COTE : PSMS 002

AUTEUR : Pierre Samuel

TITRE : Encyclique « De Commutativis Corporibus »

Manuscrit autographe de P. Samuel
Congrès de Noël du 19 au 26 décembre 1947
(Repris partiellement dans la rédaction de cette Tribu)

FONDS : PIERRE SAMUEL

Nombre de pages numérisées 005
Nombre de feuilles prises en compte 003

ENCYCLIQUE "DE COMMUTATIVIS CORPORIBUS"

Nous, Nicolas Bourbaki, membre de l'Académie Royale de Poldévie, Lord Protecteur des Filtres, Grand Maître de l'Ordre des Compacts, - étant donné la douleur maximale que nous a causée la vue, parmi nos fidèles Européens, des signes les plus caractéristiques de querelle, schisme, zizanie, litige et désaccord, - enjoignons à nos sages et bien aimés fidèles d'Amérique de rétablir la paix, l'ordre et l'union parmi leurs frères orientaux.

1) Corps (par 2 - n° 2 - page 7). Cartan, Samuel et Schwartz se refusent à jeter à la tête du lecteur la déf. 2 ("x algébrique si $K(x)$ est fini"). Ils veulent l'introduire naturellement par une rapide étude de la structure linéaire de $K[x]$: si l'idéal des relations n'est pas (0), $K[x]$ est de dimension finie. Ils trouvent que la présente définition en demande trop. Ils trouvent aussi que l'analogie avec les entiers algébriques, expliquée par Dieudonné, n'est que partielle : on a à demander beaucoup plus de x entier algébrique sur A ("$A[x]$ de type fini") que de x algébrique sur K ("Monômes linéairement liés"). Enfin Schwartz a peur que la définition du texte n'induise le lecteur à croire que toute extension algébrique est finie.

<u>Projet</u> : Étude de $K[x]$ - Définition (x transcendant sur K si les monômes sont linéairement indépendants, algébrique si linéairement dépendants) - Théorème (Si x trans-cendant, $K[x]$ est un anneau de polynômes - Si x algébrique, $K[x]$ est fini). Puis un théorème précisant le cas où x est algébrique (Polynôme minimal, $K(x) = K[x]$, Base sur K)

Dieudonné, soutenu par le cobaye Serre, défend vivement son texte. Les deux groupes se montrent irréductibles.

2) Dans l'étude des racines de l'unité et des corps finis, Cartan, Delsarte, Pisot, Roger et Schwartz s'insurgent contre le grand corps Ω_p - "Détruire les idoles". Ils veulent pouvoir parler in abstracto du corps de décomposition d'un polynome. Ils trouvent que Ω_p est un carcan inutile ici, et peut-être aussi en d'autres lieux.

Dieudonné et Samuel défendent Ω_p avec acharnement. Les autres les accusent d'idolâtrie, et de sacrifices humains accomplis chaque jour sur l'autel d'un Ω_p de caractéristique donnée.

3) Cartan et Delsarte demandent d'étudier les polynomes cyclotomiques Φ_n juste après l'indicateur d'Euler $\varphi(n)$ (page 124, haut). Ils demandent donc la formule explicite $\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d-1)^{\mu(\frac{n}{d})}$. Ils veulent qu'on montre par un calcul explicite (division par un polynome unitaire) que les coefficients de $\Phi_n(x)$ sont entiers.

Dieudonné et Samuel s'y opposent violemment : la place du texte est la meilleure (raisonnement de théorie de Galois). Ils se refusent à mettre la formule explicite ailleurs qu'en exercice. Quant à l'intégrité des coefficients, Dieudonné refuse, comme à l'ordinaire, une démonstration constructive, - et Samuel dit que la vraie raison de cette intégrité est le fait que les racines de l'unité sont des entiers algébriques puisqu'ils sont des unités pour toutes les valuations (en caractéristique 0 - si $p > 0$, il n'y a rien à dire)

Idée normale (parfois même) est sans intérêt

4) Sans qu'il y ait désaccord, le Congrès se demande s'il ne vaudrait pas mieux vider les prop. 6 et 7 (pages 94 et 95) relatives aux extensions normales non séparables. Il se rangera à l'avis de Weil.

A propos des racines de l'unité, il vaudrait ne pas cacher hypocritement le rôle joué par les propriétés élémentaires de divisibilité des entiers (décomposition en facteurs premiers), quitte à les démontrer succinctement en note.

D'autres décisions sur les chapitres des corps et des polynômes ont été adoptées à l'unanimité :

Terminologiques

1) Extension monogène au lieu de simple (cf: groupe, module monogènes)

2) Corps algébriquement clos au lieu de fermé ("fermé" s'applique à une notion relative. Cela évitera la confusion avec "K algébriquement fermé dans L" - "Stable" est rejeté faute de substantif au genre de "clôture" ou "fermeture")

3) "Extension" réfèrera à la structure d'algèbre ~~de~~ L sur K. Surcorps sera réservé aux rares cas où la seule structure d'anneau est en jeu.

4) Monômes : auront coefficient 1 ce qui est bien plus linéaire (un polynôme est combinaison linéaire de monômes) - "Les éléments du monoïde s'appellent les monômes" dit ~~Delsarte~~ Cartan

5) Extension radicielle au lieu de "purement inséparable" qui donne lieu à des canulars sémantiques du genre " K est à la fois séparable et purement inséparable sur lui même".

Expulsives

1) Les bases séparantes, - les théorèmes fins de Zariski (prop 5 - par 5 - p. 77) et de Weil (prop 9, th. 1 du par. 5), - les corps relativement algébriquement quasi fermés, - les extensions régulières, - ~~le~~ facteur inséparable du degré, - sont vidés (Comme ça ne sert que dans une théorie, la géométrie algébrique, il n'y a pas lieu d'en gonfler le Livre II. Ce serait un précédent fâcheux qui autoriserait certains à réclamer les valuations (utiles dans deux théories, nombres et fonctions algébriques), les anneaux locaux, et des tas d'autres choses). La place de ces notions est à la partie ($2^{\text{ème}}$ ou $3^{\text{ème}}$) intitulée "Analyse algébrique".

2) On réduira au minimum les extensions normales non séparables.

3) Norme et trace, notions hypercomplexes, ont été rejetées au ch VII.

4) Les extensions cycliques sont vidées également. On les étudiera au ch VII avec

les algèbres cycliques (si on les fait, ce qui semble très improbable)

Toutes ces expulsions se situent dans le cadre d'un compromis difficile entre deux projets (Algèbre "large" et Algèbre "étroite"), que le Congrès a pris soin d'avoir constamment sous les yeux.

Algèbre étroite

V Corps (avec les susdites expulsions)

VI Divisibilité (sans les anneaux de Dedekind qu'on ne peut traiter correctement qu'avec les valuations)

VII Anneaux semi simples - Représentations linéaires des groupes (allégé)

VIII Formes quadratiques et hermitiennes.

IX Géométrie élémentaire.

Algèbre large

V Corps (avec les résultats fins du n°1, et le degré d'inséparabilité)

VI Anneaux semi simples - algèbres simples - corps gauches (avec, éventuellement, la cohomologie des groupes et des algèbres)

VII Représentations linéaires des groupes.

permutation éventuelle.

VIII Divisibilité

IX Anneaux commutatifs noethériens (Décomposition primaire - anneaux locaux - étude locale des corps valués - éventuellement leur étude globale par la "product formula" d'Artin)

X Formes XI Géométrie.

Le Congrès, effrayé par le projet d'Algèbre large, s'est gardé de mettre le doigt dans l'engrenage fatal.

Chambardantes

Outre force chambardements de détail, dont nos lecteurs seront avisés par le Compte-Rendu du Congrès, le plan suivant a été adopté.

1) Caractéristique - corps premier.
2) Extensions.
3) Extensions algébriques.
4) Extensions transcendantes.
5) Extensions composées.
6) Théorèmes d'existence (Steinitz par la méthode Cartan)
7) Isomorphismes, dérivations, séparabilité.
8) Théorie de Galois
9) Racines de l'unité - Corps finis

Appendice: extensions galoisiennes infinies.

Nos bien aimés fidèles d'outre Atlantique sont priés de donner une réponse rapide, afin que la nouvelle rédaction soit prête pour le Congrès de Pâques.

A tous, salut et bénédiction.

En notre Palais de Bourbakeville
Noël 1947.