LA TRIBU.

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique).

N° 25 - COMPTE RENDU DU CONGRES OECUMENIQUE DE PELVOUX-le-POET.
(25 juin - 8 Juillet 1951)

Présents : CARTAN - DELSARTE - DIEUDONNE - DIXMIER - GODEMENT - SAMMY - SAMUEL - SCHWARTZ - SERRE - WEIL.

Absent : KOSZUL.

Visiteurs étrangers : HOCHSCHILD - BOREL.

Cobayes : CARTIER - MIRKIL.

Figurants : femmes, enfants, paysans, autos, chiens, un guide et des lapins.

Décor : la scène représente une crevasse.

Outre le régime des Hauts Commissariats, un grave schisme menace Bourbaki, celui des montagnards et des sédentaires. Devant le spectacle d'une haute vallée alpestre, l'un s'effraie de la neige et file au plus vite vers les Tropiques ; l'autre s'insurge contre "ces monts horribles, masses énormes, informes et sans structure" ; un troisième, motorisé, s'étonne de l'insistance des montagnards à se faire conduire au fond de chaque vallée, et les abandonne à leur triste sort. Par contre, une délégation représentative de tous les âges et grades est allée arpenter glaciers et névés, braver crevasses et mal des montagnes, et planter le drapeau de Bourbaki sur le refuge Caron, à 3.160 mètres.

L'air montagnard, et la vivacité des discussions maintint WEIL éveillé et virulent. CARTAN se surpassa en jeux de mots, souvent obscènes et l'on songe à un pastiche de Jules ROMAINS intitulé "Le Professeur CARTAN saisi par la débauche". DIEUDONNE ne laissa pas toujours dire ce qu'on avait à dire. DISMIER appela SAMMY à la rescousse lorsqu'il le croyait d'accord avec lui. Et il semble que CHEVALLEY aime à contrôler les corps qu'il engendre.

Un rêve prémonitoire avertit WEIL du processus d'expulsion desm membres fondateurs ; pour se venger ceux-ci essayèrent d'abandonner un membre inférieur dans une crevasse, dont il parvint à se tirer. Mais le cognac des fins de discussions et la Vieille-Cure d'Hochschild rétablirent l'union, qui fut consolidée par les affres que lemniscates et géodésiques du tore firent subir à tous. L'unanimité se fit aussi pour flétrir l'inqualifiable absence de KOSZUL, et une lettre vengeresse fut adoptée par acclamations. On déplore l'inactivité des poètes attitrés, et le nom du village ne fut qu'une maigre consolation. Bien pis, personne ne reconnut l'allusion aux écuries d'Augias sur le frontispice de la deuxième édition du fascicule de résultats.

A ce propos Bourbaki décide de rédiger deux types de fascicules de résultats, l'un ésotérique (et par conséquent compréhensible à tous), l'autre exotérique (où l'on sera obscur à souhait). Il y aura deux numérotations pour les états, l'une historique, l'autre décernée en Congrès. Le prochain fascicule aura le même exergue que le Tiers Livre : " L'autheur susdict supplie les lecteurs bénévoles soy réserver à rire au soixante et dis huitièsme livre" . Enfin on approuve hautement le système DIEUDONNE de la "rédaction ultérieure", et l'on espère recevoir au cours du prochain Congrès les exemplaires imprimés de tous les fascicule de la Première Partie.

Pour mémoire, SAMMY fit acter l'espace comme récipient des fonctions continues. On constata l'identité de "tchékiste" et de "fasciste" . GODEMENT supplia de réfléchir un peu. CARTAN vendit de la Topologie "with a vengeance" . Et SCHWARTZ, embrouillé par des notations invraisemblables, pleines de Trg Ev Lie, et de maisons de passes, et sommé de de choisir entre trivial et extravagant, s'écria : "Cà n'a pas de rapport c'en est une conséquence triviale, mais c'en est un cas particulier ".

PLAN GENERAL

Le lecteur trouvera détails, motivations et commentaires en leur lieu.

Livre II. Algèbre homologique.
Livre III. Algèbres associatives.
Livre IV. Algèbres de Lie.
Livre V. Algèbre unidimensionnelle.
Livre VI. Géomètrie Algèbrique.
Livre VII. Equations différentielles algèbriques.
Livre VIII. Fonctions de plusieurs variables complexes.

Troisième Partie. Topologie Algèbrique et applications.

Quatrième Partie. Analyse fonctionnelle.

ENGAGEMENTS DU CONGRES.

CARTAN : Rapport sur la réédition de l'Algèbre II, III, IV (avril 52)
Papier sur les faisceaux (décembre 51)
Papier sur les systèmes différentiels (mai 52)
Rapport ou bouquin sur les fonctions de plusieurs variables complexes (sans date).

CHEVALLEY : Géomètrie élémentaire (décembre 51)
Distributions et courants (juin 52)
Rapport sur la théorie de Ritt-Kolchin (octobre 52).

DELSARTE : Rapport moral et financier.

DIEUDONNE : Fascicule de résultats de Topologie Générale (octobre 51)
Esp. vect. top., chap. I, (octobre 51)
Intégration, chap. V et VI (octobre 51)
Intégration, fascicule de résultats (décembre 51)
Différentielles dans un Banach (janvier 52)
Etude globale des variétés (octobre 52)
Spécialisations et valuations (mai 52)
Rapport sur l'algèbre unidimensionnelle (en collaboration avec SAMUEL) (mai 52).

DIXMIER : Rédaction définitive de la Logique (pour 2 mois après l'imprimatur de Rosser).
Etude locale des variétés (sans date).
Espaces localement convexes (octobre 51).

GODEMENT : Fonctions analytiques (octobre 52)
Rapport sur Hilbert-Schmidt (octobre 51).
Convolution et mesure de Haar (octobre 52).

KOSZUL : Fascicule de résultats sur les groupes et algèbres de Lie (sans date)
Rédaction du début des Algèbres de Lie (avril 52).

SAMMY : Dualité faible (décembre 51).
Rapport sur le rôle des foncteurs au Livre I, chapitre des Structures (janvier 52).
Classification des surfaces (octobre 52).
Rapport sur l'algèbre homologique (printemps 52).
Rapport sur la théorie de Morse (sans date).

SAMUEL : Introduction du Livre I (avec Weil) (décembre 51).
Ensembles ordonnés et entiers (octobre 52).
Anneaux noethériens (décembre 51).
Algèbre locale élémentaire (décembre 51).
Séries entières (octobre 52).
Rapport sur l'algèbre unidimensionnelle (en collaboration avec Dieudonné) (mai 52).
Fascicule de résultats (ésotérique) de Géomètrie Algèbrique (sans date).

SCHWARTZ : Formes quadratiques (mars 52).
Fascicule de résultats des esp. vect. top. (octobre 51).
Rapport sur le calcul des Probabilités (sans date).

SERRE : Rapport sur la Topologie Géomètrique (avril 52)
Anneaux primitifs (octobre 52).

WEIL : Note historique des ensembles (avec Rosser).
Rédaction des groupes de Lie
Papier sur les anneaux normaux.

PROCHAINS CONGRES.

a) Royaumont : 1 au 9 Octobre 1951 .
Espaces vectoriels topologiques : Fascicule de résultats, chap.I (en comité), chap.II .
Intégration, chap.V et VI.
Fascicule de résultats de topologie générale.
Début du rapport GODEMENT sur les algèbres normées.

b) Nancy, ou coin joli et bien chauffé des Vosges, février 1952.
Anneaux noethériens, algèbre locale élémentaire.
Structures et foncteurs.
Hilbert-Schmidt.
Géomètrie élémentaire.
Fin du rapport GODEMENT sur les algèbres normées.

c) Congrès oecuménique de juin 52 (endroit à déterminer)
Réédition de l'Algèbre linéaire et multilinéaire.
Distributions et courants (?) (Etat 1).
Différentielles dans un Banach (Etat 3).
Spécialisations et valuations (Etat 3)
Rapport sur l'algèbre unidimensionnelle.
Groupes de Lie (Etat 1).

Début des algèbres de Lie (Etat 2).
Rapport sur l'algèbre homologique.
Formes quadratiques (Etat 3).
Rapport sur la Topologie Géomètrique.

SUJETS POUR LE SEMINAIRE BOURBAKI 1951-1952.

Travaux de Garabedian	(Mme Schwartz)
Travaux de Mostov	(Blanchard)
Livre de Chevalley sur les groupes algèbriques	(Néron).
Travaux secrets de Borel-Serre	(Serre ou Borel).
Corps de classes selon Weil et Hochschild	(Godement), Dieudonné)
Travaux d'Ahlfors-Beurling	(Schwartz ou Mme Schwartz).
Seconde édition de la thèse de Weil (Annals)	(Serre ou Néron).
Travaux d'Harish-Chandra (2 exposés)	(Dixmier)
Bouquin de Walsh	(Dieudonné)
Tour d'automorphismes pour les groupes de Lie	(Braconnier).
Démonstration Kodaira du th. de Riemann-Roch	(Grothendieck).
Travaux de Bergmann (kernel functions)	(Cartan ou Schwartz).
Travaux de Maass-Hecke	(Godement).
Travaux de Hopf sur la déformation des surfaces	(Lichné.).
Thèse de Néron	(Samuel ou Néron).
Travaux de Gleason	(Serre).
Un laius à son choix	(Jacobson).

THEORIE des ENSEMBLES.

WEIL a décanulé le contre exemple de DIXMIER sur l'égalité des $\mathcal{E}$ de deux relations équivalentes (voir "Lamentations") : il faut dire "si R et S sont équivalentes qq soit x , alors $\mathcal{E}_x(R) = \mathcal{E}_x(S)$" . On décide d'envoyer la liste de tous nos axiomes à Rosser. S'il les trouve "kosher", on se mettra aussitôt aux rédactions définitives ou presque.

Introduction. On décide de la faire très courte, et de reporter le plus de choses possible à la note historique. On mentionnera cependant que les symboles abréviateurs amènent toujours des canulars. Et on expliquera que les entiers animaux (numérotation des propositions, pages, symboles, etc.) n'ont rien à voir avec ceux du chap.III .

Chapitre I. Il est adopté par acclamations, et on offre à DIXMIER un double cognac (qu'il refuse). On ne reverra (en comité) que le §1 (pour une amélioration du critère arithmétique de SAMMY), et celui de l'égalité (qui redevient signe primitif, et non dérivé de l'appartenance). Un dépliant donnera les règles formatives et schèmes d'axiomes. Les règles dérivées prendront le nom de "critères formatifs" et de "critères déductifs" .

On ajoute = xy et Cxy (couple) aux relations primitives, et on se réserve le droit d'introduire plus tard d'autres relations primitives ; celles-ci seront des relations (et pas des termes) ; le ε sera gras. Dire en petits caractères comment lire les signes. Ajouter "mentales" à "difficultés typographiques" (p.1, ligne 6 du bas). Donner l'hypothèse de Riemann et "est un Banach" comme exemples (p.2) ; "dans ce chap. et les suivants" (au lieu de "ultérieurement" ; p.2, milieu) ; supprimer "et ne peut bien entendu ..." (ibid.) ; "italiques grasses" au lieu de "gothiques". Des exemples p.3 ; lire "b remplace a" . Ne pas parler de démonstration mais de "justification" de règles (p.3) ; introduire les RS par "on va se servir des règles suivantes, appelées règles de substitution, que le lecteur pourra justifier par simple inspection dans chaque cas" ; ne pas "démontrer" RS.2 . Ne pas mettre d'indices dans a,b,c,d,e (p.5) ; souligner "figurant dans les constr.form." . Ne pas parler de vrai et faux dans ce § , remplacer par "dire que" ; Hypothèse de Riemann et espaces de Banach en exemples (p.6). Titre "<u>Critères</u> formatifs" (p.7) ; dire une fois pour toutes qu'on peut s'en passer. "dire" au lieu d'"affirmer" (p.8,bas). Le système SAMMY soulève l'enthousiasme ; on charge SAMMY et DIXMIER de le rédiger dans un cadre plus général (prévoir de nouvelles relations portant sur des termes), en tenant compte des liens

Supprimer "bien déterminées" (p.14, ligne 7 du bas) ; en bas "nous nous imposerons que les schèmes soient tels que ...; ceci sera vérifié aussitôt dans tous ceux qui seront donnés" . Pas d'allusion à la démonstration par l'absurde (p.15) ; pas encore d'indices aux relations (ibid.). Noter que x peut être une constante (R2, p.16). Vider "le sens intuitif..." (p.17,haut). "Schémas" au lieu d'"axiomes implicites" dans R5 (p.17) ; idem dans le laïus p.18 .

La théorie logique élémentaire sera notée $\mathcal{L}_0$; dire ce qu'on fait après l'énoncé des schèmes (p.20) ; annoncer l'indépendance (cf.exerc.). Dire "critères déductifs" au lieu de règles. Des énoncés avec "Soient ..." introduisant tous les dramatis parsonae. Noter que, dans la méthode de la constante auxiliaire (contrairement au cas de l'hypothèse auxiliaire), celle-ci n'intervient pas dans le résultat démontré ; ainsi un th. de légitimation est nécessaire (p.25). Mettre la p.27 en petits caractères. Dire "il y a" au lieu de "il existe", quand on est à l'étage "méta".

Se servir de "dire que" et de "affirmer" pour éviter le mot "vrai" (p.34, haut) ; un Z en bas. Début du 2 (p.35, bas) : "désormais nous n'auront à considérer que des théories quantifiées. Désignons par $\mathcal{C}$ une telle théorie" ; $\mathcal{L}_1$ pour la théorie quantifiée élémentaire ; donner, après R28, une règle générale donnant la négation d'une relation commençant par des tas de qq.soit et il existe. Un Z p.38, avec exemple de convergence uniforme. Supprimer "telle que" (p.40, ligne 3 du haut) ; "quelconque" au lieu de "générique" .

On rétablit = comme signe primitif, avec l'axiome "qq.soit x , x=x" , et le schème "qq soient x et y , x=y implique R(x) équivalent à R(y)" . Alors "théories égalitaires". On suivra la rédaction CHEVALLEY.

Introduire les mots "paramètre" et "sous la forme" dans les symboles fonctionnels (et pas dans les équations). Rétablir les équations (cf. CHEVALLEY) : se borner à donner les définitions (équation, solution, solution complète, équations équivalentes).

Chapitre II. On rétablit le couple comme signe primitif.

Chapitre III. (Ordonnés, entiers). On attend l'avis de ROSSER pour le rédiger selon les plans établis.

Chapitre IV (Structures). SAMMY fera un rapport sur ce qu'on pourra y dire des foncteurs, homomorphismes, variances, structures induites, etc. On y ajoutera l'appendice des applications universelles.

Note historique. C'est ici le meilleur endroit pour traiter des sujets polémiques. WEIL se fera tapiriser par ROSSER.

ALGÈBRE

Réédition. CARTAN fera un rapport. Il y aura deux chapitres : II (algèbre linéaire sur un anneau non commutatif, modules, hom, produit tensoriel) et III (Algèbres sur les anneaux commutatifs, définition, exemples, algèbres universelles (tensorielle, extérieure et symétrique) on y fera les dérivations dans un produit bilinéaire et à valeurs ailleurs : $d(xy) = dx.f(y) + g(x)dy$. Le chap. IV est ainsi réduit aux propriétés des polynomes qui ne s'obtiennent que sous l'angle "algèbre de monoïde" ; par contre il faudra compléter l'exposé des séries formelles, d'après ce qui sera nécessaire aux séries entières.

Formes quadratiques : SCHWARTZ est sommé de s'en occuper au plus tôt.

Géométries élémentaires : Y introduire les corps projectifs (avec le calcul sur ∞). DIEUDONNÉ éditera le Diplodocus de CHEVALLEY, et y supprimera les "ânes qui trottent", par égard pour BASTIEN (et les lecteurs).

TOPOLOGIE GEOMETRIQUE.

On rassemble sous ce titre (provisoire) les notions élémentaires de Topologie Algèbrique qui seront nécessaires en première partie, et qui ne font pas appel à l'artillerie lourde du Haut Commissariat.

On traitera, à la manière singulière, le groupe fondamental et les revêtements (pour les fonctions analytiques), en mettant bien en évidence le caractère galoisien de cette théorie. Applications : principe de monodromie, prol. anal., indice.

Notions d'homotopie, polyèdres, rétractes, ANR, épidermes. Calcul (avec générateurs et relations) du groupe fondamental d'un polyèdre.

Espaces fibrés (principal et avec groupe structural). On a fait un bon plan à Royaumont en 1950. En donner de nombreux exemples (groupes classiques, sphères, espaces projectifs, grassmanniennes,...)

On fera la classification (homotopique) des surfaces triangulées, avec dissection canonique. (pour les surfaces de Riemann).

On ne fera pas ~~xx~~ le th. de Jordan (la représ. conforme donnant beaucoup plus).

INTÉGRATION

Il y aura trois notes historiques : une pour les inégalités, une pour l'intégration propre (après le chap.VI), une pour le chap.VII (convolution et Haar).

Il y a deux niveaux dans la théorie des Polonois : un, élémentaire, sera fait ici (et ira ensuite en suite en Top.Géné., IX, 2ème édition), l'autre (plus chiadé) ne sera nécessaire que pour la théorie fine des anneaux d'opérateurs, et sera fait à cet endroit.

Mesure de Haar. On décide de mettre le sujet du rapport DIXMIER dans la première partie, sous le titre "Convolution et mesure de Haar" (on dira "convolution" au lieu de "produit de composition") ou encore "Algèbres de fonctions et de mesures". GODEMENT, DELSARTE et SCHWARTZ chiaderont bourbachiquement les hypergroupes.

On commencera par le morceau de convolution qui ne nécessite pas la mesure de Haar. On se placera dans le cas d'un groupe opérant un espace (2 mesures, puis mesure sur le groupe et fonction sur l'espace). On donnera les formules avec les mesures de Dirac, et on explicitera les propriétés "universelles" de la convolution. Donner dès le début le point de vue de la représentation des groupes dans les algèbres (de $x \longrightarrow T(x)$, on tire $\mu \longrightarrow T(\mu) = \int T(x)d\mu(x)$) . Annoncer la composition des distributions sur les groupes de Lie. Utiliser (prop.7, p.26) une limite filtrante croissante de fonctions continues.

Alors l'unicité de la mesure de Haar est immédiate (utiliser Lebigle-Nicodème). Dire ce qui se passe avec isomorphisme local de deux groupes. Remonter l'existence avant l'unicité, et surtout avant les formules. Démontrer la propriété (1) (p.39, bas) ; prendre un ultra-filtre ; intervertir (5") et (6") (p.40). Une remarque pour les germes. Remarquer (pour le milieu de la p.41) que le support est tout l'espace ; dans la prop.4 le caractère détermine la mesure à un facteur constant près. Parler de mesures équivalentes (cor.3, p.42). Peut-on parler du module d'un endomorphisme (p.43) ? Regarder si la convolution ne simplifie pas les calculs de la p.45 (haut). Donner la mesure de Haar d'un produit (fini ou non). Faire les mesures quasi-invariantes, et donner les propriétés de continuité qui sont valables pour les mesures quasi-invariantes sur un espace opéré par un groupe. La prop. 11 (p.12) passe en exerc.

Dans le calcul des mesures de Haar, on donnera mesure gauche, mesure droite et module. Regarder le livre de Santalo (collection Nancago). On utilisera le truc suivant, dans le cas des produits semi-directs : si on a la formule de multiplication $(xs)\,(x's') = xx'^{s}\,ss'$, si dx et ds sont les mesures de Haar, et si $d(x^s) = f(s)dx$, alors la mesure de Haar du produit semi-direct est $f(s)^{-1} dx \wedge ds$. Se servir aussi de trucs du genre : l'aire de la sphère est la dérivée du volume p.r. au rayon. Regarder les calculs de Gelfand-Neumark avec blocs de matrices. Donner l'exemple des mesures de Haar p-adiques (additive et multiplicative).

On revient alors à la convolution des fonctions. Les facteurs constants canulent la prop.8 (p.26). Noter la commutativité dans le cas abélien. D'après GODEMENT une algèbre de groupe est a) partout dense pour la topologie étroite, b) un module sur les mesures à support compact ; une remarque dira que tous les exemples donnés sont de ce type. Regarder les représentations dans les loct. convexes. On vide les potentiels d'ordre α .

Pour les questions diverses : 1) en exerc, 2) en texte, 3) et 4) en exerc, 6) et 7) en texte, 8) en exer, le "AA^{-1} voisinage de l'unité" de 9) en texte, le reste en exer, - 10) aux sous-harmoniques, - 11) en texte,- 12) et 13) en exer.

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES.

Ceci, avec les groupes de Lie, a été le morceau de résistance du Congrès. La rédaction CHEVALLEY a été considérée comme trop indigeste, et on décide de séparer à nouveau local et global.

Différentielles dans un Banach. Ceci est la "rédaction ultérieure" souvent évoquée par DIEUDONNE. On y fourrera tous les trucs ponctuels ennuyeux : Jacobien, fonctions implicites, changement de variables dans les intégrales multiples, pour un homéomorphisme différentiable, par récurrence sur le nombre de variables (méthode Goursat).

Séries entières. Comme on décide de mener de front variétés indéfiniment différentiables et analytiques sur un corps valué complet (R, C, ou autres), ceci est un second chapitre ponctuel. On décide de bloquer en un § de début tous les calculs formels qui ont été oubliés en Algèbre.

On admet les séries entières "en vrac" (cf $\sum a_\alpha x^\alpha$, α parcourant une famille de systèmes d'entiers) ; on dira que ça a même domaine de convergence que par groupement de termes ; ainsi le bas de la p.7 remonte. Pour la déf.1, considérer, soit des séries formelles en Y_i où l'on substitue x_i-a_i à Y_i, soit une famille de fonctions. Définir le domaine de convergence comme ensemble des points au voisinage desquels ça converge, et dire quand il n'est pas vide ; cor.: c'est une réunion de polycylindres, et c'est l'ensemble des points où c'est borné. Convexité logarithmique en exerc. Groupement par polynomes homogènes (p.3). Un exer. généralisant la prop.1 à n variables (Delange, C.R.). La remarque p.4 pour n variables. La prop.2 sera un cor. de la prop.3 . Rendre pigeable la remarque p.5 . Simplifier le th.2 au moyen des séries en vrac, abréger sa démonstration en se servant de "somme des normes". Rendre triviale l'associativité au moyen de l'unicité des coeff. On dira "analytique" au lieu de "holomorphe" . Donner la prop.4 comme cor. au th.2 . On réserve la prop.6 et 6 bis. Donner la prop.8 avant la prop.7 (qui est alors triviale) ; bien dire que la dérivée converge dans le domaine de convergence de la fonction donnée ; pour le cor. (p.11) bien dire qu'on regarde les valuations de Q (se borner peut être à R et C). Dire que, dans une série entière, on peut substituer des éléments permutables d'une algèbre normée (cf. polynomes). Mettre en exer. la prop.10, les conversibles à la Jacobson et le th. d'Eisenstein. Prolongement analytique par la méthode CARTAN : l'ensemble des points où les développements sont les mêmes est ouvert et fermé.

Pour la méthode des majorantes, on fera le th.1 sous l'aspect de l'inversion d'une transfor.analytique ; ne pas écrire trop de formules, et, pour la convergence, utiliser le lemme : addition, mult., subst. ne font pas sortir les coeff. d'une partie stable (ici nombres positifs). Essayer de faire tout de suite Cauchy-Kowalewska, qui donne à la fois fonctions implicites et équa. diff. Faire aussi Fuchs :

$x \frac{d\vec{y}}{dx} = \underline{A}(x).\vec{y}$.

Suggestions : on peut se servir de la notation des factorielles vectorielles de Schwartz ; on peut essayer une notation vectorielle pour les séries à n variables $(a_1(x)+a_2(x,x)+a_3(x,x,x)+\dots)$, si ça ne canule pas trop les majorantes. CHEVALLEY est prié de faire connaitre son lemme général (fait en collaboration avec Zorn), qui assurerait la convergence de tous les résultats formels. Le Vorbereitungssatz n'a pas sa place ici, et sera fait en algèbre locale.

Etude locale des variétés différentiables.

On fera en même temps variétés indéf. diff., et var. anal. sur un corps valué complet ; l'affaiblissement en "k fois différ." ne viendra qu'en remarques (cf. mesure abstraite). Remarquer tout de suite que R^n a une structure (diff. ou anal.) indépendante de sa base.

1) Définition par les cartes (pt de vue singulier) ; équivalence avec les fonctions (tchékiste) ; applic. diff.; caractérisation des isom.; invariance de la dimension ; fonctions à valeurs dans un esp.vect.top. (différentiabilité faible). Structures "fourbiculaires" (on se donne des applications des R^n dans X , avec transitivité $R^n \to R^m \to X$; par $R^n \to X \to Y$ on définit les "applic. diff." ; doit donner une bonne déf. (fonctorielle) des structures induites ; regarder aussi produits et quotients de tels trucs ; on fait ceci pour les espaces de SAMMY et de WEIL de 3)).

2) Définitions des produits, espaces fibrés (diff. et anal.), et sous-variétés. Il y a trois genres de sous-variétés : celles qui sont des sous-var. (hyperplans) au voisinage de chaque point de leur adhérence, - celles qui le sont en chacun de leurs points (segment ouvert, var. stratifiées à la CARTAN), - les dégueulasses mal recollées (géod. du tore, lemniscate) ; en tous cas la transitivité doit être facile à montrer ; ça doit aussi être conforme au point de vue CARTAN : " composante connexe du faisceau des limites inductives de plans" (cf. chapitre suivant).

3) Espace de SAMMY (espace fibré des chgts de coord. locales) et de WEIL (quotient par les gens à séries de Taylor nulles). Regarder leurs topologies et leurs structures fourbiculaires. Noter qu'ils ne se transportent ni dans un sens ni dans l'autre par applic. diff. Les espaces fibrés associés : vecteurs, covecteurs, opérateurs diff. de tous les ordres, séries formelles, etc. Relations de dualité entre ces espaces (on les définira tous directement, et non certains comme duals, et on ne fera pas d'identifications canoniques). Définition des champs .

Applications prolongées, différentielle d'une application (pour les notations, on attend la rédaction WEIL des groupes de Lie).

4) Etude locale des fonctions implicites et des équat.diff.

5) Formes différentielles, le d. Transfo. infinitésimales; le $\theta(X)$; remarquer qu'il opère sur tout ; $\theta(X).D = \theta(X) \circ D - D \circ \theta(X)$, d'où la linéarité en X et des tas d'autres choses ; le crochet ; sous-groupes à un paramètre ; le calcul sans intégration. Formule différentielle et intégrale de l'homotopie différentiable et anal. réelle.

6) Systèmes différentiels, Frobenius (CARTAN fera un rapport).

7) Rapports entre le réel et le complexe ; on prolongera au complexe la variété réelle sous-jacente de la var. complexe donnée, et on décomposera en produit local z et $\bar{z}$ (on est autorisé à faire çà du point de vue "extension quadratique, ou galoisienne").

N.B : faire attention aux signes ; c'est $-d/dx$ qui correspond à la translation +1.

Etude globale des variétés.

Le Congrès est écoeuré du mélange du local et du global, et décide de les séparer nettement.

1) Faisceaux ; généralités, topologie de Lazard. Histoires de dénombrabilité (Poincaré-Volterra). Variétés plongées. (CARTAN fera un rapport).

2) Applications de "faisceau séparé", prolongement analytique. Définition de fonction analytique (compos. connexe). Lien avec les revêtements. Intégration des formes diff. de degré 1 ($\int f(z)dz = 0$, Cauchy homotopique; périodes). Systèmes diff. linéaires globaux, groupe de monodromie. Frobenius global.

3) Applications de "faisceau fin" : partitions de l'unité sur les paracompactes. Whitney trivial de prolongement des champs.

4) Espaces de fonctions ($\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, etc.). Théorème d'immersion et conséquences (finitudes, propriétés d'algèbres sur l'anneau des fonctions). Existence d'épidermes. On fera ainsi le th. d'immersion : les partitions de l'unité donnent une immersion dans R^N ~~(somme~~ (somme directe infinie), on projectte alors sur un truc de dimension finie $2n+1$, et on constate (ce qui explique le $2n+1$) que les "mauvaises directions de projection" (sécantes doubles, etc.) forment un ensemble rare (ou maigre) (Méthode généreusement fournie par le Haut Commissariat à la Géomètrie Algèbrique).

5) Stokes. On adopte en gros la présentation CHEVALLEY. On se demande si l'on doit se borner aux bords lisses (il y a les polyèdres), et vider les différentiellement négligeables ; au choix du rédacteur.

<u>Distributions et courants</u>.

Ne pas oublier qu'on a fait la convolution et Haar. Bien se placer dans le cadre des variétés. Faire les courants et la théorie des noyaux. Faire ici tout ce qui se rapporte à la condition de Cauchy (à n variable et sur une variété) : si T est une distribution, $\overline{d}T = 0$ entraîne que T est une fonction analytique (prendre une carte et procèder par récurrence sur n en remarquant que $T(z_1, \dots, z_n)$ est une distrib. en $z_2, \dots, z_n$ fonction analytique de z_1) ; ceci donne Painlevé, Moréra et Liouville ; le rédacteur pourra demander des tuyaux à SCHWARTZ. Fourier n'est pas à sa place ici.

FONCTIONS ANALYTIQUES.

On commencera par un rappel des résultats déjà obtenus : condition de Cauchy (aux distributions), intégrale de Cauchy et prolongement analytique (aux variétés globales). Ensuite :

a) Expression des coeff. Inégalités de Cauchy (aussi pour n négatif) ; principe du maximum ; espaces de fonctions holomorphes, familles normales. Résidus et formule de Cauchy ; applications. Développements de Taylor et de Laurent convergeant dans tout le fourbi. Weierstrass ; Mittag-Leffler ; Runge (par la méthode Fantappié-Da Silva ; se généralise en mettant un pôle dans chaque trou, et en prenant qq. fonctions rationnelles au lieu de polyn^omes). Points singuliers, Liouville, etc..

b) Théorème d'existence sur les surfaces de Riemann compactes (par la méthode de projection dans L^2). Riemann-Roch (cf. laius SCHWARTZ au Séminaire). Périodes, relations bilinéaires, th. d'Abel (cf. bouquin de CHEVALLEY).

c) (On se demande si c'est bien ici le lieu). Représentation conforme. On regardera si le laius Ahlfors du Congrès de Copenhague (1946) permet de faire çà de façon élégante. Si oui, çà donne le th. de Jordan et l'uniformisation.

--ooooooooooo

GROUPES DE LIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

WEIL s'engage à chiader la question des notations (différentielles premières et d'ordre supérieur, etc.). On distinguera bien les théorèmes réels de ceux qui valent sur un corps valué qqconque de caract.zéro. On reconnaît à l'unanimité (2 juillet, 15 h 17) qu'il n'y aurait jamais eu d'algèbres de Lie sans groupes de Lie. On laisse au rédacteur le choix entre la séparation des passages "ponctuel ⟶ local et local ⟶ ponctuel", et la donnée des passages dans les deux sens à chaque coup.

On fera avec soin, mais sans pédanterie, les histoires de germes, qui ne sont autres que des limites inductives. On notera que 5°) (p.3) est un cas particulier de 4°) (p.2) .

Pour les notations, on se tiendra le plus près possible de celles de Papa-Cartan (le point de vue "dx = classe de courbes" donne une interprétation partielle raisonnable ; améliorer avec l'espace de SAMMY). Utiliser s'il le faut l'opérateur de DELSARTE.

Ne pas faire jouer un rôle spécial au crochet au début. Relier les sous-germes avec les systèmes compt.intégrables. A la p.29 on a un homom. de l'algèbre enveloppante dans l'algèbre des opér. diff. (chap.III d'algèbre) ; il est sur (lemmes 1 et 4) ; il est biunivoque (filtrer par degrés, et compter sur chaque quotient successif, en se souvenant qu'il suffit d'une inégalité). Noter (environs de la p.36) que l'on obtiendra des signes + dans toutes les formules en identifiant d/dx avec -1 dans l'identification à R de l'espace des dérivations en 0 (ce qui est raisonnable : on tire un peu le graphe vers la gauche). On demande (p.38) la formule d'Hausdorff (Dynkin, Uspeski 49-50, ou P.A. Smith, Annals) ; c'est en somme Frobénius explicité ; et ce serait bien commode dans la suite. Faire le bas de la p.49 au moyen de rangs de jacobiens.

N.B : On a fait les sous-groupes à un paramètre dans les variétés, le passage du réel au complexe aussi. On parlera ici de la mesure de Haar et du produit de composition des distributions. Noter que les $\mathcal{O}$ sont les applications de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ qui n'augmentent pas les supports. Noter que le rapporteur a dit "normalisateur" au lieu de "stabilisateur"

Il y a un chapitre non traité dans le rapport, avec : a) un sous-groupe fermé est de Lie, un endom.continu est analytique, cas des groupes opérant sur les variétés, Iwasawa-Gleason (sous-groupe et quotient étant de Lie). b) Le passage du local au global (un groupe, sous-groupe, représentation, analytique en 0, l'est partout) ; sous-groupes enroulés ; revêtement universel ; prolongement des homomorphismes dans le cas des simplement connexes. c) Un groupe différentiable est analytique. Ici le grand groupe sera donné .

WEIL a fait un court laïus sur la géomètrie différentielle. Son étude est remise à plus tard. WEIL tâchera de procurer à Bourbaki les notes du cours de Chern.

LA DEUXIEME PARTIE.

Les Hauts Commissariats dévoilent qu'il y a une grande part de celle-ci qui est stable et bourbachisable (Livres I, II, III et V), une autre qui donne quelque espoir (début des algèbres de Lie, de la Géomètrie Algébrique et des équa.diff.algèbriques), et que le reste (classification des algèbres de Lie, grands trucs de Géom.Alg., idéaux de fonctions holomorphes) demandera une longue patience.

Spécialisations et valuations.

Une déclaration d'intention : anneaux commutatifs à élément unité, sous-anneaux contenant 1, homom.unitaires. Une spécilisation sera un homom. sur un anneau d'intégrité (en général contenu dans un corps ; ceci facilite la définition de l'équivalence (égalité des noyaux). Donner p.1 l'exemple de la valeur d'une fonction en un point.

On bloquera en un § préliminaire les anneaux de fractions, que l'on fera par la méthode Uzkov. Améliorer les notations. Dire que l'inversibilité de 1+x pour x dans M suffit, et que l'unicité de l'idéal maximal entraîne que c'est un anneau local. ~~Mmmxx~~ Noter que $(A_p)PA_p = A_p$.

Voir si la prop.4 n'est pas une conséquence du th. de symétrisation (Alg.I). Donner ici le lemme qui coiffe à la fois le th. de prolongement (p.11), et Cohen-Seidenberg (qui est vidé de ce chapitre, mais qui sera indispensable au chap.III).

Les corps projectifs auront été définis en Alg.IX. Donner une définition en forme des spécialisations projectives. Pour le th. de prolongement, on zornifiera d'abord, et l'on dira que l'on a tout (démonstration de la prop.5 avec A maximal, sans énoncé). On considérera ∞ comme algèbrique sur le corps premier. Le lemme est avalé. Mettre la déf.6 au début du § suivant. Introduire la clôture alg. de U dans le th.1 .

Donner les idéaux d'un anneau de valuation (par les coupures). On dira "place" et "valuation" (place = spéc.projective de tout le corps) ; ne seront pas nécesst. canoniques ; dire que l'une détermine l'autre ; parler de l'anneau d'une place et de l'anneau d'une valuation (idem idéaux) ; dire et redire que valeur 0 correspond à ordre > 0 . Donner les places à l'ex.3 (p.17) ; commencer par la place en c) (p.18) ; référer à un exer. sur la structure des valuations d'un $K(x,\ldots,y)$ (Mac Lane-Schilling) ; donner tout de suite la valuation triviale. On dira "centre" pour valuations et places. Une proposition et deux cor. (pour Q et K(X)) (p.23). Procèder alors du général au particulier : indépendance, valuations composées, archimédiennes, discrètes. Dire "valuations étrangères" et donner tout de suite la relation d'ordre. Enoncer la prop.9 et le th.4 avec des éléments des groupes des ordres ; faire un peu de topologie en laius ; regarder si le produit et la diagonale n'éclairent pas les choses. Pour les valuations composées on commencera par le point de vue des places (prop.11) ; mettre "plus fin" et "moins fin" en accord avec la topologie ; donner le la prop.10 avant sa démonstration ; faire le cor. directement (avec des anneaux de valuation) ; mieux rédiger la prop.12 ("Etant donné ...") ; la prop.13 résulte trivialement du § 1 (prendre une place prolongeant $B \to B/P$ à valeurs dans $(\overline{B/P})$, et remarquer qu'une place triviale sur K est triviale sur $\overline{K}$). Un n° spécial pour les archimédiennes ; démontrer que Arch. correspond à "sous-groupe de R" ; le cor. (p.35) passe au n° des valuations discrètes. Un n° pour les valuations discrètes ; donner la prop.7 avec la propriété d'intersection de la remarque (p.26), et énoncé actuel en cor.; ajouter la finitude à la prop.8.

Au § des éléments entiers, on reste au point de vue des places et valuations, et on vide les th. de Cohen-Seidenberg. Donner plus de conditions équivalentes dans le th.1 : équation, anneau $A[x]$, anneau R , pas de spécialisation finie sur A et infinie en x , x fini sur toute place..., ... sur toute valuation... ; définir "équation de dépendance intégrale" ; rester aux anneaux généraux dans la déf.1 ; dire qu'un intégrt.clos est intersec. d'anneaux de valuation ; définir la clôture intégrale dans l'anneau (total) des fractions ; garder l'ex.2 (p.38). Uzkoviser les prop.3 et 6, et s'arrêter là .

Au § des anneaux normaux, on éclairera sa lanterne : définir les valuations essentielles (A_P anneau de val. = $(A:P)=A$) et annoncer les résultats. Annoncer que les $K[X_1,\ldots,X_n]$ sont normaux. Mettre en lemmes les propositions purement techniques. Mettre ici les premières lignes de la p.51 . WEIL fournira un petit papier rendant ce § pigeable.

Au § des anneaux factoriels, inverser déf.1 et th.1 ; un "autrement dit" dans l'énoncé du th.

Pour les Dedekind énoncer la prop.1 avec "pas d'idéaux premiers emboîtés" ; dire "conditions valuatives" dans la prop.2. Se précipiter alors sur le th.1 : regarder si la fin de sa démonstration (p.59) demande vraiment tous les trucs d'anneaux normaux. Donner alors les trucs de la p.55. Ajouter que le quotient par un idéal est principal (base de deux éléments), un truc de dénominateur exact, et qq.autres résultats plaisans qui se trouvent dans le diplodocus. On rejette la structure des intersections finies d'anneaux de val. discrètes au th. algèbrique de permenence. Raccourcir le théorème chinois.

Dire à la prop.1 (p.62) que, pour obtenir A_S , on supprime certains anneaux de valuation. Vider le n° 2. Mieux énoncer le lemme (p.64) : "l'application définie par ... est une valuation ..." ; donner aussi le th.1 pour les int. clos (même démonstration). Alléger le cas infini du th.2 (sinon le vider) : c'est au plus un corollaire. Vider la prop.6 (p.68). Dans le th.3, B est contenu dans un A-module libre de rang n ; on a confondu les cofacteurs avec les éléments de la matrice inverse. On aura déjà fait, au § des entiers, ceci : si A est une intersection d'anneau de val. de K , et si L est une ext. alg. de K , l'anneau des éléments de L entiers sur A est l'intersection des anneaux des valuations étendues. Arranger l'énoncé et la démonstration (canularesque) de la prop.7 (p.73). Regarder si Krull n'a pas un th.général de discriminant, disant les valuations qui ramifient ; si c'est propre, le mettre ici.

<u>Reste du Livre I.</u> -

On rassemblera (en un état 6) les morceaux épars de rédaction des anneaux noethériens. On fera la décomposition primaire pour les modules stratifiés sur anneaux stratifiés (cf.Snapper, et trucs Zariski d'idéaux homogènes).

Ne pas oublier qu'un anneau noethérien intégrt. clos est normal. Ne pas oublier que, dans le cas noethérien, les anneaux de fractions d'Uzkov coincident avec ceux de CHEVALLEY.

Le prochain rédacteur a toute liberté pour présenter l'algèbre locale élémentaire à Son Maître. Mais il n'oubliera pas de donner : ce qu'il faut pour les corps valués complets, - le lemme de Hensel, - le Vorbereitungssatz et ses conséquences.

Algèbre homologique.

Le rapport comprendra la théorie des foncteurs et satellites (pour Hom et $\otimes$),- les algèbres avec identités (assoc., Lie), et les algèbres associatives enveloppantes,- l'homologie de ces gens là et des groupes. On mettra éventuellement là Künneth et la suite spectrale.

Algèbres de Lie.

On demande à Koszul un fascicule de résultats, couvrant les groupes, les algèbres, les espaces riemanniens symétriques et les groupes compacts de Lie. Il reste chargé de la rédaction du début (jusqu'à Ado inclus) ; il regardera si, avec une algèbre de Lie, on peut fabriquer un groupe sur les séries formelles ; bien mettre en évidence que tous les fourbis sont conservés par extension du corps de base (çà doit avoir un caractère de géom.Alg.) ; pour le th.d'Ado, on pourra donner une démonstration analytique plus jolie de Papa Cartan (sur C), et appliquer le principe de Lefschetz (caract.0) .

Bourbaki est dégoûté de la classification des algèbres de Lie, et se demande quel intérêt çà peut bien avoir. Par contre il est très content des pp. 87 à 90, et de la considération des éléments génériques.

Le reste.

On se demande que faire des anneaux primitifs (ici, ou chap.X d'Algèbre ?) : s'ils restent ici, on y mettre le groupe de Brauer.

On décide (pour l'algèbre unidimensionnelle) de cohomologiser à bloc le corps de classes, à la Hochschild-Hasse-Ibutzu-Weil-Nakayama. Les rapporteurs devront se souvenir que les fonctions algèbriques d'une variable sur C ont été faites aux fonctions analytiques.

Le Haut Commissariat à la Géomètrie Algèbrique est optimiste et promet un fascicule de résultats.

On supplie CARTAN d'écrire un rapport, de faire un bouquin, ou de séminariser sur les idéaux de fonctions holomorphes.

LA TROISIEME PARTIE.

En Topologie Algèbrique, le Haut Commissariat trouve l'homotopie mouvante. L'homologie singulière est élémentaire et stable ; les faisceaux ne la bouffent pas ; on espère la faire avec des simplexes, cubes, octaèdres, boules, et autres bons espaces indifféremment ; elle donne Jordan, la dimension, les th. de points fixes et l'invariance du domaine. La théorie des faisceaux (qui bouffe toutes les théories tchékistes) est plus compliquée, mais néanmoins a aussi un aspect présentable ; elle donne De Rham, Poincaré et Alexander.

Quant à la suite spectrale, on y tâtonne encore. SAMMY la trouve trop compliquée, et WEIL trop simple. Il faut voir venir. Ses applications sont nombreuses : cohomologie des espaces fibrés, homotopie, théorie de Morse, espaces stratifiés, décompositions cellulaires, revêtements galoisiens, situations fibroïdes.

A l'horizon, on a l'espoir de découvrir tous les invariants du type d'homotopie.

Le Congrès demande un rapport sur la théorie de Morse, et un sur la suite spectrale et ses applications.

LA QUATRIÈME PARTIE.

On y trouve deux points de vue, celui des méthodes, qui est bourbachisable (algèbres normées, spectres, etc.),- et celui des problèmes qui ne l'est pas (équations différentielles et aux dérivées partielles) Nous nous bornerons au premier.

Le rapport sur les algèbres normées n'est pas démodé, et on le reverra aux prochains Congrès. Il y a de jolies choses en Calcul des Probabilités, sur lesquelles SCHWARTZ promet un rapport sans date. La transformation de Fourier sur les groupes abéliens et compacts sera traitée dans le bouquin de GODEMENT. Les anneaux d'opérateurs sont bordéliques, mais fort utiles. Il faudra aussi regarder la théorie ergodique et le potentiel.