soit ouverte, soit fermée) de centre q et de rayon ε soit un ensemble convexe. [Démonstration : par compacité, il existe $\delta > 0$, et M , tels que, si p est arbitrairement pris sur E , et qu'on prenne un système d'axes euclidien d'origine p formé de n vecteurs tangents et de $N-n$ vecteurs normaux à E , la partie de E intérieure à la boule de centre p et de rayon δ puisse être représentée par des équations $x_{n+r} = f_r(x_1,\ldots,x_n)$, les f_r étant telles que $|\partial^2 f_r / \partial x_i \partial x_j| \leq M$ $(1 \leq r \leq N-n \ , \ 1 \leq i \ , \ j \leq n)$ dans leur domaine de définition. Cela posé, si $\varepsilon < \delta/2$, l'ensemble qu'on veut rendre convexe est défini, dans R^n, par $F(x) = \sum_1^n (x_i-a_i)^2 + \sum_1^{N-n} [f_r(x)-f_r(a)]^2 < \varepsilon^2$ (resp. $\leq \varepsilon^2$), le point (a) étant tel que $F(0)<\varepsilon^2$. Pour cela, il suffit de faire voir que, pour ε assez petit, $F(x)$ est une fonction convexe dans le domaine $\sum_1^n x_i^2 \leq 4\varepsilon^2$, donc que dans ce domaine la matrice $\| 1/2 . \partial^2 F/\partial x_i \partial x_j \|$ est définie positive. Or celle-ci est égale à

$$1_n + \left\| \sum_r [f_r(x)-f_r(a)] . \partial^2 f_r / \partial x_i \partial x_j + \sum_r \partial f_r/\partial x_i . \partial f_r / \partial x_j \right\| ;$$

alors, en appliquant la formule de Taylor avec évaluation du reste, et tenant compte de $f_r(0)=0$, $(\partial f_r/\partial x_i)_{x=0} = 0$, on voit que chaque terme de la 2° matrice est, en valeur absolue, $\leq k(M\varepsilon)^2$, où k est une constante numérique (dépendant seulement de n ,N). Il s'ensuit qu'il existe une constante numérique α tel que tout ε qui satisfait à $\varepsilon < \delta/2$, $\varepsilon < \alpha/M$ ait la propriété annoncée. Dans ces conditions, on recouvrira E par des boules ouvertes (euclidiennes) en nombre fini, de rayon $\rho < \varepsilon$, ayant leurs centres q_i sur E : si A_i sont les intersections de E avec ces boules, les A_i forment un épiderme de E . En effet, soit $A_F = \bigcap_{i \in F} A_i \neq \emptyset$, et soit $p \in A_F$: sur la variété linéaire tangente à E en p , les A_i pour $i \in F$ se projettent suivant des ensembles convexes ; il en est donc de même de leur intersection, qui est donc homéomorphe à R^n.

Truc Serre (cf: Eilenberg) des sous bras

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr] & B \\ & X \end{tikzcd}$$

homotopes $\left| \begin{matrix} f \\ g \end{matrix} \right.$

f prolongeable en f_0

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g \text{ prolongeable en } g_0 \\ g_0 \text{ et } f_0 \text{ homotopes} \end{array} \right.$

(Truc des tuyaux de pipe

Il est très vraisemblable que le résultat subsiste si on remplace l'hypothèse de compacité par l'hypothèse "réunion dénombrable de compacts (qui d'ailleurs est évidemment nécessaire, dans le cas seul intéressant où E est connexe, pour qu'il existe un recouvrement star-fini formé d'ensembles relativement compacts). Mais, pour étendre à ce cas la démonstration ci-dessus, il faudrait se servir du théorème de plongement de Whitney, qui, pour le cas non compact, est de démonstration extraordinairement délicate ; une autre possibilité est de remplacer les boules euclidiennes par des boules pour la distance géodésique, avec une métrique riemannienne, mais cela demande un minimum de géométrie différentielle. Il y aurait donc intérêt à rechercher une astuce nouvelle : au concours! Quant à passer de $p \geqslant 2$ à $p=1$ ou 0, cela est théoriquement possible pour $p=1$, puisque d'après Whitney toute structure C^p, pour $p \geqslant 1$, peut être renforcée en une structure C^∞ ; mais il faudrait une démonstration qui n'utilisât pas le théorème de Whitney (fort délicat aussi) ; pour $p=0$, on ne sait rien (on ne sait même pas, semble-t-il, si on peut associer, à tout espace compact localement euclidien, un complexe fini ayant les mêmes caractères homologiques : or, comme on verra plus loin, ce serait nécessairement le cas si l'on pouvait y définir un épiderme).

Relèvement des homotopies. Soit φ une application (continue) d'un espace E sur un espace B ; soit f une application d'un espace X dans E ; soit $G(x,t)$ une application de $X \times [0,1]$ dans B, telle que $G(x,0) = g(x) = \varphi[f(x)]$; relever dans E l'homotopie G, c'est trouver une application $F(x,t)$ de $X \times [0,1]$ dans E telle que $F(x,0) = f(x)$, et $G = \varphi \circ F$; le "covering homotopy theorem" (théorème d'Exkmann-Ehresman-Feldbau-Hurewicz-Steenrod) affirme que c'est possible dans certaines conditions (v.plus loin). Dans la plupart des applications, on a affaire à des X compacts. Pour que le "relèvement" soit utilisable dans les questions d'homotopie relative, on imposera la condition supplémentaire

17

que, pour tout $x \in X$ tel que $G(x,t)$ soit indépendante de t (i.e. $G(x,t) = g(x)$ quel que soit t), il en soit de même de $F(x,t)$.

Très important

Pour l'instant, on va se borner aux résultats de Fox (loc.cit.). On dira que φ est <u>fibroïde</u> (terminologie provisoire, comme tout le reste !) s'il existe un voisinage W du graphe de φ dans $E \times B$, et une application ω de W dans E, telle que l'on ait $\omega(x, \varphi(x))=x$ quel que soit $x \in E$, et $\varphi\left[\omega(x,y)\right] = y$ quel que soit $(x,y) \in W$. En particulier, supposons qu'il existe pour B des voisinages U, V de la diagonale dans $B \times B$, et une fonction $\phi(y,y',t)$ satisfaisant aux conditions b), p.3 ; et considérons l'application $\Psi(x,y,t) = \phi(\varphi(x),y,t)$ de $W \times [0,1]$ dans B, W étant l'ensemble des $(x,y) \in E \times B$ tels que $(\varphi(x),y) \in V$, donc un voisinage du graphe de φ. On a $\Psi(x,y,0)=\varphi(x)$. "Relever" dans E l'homotopie Ψ de W dans B, ce sera donc par définition trouver une application Ω de $W \times [0,1]$ dans E, telle que $\Psi = \varphi \circ \Omega$, $\Omega(x,y,0)=x$, et $\Omega(x,y,t)=x$ quel que soit t chaque fois que $\Psi(x,y,t)=\varphi(x)$ quel que soit t, donc en particulier pour $y = \varphi(x)$. Supposons que ce soit possible ; et soit $\omega(x,y) = \Omega(x,y,1)$; on aura $\omega(x,\varphi(x)) = x$, et $\varphi\left[\omega(x,y)\right] = \Psi(x,y,1)=y$; ce qui démontre que dans ces conditions φ est fibroïde.

Réciproquement, soit φ fibroïde, avec ω et W comme ci-dessus ; soit V un voisinage de la diagonale dans $B \times B$, tel que $(\varphi(x),y) \in V$ entraîne $(x,y) \in W$; on va montrer que toute V-homotopie $G(z,t)$ d'un espace Z dans B peut être relevée dans E. Soient donc $G(z,t)$ une application de $Z \times [0,1]$ dans B, avec $G(z,0) = \varphi\left[f(z)\right]$. Si d'abord on suppose que $(G(z,t),G(z,t')) \in V$ quels que soient z, t, t', on aura, quels que soient z,t, $(G(z,0),G(z,t)) \in V$, donc par hypothèse $(f(z),G(z,t)) \in W$, de sorte qu'on aura le droit de poser $F(z,t) = \omega(f(z),G(z,t))$, et, d'après les propriétés de ω, cette fonction résout le problème. Dans le cas général, d'après la définition de V-homotopie, on pourra subdiviser l'intervalle $[0,1]$ en un nombre fini d'intervalles fermés, chacun ayant pour origine l'extrémité du précédent, de façon que la relation $(G(z,t),G(z,t')) \in V$ soit satisfaite chaque fois que t et t' appartiennent à un même intervalle de la subdivision ; dans ces conditions, on relève l'homotopie successivement pour chacun des intervalles partiels.

Voici dès maintenant un exemple d'application du théorème. Supposons que φ soit une application d'une variété différentiable à n dimensions sur une variété différentiable à p dimensions, qui soit en tout point de rang maximum n-p, et telle que l'image réciproque de tout point soit compacte ; alors on définira arbitrairement sur E une métrique riemannienne, et on définira $\omega(x,y)$ par la condition que la géodésique qui joint ce point à x soit normale en x à la "fibre" $\overset{-1}{\varphi}[\varphi(x)]$.

III. <u>Recouvrements</u> et <u>complexes simpliciaux</u>.

Comme il a été dit p.4, les résultats du chap.IX, § 4,n°3, restent valables pour tout recouvrement ouvert, localement fini (i.e. tout point a un voisinage qui n'a de points communs qu'avec un nombre fini d'ensembles du recouvrement) dans un espace normal ; à un tel recouvrement appartient donc toujours une partition de l'unité qui lui est subordonnée (si on est sur une variété p fois différentiable, on peut supposer de plus que les fonctions de la partition sont p fois différentiables)

Soit $R = (A_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert, star-fini, d'un espace normal E . Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties non vides F de I, telles que $A_F = \bigcap_{\iota \in F} A_\iota \neq \emptyset$; $\mathfrak{F}$ satisfait aux conditions : (A) si $F \in \mathfrak{F}$, $F' \subset F$, $F' \neq \emptyset$, alors $F' \in \mathfrak{F}$; (B) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$; (C) si $\iota \in I$, les $F \in \mathfrak{F}$ tels que $\iota \in F$ sont en nombre fini. Dans l'espace $[0,1]^I$, considérons l'ensemble $N(R)$ des points $x = (x_\iota)$ tels que :

(a) l'ensemble des ι tels que $x_\iota \neq 0$ appartienne à $\mathfrak{F}$;

b) $\sum x_\iota = 1$; N(R) s'appelle le __nerf__ du recouvrement R ; l'ensemble obtenu de même à partir d'un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties de I, satisfaisant aux conditions (A), (B), (C), s'appellera un __complexe simplicial__ ; pour $F \in \mathfrak{F}$, l'ensemble S_F des $x=(x_\iota)$ tels que $x_\iota \neq 0$ pour $\iota \notin F$ s'appellera __simplexe__ (fermé) (à m dimensions si F a m+1 éléments ; si m=0, donc $F = \{a\}$, le simplexe se réduit au __sommet__ $S_a = (x_\iota)$ défini par $x_a = 1$, $x_\iota = 0$ pour $\iota \neq a$) ; le simplexe ouvert correspondant S'_F est l'ensemble des points de S_F tels que $x_\iota \neq 0$ pour $\iota \in F$. L'ensemble St_F des x tels que $x_\iota \neq 0$ pour $\iota \in F$ s'appelle l'__étoile__ (ouverte) de S_F (et son adhérence, l'étoile fermée). Les étoiles ouvertes des sommets d'un complexe forment un recouvrement ouvert du complexe, dont le nerf peut être identifié au complexe. Si les sommets d'un complexe sont en nombre fini, le complexe est compact ; sinon il est localement compact (son adhérence, dans $[0,1]^I$, est formée du complexe et du point 0).

Si $f = (f_\iota)$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement R, c'est une application continue de E dans N(R) ; et on a $f(A_F) \subset \overline{St_F}$ [en effet, si $p \in A_F$, et si f(p) est dans le simplexe ouvert $S'_{F'}$ de N(R), on a $p \in A_{F'}$, donc $p \in A_{F \cup F'}$; alors $S'_{F'} \subset S_{F \cup F'} \subset \overline{St_F}$].

Les opérations élémentaires sur les complexes, en particulier la subdivision barycentrique, s'interprètent simplement si on prend comme point de départ la définition des complexes comme nerfs de recouvrements (cf. Cartan).

On observera que, si f et f' sont deux partitions subordonnées au même recouvrement R, les applications f,f' de E dans N(R) sont homotopes : en effet, si $p \in E$, et si F est l'ensemble des ι tels que $f_\iota(p) \neq 0$, f(p) et f'(p) sont dans S_F ; il en sera donc de même, quel que soit $t \in [0,1]$, du point $F(p;t) = (1-t)f(p) + t\, f'(p)$.

On va montrer que, réciproquement, lorsque le recouvrement R est un épiderme, on peut définir une application g de N(R) dans E, telle que g f et f g soient respectivement homotopes aux applications identiques de E et de N(R) sur eux-mêmes ; lorsque deux espaces X,Y sont tels qu'il existe des applications f de X dans Y , et g de Y dans X , ayant cette dernière propriété, on dit qu'ils ont même "type d'homotopie" (ce qui entraîne qu'ils ont mêmes propriétés du point de vue de l'homologie, des groupes d'homotopie, des espaces fibrés qu'on peut construire sur eux, etc.) ; on peut donc dire que tout espace a même type d'homotopie que le nerf de son épiderme (s'il en a un) [ou encore qu'il a les nerfs à fleur de peau] ; ce qui permet l'application à un tel espace des méthodes combinatoires. Ceci se substitue avantageusement, dans la plupart des cas, à la triangulation (qui donne néanmoins quelque chose de plus précis, à savoir un homéomorphisme de l'espace triangulé avec un complexe).

Pour démontrer ce qu'on vient de dire, on va d'abord définir l'application g de N(R) dans E : cette définition utilise seulement le fait que toute application d'une sphère dans un ensemble A_F peut être prolongée à la boule (ou que les "groupes d'homotopie" des A_F sont nuls). Soit, pour $F \in \mathfrak{F}$, x_F le "barycentre" du simplexe S_F (point défini par $x_\iota = 0$ pour $\iota \notin F$, et $x_\iota = x_{\iota'}$ pour ι, $\iota' \in F$) ; on prendra les $g(x_F)$ soumis à la seule condition $g(x_F) \in A_F$. Pour $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_m \in \mathfrak{F}$, $F_0 \neq \emptyset$, $F_i \neq F_{i+1}$ $(0 \leq i < m)$ les points x_{F_i} forment les sommets d'un simplexe $S(F_0, \ldots, F_m)$ à m dimensions de la subdivision barycentrique de N(R) (ensemble des points $\sum_0^m u_i x_{F_i}$ pour $u_i \geqslant 0$, $\sum_0^m u_i = 1$), et N(R) est la réunion de tous ces simplexes (et même des simplexes ouverts correspondants). On définit g sur ces simplexes, par récurrence sur m , de telle façon que $g[S(F_0, \ldots, F_m)] \subset A_{F_0}$, ce qui est possible en vertu de l'hypothèse faite sur les A_F [N.B. ces applications peuvent être écrites explicitement si on suppose donnée explicitement, pour chaque A_F , une "rétraction" c'est-à-dire une homotopie de l'application identique dans une application constante ; en particulier, si on est sur une variété p fois différentiable, et que ces rétractions soient p fois différentiables il s'ensuivra que g est p fois différentiable sur chaque simplexe $S(F_0,\ldots,F_m)$].

g étant ainsi défini, considérons, pour chaque ι , la réunion Z_ι des ensembles compacts en nombre fini $g[S(F_0,\ldots,F_m)]$ lorsqu'on prend les F_i satisfaisant à la condition $\iota \in F_0$; soit (B_ι) un recouvrement ouvert de E tel que l'on ait $Z_\iota \subset B$ et $\overline{B}_\iota \subset A_\iota$ quel que soit ι ; on prendra pour f une partition de l'unité subordonnée à (B_ι), et telle que $f_\iota > 0$ sur Z_ι (le choix particulier de la partition f subordonnée à R est sans influence sur la classe d'homotopie de l'application f de E dans N(R), comme on a déjà remarqué). Posons $X_\iota = \overline{B}_\iota$. Soit encore, pour chaque ι , N_ι le nombre des ensembles de R qui rencontrent A_ι ; et choisissons, pour chaque ι , un $\varepsilon_\iota > 0$ satisfaisant à $\varepsilon_\iota \leqslant 1/N_\iota$, $\varepsilon_\iota \leqslant \inf_{Z_\iota}(f_\iota)$. Soit $p \in E$, $x = f(p)$; soit F l'ensemble des ι tels que $x_\iota \neq 0$; on peut écrire $F = \{\iota_0,\ldots,\iota_m\}$, avec $x_{\iota_0} \geqslant \ldots \geqslant x_{\iota_m} > 0$; soit $F_i = \{\iota_0,\ldots,\iota_i\}$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$. Alors $f(p) \in S(F_0,\ldots,F_m)$, donc $g[f(p)] \in Z_{\iota_0} \subset X_{\iota_0}$; mais $f_{\iota_0}(p) > 0$, donc $p \in B_{\iota_0} \subset X_{\iota_0}$, donc $(p, g[f(p)]) \in \bigcup_\iota (X_\iota \times X_\iota)$. D'après la prop. de la p.4 (théorème d'homotopie) appliquée aux X_ι et A_ι , $g \circ f$ est donc bien homotope à l'application identique de E sur E (et même U-homotope, avec $U = \bigcup_\iota (A_\iota \times A_\iota)$).

Soit d'autre part $x \in N(R)$, et soient F et les F_i définis comme ci-dessus d'où $g(x) \in Z_{\iota_0}$, et $f_{\iota_0}[g(x)] \geqslant \varepsilon_{\iota_0}$; mais on a $(m+1)x_{\iota_0} \geqslant \sum x_\iota = 1$, et $m+1 \leqslant N_{\iota_0}$ par définition de N_{ι_0} , donc $x_{\iota_0} \geqslant 1/N_{\iota_0} \geqslant \varepsilon_{\iota_0}$. Si donc, pour tout ι , on désigne par X'_ι la partie fermée de l'étoile St_ι qui est déterminée par $x_\iota \geqslant \varepsilon_\iota$, on a $(x, f[g(x)]) \in \bigcup_\iota (X'_\iota \times X'_\iota)$.

Comme on vérifie facilement que les étoiles fermées $\overline{St}_F$ sont des rétractes de cubes, donc rétractes absolus (Top.Gén.ch.IX,p.69,ex.16), et ont donc la propriété d'extension, il s'ensuit qu'on peut appliquer à ces ensembles et aux X'_i la prop. de la p.4, de sorte que $f\circ g$ est bien homotope à l'application identique.

IV. Espaces fibrés.

[N.B.- La terminologie américaine sur ce sujet est assez confuse, avec la distinction entre "fibre-spaces" (espace admettant une application fibroïde dans un autre, au sens de la p.6), et "fibre-bundles" (espaces fibrés proprement dits), avec des distinctions subtiles entre les diverses définitions possibles pour ceux-ci .

[N.B. 2. Le rapport qui suit fait largement usage d'un cours de Steenrod] .

Soient G un groupe topologique, F un espace topologique sur lequel opère G (autrement dit : on se donne une application continue, notée $(s,u) \to su$, de $G \times F$ dans F , telle que $s(tu) = (st)u$, et $eu = u$ quel que soit $u \in F$ si e est l'élément neutre de G ; ce qui entraîne que $u \to su$ est un homéomorphisme de F sur F quel que soit $s \in G$) ; on suppose que G opère simplement (nch) sur F ($u \to su$ n'est l'application identique de F sur F que si $s=e$), ce qui permet d'identifier tout $s \in G$ avec l'application $u \to su$ de F sur F . Sur les espaces F' homéomorphes à F , on considère l'espèce de structure (avec G, F comme ensembles auxiliaires) définie par la donnée d'une famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'homéomorphismes de F sur F', avec les axiomes : (Φ I) quels que soient $\alpha \in A$, $s \in G$, il existe un $\beta \in A$ tel que $\varphi_\beta = \varphi_\alpha \circ s$: on écrit alors $\beta = \alpha s$; (Φ II) quels que soient $\alpha, \beta \in A$, il existe un $s \in G$ tel que $\beta = \alpha s$. L'ensemble A se trouve alors muni, par la loi de composition $(s,\alpha) \to \alpha s$, d'une structure d'espace homogène pour G , isomorphe à l'espace de groupe de G considéré comme espace homogène par rapport aux translations à droite ;

23

Cartan éclaircira tout ça
(avec le même contenu)

on munira aussi A , par transport de structure, de la topologie pour laquelle $s \to \alpha s$ est, pour tout α fixe, un homéomorphisme de G sur A . L'espèce de structure ainsi définie sur F' s'appellera <u>structure de fibre d'espèce</u> (G,F), ou pour abréger structure (G,F). Un <u>automorphisme</u> pour cette structure sera un homéomorphisme ψ de F' sur F' qui détermine une application biunivoque $\alpha \to \alpha'$ de A sur A telle que $\psi \circ \varphi_\alpha = \varphi_{\alpha'}$; si alors, pour un α_0 arbitrairement choisi dans A , on prend s tel que $\alpha'_0 = \alpha_0 s$, on aura $\psi = \varphi_{\alpha_0} \circ s \circ \varphi_{\alpha_0}^{-1}$, et réciproquement cette formule définit, quel que soit s G , un automorphisme ψ de la structure (G,F) donnée sur F' ; ces automorphismes forment donc un groupe, algébriquement isomorphe à G , auquel on peut de plus transporter la structure topologique de G. (N B. il n'y a pas d'isomorphisme canonique de G sur ce groupe à moins que G ne soit abélien, l'isomorphisme $s \to \varphi_\alpha \circ s \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dépendant de α et n'étant déterminé qu'à un automorphisme intérieur près de G).

A étant considéré comme muni de sa structure d'espace homogène pour G , comme il a été dit, définissons, sur $A \times F$, une relation d'équivalence $(\alpha',u') \equiv (\alpha,u)$ comme la relation équivalente à "il existe $s \in G$ tel que $\alpha' = \alpha s^{-1}$ et $u' = su$ " . Alors $(\alpha,u) \to \varphi_\alpha(u)$ est une application de $A \times F$ sur F', constante sur les classes d'équivalence pour la relation $\equiv$, et est donc composée de l'application canonique de $A \times F$ sur l'espace quotient de $A \times F$ par la relation $\equiv$, et d'une application de celui-ci sur F' ; cette dernière est d'ailleurs biunivoque, comme on le vérifie aussitôt, et continue [il suffit de vérifier que $(\alpha,u) \to \varphi_\alpha(u)$ est continue ; or, choisissant α_0 fixe, et écrivant $\alpha = \alpha_0 s$, cela s'écrit $(\alpha_0 s,u) \to \varphi_{\alpha_0}(su)$, d'où l'assertion, du fait que $(s,u) \to su$ est continue et que $s \to \alpha_0 s$ et $u \to \varphi_{\alpha_0}(u)$ sont des homéomorphismes]; elle est même bicontinue [sinon, en transportant à F' la topologie de l'espace quotient en question, on aurait une topologie $\mathcal{C}_q$ strictement plus fine que la topologie $\mathcal{C}$ donnée sur F', et qui rendrait encore $(\alpha,u) \to \varphi_\alpha(u)$ continue ; pour α_0 fixe, elle rendrait donc $u \to \varphi_{\alpha_0}(u)$ continue, ce qui n'est possible que si $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}_q$ puisque φ_{α_0} est un homéomorphisme de F sur F']. Il s'ensuit qu'on peut identifier F' avec l'espace quotient de $A \times F$ par la relation $\equiv$, et $(\alpha,u) \to \varphi_\alpha(u)$ avec l'application canonique de $A \times F$ sur ce quotient. Réciproquement, soit A un espace homogène pour G, isomorphe à l'espace des translations à droite de G (c'est-à-dire que G opère sur A au moyen d'une loi $(\alpha,s) \to \alpha s$, de telle sorte que $s \to \alpha s$ soit, pour α fixe, un homéomorphisme de G sur A, et qu'il existe, quels que soient $\alpha,\beta \in A$, un $s \in G$ et un seul tel que $\beta = \alpha s$). Soit alors $\equiv$ la relation définie comme ci-dessus sur $A \times F$, et soit F' l'espace quotient de $A \times F$ par cette relation ; si $\varphi(\alpha,u)$ est l'application canonique de $A \times F$ sur F', on vérifie facilement qu'en posant $\varphi_\alpha(u) = \varphi(\alpha,u)$, on a une famille d'homéomorphismes de F sur F' satisfaisant aux axiomes (Φ I-II), et qu'on a ainsi défini sur F' une structure (G,F). Lorsqu'il s'agit de l'ensemble F lui-même, on pourra prendre $A = G$, $\varphi_s(u) = su$, et identifier F comme il vient d'être expliqué avec un espace quotient de $G \times F$.

Ce qui précède peut être fait plus simplement dans le cas (fréquent) où F est un espace homogène, $F = G/g$, défini au moyen de G et d'un sous-groupe fermé g (ne contenant aucun sous-groupe distingué de G, autre que $\{e\}$, afin que G opère simplement sur F). Les notations étant toujours comme ci-dessus, notons, pour $\alpha \in A$, αg l'ensemble des éléments $\alpha\sigma$ de A pour $\sigma \in g$; ce sont les classes d'équivalence dans A pour la relation "il existe $\sigma \in g$ tel que $\alpha' = \alpha\sigma$", et on peut les considérer comme les points de l'espace quotient A' de A par cette relation, espace qui est évidemment homéomorphe à F. Considérons l'application

Considérons l'application $(a,xg) \longrightarrow axg$ de $A\times F$ sur A' : on voit facilement que les images réciproques des points de A' pour cette application ne sont autres que les classes d'équivalence dans $A\times F$ pour la relation $\equiv$, donc que cette application détermine une correspondance biunivoque entre A' et le quotient F' de $A\times F$ par $\equiv$, puis que cette correspondance est un homéomorphisme, de sorte qu'on peut identifier (canoniquement) ces espaces l'un avec l'autre. Autrement dit, on peut aussi considérer F' comme espace quotient de A par la relation $ag = a'g$ [ce qui permet, lorsqu'on opère sur des espaces homogènes, de se passer de la considération de produits tels que $A\times F$]. En particulier, si $g = \{e\}$, c'est-à dire si F est l'espace de groupe de G pour les translations à gauche, on peut identifier F' et A.

Soit alors, d'une manière générale, $\mathcal{S}$ une espèce de structure telle que tous les espaces possédant une structure de cette espèce soient homéomorphes entre eux [la restriction aux espaces topologiques n'est qu'apparente : si $\mathcal{S}$ ne comporte pas de topologie, on devra supposer $\mathcal{S}$ telle que tous les ensembles de structure $\mathcal{S}$ soient équipotents, et on mettra sur eux, soit la topologie discrète, soit toute autre qui puisse être associée à $\mathcal{S}$ d'une manière invariante]. Soit F un espace de structure $\mathcal{S}$, donné une fois pour toutes ; soit G son groupe d'automorphismes ; on munira G d'une topologie associée d'une manière invariante à la structure $\mathcal{S}$, et telle que, si su est le transformé de $u\in F$ par $s\in G$, $(s,u) \longrightarrow su$ soit une application continue de $G\times F$ dans F [le plus souvent, F sera localement compact, de sorte qu'on pourra prendre sur G la topologie de la convergence compacte, ou toute autre plus fine]. Alors, sur tout espace F' de structure $\mathcal{S}$, on définira une structure (G,F) au moyen de la famille de <u>tous</u> les isomorphismes de F sur F' (pour la structure $\mathcal{S}$).

Exemples : a) structure d'espace vectoriel à n dimensions sur les réels ; on peut prendre pour F l'espace numérique R^n , et G est le groupe linéaire à n variables, avec sa topologie habituelle ; b) structure de sphère orientée à n-1 dimensions ; on prendra pour F la sphère de rayon 1 dans R^n (pour la distance euclidienne), avec orientation positive ; G sera le groupe orthogonal à n variables.

<u>Opérations sur les fibres</u>. 1) Soient G et F comme ci-dessus ; soit g un sous-groupe de G ; g pourra être considéré comme opérant sur F, de sorte qu'à côté de la structure (G,F), il y a lieu de considérer une structure (g,F). Supposons donc d'abord donnée, sur un espace F', une structure (g,F) définie par une famille d'homéomorphismes (φ_λ) de F sur F' ; il est facile alors de voir que l'ensemble des homéomorphismes de la forme $\varphi_\lambda \circ s$, avec $s \in G$, définit sur F' une structure (G,F), qui sera dite dérivée de la structure (g,F) donnée. En revanche, si on se donne sur F' une structure (G,F), au moyen d'une famille d'homéomorphismes $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, on peut seulement dire que, pour tout $\alpha \in A$, la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \alpha g}$ détermine sur F' une structure (g,F), dont la structure (G,F) donnée est la structure dérivée ; ces structures sont donc en correspondance biunivoque avec les parties de A de la forme αg .

2) D'une famille de structures (G_ι , F_ι), on déduit d'une manière évidente une structure $(\prod_\iota G_\iota , \prod_\iota F_\iota)$, dite <u>produit</u> des précédentes.

<u>Espaces fibrés</u>. Dans ce qui suit, on considèrera l'espèce de structure comportant la donnée, sur un ensemble E : a) d'une topologie ; b) d'une relation d'équivalence dans E : le quotient B de E par cette relation sera appelé l'<u>espace de base</u> (ou la <u>base</u>), l'application canonique π de E sur B sera la <u>projection</u> de E sur B , et les classes d'équivalence $F_u = \overset{-1}{\pi}(u)$, pour $u \in B$, seront les <u>fibres</u> (homéomorphes) ; c) sur chaque fibre F_u , d'une structure (G,F), définie comme il a été dit ci-dessus

au moyen d'une famille d'homéomorphismes de F sur F_u . Une telle structure, satisfaisant éventuellement (en fait, toujours, pour les raisons qu'on va voir) à des axiomes supplémentaires, sera appelée structure <u>fibriforme</u> (G,F), et E sera dit espace fibriforme (G,F). L'isomorphisme de tels espaces se définit de la manière habituelle ; et un tel isomorphisme, entre espaces E, E' , induit un homéomorphisme entre leurs explicita bases B, B'. Mais on peut aussi renforcer la structure en supposant la base donnée à l'avance ; un isomorphisme pour cette structure, entre deux espaces E,E' de même base B (ou encore dont les bases ont été identifiées par un homéomorphisme donné), est donc un isomorphisme de structure fibriforme (G,F) qui induit sur la base B commune à E , E' l'homéomorphisme identique.

Les notations étant comme ci-dessus, considérons, pour chaque $t \in B$, la famille d'homéomorphismes de F sur F_t qui en détermine la structure comme une partie A_t de l'ensemble H de tous les homéomorphismes de F dans E ; soit $\overline{E} = \bigcup_{t \in B} A_t$. Si $s \in G$, $\varphi \rightarrow \varphi \circ s$ est une application de $\overline{E}$ sur $\overline{E}$, qui ne laisse invariant aucun élément de $\overline{E}$ si $s \neq e$: G se trouve ainsi représenté comme groupe de transformations, sans point fixe, de $\overline{E}$ en lui-même. De plus, il résulte de ce qui précède que $(\varphi,u) \rightarrow \varphi(u)$ est une application de $\overline{E} \times F$ sur E , et qu'on a $\varphi(u) = \varphi'(u')$ lorsqu'il existe $s \in G$ tel que $\varphi' = \varphi \circ s^{-1}$, $u' = su$, et dans ce cas seulement ; autrement dit, l'application en question détermine (canoniquement) une correspondance biunivoque entre E et le quotient de $\overline{E} \times F$ par la relation d'équivalence en question. On dira que $\overline{E}$ est l'ensemble <u>principal</u> associé à l'espace fibriforme E .

Si g est un sous-groupe de G , on peut, comme il a été dit, déduire, de toute structure fibriforme (g,F), une structure (G,F), dite <u>dérivée</u> de la précédente, avec la même base et les mêmes fibres.

29

prg (ouvert) = ouvert

En particulier, sur le produit $B \times F$, on pourra considérer la structure $(\{e\},F)$ définie par les homéomorphismes $u \to (t,u)$ de F sur les fibres $\{t\} \times F$, et la structure (G,F) qui en est dérivée, et qui est définie par les familles d'homéomorphismes $u \to (t,su)$, pour $s \in G$; cet espace est de base B ; tout espace isomorphe à un tel espace sera dit <u>trivial</u>. On voit immédiatement qu'un espace trivial, de base B, est B-isomorphe à $B \times F$ (ou encore : deux espaces triviaux, de même base B, sont B-isomorphes).

Soit E' une réunion de fibres de E fibriforme, ou, ce qui revient au même, une partie de E de la forme $E' = \overset{-1}{\pi}(B')$, avec $B' \subset B$; E' se trouve muni, d'une manière évidente, d'une structure fibriforme, dite <u>induite</u> par celle de E ; mais, pour qu'on puisse affirmer que E' a pour base B', il faut que la condition qui résulte de Top.Gén.chap.I, p.55, prop.2, soit satisfaite ; il en sera ainsi en particulier si B' est, soit ouvert, soit fermé, dans B, ou bien encore (Top.Gén.chap.I, p. 58, ex.7), si E satisfait à l'axiome suivant :

(F 1) La relation d'équivalence qui appartient à la structure fibriforme de E est ouverte.

Cet axiome sera d'ailleurs satisfait de lui-même si E satisfait à l'axiome suivant :

(F 2) Tout point de la base B de E a dans B un voisinage ouvert U tel que l'espace $\overset{-1}{\pi}(U)$ soit trivial (ce qu'on peut exprimer en disant que E est "localement trivial").

[En effet : F 1 signifie que, si W est ouvert dans E, $\pi(W)$ est ouvert dans B. Soit $x \in W$; soit U un voisinage ouvert de $\pi(x)$ dans B, tel que $\overset{-1}{\pi}(U)$ soit trivial ; $\overset{-1}{\pi}(U)$, étant de base U puisque U est ouvert, est donc U-isomorphe à $U \times F$. Soit $W' = W \cap \overset{-1}{\pi}(U)$; W' est ouvert dans $\overset{-1}{\pi}(U)$, donc $\pi(W')$ est (en vertu de l'isomorphisme avec $U \times F$)

31

Image réciproque.

f "se prolonge" à E

(et de manière unique!)

ouvert dans U ; c'est donc un voisinage de x dans B , qui est contenu dans $\pi(W)$] .

Il n'y a pas grand'chose à tirer de la notion d'espace fibriforme si on n'impose pas d'axiome supplémentaire (on s'en rend compte p.ex. en examinant le cas où G est réduit à son élément neutre). On va d'abord examiner des conséquences de (F 1). Si E satisfait à (F 1), il en est de même de toute structure induite par celle de E ; ~~il en est de même de toute structure induite par celle de E~~ ; il en est de même aussi, X étant un espace quelconque, de l'espace $X \times E$ avec la structure fibriforme évidente, et cet espace a la base $X \times B$ (d'après les rectifications à Top.Gén.chap.I, p. 56-57). Plus généralement, soit f une application continue dans B d'un espace B' ; considérons, comme il vient d'être dit, $B' \times E$ comme espace fibriforme de base $B' \times B$, et soit $\overline{\omega}$ la projection de $B' \times E$ sur la base, définie par $\overline{\omega}(v,x) = (v,\pi(x))$. Soit Γ_f le graphe de f dans $B' \times B$, et soit $E' = \overset{-1}{\overline{\omega}}(\Gamma_f)$; la structure fibriforme de $B' \times E$ induit sur E' une structure fibriforme, dont la base Γ_f peut être identifiée avec B' au moyen de l'homéomorphisme $(v,f(v)) \longleftrightarrow v$. L'espace fibriforme E' , de base B', ainsi défini, sera appelé l'<u>image réciproque</u> de E par l'application f , et sera noté $\overset{-1}{f}(E)$ (notation provisoire !). En particulier, si $B' \subset B$, et si f est l'application identique de B' dans B , cet espace n'est autre que l'espace $\overset{-1}{\pi}(B')$ muni de la structure induite par celle de E .

On définira d'autre part le <u>produit</u> comme suit. Soit d'abord (E_ι) une famille d'espaces fibriformes, respectivement munis de structures (G_ι, F_ι), de bases B_ι ; on définit de manière évidente le produit $\prod_\iota E_\iota$ comme un espace de structure $(\prod_\iota G_\iota , \prod_\iota F_\iota)$, qui sera de base $\prod_\iota B_\iota$ si les E_ι satisfont à (F 1) (Rectific. à Top.Gén.chap.I : à compléter pour le cas des produits infinis !). Cela étant, supposons que les E_ι aient même base B ; soit f l'application définie par $f(t) = (t_\iota)$, $t_\iota = t$

33

Parler des clés aux variétés différentiables (?)

fibre space = avec app. fibroïde

fibre bundle = fibré propre

quel que soit ι, de B sur la "diagonale" du produit $\prod B_\iota = B^I$; l'image réciproque de l'espace $\prod E_\iota$, de structure $(\prod G_\iota, \prod F_\iota)$, par f , ~~xxx~~ sera un espace de structure $(\prod G_\iota, \prod F_\iota)$, ayant même base B que les E_ι, qui sera dit le <u>produit fibriforme</u> des E_ι.

Comme on a vu, si on prend pour F l'espace homogène G_s (espace de groupe par rapport aux translations à gauche), la structure de fibre $(G,F) = (G,G_s)$ n'est autre qu'une structure d'espace homogène isomorphe à l'espace du groupe G par rapport aux translations à droite. Il s'ensuit que, si E est un espace fibriforme de structure (G,G_s), on peut considérer que les éléments de G opèrent à droite sur chacune des fibres de E (on peut dire aussi que E est en correspondance biunivoque avec son "ensemble principal"). Si donc on note xs le transformé de $x \in E$ par $s \in G$, nos définitions entraînent :

(FP 1) Pour chaque $x \in E$, $s \to xs$ est un homéomorphisme de G dans E .

Naturellement ces notions n'auraient pas grand intérêt si on ne posait aussi l'axiome suivant :

(FP 2) $(x,s) \to xs$ est une application continue de $E \times G$ sur E .

Cet axiome entraîne d'ailleurs (F 1) (Top.Gén.chap.I, p.58, ex. 5). Un espace ayant ces propriétés sera dit <u>espace fibré principal</u> de groupe G ; il sera dit <u>propre</u> s'il satisfait de plus à (F 2) (seuls les espaces propres sont qualifiés de "fibrés" dans la terminologie en usage ; la terminologie proposée ici est provisoire, et destinée à une analyse plus exacte des structures, après quoi on pourra voir s'il convient ou non de revenir à la terminologie actuelle). Un espace sera donc fibré principal si G opère sur lui de manière à satisfaire à (FP 1-2) ; les fibres seront les <u>trajectoires</u> des points de E (ensemble des transformés d'un même point par G).

E | fibre G.

E | fibre F
même base que E

Ztucs | Espace fibré ⟹ ensemble fibré principal
Espace fibré princ ⟹ espace fibré part.

Si G a la topol. de la convergence compacte (p. r. à F) (p. ex si G est compact), alors $\bar{E}$ (fibriforme étant donné), alors $\bar{E}$ peut être muni de la topol. de la conv. compacte.

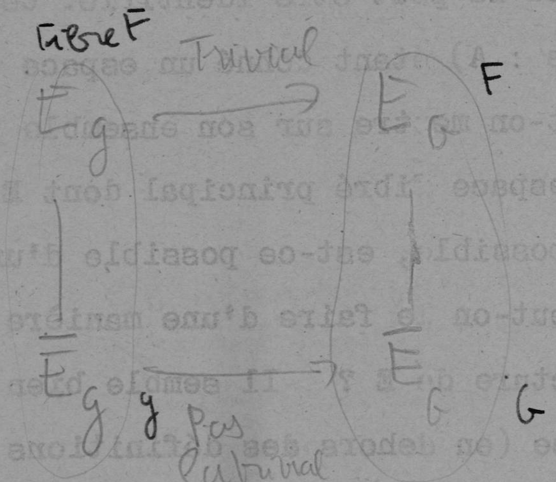
Mais ça n'est pas le cas dans les revêtements

On commencera par les principaux

 (Copier simplement, c'est essentiel)

Soit $\overline{E}$ un espace fibré principal, de groupe G ; soit F , comme toujours, un espace sur lequel G opère (à gauche). Considérons l'espace E quotient de $\overline{E} \times F$ par la relation d'équivalence $(z,u) \equiv (z',u')$ définie par "il existe $s \in G$ tel que $z' = zs^{-1}$, $u' = su$ ". En tenant compte de ce qui précède, on voit aussitôt qu'on peut considérer E comme espace fibriforme (G,F), ayant même base que $\overline{E}$, et satisfaisant à (F 1) ; de plus E satisfera à (F 2) si $\overline{E}$ y satisfait, c'est-à-dire si $\overline{E}$ est propre. Cet espace E , de structure (G,F), sera dit <u>associé</u> à l'espace principal $\overline{E}$; d'ailleurs $\overline{E}$ se trouve en correspondance biunivoque avec l'"ensemble principal" de E , auquel il peut être identifié. Ceci amène à se poser les questions suivantes : A) étant donné un espace fibriforme E , sous quelles conditions peut-on mettre sur son <u>ensemble</u> principal $\overline{E}$ une topologie qui en fasse un espace fibré principal dont E soit l'espace associé ? B) quand c'est possible, est-ce possible d'une seule manière ? C) ou tout au moins, peut-on le faire d'une manière qui soit canoniquement déterminée par la structure de E ? Il semble bien d'ailleurs qu'on ne puisse faire grand'chose (en dehors des définitions générales données plus haut) d'espaces fibriformes qui ne soient pas associés d'une manière bien déterminée à un espace principal. Commençons donc par poser la définition suivante :

On dira que E est <u>espace fibré</u> (G,F) si E est donné comme espace (G,F) associé à un espace fibré principal $\overline{E}$ de groupe G ; E sera dit <u>propre</u> si $\overline{E}$ est propre. [Les espaces fibrés propres sont les "fibre-bundles" des auteurs américains] . Une structure d'espace fibré comporte donc automatiquement une structure d'espace fibriforme, satisfaisant à (F 1). Quant à la réciproque (associer d'une manière invariante, à une structure fibriforme donnée, une structure fibrée), elle ne vas pas sans conditions restrictives (comme on peut voir dans le cas où G se réduit


Fibre F
Trivial
E
g
F
E
G
E
g
g
pas
trivial
E
G
G

à l'élément neutre) ; le rapporteur n'a rien pu trouver là-dessus de plus général que ce qui suit (Steenrod, loc.cit.), qui suffit pour la plupart des applications :

Soit F localement compact, et G (considéré comme ensemble d'applications de F dans F) muni de la topologie de la convergence compacte ; soit E fibriforme (G,F), et satisfaisant à (F 2). Alors on définit sur E une structure d'espace fibré propre en mettant sur son ensemble principal $\overline{E}$, considéré comme ensemble d'applications de F dans E , la topologie de la convergence compacte.

On étendra comme suit, aux espaces fibrés, les opérations définies plus haut pour les fibriformes (et on voit facilement que, si on les applique à des espaces propres, elles définissent des espaces propres) : a) c'est immédiat pour la structure induite, et plus généralement pour l'image réciproque ; b) c'est immédiat aussi pour le produit fibriforme (qu'on pourra appeler "produit fibré") ; c) soit, comme plus haut, g sous-groupe fermé de G ; soit E un espace fibré (g,F), avec l'espace principal $\overline{E}_g$; si E est considéré comme espace fibriforme, on peut le munir d'une structure dérivée (G,F) ; on vérifie alors que celle-ci peut être considérée comme structure fibrée (G,F), avec l'espace principal $\overline{E}_G$ construit comme suit. On peut considérer g comme opérant à gauche sur G , ce qui définit une structure de fibre (g,G). Considérons l'espace fibré E', de structure (g,G), associé à l'espace principal $\overline{E}_g$; c'est le quotient de $\overline{E}_g \times G$ par la relation entre éléments (z,s) , (z',s') de ce produit définie par "il existe $\sigma \in g$ tel que $z'=z\sigma^{-1}$, $s' = \sigma's$ " ; sur E', mettons la structure fibriforme (G,G_s) dérivée de sa structure (g,G) ; cela en fait un espace fibré principal, de groupe G , qui est l'espace $\overline{E}_G$ en question. On dira que la structure fibrée (G,F) ainsi définie sur E est dérivée de la structure fibrée (g,F)

Si $F = G/g$, on obtient l'é.f. principal très simplement (par quotient)

Samuel

qui y était donnée. On observera que $\overline{E}_g \times g$ est une partie fermée de $\overline{E}_g \times G$, saturée par la relation d'équivalence définie ci-dessus dans ce dernier espace ; comme celle-ci est ouverte (Top.Gén.chap.I, p.58,ex.5), il s'ensuit (ibid.,ex.7) que son image dans $\overline{E}_G$ peut être identifiée au quotient de $\overline{E}_g \times g$ par la relation d'équivalence induite, qui, entre éléments (z,σ), (z',σ') de ce produit, s'écrit $z\sigma'=z'\sigma'$; mais $(z,\sigma) \longrightarrow (z\sigma',\sigma)$ est un homéomorphisme de cet espace sur lui-même, de sorte qu'en définitive le quotient en question peut être identifié à $\overline{E}_g$. Il s'ensuit que $\overline{E}_g$ peut être considéré comme canoniquement plongé dans $\overline{E}_G$, que c'est une partie fermée de $\overline{E}_G$, et que chaque fibre de $\overline{E}_G$ contient une fibre et une seule de $\overline{E}_g$. De plus, soit φ l'application canonique de G sur G/g ; soit w un point de $\overline{E}_G$, c'est-à-dire une classe d'éléments (z,s) de $E_g \times G$ par rapport à la relation définie plus haut ; $f_1(z,s) = \varphi(s^{-1})$ est une fonction continue sur $\overline{E}_g \times G$, constante sur les classes en question, et détermine donc une application continue $f(w)$ de l'espace quotient $\overline{E}_G$ dans l'espace homogène G/g ; et on vérifie aussitôt qu'on a $f(wt) = t^{-1}f(w)$ quel que soit $t \in G$. Considérons de plus l'espace fibré H, de structure $(G,G/g)$, associé à $\overline{E}_G$; il peut être considéré comme quotient de $\overline{E}_G \times (G/g)$ par la relation "il existe $s \in G$ tel que $w'=ws^{-1}$, $P' = sP$" ; soit Ψ l'application canonique de $\overline{E}_G \times (G/g)$ sur H ; dans ces conditions, la fonction $h_1(w)= \Psi(w,f(w))$ est une application continue de $\overline{E}_G$ dans H, constante sur les fibres de $\overline{E}_G$; elle détermine donc une application continue h de la base B de $\overline{E}_G$ (qui est aussi la base de $\overline{E}_g$, et de H), dans H. De plus, on vérifie aussitôt que, si π est la projection de H sur B, $\pi \circ h$ est l'application identique de B sur B.

Si, en général, H est un espace fibré, de base B, π sa projection sur B, et h une application continue de B dans H telle que $\pi \circ h$ soit

Détrivialisation = existence d'une section dans H

$$\begin{tikzcd}
E(g,F) \arrow[r] \arrow[d] & E(G,F) \arrow[d] \\
E_g \arrow[r, phantom, "\subset"] & E_G \arrow[d] \\
 & H \text{ (par quotient } G/g\text{)}
\end{tikzcd}$$

l'application identique, on dira que $h(B)$ est une <u>section</u> de H ; la connaissance de cet ensemble détermine complètement h , puisque, si $b \in B$, on a $h(B) \cap \overset{-1}{\pi}(\{b\}) = \{h(b)\}$.

Réciproquement, supposons donnés un espace fibré principal $\overline{E}_G$ de groupe G , et une application continue f de cet espace dans G/g , satisfaisant à $f(wt) = t^{-1}f(w)$. On peut en déduire comme ci-dessus une section de l'espace fibré associé H , de structure $(G,G/g)$. Soit d'autre part $\overline{E}_g$ l'ensemble des points ws de $\overline{E}_G$, où w et s satisfont à la condition $\varphi(s) = f(w)$; il est immédiat que $\overline{E}_G$, où w et s satisfont à la condition $\varphi(s) = f(w)$; il est immédiat que $\overline{E}_g$ est transformé en lui-même par le groupe g , considéré comme opérant sur $\overline{E}_G$, et que chaque trajectoire dans $\overline{E}_G$ (par rapport à G) contient une trajectoire et une seule de $\overline{E}_g$ (par rapport à g) ; $\overline{E}_g$ peut donc être considéré comme espace fibré principal, de groupe g . Pour montrer que $\overline{E}_G$ peut être identifié avec l'espace fibré principal, de groupe G , dérivé de $\overline{E}_g$, il faut montrer que l'application $(z,s) \longrightarrow zs$ de $\overline{E}_g \times G$ sur $\overline{E}_G$ détermine un homéomorphisme sur $\overline{E}_G$ du quotient de $\overline{E}_g \times G$ par la relation d'équivalence correspondante ; et il suffit de montrer que cette application est ouverte (transforme tout ouvert en un ouvert). Or un calcul simple montre que c'est là une conséquence de la continuité de $f(w)$. Ce qui précède montre même que les structures d'espace fibré (g,G) qu'on peut mettre sur $\overline{E}_G$ de manière que la structure donnée de $\overline{E}_G$ en soit la structure dérivée sont en correspondance biunivoque avec les applications continues f de cet espace dans G/g qui satisfont à $f(wt)=t^{-1}f(w)$. Pour que ces structures soient en correspondance biunivoque avec les sections de l'espace fibré associé H , de structure $(G,G/g)$ (théorème d'Ehresmann), il faut que toute section de H détermine comme ci-dessus une application f . Cela s'exprime aussi comme suit : soit h_1 une application continue de $\overline{E}_G$ dans H , constante sur les fibres de $\overline{E}_G$, et telle que $\pi \circ h_1$ ne soit autre que la projection de $\overline{E}_G$ sur sa base B ; alors la relation $h_1(w) = \psi(w, f(w))$ détermine une application f de $\overline{E}_G$ dans G/g , satisfaisant à $f(wt) = t^{-1}f(w)$, et il faut que la continuité de h_1 entraîne celle de f . Il en sera ainsi chaque fois que $\overline{E}_G$ satisfait à la condition suivante (évidemment satisfaite par les espaces propres) :

(FP 3) Soit R l'ensemble des points $(w,w') \in \overline{E}_G \times \overline{E}_G$ tels qu'il existe $s = s(w,w') \in G$ pour lequel $w' = ws$. Alors $s(w,w')$ est une fonction continue sur R (à valeurs dans G) .

[N B. Ce qui précède s'étend facilement au problème suivant : E étant espace fibré (G,F), de base B , soit A une partie fermée de B ; supposons donnée, sur l'image réciproque de A dans E , une structure (g,F) dont la structure induite par celle de E soit la structure dérivée ; on demande de la prolonger à une structure (g,F) dans E dont la structure donnée soit la structure dérivée. Si l'espace est propre, ou plus généralement si l'espace principal de E satisfait à (FP 3), on a la généralisation du théorème d'Ehresmann : soient de nouveau H l'espace (G,G/g) associé à E , et π sa projection sur B ; alors les structures cherchées sont en correspondance biunivoque avec les sections de H qui prolongent une section donnée de $\overset{-1}{\pi}(A)$] .

Si, dans ce qui précède, on prend $g = \{e\}$, on obtient des conditions pour qu'un espace fibré soit trivial. Pour que l'espace fibré principal E , de groupe G , soit trivial, il faut et il suffit qu'il existe une application continue f de E dans G , telle que $f(ws) = f(w)s$ quels que soient $w \in E$, $s \in G$; il s'ensuit que, s'il existe une application continue F de E dans un espace fibré principal <u>propre</u> E' de groupe G , telle que $F(ws) = F(w)s$, E est propre. Si E satisfait à (FP 3), alors il faut

On peut le faire, sans théorie des groupes de Lie, pour ces groupes de matrices.

et il suffit, pour qu'il soit trivial, qu'il y existe une section (et, pour qu'il soit propre, qu'il y existe des "sections locales").

On va tirer de là le théorème de Gleason : G étant un groupe de Lie compact (connexe ou non), tout espace fibré principal E de groupe G est propre si c'est un espace normal. Soit $M(s)$ une représentation matricielle "fidèle" (biunivoque) de G . Si $F(w)$ est une application continue quelconque de E dans l'espace de toutes les matrices d'ordre n (n = ordre de $M(s)$), il est immédiat que $H(w) = \int F(ws)M(s^{-1})ds$ (intégrale prise au moyen de la mesure de Haar sur G) est continue, et qu'on a $H(wt)=H(w)M(t)$. Par normalité on peut prendre F telle qu'en un point $a \in E$ donné on ait $\det H(a) \neq 0$; comme $|\det H(w)|$ est une fonction numérique continue, constante sur les fibres de E , il y a donc un voisinage U de $\pi(a)$ dans B (B = base de E , π = projection de E sur B) tel que $\det H(w) \neq 0$ dans $\overset{-1}{\pi}(U)$, de sorte que $H(w)$ définit une application continue de $\overset{-1}{\pi}(U)$ dans le groupe Γ des matrices inversibles d'ordre n . Mais la théorie élémentaire des groupes de Lie montre que, si γ est un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie Γ , alors celui-ci, considéré comme espace fibré principal de groupe γ (les fibres étant les classes suivant γ) est propre. Si on prend pour γ l'image de G dans Γ par l'application $s \to M(s)$, le théorème de Gleason suit de là et de $H(wt) = H(w)M(t)$, par application des critères donnés plus haut. La même méthode est évidemment susceptible de donner d'autres théorèmes analogues (exemple : E localement compact, G sous-groupe fermé quelconque du groupe linéaire).

Cartes d'un espace fibré propre. Pour définir un espace fibré, il suffit évidemment de définir l'espace principal correspondant. Soit donc E un espace fibré principal propre, de groupe G , de base B . Par hypothèse il existe un recouvrement ouvert (U_ι) de B, tel que $\overset{-1}{\pi}(U_\iota)$ soit trivial quel que soit $\iota \in I$ (π étant la projection de E sur B) .

Pour chaque ι , soit donc f_ι un U_ι-isomorphisme de cet ensemble sur $U_\iota \times G$; si on pose $U_{\iota\varkappa} = U_\iota \cap U_\varkappa$, f_ι induit sur $\overset{-1}{\pi}(U_{\iota\varkappa})$ un $U_{\iota\varkappa}$-isomorphisme de cet ensemble sur $U_{\iota\varkappa} \times G$, et par suite $f_\iota \circ f_\varkappa^{-1}$ est un $U_{\iota\varkappa}$-automorphisme de $U_{\iota\varkappa} \times G$, donc nécessairement (comme on le voit aussitôt) de la forme $(x,s) \to (x, g_{\iota\varkappa}(x).s)$, où $g_{\iota\varkappa}$ est une application continue de $U_{\iota\varkappa}$ dans G ; et il est clair que, dans $U_{\iota\varkappa\lambda} = U_\iota \cap U_\varkappa \cap U_\lambda$, on a $g_{\iota\lambda} = g_{\iota\varkappa}\, g_{\varkappa\lambda}$. Réciproquement, supposons donnés un recouvrement ouvert (U_ι) d'un espace B , et, quels que soient ι , $\varkappa$, une application continue $g_{\iota\varkappa}$ de $U_\iota \cap U_\varkappa$ dans G , de telle sorte que $g_{\iota\lambda} = g_{\iota\varkappa}\, g_{\varkappa\lambda}$ dans $U_\iota \cap U_\varkappa \cap U_\lambda$ quels que soient ι ; $\varkappa$, λ (ce qui, pour $\iota = \varkappa = \lambda$, donne $g_{\iota\iota} = e$ dans U_ι , et, pour $\iota = \lambda$, $g_{\varkappa\iota} = g_{\iota\varkappa}^{-1}$ dans $U_\iota \cap U_\varkappa$). Soit X la somme topologique d'espaces X_ι respectivement isomorphes aux produits $U_\iota \times G$; soit φ_ι un isomorphisme de X_ι sur $U_\iota \times G$; dans X , on définit une relation d'équivalence en posant $z_\iota \sim z_\varkappa$ pour $z_\iota \in X_\iota$, $z_\varkappa \in X_\varkappa$, $\varphi_\iota(z_\iota) = (x,s)$, $\varphi_\varkappa(z_\varkappa) = (x,s')$, avec $x \in U_\iota \cap U_\varkappa$ et $s = g_{\iota\varkappa}(x)s'$. On voit immédiatement que le quotient de X par cette relation (c'est-à dire la somme des X_ι après "identification" des points équivalents) peut être considéré comme espace fibré principal E , de base B . De plus, pour que deux espaces E, E' ainsi définis au moyen d'un même recouvrement $(U\ )$ de B et de deux systèmes d'applications $(g_{\iota\varkappa})$, $(g'_{\iota\varkappa})$ des $U_{\iota\varkappa}$ dans G soient B-isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un système d'applications continues (h_ι) des U_ι dans G, tel que $g'_{\iota\varkappa} = h_\iota^{-1} g_{\iota\varkappa}\, h_\varkappa$ dans $U_{\iota\varkappa}$ quels que soient ι, $\varkappa$.

On observera que, si un espace fibré (principal ou non) E est propre, tout point b de sa base B a un voisinage U homéomorphe à une partie fermée de son image réciproque dans E . Si donc E est fibré propre, et s'il est séparé, resp. complètement régulier, resp. localement compac il en est de même de B ; si E est normal, tout point de B a un voisinage fermé normal ; etc.

Théorème fondamental. Ce théorème permet d'affirmer l'existence d'une section (dont une partie peut éventuellement être supposée donnée) dans un espace fibré propre dont la fibre possède la propriété d'extension ou d'autres propriétés analogues, et dont la base est soumise à certaines conditions. Il serait très désirable d'unifier les divers aspects de ce théorème, mais cela semble difficile pour l'instant. On considèrera, pour la fibre, les conditions suivantes :

(Ex I) Quels que soient X normal et A fermé dans X , toute application continue de A dans F peut être prolongée en une application continue de X dans F ("propriété d'extension" proprement dite).

(Ex II) Quels que soient X normal, A fermé dans X , et l'application continue f d'un voisinage de A dans F , il existe une application continue de X dans F qui coïncide avec f sur un voisinage de A (non nécessairement identique à celui sur lequel f est donnée) ["propriété d'extension ouverte", suivant une idée de Cartan]. Evidemment (Ex I) entraîne (Ex II).

(Ex III_n) Quel que soit le simplexe S de dimension $\leqslant n$, toute application continue de la frontière de S dans F peut être prolongée à S [n est, ou bien un entier $\geqslant 1$, ou bien ∞ ; cela revient à dire que F est connexe "pathwise" et que ses "groupes d'homotopie" $\pi_m(F)$ s'annulent pour $m \leqslant n-1$. Il en est naturellement ainsi, avec $n = \infty$, si F admet une "rétraction", c'est-à-dire si l'application identique de F sur F est homotope dans F à une application constante].

On peut aussi imaginer des variantes, p.ex. (Ex I) ou (Ex II) où on remplacerait l'hypothèse "X normal" par "X compact" .

Quant à la base B , elle sera supposée <u>normale</u> (il suffit en réalité que les parties fermées de B qui interviennent dans les démonstrations ci-dessous soient normales, de sorte qu'une hypothèse du genre de "B localement normal", ou encore "E normal", serait encore suffisante). Pour assurer la validité du théorème, il faut naturellement supposer des conditions d'autant plus restrictives pour B qu'elles le sont moins pour F . On va considérer les suivantes :

(B I) B est <u>paracompact</u> [i.e.: B est séparé, et tout recouvrement ouvert de B admet un recouvrement plus fin, localement fini; cf. Dieudonné, Liouville (IX) 23 (1944) p.65, et A.H. Stone, Bull. AMS 54 (1948) p.977]. Tout paracompact est normal ; tout métrisable est paracompact (Stone) ; tout localement compact, dénombrable à l'infini, est paracompact (D).

(B II) Tout recouvrement ouvert de B contient un recouvrement <u>dénombrable</u> [vérifié quand B est de base dénombrable, ou quand B est réunion dénombrable de compacts ; on observera que, s'il en est ainsi, et si (U_α) est un recouvrement ouvert quelconque de B , les ensembles ouverts V tels que $\bar{V}$ soit contenu dans un U_α forment un recouvrement de B , d'où on peut donc extraire un recouvrement dénombrable (V_i) ; et pour tout i il reste $\alpha(i)$ tel que $\bar{V}_i \subset U_{\alpha(i)}$] .

(B III_n) B est un complexe simplicial, formé de simplexes de dimension $\leqslant n$ [n est un entier $\geqslant 1$, ou bien ∞] .

Par une section, on entendra, suivant la commodité du langage, soit une application continue f de la base B dans l'espace fibré E , satisfaisant à la condition $\pi \circ f$ = application identique de B sur B (π est comme toujours la projection de E sur B), soit l'image f(B) de B par f ; de même pour une section définie sur une partie A de B (qui sera donc une section de $\overset{-1}{\pi}(A)$, avec la structure induite par celle de E) .

Soit donc E espace fibré <u>propre</u>, de fibre F , de base (normale) B ; on se donne une section s_0 sur une partie de B ; le théorème fondamental permet d'affirmer l'existence d'une section s de E, satisfaisant aux conditions indiquées ci-dessous dans chacun des cas suivants :

(I) on suppose que F satisfait à (Ex I), et B à (B I) ou bien à (B II) ; s_0 est donnée sur une partie fermée A de B ; on impose à s la condition de prolonger s_0 .

(II) F satisfait à (Ex II), et B à (B II) ; s_0 est donnée sur un voisinage d'une partie fermée A de B ; on impose à s la condition de coïncider avec s_0 sur A .

(III) F satisfait à (Ex III_n), et B à (B III_n) ; s_0 est donnée sur un sous-complexe A de B (réunion de simplexes fermés de B) ; on impose à s de prolonger s_0 .

Démonstration de (I) : si (B I) est satisfait, on peut l'appliquer à un recouvrement ouvert de B par des U_ι tels que les $\overset{-1}{\pi}(U\ )$ soient triviaux (E étant propre) ; d'où un recouvrement analogue, localement fini, puis, par normalité, l'existence d'un recouvrement $(\overline{V}_\iota)$ localement fini, par des ensembles fermés $\overline{V}_\iota$ tels que les $\overset{-1}{\pi}(\overline{V}_\iota)$ soient triviaux. Pour $J \subset I$, soit $A_J = A \cup \bigcup_{\iota \in J} \overline{V}_\iota$; A_J est fermé (parce que $(\overline{V}_\iota)$ est localement fini). Pour chaque J , on considère les sections de $\overset{-1}{\pi}(A_J)$, s'il en existe, qui coïncident avec s_0 sur A ; il est immédiat qu'on peut Zornifier, d'où l'existence d'une telle section maximale ; d'autre part, si $\overline{V}_\iota \not\subset A_J$, on peut étendre une section de $\overset{-1}{\pi}(A_J)$, coïncidant avec s_0 sur A , à une section de $\overset{-1}{\pi}(A_J \cup \overline{V}_\iota)$, au moyen d'un $\overline{V}_\iota$-isomorphisme entre $\overset{-1}{\pi}(\overline{V}_\iota)$ et $\overline{V}_\iota \times F$, et en vertu de la propriété d'extension de F ; d'où la conclusion. Si (B II) est satisfait, alors, d'après la remarque qui suit l'énoncé de (B II), il existe un recouvrement dénombrable ouvert $(V_i)_{i \in N}$ de B , tel que chaque $\overline{V}_i$ ait un voisinage U_i pour lequel $\overset{-1}{\pi}(U_i)$ soit trivial ; on posera alors $A_n = A \cup \bigcup_{0\leqslant i\leqslant n} \overline{V}_i$, et on définira, par récurrence ordinaire sur n , une section s_n sur A_n qui coïncide avec s_{n-1} sur A_{n-1} (donc avec s_o sur $A_o=A$) .

Pour (II), supposons les U_i, V_i, A_n définis comme plus haut. On définira par récurrence une section s_n d'un ensemble $\overset{-1}{\pi}(W_n)$, où W_n est un voisinage de A_n , de telle sorte qu'il existe pour tout n un voisinage W'_n de A_n sur lequel s_{n+1} coïncide avec s_n . Supposons s_n construit. Identifions $\overset{-1}{\pi}(U_n)$ avec $U_n \times F$ au moyen d'un U_n-isomorphisme arbitraire ; dans $\overset{-1}{\pi}(U_n \cap W_n)$, s_n sera représenté par une équation $u=f(w)$, où f est une application continue de $U_n \cap W_n$ dans F . Soit U' un voisinage de $\overline{V}_n$, tel que $\overline{U}' \subset U_n$; soit f' une application continue de $\overline{U}'$ dans F , qui coïncide avec f sur un voisinage de $A_n \cap \overline{U}'$ (relativement à $\overline{U}'$), voisinage qu'on peut écrire $\overline{U}' \cap W'$, où W' est un voisinage de $A_n \cap \overline{U}'$ dans B . Posons $W'_n = W_n \cap (W' \cup \complement\, \overline{U}')$; c'est un voisinage de A_n , et on a $\overline{U}' \cap W' = \overline{U}' \cap W'_n$. Alors on définira s_{n+1} sur $W_{n+1} = W'_n \cup U'$ comme la section de $\overset{-1}{\pi}(W_{n+1})$ qui coïncide avec s_n sur W'_n , et qui est définie sur U' par $u = f'(w)$. La section s de E, dont on veut démontrer l'existence, sera alors définie par la condition de coïncider avec s_n sur A_n quel que soit n . On observera que, si le recouvrement (V_i) est fini, s coïncidera avec s_o , non seulement sur A , mais sur un voisinage de A ; on pourra donc toujours supposer qu'il en est ainsi chaque fois que B est compact.

Quant à (III), on construira les sections, par récurrence sur m , sur $A \cup B_m$, où B_m est le "squelette à m dimensions" de B (réunion des simplexes de B de dimension $\leqslant m$) ; mais il faut pour cela utiliser le théorème (qui va être démontré un peu plus loin) que tout espace fibré propre dont la base est un simplexe (ouvert ou fermé) est trivial;

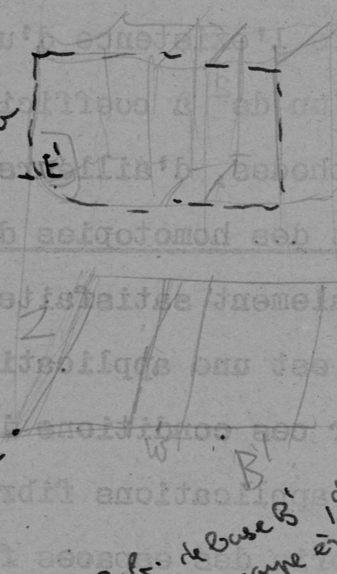
ou bien encore, si B est star-fini, on fait une subdivision de B assez fine pour que l'image réciproque de chaque simplexe de la nouvelle subdivision soit triviale.

Le théorème fondamental permet en particulier, en vertu des résultats exposés plus haut, de mettre, sur tout espace fibré propre (G,F), une structure (g,F) dont la structure donnée est dérivée, chaque fois que l'espace homogène G/g possède l'une des propriétés d'extension (Ex I), (Ex II), (Ex III_n), pourvu que la base possède la propriété correspondante. Il en sera ainsi par exemple si G est un groupe de Lie simplt connexe, g un sous-groupe compact maximal de G , et si B satisfait à (B I) ou à (B II), puisqu'alors on sait que G/g est homéomorphe à un espace euclidien, donc satisfait à (Ex I). Exemple : G est le groupe linéaire à n variables, g le groupe orthogonal ; appliqué à l'espace des vecteurs tangents à une variété différentiable orientable dénombrable à l'infini, ceci démontre l'existence d'un ds^2 à coefficients continus sur la variété (mais non d'un ds^2 à coefficients différentiables, pour lequel il faut d'autres méthodes, d'ailleurs beaucoup plus élémentaires). !

Dom !

<u>Relèvement des homotopies dans les espaces fibrés</u>. Sous des conditions assez généralement satisfaites, la projection d'un espace fibré propre sur sa base est une application fibroïde (cf. p.6) ; on ne va cependant pas examiner ces conditions ici, parce que le théorème de relèvement donné pour les applications fibroïdes en dit à la fois trop et pas assez pour la théorie des espaces fibrés.

La méthode qu'on va suivre repose sur le théorème fondamental, et sur le <u>lemme suivant</u> : soit Z un espace localement compact, sur lequel on suppose donnée une rétraction F(z,t), i.e. une application continue de $Z \times I = Z \times [0,1]$ dans Z, telle que F(z,0) = z , F(z,1)=a quel que soit $z \in Z$, avec $a \in Z$, et F(a,t)=a quel que soit $t \in I$. Alors l'espace C des



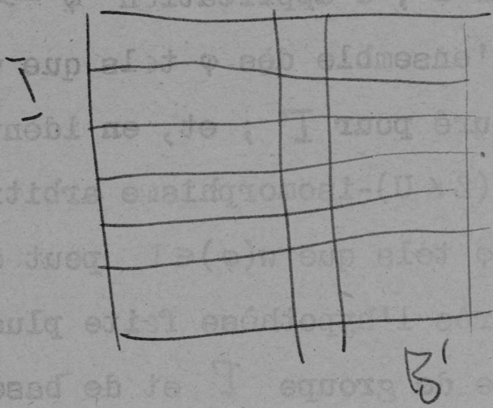
On fabrique un e-f. de base B', de fibre
Σ " × " G, et de groupe énorme (Γ)
Celui-ci satisfait à Ex II
⇒ section
⇒ Restriction du gd groupe.

 D'où l'importance de l'Ex II

des applications continues de Z dans un espace E quelconque, faisant correspondre à a un point donné b de E, possède la propriété d'extension ouverte (Ex 2) si on le munit de la topologie de la convergence compacte. En effet, soient X un espace normal, A une partie fermée de X, φ une application continue dans C d'un voisinage V de A, ou, ce qui revient au même d'après la propriété fondamentale de la convergence compacte, soit f une application continue de $V \times Z$ dans E, satisfaisant à $f(x,a) = b$ quel que soit $x \in V$; on prolongera f à $(V\times Z)\cup(X\times\{a\})$ en posant $f(x,a)=b$ quel que soit $x\in X$. Soit W un voisinage de A dans X, tel que $\overline{W}\subset V$; soit τ une fonction numérique continue sur X, à valeurs dans $[0,1]$, égale à 0 sur $\overline{W}$ et à 1 sur $\complement V$; alors $(x,z) \to f[x,F(z,\tau(x))]$ est une application continue de $X\times Z$ dans E, qui coïncide avec f sur $\overline{W}\times Z$, prend la valeur constante b sur $X\times\{a\}$; elle définit donc bien une application continue de X dans C, qui coïncide avec φ sur $\overline{W}$.

On va maintenant démontrer ce qui suit : soit Z le même espace que ci-dessus ; soit B' un espace satisfaisant à la condition (B II) ; soit E un espace fibré de base $B = Z\times B'$; supposons que tout point w de B' ait un voisinage U tel que $\overset{-1}{\pi}(Z\times U)$ soit trivial (π = projection de E sur B) ; alors E est B-isomorphe à un produit $Z\times E'$, où E' est un espace fibré propre de base B'. Il suffit naturellement de considérer un espace principal E, de groupe G. Soit $\Phi = Z\times G$; soit Γ le groupe des applications continues de Z dans G, avec la topologie de la convergence compacte ; on peut considérer Γ comme opérant sur Φ, au moyen de la loi $(f,(z,s)) \to (z,f(z)s)$, où $f\in\Gamma$, $z\in Z$, $s\in G$. Considérons l'espace $\overline{E}$ des applications continues φ de Z dans E telles qu'il existe un $w = w(\varphi)\in B'$ pour lequel on ait $\pi[\varphi(z)] = (z,w)$ quel que soit $z\in Z$; munissons $\overline{E}$ de la topologie de la convergence compacte, et considérons Γ comme opérant sur $\bar{E}$ au moyen de la loi $(\varphi,f) \to \varphi f$ ($\varphi \in \bar{E}$, $f \in \Gamma$). Soit U ouvert dans B', tel que $\overset{-1}{\pi}(Z \times U)$ so trivial dans E ; l'application $\varphi \to w(\varphi)$ de $\bar{E}$ dans B' étant évidemmen continue, l'ensemble des φ tels que $w(\varphi) \in U$ forme dans $\bar{E}$ un ensemble ouvert, saturé pour Γ ; et, en identifiant $\overset{-1}{\pi}(Z \times U)$ avec $Z \times U \times G$ au moyen d'un $(Z \times U)$-isomorphisme arbitrairement choisi, on voit que l'ensemble des φ tels que $w(\varphi) \in U$ peut être identifié avec $U \times \Gamma$, d'où résulte (après l'hypothèse faite plus haut sur E) que $\bar{E}$ est espace principal propre de groupe Γ et de base B' ; et on vérifie en même temps que E peut être identifié avec l'espace fibré (Γ, Φ) associé à $\bar{E}$, au moyen de l'application $(\varphi,(z,s)) \to \varphi(z)s$ de $\bar{E} \times \Phi$ sur E. Cela posé, identifions G avec le sous-groupe fermé de Γ formé des applications constantes de Z dans G ; si Γ_o est le sous-groupe fermé de Γ formé des $f \in \Gamma$ telles que $f(a) = e$, on a $\Gamma = \Gamma_o . G$; on en conclut qu'on peut identifier Γ/G avec Γ_o, et par suite, d'après le lemme démontré plus haut, que Γ/G a la propriété d'extension ouverte. En vertu du théorème fondamental et de l'hypothèse faite sur B' on en conclut qu'il existe une section dans l'espace fibré (Γ, Γ/G) associé à $\bar{E}$, et par suite qu'on peut mettre sur $\bar{E}$ une structure (G, Γ), et sur E une structure (G, Φ), de base B', dont leurs structures soient respectivement dérivées. Alors, si E' est l'espace principal, de groupe G et de base B', pour ces structures, E se trouve représenté comme quotient de $E' \times \Phi = E' \times Z \times G$ par la relation entre éléments (x',z,s), (x'_1, z_1, s_1) de ce produit qui s'écrit "il existe $t \in G$ tel que $x'_1 = x't^{-1}$, $s_1 = ts$; et $z_1 = z$ ", ce qui donne aussitôt l'isomorphisme annoncé entre E et $Z \times E'$.

55



Débrouiller l'aspect Tchebhiste.

On va montrer maintenant, en premier lieu, que la condition "$\overset{-1}{\pi}(Z \times U)$ trivial" est automatiquement satisfaite pour $Z = I = [0,1]$, pourvu que E soit propre. En effet, si $w \in B'$, cette dernière hypothèse entraîne que, pour tout $t \in I$, il existe un voisinage U_t de w dans B', et un voisinage J_t de t dans I, tels que $\overset{-1}{\pi}(J_t \times U_t)$ soit trivial ; d'après la compacité de I, on en conclut qu'il y a un voisinage U de w dans B', et une subdivision de I en intervalles fermés $I_\nu = [t_\nu, t_{\nu+1}]$ ($0 \leq \nu < n$, $t_0 = 0$, $t_n = 1$), tels que $\overset{-1}{\pi}(I_\nu \times U)$ soit trivial quel que soit ν. On en déduit aussitôt, par récurrence sur ν, que $\overset{-1}{\pi}([0,t_\nu] \times U)$ est trivial quel que soit ν, d'où le résultat.

Premier corollaire : soient f_0, f_1 deux applications homotopes d'un espace B', satisfaisant à (B II), dans la base B_0 d'un espace fibré propre E_0 ; alors les images réciproques $\overset{-1}{f_0}(E_0)$, $\overset{-1}{f_1}(E_0)$ sont des espaces fibrés B'-isomorphes. En effet, par hypothèse, il existe une application continue f de $I \times B'$ dans B_0, qui se réduit à f_0 sur $\{0\} \times B'$, et à f_1 sur $\{1\} \times B'$; il suffit alors d'appliquer le théorème ci-dessus à l'image réciproque de E_0 par f, qui est un espace de base $I \times B'$. En particulier, si $B' \subset B_0$, et si l'application identique de B' dans B_0 est homotope dans B_0 à une application constante (ou, comme on dit, est "homotope à zéro", ou "triviale"), l'espace induit par E_0 sur $\overset{-1}{\pi_0}(B')$ est trivial (π_0 = projection de E_0 sur B_0).

Si en particulier un espace B', satisfaisant à (B II), est rétractile, tout espace fibré propre de base B' est trivial. Ceci s'applique entre autres : a) à tout simplexe, fermé ou ouvert ; b) à l'étoile ouverte de tout simplexe dans un complexe simplicial (star-fini).

[N.B. Ce qui précède pose diverses questions qu'il y aurait intérêt à résoudre. Il est choquant p.ex. de ne pas savoir s'il existe des espaces fibrés non triviaux de base I (bien entendu, un tel espace ne peut être propre)

D'autre part : est-il vrai ou non que les images réciproques d'un espace fibré E_0 (qu'on peut même supposer propre) par deux applications f_0, f_1 de B' dans B_0 (notations comme ci-dessus) sont B'-isomorphes pourvu que f_0, f_1 appartiennent à une même composante connexe de l'espace des applications continues de B' dans B_0 (avec la topologie de la convergence compacte) ? Ou, ce qui revient au même : soit E un espace fibré sur un produit $X\times B'$, X étant un espace connexe ; π étant la projection de E sur $X\times B'$, E induit, sur chaque ensemble $\overset{-1}{\pi}(\{x\}\times B')$, un espace fibré, qu'on peut identifier avec un espace de base B' ; tous ces espaces sont-ils B'-isomorphes ? (ce qui précède ne permet de l'affirmer que si X est connexe "pathwise")].

On va revenir maintenant à la question laissée ouverte plus haut (conditions pour que $\overset{-1}{\pi}(Z\times U)$ soit trivial), et on va faire les hypothèses suivantes : soit E fibré propre sur $Z\times B'$, Z étant rétractile et compact, et B' étant localement compact. Si $w\in B'$, on voit (comme plus haut dans le cas $Z=I$) qu'il existe un voisinage U de w dans B', et un recouvrement ouvert fini (V_i) de Z, tels que $\overset{-1}{\pi}(V_i\times U)$ soit trivial quel que soit i ; on peut supposer U compact.

Par la méthode des cartes, identifions respectivement ces ensembles, par des $(V_i\times U)$-isomorphismes arbitrairement choisis, avec les produits $V_i\times U\times G$; l'espace fibré $\overset{-1}{\pi}(Z\times U)$ peut alors être considéré comme défini par des applications g_{ij} des ensembles $(V_i\cap V_j)\times U$ dans G, satisfaisant aux conditions $g_{ik}=g_{ij}g_{jk}$, ou, ce qui revient au même, par des applications θ_{ij} des ensembles $V_i\cap V_j$ dans le groupe Ω des applications continues de U dans G, muni de la topologie de la convergence compacte (ou, ce qui revient au même, de celle de la convergence uniforme). Les θ_{ij} définissent donc un espace fibré principal propre de base Z et de groupe Ω

d'après ce qu'on a démontré plus haut, cet espace est trivial, c'est-à-dire qu'on peut définir pour tout i une application continue ω_i de V_i dans Ω, de façon qu'on ait $\theta_{ij} = \omega_i^{-1}\omega_j$ dans $V_i \cap V_j$; il revient au même de dire qu'il existe des applications continues h_i des $V_i \times U$ dans G, telles que $g_{ij} = h_i^{-1}h_j$, d'où résulte que $\overset{-1}{\pi}(Z \times U)$ est trivial.

En définitive, on a donc le théorème suivant. Soit E fibré propre, de base $B = Z \times B'$; alors on peut affirmer que E est B-isomorphe à un produit $Z \times E'$, E' étant fibré propre de base B', dans chacun des cas suivants : 1) $Z = I$, et B' satisfait à (B II) ; 2) Z est compact et rétractile, B' est localement compact et dénombrable à l'infini.

Du cas $Z = I$ on va déduire maintenant le théorème de relèvement des homotopies dans les conditions suivantes. Soit E_0 fibré propre, de base B_0, avec la projection π_0 ; soit F_0 une application continue dans E_0 d'un espace B' satisfaisant à (B II) ; soit $f_0 = \pi_0 \circ F_0$, et soit f une homotopie de f_0, c'est-à-dire une application continue de $I \times B'$ dans B_0, qui se réduise à f_0 sur $\{0\} \times B'$; alors on va montrer qu'il existe une application continue F de $I \times B'$ dans E_0, telle que $f = \pi_0 \circ F$. Considérons l'espace $\overset{-1}{f}(E_0)$, c'est-à-dire (par définition) l'image réciproque, dans l'espace fibré $I \times B' \times E_0$, du graphe Γ_f de f (par la projection de cet espace sur sa base $I \times B' \times B_0$), qui est un espace fibré E dont la base Γ_f est homéomorphe à $I \times B'$. Il s'ensuit qu'il existe un isomorphisme entre E et un espace $I \times E'$, où E' est un espace fibré de base B' ; soit φ un isomorphisme de $I \times E'$ sur E qui induise sur les bases $I \times B'$ et Γ_f de ces espaces l'homéomorphisme $(t,z) \to (t,z,f(t,z))$. Si π' est la projection de E' sur B', il s'ensuit que φ est de la forme $\varphi(t,x) = (t,\pi'(x), \psi(t,x))$, avec $\pi_0 \left[\psi(t,x)\right] = f[t,\pi'(x)]$. Considérons l'application $z \to (0,z,F_0(z))$ de B' dans $I \times B' \times E_0$; l'image de B' par cette application est contenue dans E ; puisque φ est un isomorphisme,

59

cf. fin du rapport Eilenberg

il existe donc une application ω de B' dans E', telle que l'on ait $\varphi[0,\omega(z)] = (0,z,F_0(z))$. Alors l'homotopie F qu'il s'agissait de définir sera donnée par $F(t,z) = \psi[t,\omega(z)]$.

De ce théorème, appliqué au cas où B' est une sphère, on déduit immédiatement d'importantes relations entre les groupes d'homotopie de E_0, de B_0, et de la fibre de E_0 ; pour ces relations (dont on tire une foule de conséquences intéressantes en les appliquant à toute sorte de cas particuliers) on renvoie à Ehresmann, Eckmann, Hurewicz-Steenrod, Whitehead, etc..

Classification des espaces fibrés. Le problème est le suivant : pour une base B donnée, et un groupe G donné, on range dans une même classe tous les espaces fibrés principaux de base B et de groupe G qui sont B-isomorphes entre eux. Il s'agit d'obtenir des résultats sur l'ensemble de ces classes, p.ex. de leur attacher des invariants, etc. Dans l'état actuel de la question, on est obligé de se borner aux espaces propres, et (sauf le cas où G est discret) aux complexes simpliciaux ou aux espaces B qui s'y ramènent ; c'est là naturellement une situation fort peu bourbachique.

On observe d'abord que, si B et B' satisfont à (B II) et ont même type d'homotopie, alors, en vertu du théorème d'homotopie, les classes d'espaces fibrés sur B et sur B' peuvent être mises en correspondance biunivoque comme suit : soient f, f' les applications de B dans B', et de B' dans B, telles que $f \circ f'$ et $f' \circ f$ soient homotopes respectivement aux applications identiques de B' sur B' et de B sur B. Soient E, E' des espaces fibrés propres, de bases B resp. B' ; à la classe de E on fera correspondre la classe de son image réciproque par f', et de même pour E' ; il est immédiat que ce sont là des applications biunivoques, inverses l'une de l'autre, des ensembles de classes d'espaces fibrés (propres) sur B et sur B'. En particulier, si un espace B a même type d'homotopie qu'un complexe simplicial B', le problème de classification relatif à B se ramène ainsi au problème analogue pour B'. On a vu qu'il en est ainsi pour tout espace B qui a un épiderme, B' étant le nerf de cet épiderme, donc p.ex. pour toute variété compacte de classe C^2 (et vraisemblablement même, comme on a vu, pour toute variété de classe C^1, dénombrable à l'infini). Dans ce qui suit, on va donc se borner au cas où B est un complexe simplicial (star-fini).

En ce cas, la méthode de description des espaces fibrés par "cartes" se modifie comme suit. Comme on a vu, si E est espace fibré principal de groupe G, avec la projection π sur B, l'image réciproque dans E de tout simplexe fermé de B est triviale ; pour chacune, on peut donc choisir un isomorphisme sur le produit du simplexe par G ; il suffira alors, pour chaque couple de simplexes fermés S,S' tel que S' soit sur la frontière de S, de connaître la relation entre leurs images réciproques dans E, relation qui s'exprime par une application continue de S' dans G. Il est facile de formuler dans ce langage les divers problèmes de la théorie, tels que : B-isomorphisme de deux espaces, existence d'une section pour un espace associé, etc.

On ne traitera pas ici de la méthode des "obstructions" ; le principe en est le suivant : B_m étant le squelette à m dimensions du complexe B, on cherche à construire par récurrence une section sur B_m dans un espace fibré associé à l'espace principal donné ; pour B_0, le problème est trivial. Comme on a vu dans la démonstration du théorème fondamental, pour le cas (III), la construction se fait sans difficulté pour $m \leq n$ si la fibre satisfait à (Ex III_n), c'est-à-dire a ses groupes d'homotopie nuls jusqu'à la dimension n-1. Mais alors, pour monter de B_n à B_{n+1}, on se heurte à un "obstacle" (ou "obstruction"), c'est-à-dire qu'à tout simplexe

(= celui d'homologie)

de B à n+1 dimensions est attaché un élément du groupe d'homotopie de dimension n de la fibre. On démontre qu'on obtient toujours ainsi un cocycle à n+1 dimensions, à coefficients dans le groupe d'homotopie en question, et que la classe de ce cocycle (au sens de la cohomologie) est un invariant de la classe d'espace fibré donnée sur B . Si cette classe est 0, alors on peut continuer jusqu'au prochain groupe d'homotopie non nul, et à ce moment on se heurte à un nouvel obstacle (la "deuxième obstruction") qui est encore un cocycle, mais qui, lui, n'est pas un invariant ; cependant, l'ensemble des valeurs qu'est susceptible de prendre la classe de ce cocycle est un invariant, dont l'étude (fort difficile) est l'un des plus importants problèmes de la topologie à l'heure actuelle ; certains cas particuliers (Hopf) donnent à penser que cet ensemble est l'ensemble des valeurs prises par un certain polynome (dans le cas étudié par Hopf, une forme quadratique) dans l'anneau de cohomologie.

Une autre méthode est celle des espaces universels. Donnons d'abord un lemme (que le rapporteur s'excuse d'avoir oublié d'insérer beaucoup plus tôt). Soient E, E' des espaces principaux de groupe G , de bases B resp. B', avec les projections π, π'. Soit F une application continue de E' dans E , satisfaisant à $F(x's) = F(x')s$ pour $s \in G$; $\pi \circ F$ est donc une application continue de E' dans B , constante sur les fibres de E' , donc de la forme $\pi \circ F = f \circ \pi'$, où f est une application continue de B' dans B . Alors $\overset{-1}{f}(E)$ est par définition l'ensemble des points (z',x) de $B' \times E$ tels que $f(z') = \pi(x)$, avec la structure induite par celle de $B' \times E$; on en conclut aussitôt qu'en posant $\phi(x') = (\pi'(x'), F(x'))$, ϕ est une application biunivoque et continue de E' sur $\overset{-1}{f}(E)$, satisfaisant à $\phi(x's) = \phi(x')s$. <u>Si de plus</u> E <u>est propre</u>, on vérifie

C'est le contraire des revêtements, et
(on tue l'homotopie de la fibre,
non de la base)

immédiatement que ϕ est un isomorphisme [il suffirait de supposer E' propre, et E satisfaisant à (FP 3) ; il serait intéressant d'élargir ces conditions].

Cela posé, soient E, E_0 des espaces fibrés principaux propres de groupe G, de bases B, B_0. Si on considère G comme opérant <u>à gauche</u> sur E_0 au moyen de la loi $(s,x_0) \rightarrow sx_0 = x_0 s^{-1}$, on peut prendre E_0 pour fibre d'un espace $\bar{E}$ de base B associé à l'espace principal E ; par définition, $\bar{E}$ n'est pas autre chose que le quotient de $E \times E_0$ par la relation d'équivalence "il existe s tel que $x'=xs$, $x_0'= x_0 s$ " ; autrement dit, c'est la base de $E \times E_0$ lorsqu'on considère celui-ci comme espace fibré principal de groupe G au moyen de la loi $((x,x_0),s) \rightarrow (xs,x_0 s)$. Cela posé, on a vu plus haut que l'existence d'une section dans cet espace $\bar{E}$ équivaut à l'existence d'une application F de E dans E_0 satisfaisant à $F(ws) = F(w)s$ [ceci a été exposé plus haut seulement pour le cas où la fibre est un espace homogène G/g , mais aurait dû être fait pour une fibre quelconque, ce qui se fait exactement de même ; v. plus loin].

On pourra donc affirmer l'existence d'une telle application F (et par suite d'une application f de B dans B_0 telle que $\overset{-1}{f}(E_0)$ soit B-isomorphe à E) chaque fois que le théorème fondamental permet d'affirmer l'existence d'une section dans $\bar{E}$.

Supposons en particulier que E_0 satisfasse à la condition (Ex III_n), c'est-à-dire soit connexe ("pathwise") et ait ses groupes d'homotopie nuls jusqu'à la dimension n-1 . Soit B un complexe simplicial de dimension $\leqslant n$. Alors tout espace fibré principal propre de base B est B-isomorphe à un espace de la forme $\overset{-1}{f}(E_0)$, où f est une application de B dans B_0 ; ce qu'on exprimera en disant que E_0 est "universel pour les complexes de dimension $\leqslant n$" . Si de plus A est un sous-complexe de B , et E comme ci-dessus, il existe, d'après le théorème fondamental,

E_f $\qquad$ E_0

$B \xrightarrow{f} B_0$

$f \longrightarrow E_f = f^{-1}(E_0)$

Classe homo$(f) \longrightarrow Cl(E_f)$ | sur? biunivoque?

sur $\iff E_0$ est ~~classifiant~~ universel pour B.

"sur pour tout B, complexe de dim $\leq n$" $\iff E_0$ universel pour dim. n

Biunivoque en + $\iff$ universel et classifiant pour les dim. n

une section de l'espace $\overline{E}$ prolongeant une section arbitrairement donnée sur A , ou encore une application F de E dans E_0, satisfaisant à $F(ws) = F(w)s$, et prenant des valeurs données sur $\overset{-1}{\pi}(A)$.

Soit alors E' un espace fibré principal propre dont la base B' soit un complexe de dimension $\leq n-1$; soit $E = I \times E'$, qu'on peut considérer comme espace fibré de base $B = I \times B'$; on peut, d'une manière évidente, identifier B avec un complexe simplicial de dimension $\leq n$, dont $A_0 = \{0\} \times B'$ et $A_1 = \{1\} \times B'$ sont des sous-complexes. Supposons que E' soit B'-isomorphe aux images réciproques de E_0 par deux applications f_0, f_1 de B' dans B_0 ; il y aura donc deux applications F_0, F_1 de E' dans E_0, telles que $F_0(w's) = F_0(w')s$, $F_1(w's) = F_1(w')s$, $\pi_0 \circ F_0 = f_0 \circ \pi'$, $\pi_0 \circ F_1 = f_1 \circ \pi'$ (où π_0 , π' sont les projections de E_0 sur B_0 et de E' sur B'). On peut identifier F_0, F_1 avec des applications de $\{0\} \times E' = \overset{-1}{\pi}(A_0)$, $\{1\} \times E' = \overset{-1}{\pi}(A_1)$ (où π est la projection de E sur B) ; il s'ensuit qu'il existe une application F de E dans E_0 , telle que $F(ws) = F(w)s$, et coïncidant avec F_0, F_1 sur $\{0\} \times E'$, $\{1\} \times E'$ respectivement. Alors $\pi_0 \circ F$ est de la forme $f \circ \pi$, où f est une application de B dans B_0 qui coïncide avec f_0 et f_1 sur A_0 et A_1 respectivement ; autrement dit, f est une homotopie de f_0 en f_1 . On en conclut qu'il existe une correspondance <u>biunivoque</u> entre les classes d'homotopie des applications continues de B' dans B_0 et les classes (au sens de la B'-isomorphie) d'espaces fibrés principaux propres, de groupe G, sur la base B'. On exprime cette propriété en disant que E_0 est "classifiant pour les complexes de dimension n-1 ".

On obtiendrait naturellement des résultats beaucoup plus forts si on supposait que E_0 possède la "propriété d'extension" (Ex I), ou du moins la "propriété d'extension ouverte" (Ex II) ; malheureusement, dans les cas les plus intéressants (en particulier celui des groupes de Lie connexe compacts) ;

67

on ne connaît pas de tels espaces fibrés (qui seraient donc universels, et même classifiants, pour tous les espaces de même groupe et de base satisfaisant à (B II)), et le rapporteur se contente prudemment de poser la question sans hasarder d'avis sur leur existence. En revanche, on peut de diverses manières (les unes élémentaires, les autres faisant usage du "relèvement des homotopies") démontrer ce qui suit : dans un espace euclidien à N dimensions, soit $V(N,n)$ l'ensemble des systèmes de $N-n$ vecteurs orthogonaux (c'est-à-dire l'ensemble des matrices X à N lignes et $N-n$ colonnes satisfaisant à ${}^tX.X = 1_{N-n}$) ; les groupes d'homotopie de $V(N,n)$ s'annulent jusqu'à la dimension $n-1$. On peut, d'une manière évidente, considérer $V(N,n)$ comme espace fibré principal pour le groupe orthogonal à $N-n$ variables (sa base étant alors la "variété de Grassmann" des variétés linéaires orientées à $N-n$ dimensions, passant par O, dans l'espace à N dimensions), donc aussi pour tout sous-groupe fermé de ce groupe. Il s'ensuit que, si G est un groupe de Lie compact (connexe ou non) quelconque, et m un entier arbitraire, on peut, parmi les espaces $V(N,n)$, trouver un espace classifiant pour tous les espaces fibrés de groupe G dont la base est un complexe de dimension $\leqslant m$. Pour des raisons analogues, on peut également bien se servir du groupe hermitien au lieu du groupe orthogonal.

Il est clair d'ailleurs que, dès qu'on a un espace classifiant E_o (notations comme ci-dessus), tout invariant des classes d'homotopie des applications f de B' dans B_o donne un invariant des espaces fibrés de base B' . Par exemple, l'homomorphisme, déterminé par f , de l'anneau de cohomologie de B_o dans celui de B') est un tel invariant, donc aussi l'image réciproque $\overset{-1}{f}(\xi)$, dans l'anneau de cohomologie de B' , de tout élément ξ de l'anneau de cohomologie de B_o . En particulier, on peut obtenir ainsi toutes les "obstructions" correspondant aux divers espaces

premières

fibrés qu'on peut associer à un espace principal donné. De ce point de vue, on peut dire que le rôle de la méthode des "obstructions" (du moins en ce qui concerne la "première obstruction") est seulement de donner une interprétation géomètrique, d'ailleurs intéressante, de certaines "classes caractéristiques" $\overset{-1}{f}(\xi)$, tandis que la méthode des "espaces universels" les donne toutes d'un seul coup, et donne en même temps beaucoup d'autres invariants (homomorphisme d'anneau, etc.,); ce qui donne pour l'instant l'avantage à celle-ci.

Addenda. On va d'abord combler la lacune sur l'existence d'une section dans un espace fibré H de structure (G,F), associé à un espace principal E ; H est défini comme quotient de $E \times F$ par la relation "il existe $s \in G$ tel que $x' = xs^{-1}$, $u' = su$" ; soit ψ l'application canonique de $E \times F$ sur H . Soit f une application continue de E dans F , telle que $f(xs) = s^{-1}f(x)$; alors $x \longrightarrow \psi[x,f(x)]$ est une application de E dans H, constante sur chaque fibre, et détermine donc une application continue h dans H de la base B de E , de sorte qu'on a $\psi[x,f(x)] = h[\pi(x)]$. Ceci implique que π h est l'application identique de B sur V , c'est-à-dire que h(B) est bien une section de H . Réciproquement, supposons donnée la section h(B), c'est-à-dire une application continue h de B dans H , telle que $\pi\circ h$ soit l'application identique. Pour x donné, l'application $u \longrightarrow \psi(x,u)$ de F dans H est biunivoque (c'est même un homéomorphisme de F sur la fibre de H correspondant au point $\pi(x)$ de B) ; par suite, la relation $\psi[x,f(x)] = h[\pi(x)]$ définit la fonction f ; il est immédiat que $f(xs) = s^{-1}f(x)$; il reste donc à voir si la continuité de h entraîne celle de f . Or, supposons (FP 3) satisfait, c'est-à-dire supposons qu'il existe une application continue $(x,x') \longrightarrow s(x,x')$ de R dans G , où R est l'ensemble des points de $E \times E$ de la forme (x,xs), telle que $s(x,xs) = s$. Considérons alors l'application $(x,x',u') \longrightarrow s(x,x')u'$

de $R \times F$ dans F ; supposons aussi B séparé, c'est-à-dire R fermé dans $E \times E$ (Top.Gén.chap.I,p.57,prop.4, en tenant compte des rectifications et de l'ex.5,p.58) ; $R \times F$ est donc fermé dans $E \times E \times F$, et saturé pour la relation entre éléments (x,x',u'), (x_1,x_1',u_1') de cet espace définie par $x = x_1$, $\psi(x',u') = \psi(x_1',u_1')$; et $s(x,x')u'$ est constante sur les classes d'équivalence pour cette relation, de sorte qu'on a ainsi (en tenant compte de Top.Gén.chap.I,p.56,prop.3, qui s'applique au produit $E \times (E \times F)$ en tenant compte des rectifications) une application continue Φ , dans F , de l'ensemble R' des points (x,z) de $E \times H$ qui satisfont à $\pi(x) = \pi'(z)$ (où π et π' sont les projections de E et de H sur B), de sorte qu'on a $\Phi[x, \psi(x',u')] = s(x,x')u'$. On en conclut $\psi[x, \Phi(x,z)] = z$, de sorte que la relation $\psi[x,f(x)] = h[\pi(x)]$ équivaut à $f(x) = \Phi[x,h(\pi(x))]$, ce qui montre que dans ces conditions f est continue.

On a vu plus haut l'application de ce résultat à la représentation d'un espace E sous la forme $\overset{-1}{f}(E_0)$, f étant une application de B dans B_0 (bases de E , E_0). Cela donne un critère pour que E et E_0, de même base $B = B_0$, soient B-isomorphes ; il faut et il suffit pour cela qu'il existe une section dans l'espace $\overline{E}$, quotient de $E \times E_0$ par la relation "il existe $s \in G$ tel que $x' = xs$, $x_0' = x_0 s$ " (c'est la base de $E \times E_0$, considéré comme espace fibré principal par la loi $((x,x_0),s) \to (xs,x_0 s)$), lorsqu'on considère cet espace comme espace (G,E_0) de base B . On peut naturellement échanger E et E_0. On en déduit le critère symétrique suivant : pour que E et E_0 soient B-isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe une section dans $\overline{E}$ considéré comme espace fibré de base $B \times B$ [d'une manière précise : c'est l'espace de structure $(G \times G, G_{sd})$ associé à l'espace principal $E \times E_0$ de groupe $G \times G$, G_{sd} étant l'espace de groupe G sur lequel $G \times G$ opère par la loi $((s,s'),t) \to s^{-1}ts'$] .

Voici encore, dans le même ordre d'idées, une condition pour que, E étant un espace fibré principal, de groupe G et de base B (avec la projection π sur B), la projection sur B de tout espace fibré H associé à E soit "fibroïde". Soit F la fibre de H , ψ l'application canonique de $E \times F$ sur H , π' la projection de H sur B . Si W est un voisinage de la diagonale dans $B \times B$, l'ensemble des points (x,x') de $E \times E$ tels que $(\pi(x),\pi(x')) \in W$ est un voisinage W' de l'ensemble R des points (x,xs) ; supposons qu'il existe de tels voisinages W, W', et une application continue σ de W' dans G, satisfaisant à la condition :

(FP 3') On a $\sigma(x,x) = e$, et $\sigma'(xs,x't) = s^{-1}\sigma'(x,x')t$ quels que soient $(x,x') \in W'$, et $s,t \in G$.

L'ensemble W" des points (z,b) de $H \times B$, tels que $(\pi'(z),b) \in W$, est un voisinage du graphe de π' ; on va y définir une application ω de W" dans H , ayant les propriétés voulues pour qu'on puisse en conclure au caractère fibroïde de H . Pour cela, on n'aura qu'à définir ω par : $\omega\left[\psi(x,u),\pi(x')\right] = \psi\left[x',\sigma'(x',x)u\right]$, pour $(x,x') \in W'$. La vérification est immédiate (toujours en tenant compte des rectifications à Top.Gén.chap.I, p.56, prop.3).

D'après ce qui précède, (FP 3') équivaut à ce qui suit. Considérons le quotient $\bar{W}$ de W' par la relation "il existe s tel que $(x_1,x_1') = (xs,x's)$ " ; $\bar{W}$ peut être considéré comme espace fibré $(G \times G,\ G_{sd})$, de base W' ; alors (FP 3') revient à l'existence d'une section dans $\bar{W}$, prolongeant la section sur la diagonale dont l'existence résulte de (FP 3) .

Enfin, il convient de donner quelques indications sur le problème des espaces fibrés "étagés" les uns sur les autres. Soit H un espace fibré de structure (G,F), de base B ; soit Z un espace fibré de structure (G',F'), et de base H ; il s'agit de savoir dans quelles conditions on peut mettre sur Z une structure d'espace fibré de base B. Soit E l'espace principal auquel H est associé ; soit ψ l'application canonique de $E \times F$ sur H ; posons $\psi_x(u) = \psi(x,u)$. Si E est connexe " au sens des chemins", les espaces fibrés $\overset{-1}{\psi_x}(H)$, de structure (G',F'), de base F , sont F-isomorphes les uns aux autres, en vertu du théorème d'homotopie, pourvu que H soit propre et que F satisfasse à (B II) ; soit Φ l'un quelconque d'entre eux. Supposons de plus : a) que tout point de B ait dans B un voisinage compact et rétractile (ce sera le cas p.ex. si B est une variété, ou bien un complexe simplicial star-fini) ; b) que F soit localement compact, dénombrable à l'infini. Si donc V est un voisinage compact et rétractile d'un point de B , l'image réciproque de V dans H , par la projection de H sur B , sera un espace fibré trivial de base V , donc V-isomorphe à $V \times F$, et par suite l'image réciproque de cet ensemble dans Z , par la projection de Z sur H , sera $(V \times F)$-isomorphe à $V \times \Phi$. Il s'ensuit,que dans ces conditions, on peut définir sur Z une structure d'espace fibré propre, de base B , de fibre Φ , le groupe étant le groupe Γ des automorphismes de Φ (considéré comme espace fibré (G',F') de base F) qui induisent sur la base F de Φ un homéomorphisme $u \to su$, avec $s \in G$; les F-automorphismes de Φ forment d'ailleurs un sous-groupe invariant Γ_0 de Γ , et on vérifie que Γ/Γ_0 est algèbriquement isomorphe à G (plus précisément, si $\alpha \in \Gamma$, et si α induit sur la base F de Φ l'homéomorphisme $u \to s(\alpha)u$, l'application $\alpha \to s(\alpha)$ est un homomorphisme (algèbrique) de Γ <u>sur</u> G). La question ne peut être considérée comme bien éclaircie tant qu'on n'a pas mis sur Γ une topologie convenable ; a priori, on doit songer d'abord à examiner la topologie la moins fine sur α qui, d'une part, rende $\alpha \to s(\alpha)$ continu, et d'autre part, soit plus fine que celle de la convergence compacte ; il faudrait voir dans quelles conditions

$a \to s(a)$ sera un homomorphisme de Γ sur G . On observera aussi que, si G se réduit à l'élément neutre, on a la question d'un espace fibré Z dont la base H est donnée comme produit $H = B \times F$; Γ se réduit alors à Γ_0 , ce qui conduit à étudier le groupe des automorphismes d'un espace fibré qui laissent invariant chaque point de la base. Là-dessus, en changeant les notations, on peut dire ce qui suit. Soit H un espace fibré (G,F), de base B ; soit E son espace principal ; supposons la condition (FP 3) satisfaite ; soit ψ l'application canonique de $E \times F$ sur H ; alors les automorphismes de H sont en correspondance biunivoque avec les applications continues σ de E dans G qui satisfont à $\sigma(xs) = s^{-1}\sigma(x)s$, l'automorphisme correspondant à σ étant celui qui, au point $\psi(x,u)$ de H , fait correspondre $\psi(x\sigma(x),u)$. Si donc G_i désigne l'espace de groupe de G , sur lequel G opère par la loi $(s,t) \to t^{s^{-1}} = sts^{-1}$, et E_i l'espace fibré de structure (G,G_i) associé à E , les automorphismes de H sont en correspondance biunivoque avec les sections de E_i .

<u>Exemples</u>. On va principalement étudier les suivants : a) cas d'un groupe et d'une fibre discrets ; b) cas d'un groupe abélien, et principalement du groupe T ; de plus, on dira quelques mots des groupes qui se présentent dans les applications géomètriques de la théorie (groupes classiques). Le rapporteur s'est aperçu un peu tard, sur ces exemples, qu'il a eu tort de restreindre les définitions générales aux structures (G,F) pour lesquelles le groupe G opère simplement sur la fibre F . Il en fait ses humbles excuses à ses patients lecteurs, t demande la permission (Phrygiâ sapientiâ, comme dit Barrow) d'élargir ses définitions comme suit.

La définition d'un espace fibré principal de groupe G reste inchangée. Si F est un espace sur lequel opère G (simplement ou non), et E un espace principal de groupe G, on pourra considérer $E \times F$ comme espace principal de groupe G, au moyen de la loi $((x,u),s) \longrightarrow (xs,s^{-1}u)$; la base H de cet espace, c'est-à-dire le quotient de E F par la relation "il existe $s \in G$ tel que $x' = xs$, $u' = s^{-1}u$" sera l'espace fibré de structure (G,F) associé à l'espace principal E ; et on appellera encore ainsi tout espace H' pour lequel on s'est donné un homéomorphisme de H sur H', ou, ce qui revient au même, une application <u>ouverte</u> ψ de $E \times F$ sur H' telle que les images réciproques des points de H' par ψ soient les classes d'équivalence pour la relation ci-dessus. En particulier, si $F = G/g$, où g est un sous-groupe fermé de G (le cas où g contiendrait un sous-groupe distingué de G, autre que $\{e\}$, n'est plus exclu), on voit immédiatement que l'espace fibré H de structure $(G,F) = (G,G/g)$, associé à E, peut être canoniquement identifié avec le quotient de E par la relation $x' \in xg$, c'est-à-dire avec la base de E considéré comme espace fibré principal de groupe g ; on écrira alors $H = E/g$ (avec cette notation, E/G désignera la base de E, munie de la structure définie par la projection de E sur cette base). Si g' est un sous-groupe fermé de g, on définira d'une manière évidente une application canonique de E/g' sur E/g. Si γ est un sous-groupe distingué de G, l'espace E/γ peut être considéré comme espace fibré principal de groupe G/γ ; et, si γ est contenu dans g, E/g peut être considéré comme espace fibré de structure $(G/\gamma, G/g)$, associé à l'espace principal E/γ. Réciproquement, si G opère sur une fibre F de telle sorte que les éléments de γ induisent sur F l'automorphisme identique, et si H est un espace fibré de structure $(G/\gamma, F)$, il y a lieu de se demander si on peut mettre sur H une structure (G,F) dont la structure donnée se déduise.

est trivial, et que B'_1 sera réduit à un point ; c'est sous cette forme qu'on aura à se servir du lemme dans la théorie des revêtements.

Soit d'autre part H un espace fibré de structure (G,F), associé à l'espace principal E ; soit ψ l'application canonique de $E\times F$ sur H . Si on désigne par GF' , pour $F'\subset F$, l'ensemble des su pour $s\in G$, $u\in F'$, il est clair qu'on aura $\psi(E\times F') = \psi(E\times GF')$, et que deux ensembles $\psi(E\times F')$, $\psi(E\times F'')$ seront ou non sans point commun suivant que GF', GF'' sont ou non sans point commun ; en particulier, si $u\in F$, $u'\in F$, les ensembles $\psi(E\times\{u\})$, $\psi(E\times\{u'\})$ coïncideront ou seront sans point commun suivant que u' appartient ou non à Gu . Si donc les F_ρ sont les classes d'intransitivité de F pour G , c'est-à-dire tous les ensembles distincts de la forme Gu , les $\psi(E\times F_\rho)$ forment une partition de E ; et, si $u\in F_\rho$, on a $\psi(E\times F_\rho) = \psi(E\times\{u\})$. Il s'ensuit que, si E est connexe, chacun des ensembles $\psi(E\times F_\rho)$ est connexe comme image continue de E dans H . Si de plus les F_ρ sont ouverts dans F (ce qui sera toujours le cas lorsque F sera discret), il s'ensuit, puisque ψ est une application ouverte, que les ensembles $\psi(E\times F_\rho)$ forment une partition de H en ouverts connexes, de sorte que ce sont là les composantes de H , et que H en est la somme topologique.

<u>Premier exemple d'espaces fibrés</u> : <u>fibre discrète</u> (<u>revêtements</u>).

On appellera <u>revêtement</u>d'un espace B tout espace E muni d'une application continue π (la <u>projection</u>) dans B , telle que tout point $z\in B$ ait un voisinage U pour lequel $\overset{-1}{\pi}(U)$ soit U-homéomorphe à un produit $U\times F$, où F est discret. L'ensemble des $z\in B$ pour lesquels $\overset{-1}{\pi}(\{z\})$ a une puissance donnée est alors ouvert ; cette puissance est donc constante sur chaque composante connexe de B .

Désormais, on supposera une fois pour toutes que chacun des espaces dont on aura à considérer des revêtements sera <u>connexe</u> et <u>localement connexe</u> ; cette dernière hypothèse signifie que tout point a un système fondamental de voisinages formé de voisinages connexes, ou, ce qui revient au même, que les composantes connexes de tout ouvert sont des ouverts, ou bien encore que tout recouvrement ouvert admet un recouvrement plus fin formé d'ensembles ouverts connexes. Soit E un revêtement d'un tel espace B ; soit E' une composante connexe de E . Par hypothèse, tout point de B a un voisinage connexe U tel que $\overset{-1}{\pi}(U)$ puisse être identifié, au moyen d'un U-homéomorphisme arbitrairement choisi, avec un produit $U \times F$, où F est discret ; alors chacune des composantes $U \times \{a\}$ de ce produit est contenue dans E' ou bien étrangère à E', de sorte que $E' \cap \overset{-1}{\pi}(U)$ est de la forme $U \times F'$, avec $F' \subset F$, ce qui montre que E' est ouvert dans E et que c'est un revêtement de B . Tout revêtement est donc somme topologique de revêtements connexes, ce qui permet de se borner à l'étude de ces derniers.

Soit donc E un revêtement de B ; on va mettre sur E une structure d'espace fibré, de fibre et groupe discrets, ce qui permettra d'appliquer aux revêtements ~~à~~ la théorie des espaces fibrés. Choisissons arbitrairement un point a dans la base B de E ; soit $F = \overset{-1}{\pi}(\{a\})$; soit G le groupe des permutations de F , muni de la topologie discrète. Appelons fibres de E tous les ensembles $\overset{-1}{\pi}(\{z\})$, pour $z \in B$; avec les hypothèses faites sur B , on a vu que tous ces ensembles sont équipotents, de sorte qu'on peut en tout cas mettre sur E une structure "fibriforme" (G,F), au moyen de toutes les applications biunivoques de F sur une fibre de E ; soit $\overline{\overline{E}}$ l'ensemble de ces applications, sur lequel G opère au moyen de la loi $(\varphi, \sigma) \rightarrow \varphi\circ\sigma$ pour $\varphi \in \overline{\overline{E}}$, $\sigma \in G$; on mettra, comme suit, une topologie sur $\dot{\overline{\overline{E}}}$. Soit $\varphi_0 \in \overline{\overline{E}}$; soit $\varphi_0(F) = \overset{-1}{\pi}(\{z_0\})$; soit U un un voisinage ouvert de z_0 , tel que $\overset{-1}{\pi}(U)$ soit U-homéomorphe à $U \times F$; puisque toute permutation de F induit un U-automorphisme de $U \times F$, on peut choisir un U-homéomorphisme f de $U \times F$ sur $\overset{-1}{\pi}(U)$ de telle sorte qu'on ait, quel que soit $\alpha \in F$, $\varphi_0(\alpha) = f(z_0,\alpha)$. A tout voisinage V de z_0 dans U , faisons correspondre l'ensemble W_V des $\varphi \in \bar{E}$ qui sont de la forme $\varphi(\alpha) = f(z,\alpha)$, avec $z \in V$; on prendra alors les W_V comme système fondamental de voisinages de φ_0 dans $\bar{E}$. Pour justifier cette définition, il faut montrer naturellement que, si au lieu de U et f , on choisit un autre ensemble analogue U' et une autre application analogue f', on obtient un système fondamental équivalent à W_V . En effet, soit U" la composante connexe de z_0 dans $U \cap U'$; par hypothèse, c'est un voisinage de z_0. Pour $z \in U''$, l'application $f'^{-1} \circ f$ est un U"-automorphisme de $U'' \times F$, donc de la forme $(z,\alpha) \longrightarrow (z,\sigma_z\alpha)$, où σ_z est une permutation de F , dépendant de z de telle sorte que $(z,\alpha) \longrightarrow \sigma_z\alpha$ soit une application continue de $U'' \times F$ dans F ; F étant discret, cette application est donc constante sur chaque composante connexe $U'' \times \{\alpha\}$ de $U'' \times F$, ce qui implique évidemment que σ_z est constant sur U" . Comme d'ailleurs on a $\varphi_0(\alpha) = f(z_0,\alpha) = f'(z_0,\alpha)$ quel que soit α , σ_{z_0} est la permutation identique de F ; il en est donc de même de σ_z quel que soit z . Il est clair alors que, dès que V est un voisinage de z_0 dans U" , on a $W_V = W'_V$, d'où on conclut que les systèmes de voisinages de φ_0, définis au moyen de U et f et de U' et f' respectivement, sont bien équivalents, et aussi que l'ensemble des $\varphi \in \bar{E}$ tels que $\varphi(F) \subset \overset{-1}{\pi}(U)$ est U-homéomorphe à $U \times G$, c'est-à-dire que $\bar{E}$ est un espace fibré principal propre, de base B et de groupe G ; il est immédiat alors que E est l'espace fibré de structure (G,F), associé à $\bar{E}$.

78

ce qui permet la
locale connexité

[N.B.- Si on ne faisait pas l'hypothèse "B localement connexe", on serait obligé de mettre sur G , non la topologie discrète, mais celle de la convergence compacte, ou (ce qui revient au même ici) de la convergence simple, ce qui en fait un groupe totalement discontinu. Il y aurait certainement intérêt à étudier les espaces fibrés à groupe totalement discontinu. Gleason a démontré, pour tout groupe G satisfaisant à des conditions dont je n'ai plus un souvenir exact (connexe, localement compact, il me semble) l'existence d'un "plus grand" groupe connexe Γ tel que $G = \Gamma/\gamma$ avec γ totalement discontinu, ce qui donne une définition du "revêtement universel" et du "groupe de Poincaré" (à savoir Γ et γ) pour un groupe G qui n'est pas localement connexe. C'est là naturellement un théorème d'"application universelle" au sens de Bourbaki-Samuel].

Pour préciser ce qui précède, il faut montrer d'abord comment on obtient les composantes connexes d'un espace fibré principal propre $\bar{E}$, de groupe discret G ; soit $\bar{E}'$ une telle composante ; comme $\bar{E}$ est un revêtement de sa base B , il en est de même de $\bar{E}'$, et $\bar{E}'$ est ouvert dans $\bar{E}$; la projection de $\bar{E}'$ sur B est donc B , d'où résulte que, si $x \in \bar{E}$, il existe $s \in G$ tel que $xs^{-1} \in \bar{E}'$. Les ensembles distincts de la forme $\bar{E}'s$, qui sont évidemment des composantes connexes de $\bar{E}$ et sont donc deux à deux sans point commun, forment donc une partition de $\bar{E}$. Soit g le sous-groupe de G formé des $s \in G$ tels que $\bar{E}'s = \bar{E}'$; alors, si $x \in \bar{E}'$, les points xs, xt appartiendront ou non à une même composante connexe de $\bar{E}$, à savoir $\bar{E}'s$, suivant qu'on a ou non $gs = gt$, c'est-à-dire suivant que s et t appartiennent ou non à une même classe à gauche suivant g . Si U est un ouvert connexe dans B , tel que $\overset{-1}{\pi}(U)$ soit trivial, on pourra identifier $\overset{-1}{\pi}(U)$ avec $U \times G$, et alors $\bar{E}' \cap \overset{-1}{\pi}(U)$ sera de la forme $U \times tg$. Il s'ensuit que $\bar{E}'$ peut être

Evian grapp

considéré comme espace fibré principal propre, de base B et de groupe g.

On va appliquer ceci au problème général discuté plus haut, d'un revêtement quelconque E de B ; on a vu qu'en posant $F = \overset{-1}{\pi}(\{z_0\})$, où z_0 est un point arbitrairement choisi dans B , on peut mettre sur E , d'une manière bien déterminée, une structure d'espace fibré propre (G,F), où G est le groupe des permutations de F . Soit ε l'application identique de F sur F ; c'est un point de l'espace principal $\overline{\overline{E}}$ auquel E est associé ; soit $\overline{\overline{E}}'$ la composante connexe de ε dans $\overline{\overline{E}}$, et g , comme plus haut, l'ensemble des s G tels que $\overline{\overline{E}}'s = \overline{\overline{E}}'$; alors $\overline{\overline{E}}'$ est un espace principal propre, de base B et de groupe g . Soit ψ l'application canonique de $\overline{\overline{E}} \times F$ sur E (définie, avec les notations de tout à l'heure, par $\psi(\varphi,\alpha) = \varphi(\alpha)$). Puisque $\overline{\overline{E}}$ est la réunion des $\overline{\overline{E}}'s$, pour $s \in G$, on a $\psi(\overline{\overline{E}} \times F) = \psi(\overline{\overline{E}}' \times F)$; puisque $\overline{\overline{E}}'$ est ouvert dans $\overline{\overline{E}}$, et que ψ est une application ouverte de $\overline{\overline{E}} \times F$ sur E , ψ induit sur $\overline{\overline{E}}' \times F$ une application ouverte de ce produit sur E, et définit donc sur E une structure fibrée (g,F), d'espace principal $\overline{\overline{E}}'$; de plus, F, g et cette structure sont déterminés d'une manière unique par le choix de z_0. Supposons maintenant E connexe : alors, d'après ce qu'on a vu, g doit opèrer transitivement sur F ; si donc on choisit dans F un point x_0, et qu'on note g' le sous-groupe de g qui laisse x_0 invariant, on peut canoniquement identifier F avec g/g', ce qui permet d'écrire E sous la forme $E = \overline{\overline{E}}'/g'$; et $\overline{\overline{E}}'$, g, g' et l'application de $\overline{\overline{E}}'$ sur E sont déterminés d'une manière unique dès qu'on a choisi le point $x_0 \in E$, ce qui détermine le point $z_0 = \pi(x_0)$. Il est immédiat d'ailleurs qu'un autre choix de x_0 opèrerait seulement un isomorphisme sur g , g' et $\overline{\overline{E}}'$.

81

PAA

groupe G sera bgy

le groupe de Galois

galoisien ?

séparable (...)

Étamer = propre =

principal = galoisien

local ⟹ global

Transformer par Fourier

On sépare les feuillets locaux !

Si, dans la représentation ci-dessus, g' se réduit à l'élément neutre, le revêtement E , qui alors est isomorphe à l'espace principal $\bar{E}'$, sera dit principal [N.B. pour préserver l'analogie avec la théorie de Galois, il faudrait dire "normal" ; on pourrait même envisager de substituer "normal" à "principal" dans toute la théorie des espaces fibrés] ; un tel revêtement peut donc être considéré comme espace fibré principal propre, connexe, de base B ; le groupe g , considéré comme opérant sur E , est un groupe d'homéomorphisme de E sur E qui opère d'une manière simplement transitive sur chaque fibre.

Soient maintenant E, E' deux revêtements principaux de B ; représentons-les comme espaces fibrés, de groupes discrets G, G' respectivement ; soient g un sous-groupe de G, g' un sous-groupe de G' ; soient $H = E/g$, $H' = E'/g'$. Soient π, π' les projections de H, H' sur B . On va déterminer les applications Φ de H' dans H qui appliquent chaque fibre de H' dans la fibre correspondante de H , ou autrement dit qui satisfont à $\pi \circ \Phi = \pi'$. D'après les principes posés plus haut, cela revient à déterminer les sections de l'espace fibré $L = \overset{-1}{\pi'}(H)$ (ici, cette notation est quelque peu ambigüe, et est à éviter) ; cet espace n'est autre que l'ensemble L des points (x',x) des points de $H' \times H$ qui satisfont à $\pi'(x') = \pi(x)$; cet espace peut être considéré comme muni, soit de la projection $(x',x) \longrightarrow x'$ sur H' qui en fait un revêtement de H' (plus précisément, un espace fibré (G G/g) de base H', à savoir justement l'espace $\overset{-1}{\pi'}(H)$), soit de la projection $(x',x) \longrightarrow x$ sur H qui en fait un revêtement de H, soit de la projection $(x',x) \longrightarrow \pi(x)$ qui en fait un revêtement de B , à savoir (conformément aux définitions générales) le produit fibré de H et H' (on notera l'analogie avec le produit tensoriel de deux extensions algèbriques d'un corps ; si on laisse de côté les canulars d'inséparabilité, la décomposition du produit tensoriel somme directe de corps est exactement parallèle à la représentation du produit fibré de deux revêtements comme somme topologique de ses composantes connexes). Soient L_ρ les composantes connexes de L ; chacune d'elles, d'après ce qui précède, peut être considérée comme revêtement, soit de H, soit de H', soit de B . Une section de L, considérée comme revêtement de H', est une application de H' dans L , qui laisse invariante la projection sur H' ; mais une telle application est nécessairement un isomorphisme de H' sur une composante L_ρ [ceci, en vertu du fait suivant, qui aurait dû être mentionné tout au début : toute application continue d'un revêtement connexe de B dans un revêtement connexe de B, conservant les projections sur B, est une application du premier sur le second, et par suite un revêtement connexe ne peut admettre de section que s'il est identique à cette section]. Par conséquent, les applications Φ telles que $\pi \circ \Phi = \pi'$ sont en correspondance biunivoque avec les composantes connexes L_ρ du produit fibré L dont la projection sur H' est biunivoque.

Considérons en particulier les applications, conservant la projection sur B, d'un revêtement principal E , de groupe G , dans un revêtement de la forme $H = E/g$, où g est un sous-groupe de G ; les éléments de H étant les classes xg , pour $x \in E$, le produit fibré L de E et H sera l'ensemble des éléments de $E \times H$ de la forme (x, xsg), avec $x \in E$, $s \in G$; et l'application $(x,xsg) \longrightarrow (x,sg)$ est un homéomorphisme de L sur $E \times (G/g)$; comme les composantes connexes de $E \times (G/g)$ sont évidemment les ensembles $E \times \{sg\}$, il s'ensuit que celles de L sont les images de E par les applications $x \rightarrow (x,xsg)$, pour $sg \in G/g$; la projection de chacune d'elles sur E étant un homéomorphisme, il s'ensuit que chacune définit une application de E sur H , conservant la projection sur B , et qu'il n'y a pas d'autre application de cette sorte.

On obtient ainsi les applications $x \to xsg$ de E sur H , où sg parcourt l'ensemble des éléments de G/g . Pour H = E , on en conclut qu'un revêtement principal E n'admet pas d'autre homéomorphisme en lui-même, transformant chaque fibre en elle-même, que ceux du groupe G auquel il appartient ; G peut donc être identifié avec le groupe de ces homéomorphismes. De plus, si $H = E/g$, si φ est l'application canonique $x \to xg$ de E sur H , et si Φ est une application de H dans lui-même, conservant la projection sur B , on voit que $\Phi \circ \varphi$ doit être de la forme $x \to xsg$, et constante sur chaque classe xg , ce qui implique qu'on doit avoir $gsg = sg$, ou $s^{-1}gs \subset g$; si de plus Φ est un homéomorphisme de H sur H , Φ^{-1} doit avoir les mêmes propriétés, d'où on déduit facilement $s^{-1}gs = g$; les homéomorphismes en question sont donc toutes les applications de la forme $xg \to xsg$, où s appartient au "normalisateur" de g dans G , d'où on conclut que le groupe de ces homéomorphismes ne peut être transitif sur les fibres de H que si g est distingué dans G , auquel cas H est un revêtement principal, de groupe G/g ; cette transitivité est donc une condition nécessaire et suffisante pour que H soit principal.

Chaque fois que E est un revêtement principal, et qu'un revêtement H peut être écrit sous la forme $H = E/g$, g étant un sous-groupe du groupe de E , on dira que E <u>domine</u> H ; comme on a vu, une condition nécessaire et suffisante pour cela est que la projection sur E de chacune des composantes du produit fibré de E et H soit un homéomorphisme. On en conclut que si, de deux revêtements principaux, chacun domine l'autre, ils sont isomorphes ; la relation "E domine E' " est donc une relation d'ordre entre classes de revêtements de B (en mettant dans une même classe deux revêtements isomorphes).

On dira qu'un espace B (supposé, comme toujours, connexe et localement connexe) est simplement connexe si la projection sur B de tout revêtement connexe de B est un homéomorphisme, ou, ce qui revient au même, si tout espace fibré propre de base B et de groupe discret est trivial. Tout espace connexe, localement connexe, rétractile, et satisfaisant à (B II), est donc simplement connexe ; exemples : simplexes ouverts ou fermés, étoile (ouverte) d'un simplexe dans un complexe simplicial (star-fini), etc. Si l'espace B admet un revêtement E simplement connexe, E domine tout revêtement connexe H de B ; en effet, la projection sur E de toute composante connexe du produit fibré de E et H sera un homéomorphisme ; d'après ce qui précède, il s'ensuit qu'un tel revêtement E de B, s'il existe, est unique à un B-isomorphisme près ; E s'appellera alors revêtement universel de B , et son groupe s'appellera groupe fondamental de B ; il existe alors une correspondance biunivoque entre les classes de revêtements connexes de B , et les classes de sous-groupes de G conjugués dans G , cette correspondance ayant les propriétés bien connues (analogues aux résultats fondamentaux de la théorie de Galois).

Si E est un revêtement d'un espace B (connexe et localement connexe comme toujours), tout point de E a un voisinage homéomorphe à sa projection sur B , donc E est localement connexe ; si E est connexe, on peut donc considérer des revêtements de E , et se demander si ce seront nécessairement des revêtements de B . Il en sera en tout cas ainsi lorsque B satisfait à la condition :

(LS) B admet un recouvrement (U_i) par des ouverts simplement connexes.

En effet, lorsqu'il en est ainsi, tout revêtement E de B est trivial sur chaque U_i , et tout revêtement de E est trivial sur chacune des composantes connexes des ensembles $\overset{-1}{\pi}(U_i)$, π étant la projection de E sur B .

85

Ya t'il des histoires de structure uniforme ? ?

On peut conclure de là que, si B satisfait à (LS), et si un revêtement E de B domine tous les revêtements de B , E est simplement connexe. Sinon, en effet, E admettrait un revêtement connexe E' dont la projection sur E ne serait pas un homéomorphisme, et, en vertu de (LS), E' serait un revêtement de B , donc de la forme E"/g , où E" est un revêtement principal de B, et g un sous-groupe du groupe de E" ; en écrivant alors que E domine E" (qui lui-même, d'après les hypothèses qu'on vient de faire, domine E), on voit que E et E" sont isomorphes, d'où contradiction.

Lorsqu'un espace B satisfait à (LS), il admet un revêtement universel; on dispose, à ce qu'il semble, de trois méthodes pour en démontrer l'existence, dont deux sont "constructives". La première est la méthode des applications universelles (méthode Chevalley, conforme à la méthode générale de Samuel). Soit d'abord (E_ι) une famille quelconque de revêtements principaux d'un espace B , de groupes respectifs G_ι ; le produit fibré des E_ι sera un espace fibré, propre ou non, de base B et de groupe $\prod_\iota G_\iota$, et n'est donc pas un revêtement de B si l'ensemble des indices ι est infini. Mais supposons que tout point de B admette un voisinage U dont l'image réciproque dans chacun des E_ι soit triviale ; on peut alors, d'une manière évidente, changer la topologie du produit fibré des E_ι de telle sorte que l'image réciproque de U dans ce produit avec la nouvelle topologie soit U-homéomorphe au produit de U par le produit algèbrique Γ des G_ι , Γ étant muni de la topologie discrète. Avec cette nouvelle topologie, le produit en question devient un revêtement de B , et plus précisément un espace fibré principal propre, de base B et de groupe discret Γ ; de plus, en tenant compte de ce qui a été fait plus haut, et du fait qu'on peut, quel que soit ι , écrire Γ sous la forme $\Gamma = G_\iota \times \Gamma_\iota$ avec Γ_ι

87

Revêtements = extensions alg- transcendantes-

Esp. fibrés =

discret, on voit que chaque composante connexe de ce revêtement est un revêtement qui domine tous les E_i . Si donc (U) est un recouvrement ouvert donné de B , et qu'on puisse, d'une manière quelconque, obtenir une limitation de la puissance de l'ensemble des classes de revêtements connexes de B qui sont triviaux sur chacun des U , on pourra, par cette construction, former un revêtement qui les domine tous ; en particulier, si B satisfait à (LS), on pourra former un revêtement universel.

Pour obtenir cette limitation, on procède comme suit. Soit E un revêtement connexe de B ; soit π sa projection sur B ; soit (U_i) un recouvrement de B , tel que chaque ensemble $\overset{-1}{\pi}(U_i)$ soit U_i-homéomorphe à $U_i \times F$, où F est l'une des fibres de E , les U_i étant ouverts et connexes ; soit, pour chaque i , f_i un U_i-homéomorphisme de $\overset{-1}{\pi}(U_i)$ sur $U_i \times F$, de sorte que les ensembles $\overset{-1}{f_i}(U_i \times \{\alpha\})$, pour $\alpha \in F$, sont les composantes connexes de $\overset{-1}{\pi}(U_i)$; ces ensembles forment d'ailleurs un recouvrement ouvert $(U_{i\alpha})$ de E , de sorte que, si x_0 et x sont deux points quelconques de E , il existe une suite finie formée d'ensembles $U_{i\alpha}$, dont chacun ait un point commun avec le précédent, le premier contenant x_0 et le dernier contenant x . Supposons x_0 choisi une fois pour toutes ; soit $z_0 = \pi(x_0)$; considérons toutes les suites finies de la forme $(z_0, U_{i_0}, z_1, U_{i_1}, \ldots, z_n, U_{i_n}, z)$, où $z_0 \in U_{i_0}$, $z_p \in U_{i_{p-1}} \cap U_{i_p}$ pour $1 \leqslant p \leqslant n$, et $z \in U_{i_n}$; à une telle suite correspond une suite et une seule de la forme $(x_0, U_{i_0\alpha_0}, \ldots, x_n, U_{i_n\alpha_n}, x)$, où $\pi(x_p) = z_p$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$, $\pi(x) = z$, $x_0 \in U_{i_0\alpha_0}$, $x_p \in U_{i_{p-1}\alpha_{p-1}} \cap U_{i_p\alpha_p}$ pour $1 \leqslant p \leqslant n$, et $x \in U_{i_n\alpha_n}$. Puisque, pour tout $x \in E$, on peut former une telle suite, il s'ensuit que la puissance d'une fibre de E est au plus égale à la puissance de l'ensemble des suites $(z_0, U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}, z)$, pour z_0 et z donnés, ce qui suffit pour démontrer comme il a été expliqué l'existence d'un "revêtement universel relatif au recouvrement

89

attention - l'anneau dans Chevalley (Lie gr.)

90

(U_i)" (c'est-à-dire d'un revêtement principal qui domine tout revêtement trivial sur chacun des U_i), et en particulier celle du revêtement universel (au sens absolu) lorsque (LS) est satisfait.

Avec un peu plus d'attention, on peut tirer, de la considération des suites ci-dessus, la construction combinatoire du revêtement universel ; de toute manière, cette construction paraît indispensable, ce qui semble réduire la portée de la méthode Chevalley à un simple exercice dès qu'on ne veut pas se contenter du simple théorème d'existence. Soit, comme plus haut, (U_i) un recouvrement de B par des ouverts connexes. On va lui attacher un complexe abstrait à deux dimensions, qu'on appellera sa carcasse [on a déjà le nerf, le squelette, la carapace, l'épiderme... (sans compter la "matrice immonde") : à quand une chaire d'Anatomie topologique ? (et même tératopologique !)] . Ici, contrairement à ce qui se passe pour le nerf d'un recouvrement, il ne paraît pas désirable de "réaliser" la carcasse comme complexe euclidien, et il paraît préférable de la considèrer comme "complexe abstrait", c'est-à-dire ensemble d'éléments qui seront de trois sortes, les sommets, les arêtes, et les faces. Les sommets a_i seront en correspondance biunivoque avec les U_i ; les arêtes $b_{i\varkappa,\alpha}$ seront en correspondance biunivoque avec les composantes connexes $U_{i\varkappa,\alpha}$ des intersections $U_{i\varkappa} = U_i \cap U_\varkappa$, pour $i \neq \varkappa$; les faces $c_{i\varkappa\lambda,\alpha\beta\gamma}$ seront en correspondance biunivoque avec les ensembles non vides de la forme $U_{i\varkappa,\alpha} \cap U_{\varkappa\lambda,\beta} \cap U_{\lambda i,\gamma}$, pour i , $\varkappa$, λ distincts ; on définit, d'une manière évidente, les sommets d'une arête, et les sommets et arêtes d'une face. Par un chemin du complexe, on entendra une suite finie de la forme $(a_0, b_0, a_1, \ldots, a_n, b_n, a_{n+1})$, où, pour chaque i , b_i est une arête de sommets a_i, a_{i+1} ; a_0, a_{n+1} s'appellent l'origine et l'extrémité du chemin ; on définit de la manière habituelle une loi de composition

91

c'est de l'algèbre tensorielle -

Réserver les méthodes ??
Prématuré de décider.

associative) entre chemins, (P,Q) $\longrightarrow$ PQ , définie chaque fois que l'origine de Q coïncide avec l'extrémité de P , et aussi le chemin P^{-1} qui a pour origine et extrémité respectivement l'extrémité et l'origine de P) ; le chemin (a_o) est unité à gauche pour les chemins d'origine a_o, et à droite pour les chemins d'extrémité a_o . L'espace B étant connexe, la carcasse est connexe (i.e. il existe un chemin d'origine et extrémité données). Soit R la relation d'équivalence la plus stricte sur l'ensemble des chemins qui soit compatible avec la loi de composition (i.e. : $P \sim P'$, $Q \sim Q'$ entraîne $PQ \sim P'Q'$), et telle que : 1) si b est une arête de sommets a,a', on ait $(a,b,a',b,a) \sim (a)$; 2) si c est une face de sommets a, a', a" et d'arêtes b, b', b" , on ait $(a,b,a',b',a'',b'',a) \sim (a)$. Il est immédiat, par récurrence, que, si P est un chemin quelconque d'origine a , on a $P.P^{-1} \sim (a)$. On en conclut que les classes d'équivalence de chemins forment, par passage au quotient, un groupoïde, le groupoïde fondamental du complexe ; il est connexe ; ses unités sont les classes des chemins (a), où a est un sommet quelconque.

[Il devient nécessaire ici de faire quelques remarques évidentes sur les représentations d'un groupoïde dans un groupe, qui auraient dû être faites au S des groupoïdes. Soit Γ un groupoïde connexe ; soient e_o une unité arbitrairement choisie dans Γ , et Γ_o le groupe des éléments de Γ qui ont e_o pour unité à gauche et à droite ; pour chaque unité $e \neq e_o$ de Γ , choisissons un élément x_e ayant e_o pour unité à gauche et e pour unité à droite. Alors, si φ_o est une représentation de Γ_o dans un groupe G , il y aura une représentation et une seule φ de Γ dans G , prolongeant φ_o, et pour laquelle les $\varphi(x_e)$ ont des valeurs arbitrairement données. Disons que deux représentations φ, φ' de Γ dans G sont équivalentes s'il existe une application θ de l'ensemble les unités de Γ dans G telle que l'on ait $\varphi'(x) = \theta(e)^{-1}\varphi(x)\,\theta(e')$ lorsque e, e' sont les unités à gauche et à droite de x . Alors, pour que φ, φ' soient équivalentes, il faut et il suffit que les représentations qu'elles induisent sur Γ_0 se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme intérieur de G] .

Soit alors E un revêtement principal de B , de groupe G , qui soit trivial sur chacun des U_ι ; pour chaque ι , choisissons (arbitrairement) un isomorphisme f_ι de $\pi^{-1}(U_\iota)$ sur $U_\iota \times G$, qui sera donc de la forme $x \longrightarrow f_\iota(x) = (\pi(x), s(x))$, avec $s(x) \in G$; de plus, comme les $U_\iota \times \{s\}$ sont les composantes connexes de $U_\iota \times G$, tout autre isomorphisme analogue sera de la forme $f'_\iota(x) = (\pi(x), t_\iota s(x))$, avec $t_\iota \in G$. Si $P = (a_{\iota_0} ; b_{\iota_0 \iota_1, \alpha_0}, \dots, a_{\iota_n})$ est un chemin de la carcasse de (U_ι), on peut, d'une manière unique, déterminer par récurrence une suite $(s_0, \dots, s_n)$ d'éléments de G de telle sorte qu'on ait $s_0 = e$, et, pour $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $f^{-1}_{\iota_p}(U_{\iota_p \iota_{p+1}, \alpha_p} \times \{s_p\}) = f^{-1}_{\iota_{p+1}}(U_{\iota_p \iota_{p+1}, \alpha_p} \times \{s_{p+1}\})$; on posera alors $s(P) = s_n$. On vérifie immédiatement que l'on a $s(PQ) = s(P)s(Q)$, et que $s(P)$ ne dépend que de la classe de P , pour la relation d'équivalence définie plus haut, de sorte que $s(P)$ définit une représentation dans G du groupoïde fondamental de la carcasse. Cette représentation dépend du choix des f_ι , mais la classe de la représentation (au sens défini plus haut) n'en dépend pas, de sorte que, si Γ_0 est le groupe des classes de chemins ayant pour origine et extrémité un point donné a_0 , la représentation de Γ_0 dans G , déterminée par $s(P)$, est déterminée d'une manière unique à un automorphisme intérieur près de G .

Réciproquement, supposons donnée une représentation dans un groupe G du groupoïde fondamental Γ ; elle détermine une application $P \longrightarrow s(P)$

94

l'ensemble des chemins de la carcasse dans G , constante sur les classes de chemins équivalents, et telle que $s(PQ) = s(P)s(Q)$. Posons $[(a_\iota, b_{\iota\varkappa,\alpha}, a_\varkappa)] = s_{\iota\varkappa,\alpha}$; et définissons un espace fibré principal propre de base B , de groupe G , par la méthode des cartes, en formant la somme topologique des produits $U_\iota \times G$, et identifiant un point (x,t) de $U_\iota \times G$ avec un point (x',t') de $U_\varkappa \times G$ lorsque $x = x' \in U_{\iota\varkappa,\alpha}$, et $t = s_{\iota\varkappa,\alpha} t'$; on vérifie immédiatement, en effet, que cette relation entre points (x,t), (x',t') de la somme des $U_\iota \times G$ est bien une relation d'équivalence, ce fait résultant des hypothèses faites sur s(P). Du fait que les U_ι sont connexes et que la carcasse est connexe, on déduit que l'espace ainsi défini est connexe ; si d'ailleurs s(P) est la représentation déduire comme plus haut d'un espace E donné a priori, on vérifie que l'espace qu'on vient de construire est isomorphe à E . On a ainsi le moyen de construire tous les revêtements principaux de B qui sont triviaux sur les U_ι . En particulier, si on prend pour G le groupe Γ_o , et qu'on considère une représentation de Γ dans Γ_o qui induise sur Γ_o l'automorphisme identique, on obtient un revêtement principal de B , de groupe Γ_o , qui domine (d'une manière évidente) tous les revêtements qui sont triviaux sur chacun des U_ι ; ce revêtement pourra être appelé le revêtement <u>universel</u> relatif au recouvrement (U_ι). Si de plus les U_ι sont simplement connexes, alors tout revêtement de B est trivial sur chacun des U_ι , de sorte qu'on a ainsi construit le revêtement universel de B , et que le groupe Γ_o déduit du groupoïde fondamental de la carcasse n'est autre que le groupe fondamental de B .

On arrive au même résultat, d'une manière non combinatoire, par la méthode des chemins, qu'on va présenter maintenant en la généralisant quelque peu, au moyen d'une notion qui se présente plus naturellement que les chemins dans beaucoup d'applications (prolongement analytique), et que le rapporteur a provisoirement baptisée "chenilles". Observons d'abord qu'on a, pour les revêtements, non seulement le théorème de "relèvement des homotopies", mais un théorème de "relèvement des espaces simplement connexes", comme suit : soit E un revêtement de B ; soit π la projection de E sur B ; soit f une application dans B d'un espace simplement connexe B' ; alors il existe une application F et une seule de B' dans E, telle que $f = \pi \circ F$ et prenant en un point $b \in B$ une valeur donnée $F(b) \in \overset{-1}{\pi}[\{f(b)\}]$; en effet, d'après le lemme (p.30-31), les F telles que $f = \pi \circ F$ sont en correspondance biunivoque avec les sections de $\overset{-1}{f}(E)$, qui, puisque B' est simplement connexe, est de la forme $B' \times H$ avec H discret.

[N.B. De là, on déduit facilement ce qui suit, qui précise et généralise, pour les revêtements, le relèvement des homotopies : soient E,B et π comme plus haut ; soit Z simplement connexe ; soit $z_0 \in Z$; soit B' (comme toujours) connexe et localement connexe ; soit f une application de $Z \times B'$ dans B ; soit f_0 l'application de $\{z_0\} \times B'$ dans B, induite par f ; soit F_0 une application de $\{z_0\} \times B'$ dans E, telle que $f_0 = \pi \circ F_0$; alors il existe une application F de $Z \times B'$ dans E, et une seule, induisant F_0 sur $\{z_0\} \times B'$ et satisfaisant à $f = \pi \circ F$. On en conclut par exemple (en prenant $Z = I = [0,1]$) que le théorème de relèvement des homotopies est vrai ici, même sans la condition (B II) qu'on a été obligé de faire figurer dans l'énoncé général, et plus particulièrement que tout espace connexe, localement connexe et rétractile est simplement connexe. Par ailleurs, on signale (d'après Spanier) une généralisation du "relèvement des espaces simplement connexes", qui est parfois utile : soient E un revêtement de B, E' un revêtement de B', π et π' les projections correspondantes, f une application de B' dans B ; on demande s'il existe une application F de E' dans E telle que-

$f \circ \pi' = \pi \circ F$; on obtient facilement une condition nécessaire et suffisante au moyen des sous-groupes fondamentaux de B et B' auxquels E et E' appartiennent respectivement, et de l'homomorphisme, induit par f , du groupe fondamental de B' dans celui de B .

Par une <u>chenille</u> dans B , on entendra une application continue f , dans B , d'un espace X simplement connexe sur lequel on a marqué deux point a,b ; les points f(a), f(b) seront appelés ~~origine~~ tête et ~~extrémité~~ queue de la chenille en question, qui sera notée (X;a,b;f). Soient $P = (X;a,b;f)$, $P' = (X;a',b';f')$ deux chenilles, telles que l'origine $f'(a')$ de P' coïncide avec l'extrémité f(b) de P ; soit X" l'espace simplement connexe déduit de la somme topologique de X et X' par identification du point b de X avec le point a' de X' ; soit f" l'application de X" dans B qui coïncide avec f sur X , et avec f' sur X' ; alors la chenille $P'' = (X'';a,b';f'')$ sera dite le composé de P et P', et on écrira $P'' = PP'$. Si $P = (X;a,b;f)$, on écrira $P^{-1} = (X;b,a;f)$. Si X est réduit au point a de B , et si f est l'application identique de X dans B , la chenille $E_a = (X;a,a;f)$ est unité à gauche pour toutes les chenilles d'origine a, et à droite pour toutes les chenilles d'extrémité a . On dira que B est connexe "au sens des chenilles" si, quels que soient z et z' dans B , il existe une chenille d'origine z et d'extrémité z' ; il en sera certainement ainsi si B est connexe au sens des chemins, et aussi si B admet un recouvrement par des ouverts simplement connexes ; on supposera désormais que B est connexe au sens des chemins.

Dans l'ensemble des chenilles, on considère la relation d'équivalence la plus stricte qui soit compatible avec la loi de composition (c'est-à-dire que $P \sim P'$, $Q \sim Q'$ entraîne $PQ \sim P'Q'$), et qui satisfasse à la condition suivante : soient X et Y simplement connexes, φ une application de Y dans X , f une application de X dans B ; alors on aura, quels que soient a et b dans Y, $(Y;a,b;f\circ\varphi) \sim (X;\varphi(a),\varphi(b);f)$. On en conclut d'abord que toute chenille de la forme $(X;a,a;f)$ est équivalente à $E_{f(a)}$, où E_b, pour $b \in B$, est la chenille définie plus haut ; puis, que, si P est une chenille quelconque d'origine b, $P.P^{-1}$ est équivalente à E_b. On en conclut que les classes d'équivalence des chenilles forment un groupoïde, le groupoïde fondamental de B, dont les unités e_b, qui ne sont autres que les classes des chenilles E_b, sont en correspondance biunivoque avec les points de B.

Soit z_o un point arbitrairement choisi dans B ; soit E l'ensemble des classes de chenilles d'extrémité z_o ; le groupe $\Gamma(B,z_o)$ des classes de chenilles d'origine et d'extrémité z_o peut être considéré comme opérant (sans point fixe) sur E. Si B admet un recouvrement par des ouverts simplement connexes, on pourra, comme suit, mettre une topologie sur E : soit x_1 un élément de E ; ce sera une classe de chenilles, d'extrémité z_o, dont l'origine sera un point z_1 de B ; soit U un ouvert simplement connexe contenant z_1 ; soit V un voisinage quelconque de z_1 dans U. Soit P_1 une chenille de classe x_1 ; pour tout $z \in U$, soit P_z la chenille $(U;z,z_1;i)$, où i est l'application identique de U dans B ; soit W_V l'ensemble des classes des chenilles P_zP_1 pour $z \in V$; on prendra les W_V comme système fondamental de voisinages de x_1 dans E ; on vérifie facilement que tout autre choix de U remplacerait ce système par un autre équivalent. En posant de plus $z_1 = \pi(x_1)$, E se trouve défini comme espace fibré principal propre, de base B et de groupe $\Gamma(B,z_o)$. Par un raisonnement facile et bien connu, on montre alors que E domine tout revêtement de B et est donc le revêtement universel de B. Comme on l'a fait voir plus haut, ce revêtement est simplement connexe.

Bien que les chenilles puissent ainsi tenir lieu des chemins (et soient même plus "naturelles" à certains égards), il ne semble pas qu'on puisse se dispenser des chemins, en particulier lorsqu'il s'agit de passer aux groupes d'homotopie supérieurs (voir IIè partie du rapport) Il importe donc d'avoir des conditions pour que : a) toute classe de chenilles contienne un chemin ; b) deux chemins équivalents en tant que chenilles le soient aussi en tant que chemins, c'est-à-dire se déduisent l'un de l'autre par homotopie avec origine et extrémité fixes. Ces conditions sont évidemment équivalentes aux suivantes : a') le revêtement universel (simplement connexe) E est connexe au sens des chemins ; b') tout chemin fermé sur E est homotope à zéro (i.e. à un chemin réduit à un point), ou, ce qui revient au même, l'espace des chemins fermés dans E (applications continues d'un cercle dans E, avec la topologie de la convergence compacte) est connexe au sens des chemins. On observera que, si un espace X est tel que, quel que soit $x \in X$, tout point suffisamment voisin de x puisse être joint à x par un chemin dans X, les composantes connexes de X au sens des chemins sont des ouverts (et ne sont donc autres que les composantes connexes de X au sens de la topologie générale), de sorte que, si de plus X est connexe, il l'est aussi au sens des chemins. Supposons alors que B satisfasse à :(LCC) quels que soient $z \in B$, et le voisinage V de z dans B, il existe un voisinage V' de z dans V tel que tout point de V' puisse être joint à z par un chemin dans V ("connexion locale au sens des chemins" ; il revient au même de supposer que les composantes connexes au sens des chemins de tout ouvert dans B sont des ouverts) ; alors tout revêtement de B y satisfait aussi, donc tout revêtement connexe de B, et en particulier le revêtement universel E, est connexe ; par suite, (LCC) entraîne a') et a). Supposons de plus que B satisfasse à la condition suivante :

tout point de B a un voisinage V tel que tout chemin fermé dans V soit homotope à zéro dans B ; alors E satisfait à la même condition. Il y aura alors un recouvrement (U_i) de E par des ouverts, connexes au sens des chemins, tel que tout chemin fermé dans un U_i soit homotope à zéro dans E . L'application de la méthode combinatoire, décrite ci-dessus, à ce recouvrement, permet alors de vérifier b'), si l'on tient compte du fait que E est simplement connexe. [N.B. Le rapporteur se déclare, tout le premier, dégoûté de cette manière de terminer la démonstration, qu'il n'a même pas eu le courage de vérifier en détail jusqu'au bout. Une autre manière de procéder serait la suivante : les conditions qu'on vient d'imposer à B entraînent que, si X est l'espace des chemins fermés dans E , avec la topologie de la convergence compacte, tout point suffisamment voisin d'un point donné x de X peut être joint à x par un chemin dans X ; par suite, il suffirait, pour démontrer b) ou b'), de faire voir que X est connexe, et, pour cela, démontrer que l'hypothèse "X non connexe" entraîne l'existence d'un revêtement non trivial de E . C'est ce qu'on vérifie, en effet, en appliquant la méthode générale de définition d'un revêtement par les classes de chemins, c'est-à-dire qu'ainsi on perd tout le bénéfice de la méthode des chenilles. Arrivé là, le rapporteur se dégonfle, et met la question au concours].

<u>Deuxième exemple d'espaces fibrés</u> : <u>groupe abélien</u>

On va commencer par examiner en général le problème suivant. Soient G un groupe topologique, Z un sous-groupe discret du centre de G , et soit $\gamma = G/Z$. Soit H un espace fibré principal propre, de base B et de groupe γ ; il s'agit de savoir s'il existe un espace fibré principal propre E , de base B et de groupe G , tel que H soit B-isomorphe à E/Z .

Plus exactement, on se donne un recouvrement ouvert (U_ι) de B, tel que H soit trivial sur chacun des U_ι, et on demande s'il existe un E satisfaisant aux conditions ci-dessus et trivial sur chacun des U_ι ; cette dernière restriction n'en est naturellement pas une si les U sont tels que tout espace fibré propre de base U_ι soit trivial, donc en particulier si les U_ι sont rétractiles et satisfont à (B II). Cela posé, on procède par la méthode des cartes ; l'espace H peut être considéré comme défini par des applications continues $\sigma_{\iota\varkappa}$ des $U_{\iota\varkappa} = U_\iota \cap U_\varkappa$ dans γ, satisfaisant à $\sigma_{\iota\lambda} = \sigma_{\iota\varkappa}\sigma_{\varkappa\lambda}$. Supposons γ connexe et localement connexe, de sorte que G soit un revêtement de γ, de groupe Z ; et supposons que chacune des composantes connexes de chacun des $U_{\iota\varkappa}$ soit ouverte et simplement connexe (ce sera le cas, en particulier, si (U_ι) est un épiderme) ; alors on peut "relever" dans G les $\sigma_{\iota\varkappa}$, c'est-à-dire déterminer des applications continues $s_{\iota\varkappa}$ des $U_{\iota\varkappa}$ dans G, telles que, si φ est l'homomorphisme canonique de G sur G/Z, on ait $\sigma_{\iota\varkappa} = \varphi \circ s_{\iota\varkappa}$; alors $s_{\iota\lambda}^{-1} s_{\iota\varkappa} s_{\varkappa\lambda}$ sera une application continue de $U_{\iota\varkappa\lambda} = U_\iota \cap U_\varkappa \cap U_\lambda$ dans Z, donc constante sur chaque composante connexe de cet ensemble. Pour simplifier les notations, supposons que (U_ι) soit un épiderme, donc que les U_ι et leurs intersections non vides soient connexes, et simplement connexes. Alors, si on pose $z_{\iota\varkappa\lambda} = s_{\iota\lambda}^{-1} s_{\iota\varkappa} s_{\varkappa\lambda}$, ce sera là une application constante de $U_{\iota\varkappa\lambda}$ dans Z ; on notera alors $Z_{\iota\varkappa\lambda}$ la valeur de cette fonction ; de plus, puisque les $\sigma_{\iota\varkappa}$ satisfont à $\sigma_{\iota\iota} = \varepsilon$ (ε étant l'élément neutre de γ), $\sigma_{\varkappa\iota} = \sigma_{\iota\varkappa}^{-1}$, on peut supposer que les $s_{\iota\varkappa}$ ont été choisis de manière à satisfaire aux relations analogues, de sorte que $z_{\iota\varkappa\lambda}$ est une fonction alternée des indices $\iota, \varkappa, \lambda$. D'ailleurs, si les $\sigma_{\iota\varkappa}$ sont considérés comme donnés, tout autre choix des $s_{\iota\varkappa}$, satisfaisant aux conditions indiquées, sera de la forme

$s'_{\iota\varkappa} = s_{\iota\varkappa} z_{\iota\varkappa}$, où $z_{\iota\varkappa}$ est une application continue, donc constante, de $U_{\iota\varkappa}$ dans Z , alternée par rapport aux indices ι , $\varkappa$, et par suite $z_{\iota\varkappa\lambda}$ sera multiplié par $z^{-1}_{\iota\lambda} z_{\iota\varkappa} z_{\varkappa\lambda}$; enfin, si, H étant donné, on fait un autre choix des $\sigma_{\iota\varkappa}$, qui s'exprimera donc par $\sigma'_{\iota\varkappa} = \sigma^{-1}_{\iota} \sigma_{\iota\varkappa} \sigma_{\varkappa}$, où σ_{ι} est une application continue arbitraire de U_{ι} dans γ , on pourra (puisque U_{ι} est simplement connexe) "relever" à G les σ_{ι} , ce qui remplacera les $s_{\iota\varkappa}$ par $s^{-1}_{\iota} s_{\iota\varkappa} s_{\varkappa}$ et ne changera pas les $z_{\iota\varkappa\lambda}$. Enfin, si $U_{\iota\varkappa\lambda\mu}$ n'est pas vide, on vérifie aussitôt qu'on a $z_{\varkappa\lambda\mu} z^{-1}_{\iota\lambda\mu} z_{\iota\varkappa\mu} z^{-1}_{\iota\varkappa\lambda} = e$. Le groupe de cohomologie (de dimension 2) du nerf de l'épiderme (U_{ι}) s'introduit donc de lui-même, et on voit que l'espace H détermine, d'une manière unique, une classe de cohomologie de dimension 2 de ce nerf, à savoir la classe du cocycle $(z_{\iota\varkappa\lambda})$, à coefficients dans Z ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un espace E , tel que $H = E/Z$, est alors qu'on puisse choisir les $s_{\iota\varkappa}$ de manière à avoir $z_{\iota\varkappa\lambda} = e$, ou autrement dit que la classe en question s'annule. De plus, lorsqu'il en est ainsi, les classes d'espaces E non B-isomorphes entre eux, satisfaisant à la question, sont en correspondance biunivoque avec les classes de cohomologie de dimension 1 du nerf de l'épiderme, à coefficients dans Z. Lorsque B a un épiderme, la question est donc entièrement résolue ; de plus, on a ainsi attaché, à tout espace H de base B et de groupe γ , un invariant, à savoir la classe de cohomologie du cocycle $(z_{\iota\varkappa\lambda})$; c'est là naturellement une obstruction d'un type particulier.

[N.B. Le succès (relatif) de la méthode ci-dessus tient essentiellement, comme on voit, au fait que Z est dans le centre de G ; il serait sûrement très intéressant de pouvoir traiter le même problème sans cette hypothèse. D'autre part, avec les hypothèses ci-dessus, il y aurait lieu également d'aborder le problème en utilisant la théorie des revêtements ; non seulement G est un revêtement de γ , mais E , quand il existe, est un revêtement de H , de sorte que l'étude a priori du groupe fondamental de H permettrait certainement de traiter le problème autrement. Bien ~~entendu, le problème de la détermination des groupes d'homotopie de ces espaces~~ ? ; comme il a déjà été dit, le théorème de relèvement des homotopies fournit immédiatement sur ces groupes des indications importantes, mais incomplètes, qui constituent apparemment tout ce qu'on sait de général sur la question actuellement].

La méthode ci-dessus fournit des indications assez précises sur les espaces fibrés dont le groupe est un groupe abélien "élémentaire" (produit d'un groupe fini et d'un groupe $R^m \times T^n$; le facteur R^m peut bien entendu être éliminé immédiatement par application des théorèmes de la I$^{\text{è}}$ partie). On va se borner au cas, suffisamment typique, où le groupe est $T = R/Z$, et où la base admet un épiderme (U_i). La méthode ci-dessus permet alors d'attacher, à tout espace fibré principal propre, de base B et de groupe T, une classe de cohomologie de dimension 2 du nerf de (U_i), à coefficients dans Z ; l'annulation de cette classe est une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace en question puisse être obtenu, par passage au quotient, à partir d'un espace de groupe R ; mais celui-ci est nécessairement trivial, de sorte que l'annulation de la classe de cohomologie est nécessaire et suffisante pour que l'espace étudié soit trivial. Soit alors H l'espace en question, et désignons par C(H) la classe de cohomologie qui lui est associée ; il est facile, au moyen des méthodes ci-dessus, de montrer que C(H) est l'unique invariant de H , c'est-à-dire que, si $C(H) = C(H')$, H et H' sont B-isomorphes. Mais on arrive au même résultat en définissant comme suit une loi de composition entre espaces H de base B et de groupe T .

Soient H, H' deux tels espaces ; soit H'' leur "produit fibré", qui est donc un espace de base B et de groupe $T \times T$; soit g le sous-groupe de $T \times T$ formé des éléments (s,t) tels que $st = e$; alors H''/g est un espace de base B et de groupe $(T \times T)/g = T$, qui sera par définition le produit de H, H'. On vérifie facilement qu'au moyen de cette loi de composition, les classes d'espaces H (par rapport à la B-isomorphie) forment un groupe, et que C(H) est un isomorphisme de ce groupe sur le groupe de cohomologie de dimension 2 , à coefficients entiers, du nerf de (U_i). On a ainsi complètement décrit l'ensemble de ces classes; on a aussi, si on veut, au moyen des espaces fibrés, une définition du groupe de cohomologie qui s'introduit d'elle-même, et qui est l'une des transitions naturelles de la topologie préhomologique à l'homologie.

On signale aussi que, de même que les espaces fibrés à fibre discrète permettent en quelque sorte d'annuler le groupe fondamental d'un espace donné (en passant au revêtement universel de cet espace), les espaces fibrés à groupe abélien permettent, de même, d'annuler le groupe de cohomologie de dimension 2 (en passant à un espace fibré "universel" convenablement défini). Il y a lieu de se demander si on peut, au moyen d'espaces fibrés convenablement construits, agir de même sur d'autres groupes de cohomologie, ou d'homotopie, ou sur d'autres invariants d'un espace donné. On peut se demander aussi si la méthode des "espaces universels", si utile tant qu'il ne s'agit que de fibres discrètes, ne pourrait pas être appliquée à d'autres sortes d'espaces fibrés (p. ex. espaces fibrés dont le groupe est un groupe de Lie, connexe ou non). Le rapporteur se contente de signaler ces questions.

Autres exemples. Jusqu'ici, c'est dans l'étude des variétés différentiables que la méthode des espaces fibrés a été le plus féconde en résultats. Là, c'est à des groupes de Lie qu'on a affaire ; et, pour les raisons déjà indiquées, on peut, dès qu'il s'agit d'un groupe connexe, passer à son plus grand sous-groupe compact, de sorte que c'est de groupes de Lie compacts (et le plus souvent connexes) qu'il s'agit principalement dans ces applications ; plus spécifiquement, on s'est surtout occupé jusqu'ici du groupe orthogonal (Whitney, Pontrjagin Chern), et plus récemment du groupe unitaire (Chern) ; ces groupes apparaissent d'eux-mêmes en particulier dès qu'on considère l'espace des vecteurs tangents à une variété différentiable (groupe linéaire, qui se ramène aussitôt au groupe orthogonal, ce qui revient à introduire arbitrairement, sur la variété, une structure riemannienne), ou à une variété à structure analytique complexe (groupe linéaire complexe, qui se ramène de même au groupe unitaire, ce qui revient à introduire, arbitrairement aussi, une structure hermitienne sur la variété). Les problèmes d'immersion d'une variété dans une autre conduisant immédiatement aussi à la considération d'espaces fibrés avec les mêmes groupes; il en est de même de tous les problèmes relatifs à l'étude globale des formes différentielles ; une forme différentielle n'est en effet (cf. rapport Schwartz) qu'une section différentiable d'un certain espace fibré (à groupe linéaire) ayant pour base la variété étudiée. Il n'est pas sans intérêt d'observer que ces mêmes méthodes peuvent être introduites avec succès en géomètrie algèbrique (abstraite, sur des corps quelconques). D'autre part, la plupart des espaces particuliers dont l'étude est la plus importante pour la topologie actuelle sont, soit des espaces fibrés, soit donnés d'une manière naturelle comme bases d'espaces fibrés (espaces de groupe, espaces homogènes, etc.). Mais bien entendu les principes généraux exposés dans le présent rapport seraient ab'

tout à fait insuffisants dans toutes ces applications si on n'y ajoutait pas des résultats sur la théorie homologique des espaces fibrés ; là, c'est la notion de classe caractéristique qui est féconde, ainsi que quelques théorèmes particuliers (théorème de dualité de Whitney, théorèmes de Pontrjagin) qui peuvent être considérés, si l'on veut, comme des théorèmes sur la structure homologique des bases d'espaces fibrés "universels", ou plutôt (suivant la terminologie de ce rapport) "classifiants", et en particulier sur la structure homologique des variétés de Grassmann, réelles et complexes (Ehresmann, Chern).

Pour terminer, le rapporteur s'excuse, une fois de plus, du désordre qui subsiste encore dans son rapport, et auquel il ne pourrait remédier sans en retarder beaucoup l'achèvement. Mais ce qui est beaucoup plus grave que ce désordre (qui n'est, après tout, que superficiel), c'est le caractère incomplet et inachevé de la théorie sur beaucoup de points, caractère que le rapporteur a cru devoir mettre bien en évidence plutôt que de chercher à le dissimuler. Il importerait surtout d'éclaircir jusqu'à quel point les conditions, assez peu naturelles, qu'on est provisoirement obligé d'introduire dans la plupart des théorèmes fondamentaux de la théorie sont vraiment indispensables. Cela s'applique tout particulièrement à l'hypothèse "espace fibré propre", ou hypothèse de "trivialité locale" ; en un sens, on peut dire que la théorie des espaces fibrés en est à présent là où l'homologie en était du temps de Poincaré, lorsqu'on ne savait traiter que les variétés et les complexes ; à présent que la théorie de l'homologie sait traiter (en leur infligeant, il est vrai, des carapaces !) tous les espaces compacts, il y a là un déséquilibre frappant, auquel Bourbaki se doit de remédier.

Sursum corda ! Macte animo, generose puer ! Utinam aves caeli, etc...

Notation.

$I^1 = I$ closed interval $|0,1|$.

$I^n = I \times I^{n-1}$

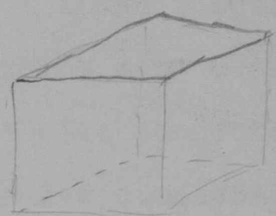
Thus a point $x \in I^n$ is $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $0 \leq x_i \leq 1$. We identify $(x_1,\ldots,x_n)$ with the point $(x_1,\ldots,x_n,0)$ of I^{n+1}. Thus

$$I^1 \subset I^2 \subset \ldots \subset I^n \subset I^{n+1}.$$

Int I^n = set of points of $x = (x_1,\ldots,x_n)$ with $0 < x_i < 1$.

$F^{n-1} = \complement\,\mathrm{Int}\, I^n$ relative to I^n.

$C^{n-1} = \complement(\mathrm{Int}\, I^n \cup \mathrm{Int}\, I^{n-1})$. (Boîte sans couvercle)



Thus

$$C^{n-1} \subset F^{n-1} \subset I^n$$

$$F^{n-1} = C^{n-1} \cup I^{n-1}$$

$$F^{n-2} = C^{n-1} \cap I^{n-1}$$

Extreme cases: $I^1 = \{0,1\}$, $F^0 = (0) \cup (1)$, $I^0 = \mathrm{Int}\, I^0 = (0)$

by conv. $C^0 = (1)$, $F^{-1} = C^{-1} = \emptyset$.

Function spaces

Let X be a topological space. Denote

$$\mathfrak{F}_n(\cancel{X}) = \mathcal{C}(I^n, X)$$

with the compact open topology. If A is a subset of X denote

$$\mathfrak{F}_n(X,A)$$

the subspace of $\mathfrak{F}_n(x)$ consisting of maps $I^n \longrightarrow X$ which carry F^{n-1} into A, i.e. maps $(I^n, F^{n-1}) \longrightarrow (X,A)$. If further a is a point of A, then denote

$$\mathfrak{F}_n(X,A,a)$$

to be the subspace of $\mathfrak{F}_n(X,A,a)$ consisting of maps $(I^n, F^{n-1}, C^{n-1}) \longrightarrow (X,A,a)$. Notice that $\mathfrak{F}_n(X,a) = \mathfrak{F}_n(X,a,a)$. The element

Faut les groupes fondamentaux pour autre chose que les loc. compacts (car – c'est une théorie singulière) of $\mathfrak{F}_n(X,A,a)$ which maps I^n into a will be denoted by (a,n) (bad notation!).

Homotopy. Two elements of $\mathfrak{F}_n(X)$ [or of $\mathfrak{F}_n(X,A)$ or of $\mathfrak{F}_n(X,A,a)$] are called homotopic if they can be joined by a path in $\mathfrak{F}_n(X)$ [or in $\mathfrak{F}_n(X,A)$ or in $\mathfrak{F}_n(X,A,a)$]. This is an equivalence relation. The totality of homotopy classes of $\mathfrak{F}_n(X,A,a)$ is denoted by $\pi_n(X,A,a)$. We write $\pi_n(X,a) = \pi_n(X,a,a)$. The element of $\pi_n(X,A,a)$ corresponding to (a,n) is called inessential and is denoted by $\{a,n\}$. No topology is introduced in $\pi_n(X,A,a)$.

Low cases. $\mathfrak{F}_0(X) = \mathfrak{F}_0(X,A) = \mathfrak{F}_0(X,A,a) = X$ if we identify each point $x \in X$ with the mapping $I^0 \longrightarrow X$ which maps 0 into x. Thus $(a,0) = a$. Homotopy translates into pathwise connectedness in X and $\pi_0(X,a)$ is the totality of the pathwise connected components of X (to be defined earlier), it is independent of the choice of a and may be written $\pi_0(X)$.

$\mathfrak{F}_1(X)$ is the space $\mathcal{C}(I,X)$ of all paths in X, $\mathfrak{F}_1(X,A)$ is the subspace of all paths with endpoints in A, while $\mathfrak{F}_1(X,A,a)$ is the subspace of all paths in X with initial point in a and terminal point in A. $\mathfrak{F}_1(X,a)$ is the subspace of all paths in X with both endpoints in a. In the space $\mathfrak{F}_1(X,a)$ we have a continuous composition law (defined everywhere). Thus $\pi_1(X,a)$ coincides with the fundamental group.

Homotopy groups. Let

$$f\colon I \longrightarrow \mathfrak{F}_n(X,A,a), \quad f(0) = (a,n), \quad f(1) = (a,n)$$

be a path in $\mathfrak{F}_n(X,A,a)$ with both endpoints in (a,n). Thus

$$f \in \mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_n(X,A,a),(a,n)).$$

Define an element

$$f' \in \mathfrak{F}_{n+1}(X,A,a)$$

$$(X)^{A\times B} = (X^A)^B$$

(marche pour les cas compacts
A et B loct compacts)

$$\Omega_{p+q}(X) = \Omega_p(\Omega_q(X))$$

$$\pi_n = \pi_p(\Omega_{n-p})$$ (sauf low cases)

as follows

$$f'(x_1,\ldots,x_{n+1}) = f(x_1)(x_2,\ldots,x_{n+1}).$$

This correspondence $f \longrightarrow f'$ establishes a <u>homeomorphism</u> of the spaces

$$\mathcal{F}_{n+1}(X,A,a) \text{ and } \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_n(X,A,a),(a,n)) \qquad n > 0.$$

Note that this is valid also for $n = 0$, if $A = a$.

Using the above homeomorphism we introduce a continuous composition law in $\mathcal{F}_{n+1}(X,A,a)$ such that $(a,n+1)(a,n+1) = (a,n+1)$. This composition law is compatible with the relation of homotopy and converts $\pi_{n+1}(X,A,a)$ into a group isomorphic with $\pi_1(\mathcal{F}_n(X,A,a),(a,n))$. This also applies to $n = 0$ if $A = a$.

The group $\pi_n(X,A,a)$, $n > 1$ is called the n-th homotopy group of X mod A relative to the base point a. The group $\pi_n(X,a) = \pi_n(X,a,a)$, $n > 0$ is called the n-th (absolute) homotopy group of X relative to the base point a.

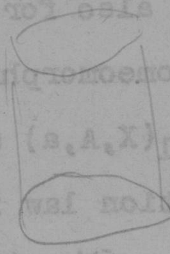
Note that $\pi_1(X,A,a)$ and $\pi_0(X,a)$ are defined but are not groups. Nevertheless the elements $\{a,1\} \in \pi_1(X,A,a)$ and Scurilleus
$\{a\} \in \pi_0(X,a)$ may be regarded as neutral elements.

Note further that $\pi_n(X,A,a)$ for $n > 1$ remain unchanged if X and A are replaced by their pathwise connected components containing a. Thus in studying homotopy <u>groups</u>, we may limit our attention to the case when both X and A are pathwise connected.

<u>Induced homomorphisms</u>. Let $f : (X,A,a) \longrightarrow (Y,B,b)$ be a continuous mapping. Then for any $g \in \mathcal{F}_n(X,A,a)$ we have $f \circ g \in \mathcal{F}_n(Y,B,b)$ and the map $g \longrightarrow f \circ g$ is continuous. Therefore homotopy classes in $\mathcal{F}_n(X,A,a)$ map into homotopy classes in $\mathcal{F}_n(Y,B,b)$ and there results

$$f_* : \pi_n(X,A,a) \longrightarrow \pi_n(Y,B,b).$$

112.



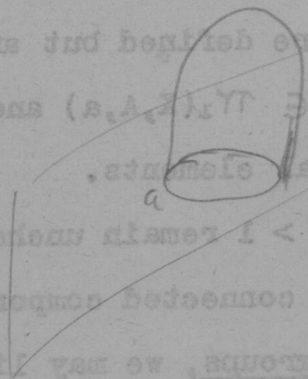
$X = X_0 \times I$

Projection du produit et injection-

Combinaison de g et de

Se ramener à π_1 et π_ε

$\pi_{p+q} = \pi_p(S^q)$ (sauf eu cases)



Suffit de regarder π_2 et π_1

Now prove that f_* is a homomorphism if $n > 1$ (or if $n = 1$ and $A = a$, $B = b$). (Suffit de le faire pour π_1) (Diagram)

(Axiom 1). If $f: (X,A,a) \longrightarrow (X,A,a)$ is the identity map, then f_* is the identity map.

(Axiom 2). If $f: (X,A,a) \longrightarrow (Y,B,b)$ and $g: (Y,B,b) \longrightarrow (Z,C,c)$, then $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

(Homotopy axiom). If the maps $f_0, f_1: (X,A,a) \longrightarrow (Y,B,b)$ are homotopic (i.e. there is a map $F: (X \times I, A \times I, a \times I) \longrightarrow (Y,B,b)$ with $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$), then $f_{0*} = f_{1*}$.

<u>Boundary operator</u>. Each element $f \in \mathcal{F}_n(X,A,a)$ is a map $f: (I^n, F^{n-1}, C^{n-1}) \longrightarrow (X,A,a)$. Since $I^{n-1} \subset F^{n-1}$ and $F^{n-2} \subset C^{n-1}$, this determines a map $\partial f: (I^{n-1}, F^{n-1}) \longrightarrow (A,a)$. Thus $\partial f \in \mathcal{F}_{n-1}(A,a)$. The map $f \longrightarrow \partial f$ is continuous and yields a map

$$\partial: \pi_n(X,A,a) \longrightarrow \pi_{n-1}(A,a).$$

The map ∂ is a homomorphism for $n > 1$.

(Axiom 3). If $f: (X,A,a) \longrightarrow (Y,B,b)$ and f' is the map $(A,a) \longrightarrow (B,b)$ defined by f, then the commutativity relation $\partial f_* = f'_* \partial$

$$\begin{array}{ccc}
\pi_n(X,A,a) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(Y,B,b) \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
\pi_{n-1}(A,a) & \xrightarrow{f'_*} & \pi_{n-1}(B,b)
\end{array}$$

<u>Exactness. Homotopy sequence</u>. Consider (X,A,a) and let $i: (A,a,a) \longrightarrow (X,a,a)$, $j: (X,a,a) \longrightarrow (X,A,a)$ be maps defined by inclusion. Then the sequence of groups and homomorphisms

$$\cdots \longleftarrow \pi_{n-1}(A,a) \xleftarrow{\partial} \pi_n(X,A,a) \xleftarrow{j_*} \pi_n(X,a) \xleftarrow{i_*} \pi_n(A,a) \longleftarrow \cdots$$

is exact (i.e. kernel = image). The proof is very simple. The low part of the sequence requires discussion.

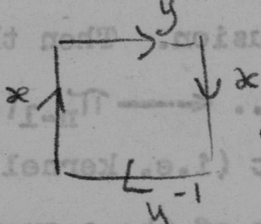
114

Démonstration comme d'exactitude et homologie pour homologie singulière (au concours !

??

(exerc?)

(ça donne les intersections de chaînes dans une variété.



et on prolonge au carré.

$$\pi_0(X,a) \xleftarrow{i_{0*}} \pi_0(A,a) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X,A,a) \xleftarrow{j_*} \pi_1(X,a) \xleftarrow{i_{1*}} \pi_1(A,a)$$

Here the first three objects are not groups. However if we regard $\{a,1\}$ as the neutral element of $\pi_1(X,A,a)$, the kernel of j_* may be defined, and it is still true that kernel j_* = image i_{1*}. Similarly if we regard $\{a\}$ as the neutral element of $\pi_0(A,a)$, it is still true that kernel ∂ = image j_*. With a similar convention we have kernel i_{0*} = image ∂ . One could continue this one step further by suitably defining $\pi_0(X,A,a)$. If X and A are pathwise connected, then $\pi_0(X,a)$ and $\pi_0(A,a)$ reduce to single elements.

One may also consider generalized homotopy sequences. Consider (X,A,B,b), $b \in B \subset A \subset X$, and the maps

$$(A,B,b) \xrightarrow{i} (X,B,b) \xrightarrow{j} (X,A,b).$$

Define $\bar{\partial}: \pi_n(X,A,b) \longrightarrow \pi_{n-1}(A,B,b)$ as the composition of

$$\pi_n(X,A,b) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A,b) \xrightarrow{k_*} \pi_{n-1}(A,B,b)$$

where $k: (A,b) \longrightarrow (A,B,b)$ by inclusion. Then the homomorphisms i_*, j_*, and $\bar{\partial}$ make up an exact sequence. This can be either established directly, or proved algebraically out of axioms 1,2,3 and exactness.

<u>Commutativity</u>. The following theorem will be needed:

<u>Theorem</u>. Let X be a topological space with a continuous internal composition law and an element a such that $aa = a$. Suppose further that the two maps $(X,a) \longrightarrow (X,a)$ given by $x \longrightarrow xa$ and $x \longrightarrow ax$ are homotopic to the identity map of (X,a). Then $\pi_1(X,a)$ is abelian.

The proof is quite easy. Given two paths f and g in X initiating and terminating in a, define a map $F: I^2 \longrightarrow X$ by setting $F(x,y) = f(x)g(y)$. As a corollary of the theorem it follows that

116

$$\pi_0(X,a) \xleftarrow{i_{0*}} \pi_0(A,a) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X,A,a) \xleftarrow{j_*} \pi_1(X,a) \xleftarrow{i_{1*}} \pi_1(A,a)$$

Here the first three objects are not groups. However if we regard $\{a,1\}$ as the neutral element of $\pi_1(X,A,a)$, the kernel of j_* may be defined, and it is still true that kernel j_* = image i_{1*}. Similarly if we regard $\{a\}$ as the neutral element of $\pi_0(A,a)$, it is still true that kernel ∂ = image j_*. With a similar convention we have kernel i_{0*} = image ∂. One could continue this one step further by suitably defining $\pi_0(X,A,a)$. If X and A are pathwise connected, then $\pi_0(X,a)$ and $\pi_0(A,a)$ reduce to single elements.

One may also consider generalized homotopy sequences. Consider (X,A,B,b), $b \in B \subset A \subset X$, and the maps

$$(A,B,b) \xrightarrow{i} (X,B,b) \xrightarrow{j} (X,A,b).$$

Define $\bar{\partial}: \pi_n(X,A,b) \longrightarrow \pi_{n-1}(A,B,b)$ as the composition of

$$\pi_n(X,A,b) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A,b) \xrightarrow{k_*} \pi_{n-1}(A,B,b)$$

where $k: (A,b) \longrightarrow (A,B,b)$ by inclusion. Then the homomorphisms i_*, j_*, and $\bar{\partial}$ make up an exact sequence. This can be either established directly, or proved algebraically out of axioms 1,2,3 and exactness.

Commutativity. The following theorem will be needed:

Theorem. Let X be a topological space with a continuous internal composition law and an element a such that $aa = a$. Suppose further that the two maps $(X,a) \longrightarrow (X,a)$ given by $x \longrightarrow xa$ and $x \longrightarrow ax$ are homotopic to the identity map of (X,a). Then $\pi_1(X,a)$ is abelian.

Définit les systèmes locaux sur un complexe -

The proof is quite easy. Given two paths f and g in X initiating and terminating in a, define a map $F: I^2 \longrightarrow X$ by setting $F(x,y) = f(x)g(y)$. As a corollary of the theorem it follows that if X is a topological group with a as unit, then $\pi_1(X,a)$ is abelian.

Now if $n > 0$ the space $\mathcal{F}_{n+1}(X,A,a)$ which is homeomorphic with $\mathcal{F}_1(\mathcal{F}_n(X,A,a),(a,n))$ satisfies the conditions of the theorem. Therefore $\pi_1(\mathcal{F}_{n+1}(X,A,a),(a,n+1))$ is abelian. This is also true for $n = 0$, $A = a$. Consequently $\pi_{n+2}(X,A,a)$ which is isomorphic with $\pi_2(\mathcal{F}_{n+1}(X,A,a),(a,n+1))$ is abelian. Thus we have:

The group $\pi_n(X,A,a)$ is abelian for $n > 2$.

The group $\pi_n(X,a)$ is abelian for $n > 1$.

<u>Systems of groups over groupoids</u>. Let Π be a (not necessarily connected) groupoid with units $\{e\}$. Suppose that to each unit e there is assigned a group $G(e)$ and that for each element $p \in \Pi$ with e_1 as left unit and e_2 as right unit there is given a homomorphism $\gamma(p): G(e_2) \longrightarrow G(e_1)$ subject to the following conditions:

(1) If p is a unit (i.e. $e_1 = p = e_2$), then $\gamma(p)$ is the identity.

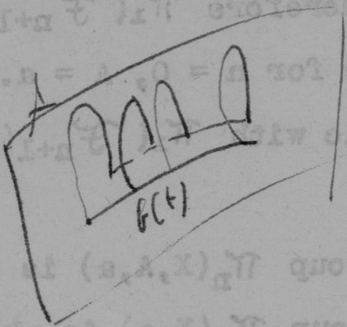
(2) If p_1p_2 is defined, then $\gamma(p_1p_2) = \gamma(p_1)\circ\gamma(p_2)$.

The system $\mathfrak{G} = \{G(e), \gamma(p)\}$ is called a <u>system of groups over the groupoid</u> Π. For any unit e the subgroup $\Pi(e)$ of Π corresponding to the unit e acts as a group of operators on $G(e)$. If the groupoid Π is connected, then all the groups $G(e)$ are isomorphic and the system $\mathfrak{G}$ is determined up to an isomorphism by any of the group $G(e)$ and the operators of $\Pi(e)$ on $G(e)$.

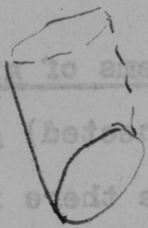
Example: the groups $\Pi(e)$ lead to a system of groups over Π.

Suppose now that $\Pi = \Pi(X)$ is the fundamental groupoid of the space X. The units of Π are then the points of X and the

118



seam : couture



Et l'homotopie toroïdale de Fox -
[qui contient tout ceci + les produits de Whitehead

elements of Π are homotopy classes of paths in X. A system $\mathfrak{G}$ of groups over $\Pi(X)$ is then called a <u>local</u> system of groups over X (Steenrod).

<u>Operators on homotopy groups.</u> A pair (F,f) where f is a path in A while F is a path in $\mathfrak{F}_n(X,A)$ such that

$$F(t) \in \mathfrak{F}_n(X,A, f(t))$$

will be called a <u>tube.</u> The path f will be called the seam of the tube. The maps F(0) and F(1) will be called the <u>entrance</u> and the <u>exit</u> of the tube. The following properties of tubes have to be established:

(1) If (F,f) and (G,g) are tubes such that the entrance of (G,g) is the exit of (F,f) then (FG,fg) is a tube with seam fg, entrance F(0) and exit G(1). Trivial.

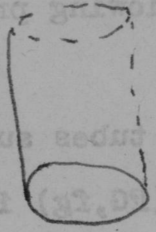
(2) For every path f in A and every $\varphi \in \mathfrak{F}_n(X,A,f(1))$ there is a tube (F,f) with seam f and exit φ. c'est une pipe

(3) If (F,f) and (G,g) are tubes such that the seams f and g are coterminal and represent the same element of $\Pi(A)$ and if the exits represent the same element of $\pi_n(X,A,f(1))$ then their entrancés represnet the same element of $\pi_n(X,A,f(0))$.

(4) Suppose n>1 and suppose that (F_1,f) and (F_2,f) are tubes with the same seam, then for each $t \in I$ let $F(t) \in \pi_n(X,A,f(t))$ be the product of $F_1(t)$ and $F_2(t)$. Then (F,f) is a tube with seam f entrance $F(0) = F_1(0).F_2(0)$ and exit $F(1) = F_1(1).F_2(1)$.

Assuming that this is proved let $p \in \Pi(A)$ be an element with endpoints a and b and let $x \in \pi_n(X,A,b)$. Using (2) construct a tube whose seam belongs to p and exit belongs to x. The entrance then determines (by(4)) a unique element $p{*}x$ of $\pi_n(X,A,a)$. The following properties hold:

Au carcans



Truc : L est rétracte d'un voisinage dans K

On utilise Urysohn.

On veut un rapport sur le truc de Fox.

(5) $p*x = x$ if p is a unit (follows from (3)).

(6) $(pq)*x = p*(q*x)$ if pq is defined (follows from(4))

(7) $p*(xy) = (p*x)(p*y)$ if $n>1$.

These properties show that $\pi_n(X,A,a)$ form a local system $\Pi_n(X,A)$ of groups(for $n>1$) over the space A. In particular $\pi_1(A,a)$ operates on $\pi_n(X,A,a)$. In each pathwise connected component of A, the groups $\pi_n(X,A,a)$ are isomorphic.

The procedure has to be repeated in order to show that the groups $\pi_n(X,a)$ form a local system $\Pi_n(X)$ of groups over the space X. I see no way of unifying the two arguments.

The proof of (1) and (4) are purely formal. The proof of (2) and (3) can be obtained quite neatly by repeated (and sometimes tricky) use of the following general lemma: If K is a complex and L a sub-complex then $K\times(0) \cup L\times I$ is a retract of $K \times I$. This is the method used in Fund.Math. 32(1939),167-175.

Properties of the operators. If $f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$, $p \in \Pi(A)$ $x \in \pi_n(X,A,a)$ where a is the terminal point of p then $f_*(p*x) = f_*(p) * f_*(x)$. Similarly if $f:X \longrightarrow Y$, $p \in \Pi(X)$, $x \in \pi_n(X,a)$ where a is the terminal point of p then $f_*(p*x) = f_*(p) * f_*(x)$.

If $x \in \pi_n(X,A,a)$, $p \in \Pi(A)$ and a is the terminal point of p then $\partial(p*x) = p*\partial x$.

The local system $\Pi_n(X)$ over the space X, induces a local system over A (using the natural homomorphism of groupoids $\Pi_1(A) \longrightarrow \Pi_1(X)$). The local systems

$$\leftarrow \Pi_{n-1}(A) \longleftarrow \Pi_n(X,A) \longleftarrow \Pi_n(X) \longleftarrow \Pi_n(A) \ldots\ldots$$

yield an exact sequence of local systems over $\Pi(A)$.

In particular groups of the homotopy sequence of (X,A,a) have the group $\pi_1(A,a)$ as a group of operators and the homomorphisms of

122

(5) $p*x = x$ if p is a unit (follows from (3)).

(6) $(pq)*x = p*(q*x)$ if pq is defined (follows from(4))

(7) $p*(xy) = (p*x)(p*y)$ if $n>1$.

These properties show that $\pi_n(X,A,a)$ <u>form a local system</u> <u>$\Pi_n(X,A)$ of groups</u>(for $n>1$) <u>over the space A</u>. In particular $\pi_1(A,a)$ operates on $\pi_n(X,A,a)$. In each pathwise connected component of A, the groups $\pi_n(X,A,a)$ are isomorphic.

The procedure has to be <u>repeated</u> in order to show that the groups $\pi_n(X,a)$ <u>form a local system $\Pi_n(X)$ of groups over the space X</u>. I see no way of unifying the two arguments.

notion de syst. local simple

The proof of (1) and (4) are purely formal. The proof of (2) and (3) can be obtained quite neatly by repeated (and sometimes tricky) use of the following general lemma: If K is a complex and L a sub-complex then $K\times(0) \cup L\times I$ is a retract of $K \times I$. This is the method used in Fund.Math. 32(1939),167-175.

<u>Properties of the operators</u>. If $f: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$, $p \in \Pi(A)$, $x \in \pi_n(X,A,a)$ where a is the terminal point of p then $f_*(p*x) = f_*(p) * f_*(x)$. Similarly if $f:X \longrightarrow Y$, $p \in \Pi(X)$, $x \in \pi_n(X,a)$ where a is the terminal point of p then $f_*(p*x) = f_*(p) * f_*(x)$.

If $x \in \pi_n(X,A,a)$, $p \in \Pi(A)$ and a is the terminal point of p then $\partial(p*x) = p*\partial x$.

The local system $\Pi_n(X)$ over the space X, induces a local system over A (using the natural homomorphism of groupoids $\Pi_1(A) \longrightarrow \Pi_1(X)$). The local systems

avec relèvement

fibre map = application des homotopies

$$\ldots \Pi_n(A) \longrightarrow \Pi_n(X) \longrightarrow \Pi_n(X,A) \longrightarrow \Pi_{n-1}(A) \longrightarrow$$

yield an exact sequence of local systems over $\Pi(A)$.

In particular groups of the homotopy sequence of (X,A,a) have the group $\pi_1(A,a)$ as a group of operators and the homomorphisms of

 125

the sequence are operator homomorphisms.

If $x \in \pi_1(X,a)$ and $p \in \Pi(X)$ has terminal point a then $p*x = p\, x\, p^{-1}$ (multiplication in $\Pi(X)$).

If $x,y \in \pi_2(X,A,a)$ then $y\, x\, y^{-1} = \partial(y)*x$.

If $x \in \pi_2(X,A,a)$ and $y \in \pi_2(X,a)$. Then $x\, j_*(y) = j_*(y)x$. Indeed $j_*(y)\, x\, j_*(y)^{-1} = \partial j_*(y) *x = x$ since $\partial j_*(y) = 1$. (Suite exacte)
Consequently the image of $\pi_2(X,a) \to \pi_2(X,A,a)$ is in the center of $\pi_2(X,A,a)$.

<u>Simplicity</u> A space X will be called simple in the dimension n (or n-simple) at the point $a \in X$ if the operators of $\pi_1(X,a)$ on $\pi_n(X,a)$ are trivial (i.e. if $p*x = x$). If X is n-simple at a then it is also n-simple at every point of the pathwise connected component of X containing a. Suppose now that X is pathwise connected. Then if X is n-simple at a then it is also n-simple at every point of X. We say then that X is n-simple.
Let $\mathcal{F}_n^*(X)$ be the subspace of $\mathcal{F}_n(X)$ consisting of all the maps $I^n \to X$ which carry F^{n-1} into a point. Thus $\mathcal{F}_n^*(X) = \bigcup_{a \in X} \mathcal{F}_n(X,a)$.
If X is pathwise connected then X is n-simple if and only if every homotopy class of $\mathcal{F}_n^*(X)$ contains precisely one homotopy class of $\mathcal{F}_n(X,a)$. Thus we may regard the homotopy classes of $\mathcal{F}_n^*(X)$ as elements of the homotopy group $\pi_n(X)$ (without indicating base point).

X is 1-simple at a if and only if $\pi_1(X,a)$ is abelian.

A pair(X,a) will be said to be n-simple at $a \in A$ if the operators of $\pi_1(A)$ on $\pi_n(X,A,a)$ are trivial. The discussion is similar to the one above.

<u>Connections with fiber spaces.</u> Let $\tau: B \to X$ be a fiber map, $a \in X$, $F = \tau^{-1}(a)$, $b \in F$. Then τ induces a homomorphism $\tau_*: \pi_n(B,F,b) \to \pi_n(X,a)$. It follows from the covering homotopy

theorem that τ_* is an isomorphism onto. Thus in the homotopy sequence of (B,F,b) we may replace $\pi_n(B,F,b)$ by $\pi_n(X,a)$ and thus obtain an exact sequence.

$$\leftarrow \pi_{n-1}(F,b) \longleftarrow \pi_n(X,a) \longleftarrow \pi_n(B,b) \longleftarrow \pi_n(F,b) \longleftarrow$$

with the fundamental group $\pi_1(F,b)$ acting as a group of operators on this sequence. There are various easy consequences of this theorem.

revetement
<u>Connections with coverings.</u> If $\tau: B \to X$ is a covering then
revetement

$\pi_i(F,b) = 0$ for $i>0$ and therefore by exactness

$$\pi_n(X,a) \approx \pi_n(B,b)$$

The isomorphism is induced by the map τ and could be derived using covering homotopy. There is a corresponding theorem for relative homotopy groups.

<u>Examples</u>

1) $\pi_i(S^n) = 0$ for $i<n$. Use simplicial approximation theorem.

2) $\pi_i(S^1) = 0$ for $i>1$. Use the fact that S^1 has R as a covering space.

3) Consider the Hopf fiber map $\varphi: S^3 \longrightarrow S^2$. Since the fibers are S^1 it follows from 2) and the homotopy sequence of the fibering that

$$\pi_n(S^3) \approx \pi_n(S^2) \quad \text{for } n>2.$$

The isomorphism is induced by φ.

"Cube I9."

1. Additivity theorems.

The additivity theorems are indispensable for establishing the various theorems about the relations between homology and homotopy as well as theorems on obstructions.

One of the difficulties is that the formulation of the theorems involves several alternative (and equivalent) definitions of homotopy groups using maps of different simple spaces.

Let Δ_q be a Euclidean simplex with ordered vertices $d_q^0 < \dots\dots < d_q$. Let $\Delta_{q,n}$ be the n-skeleton of Δ_q.

A map $f:(\Delta_q, \Delta_{q,q-1}, d_q^0) \longrightarrow (X,A,a)$ determines uniquely an element $a(f) \in \pi_q(X,A,a)$. To define $a(f)$ one needs to define one "nice" map $(I^q, F^{q-1}, C^{q-1}) \longrightarrow (\Delta_q, \Delta_{q,q-1}, d_q^0)$.

A map $f:(\Delta_{q+1,q}, d_{q+1}^0) \longrightarrow (X,a)$ determines an element $c(f) \in \pi_q(X,a)$. The definition requires a "nice" map $(I^q, F^{q-1}) \longrightarrow$ $(\Delta_{q+1,q}, d_{q+1}^0 \quad)$

The functions $a(f)$ and $c(f)$ are related by means of the following two theorems.

Theorem 1. Let $f:(\Delta_q, \Delta_{q,q-1}, d_q^0) \longrightarrow (X,A,a)$ and let $g:(\Delta_{q,q-1}, d_q^0) \longrightarrow (A,a)$ be the partial map of f. Then $\partial a(f) = c(f)$ where $\partial : \pi_q(X,A,a) \longrightarrow \pi_{q-1}(A,a)$.

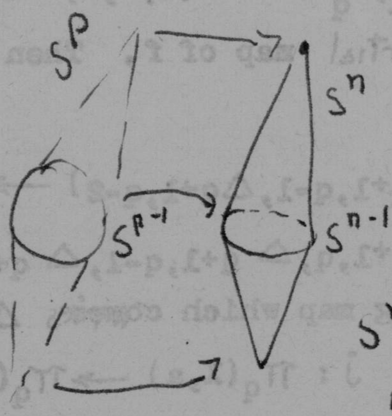
Theorem 2. Let $f:(\Delta_{q+1,q}, \Delta_{q+1,q-1}, \Delta_{q+1,q-2}) \longrightarrow (X,A,a)$. Let $\tau^i : (\Delta_q, \Delta_{q,q-1}, d_q^0) \longrightarrow (\Delta_{q+1,q}, \Delta_{q+1,q-1}, \Delta_{q+1,q-2})$ be the simplicial and order preserving map which carries Δ_q into the i-th face of Δ_{q+1}. Under the map $j : \pi_q(X,a) \longrightarrow \pi_q(X,A,a)$ we have

$$j\,c(f) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \, a(f\tau^i)$$

This formula is valid for $q>2$. For $q = 2$ the order of terms on the right hand side has to be suitable chosen and one of the terms has as operator from $\pi_1(A,a)$. In general the condition that

127

c'est une truc d'obstruction



(Suspension de Freudenthal)

$S^{n-1} \to S^{n-1}$

s'étend à

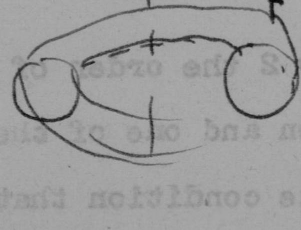
$S^n \to S^n$

S^n est ainsi le "join" de S^{n-1} et S^0

avec celui de S^p et S^q on obtient

le produit de Whitehead.

$\pi_p \times \pi_{q+1} \to \pi_{p+q-1}$



 128

$\Delta_{q+1,q-2} \to a$ may be replaced by $d^o_{q+1} \to a$ at the expense of applying an operator to the term $a(f\tau^o)$. However for $q>2$ this more general theorem can be deduced from Theorem 2.

Consider two maps $f,g:(\Delta_q, d_q{}^o) \to (X,a)$ which agree on $\Delta_{q,q-1}$. Such two maps determine an element $d(f,g) \in \pi_q(X,a)$. This element satisfies the following properties

(1) $d(f,g) + d(g,h) = d(g,h)$

(2) $d(f,g) = 0$ if and only if f and g are homotopic with $\Delta_{q,q-1}$ pointwise fixed during the homotopy.

(3) If f and g carry $\Delta_{q,q-1}$ in a subset A of X then $d(f,g) = a(g)-a(f)$.

(4) Given f and $\alpha \in \pi_q(X,a)$ there is a map g with $d(f,g) = \alpha$.

---

2. $\pi_q(S^q)$.

Once the results of the preceding section are established, it is an easy matter to obtain the various relations between homotopy and homology groups. In particular it would follow that $\pi_q(S^q)$ is cyclic infinite. However, with considerable labor, it should be possible to calculate $\pi_q(S^q)$ without using homology theory and avoiding most of the material of §1. The knowledge of $\pi_q(S^q)$ could perhaps be used to establish the results of §1.

The direct method of calculating $\pi_q(S^q)$ runs as follows. First calculate $\pi_1(S^1)$ which is fairly easy using coverings and logarithms. Then consider the map $E;\pi_{q-1}(S^{q-1}) \to \pi_q(S^q)$ which is a special case of Freudenthal's suspension (Einhängung). The proof that E is an isomorphism onto can be carried out by elementary means but would be fairly involved.