

## .LA TRIBU.

(Bulletin oecuménique, aperiodique et bourbachique).

N° 21.- COMPTE-RENDU du CONGRES de NANCY (3-7 Février 1950)

Présents : Cartan, Chabauty, Delsarte, Dieudonné, Ehresmann, Godement, Mackey, Pisot, Roger, Samuel, Serre, Schwartz.

Cobayes : Bruhat, Berger, Braconnier, Grotendieck, Riss.

-----

Tout Congrès était jusqu'ici agrémenté d'un "numéro du plan". Mais, Notre Maître, ayant réfléchi en lisant une rédaction d'Analyse Combinatoire, s'aperçut qu'avec trois plans par an il faudrait des millénaires pour épuiser tous les ordres de publication baroques ou non. Il donne donc d'ordre à ses fidèles de proposer à chaque Congrès sept fois septante sept plans généraux, sans omission ni répétition. Pour commencer, ce Congrès vit éclore sept plans de la première partie et un de la seconde (compte non tenu des plans exposés oralement). Pour faciliter le travail, Delsarte s'est engagé à acheter, avec les milliards de Freymann et Rockefeller, une machine électronique capable d'imprimer un plan toutes les minutes et qui fonctionnera sans interruption pendant tous les Congrès.

Le plan de la première partie.

Le Congrès s'est surtout attaché à déterminer l'ordre et les places respectives des théorèmes suivants (et croit que, ceci étant acquis, le plan général s'en déduira trivialement, au moins dans ses grandes lignes) Stokes, intégrale de Cauchy, Liouville, Lebesgue-Likodym, Gelfand-Mazur. Il est clair que Stokes ne peut se faire sans un peu d'Intégration (c.à.d. les chap. I à IV qui doivent former un bloc) ; d'autre part il est impossible de faire les joyeux chapitres de la fin de l'Intégration (voir C.R. de Rayaumont) sans Gelfand-Mazur, c'est-à-dire sans Liouville.



Remarques -a) La géom.diff.locale (D'après Charles) est l'étude des problèmes d'équivalence des systèmes de Pfaff ; il n'y est pas besoin d'aller jusqu'à Cauchy-Kowalewska ; c'est même là la pierre de touche de ce qui est à mettre dans ce Livre, ou pas.

b) La démonstration du th. de Thorin (qui donne la dualité des  $L^p$ ) demande de principe du maximum, d'où une objection contre le plan 2), mais il semble facile de s'en tirer élémentairement.

## II - Le livre des fonctions analytiques élémentaires.

Son contenu est indépendant de sa place. Les fonctions considérées seront toujours uniformes. On distinguera "analytique" (point de vue des séries entières) et "holomorphe".

Chap.I - Séries entières (à  $n$  variables dans un corps valué complet ; valeurs dans un esp. vect.normé complet sur ce corps. On utilisera partout la méthode des majorantes). Contenu :

- 1) Convergence au voisinage d'un point, rayon de convergence.
- 2) Substitution d'une série entière dans une s.e.; applications : continuité, dérivée, primitive.
- 3) Fonctions implicites.
- 4) Equations différentielles (méthodes de Cauchy et Frobénius).
- 5) Inégalités de Cauchy (ici ou au chap. II ?).

La théorie fine des séries entières (Vorbereitungssatz, Cousin ; idéaux) viendra quelque part en Géométrie Algébrique.

## Chap.II - Fonctions holomorphes d'une variable complexe.

Elles seront définies comme fonctions ayant une dérivée. Contenu :

- 1) Intégrale de Cauchy (la méthode d'homothétie de Whitehead met bien en évidence la connexion), inégalités qui s'en déduisent.
- 2) Principe du maximum, Liouville, Gelfand-Mazur.
- 3) Résidus.

- 4) Convergence des suites de fonctions holomorphes (Weierstrass) et intégration des fonct.holomorphes dépendant d'un paramètre.
- 5) Equicontinuité (Ascoli-Montel)
- 6) Séries de Taylor et de Laurent.
- 7) Weierstrass et Mittag-Leffler.

Les séries de Dirichlet viendront au Livre d'Arithmétique.

Remarque - Les inégalités de Cauchy seront démontrées par récurrence sur le nombre  $n$  de variables. Pour  $n=1$  il y a deux méthodes : celle de l'intégrale de Cauchy (que l'on donnera au Chap.II), et celle de Chabauty (avec des majorations de déterminants) qui est valable pour  $C$  et les corps valués (non archimédiens) non loc. compacts. Pisot et Chabauty ont montré une méthode qui utilise deux fois le résultat de Chabauty, et permet (en utilisant seulement le fait que  $C$  est connexe) de sortir du cercle de convergence de la série d'une fonction partout holomorphe (et donc de montrer que ce cercle n'existe pas), ce qui donne Liouville sans intégrale de Cauchy ; mais cette méthode n'est qu'une jolie variante.

III - Les chapitres de la Divisibilité.

A) Plan, plan et ranplanplan.

Le plan du "Commentaire" de Samuel est attaqué de deux côtés : d'une part Chevalley qui tient à ce qu'on ne disloque pas le quadrilatère "normaux / factoriels / principaux", - et d'autre part par Cartan et Delsarte / Dedekind / qui trouvent exagéré d'introduire des tas d'anneaux "qu'on n'a jamais vu" pour traiter des entiers, polynomes et diviseurs élémentaires. Samuel ayant mis son veto à la relégation des valuations, et spécialisations en Analyse Algébrique (appuyé en cela par la voix de Dieudonné et les lettres de Weil et Chevalley) le Congrès fut menacé d'enlissement irrémédiable. Arguments des algébristes : il s'agit,

dans la première partie de Bourbaki, non pas de ne donner que ce qui sera utile dans la suite et rien de plus, - mais de montrer au lecteur quels sont les points de vue actuellement féconds ; il est donc ridicule (et Garrettoresque) de développer en long et en large la méthode des groupes ordonnés (qui est impuissante devant toute question un peu fine) et de taire celles des valuations et des spécialisations (qui donnent des tas de résultats fins).

Les analystes ayant refusé de se plier aux sournoises manoeuvres des algébristes (tendant à leur vendre trois sommets du quadrilatère pour les forcer à accepter le quatrième), - et Cartan tenant pour des raisons sentimentales à ce qu'on dise que la divisibilité est l'étude d'un groupe ordonné, - Dieudonné proposa un plan de compromis qui est accepté dans ses grandes lignes. Le principe en est le suivant : pour ne pas mutiler le "quadrilatère", on traitera d'abord les anneaux principaux (pour avoir les diviseurs élémentaires sans trop d'Algèbre) au moyen des groupes ordonnés (on évitera les répétitions en donnant dès le début l'exemple du groupe ordonné de la divisibilité, et en traduisant au fut et à mesure la "grande<sup>di</sup>visibilité" (valuations, spécialisations, et quadrilatère) fera l'objet d'un chapitre spécial du Livre II, ce qui permettra d'en donner un exposé très "pur", sans groupes ordonnés, satisfaisant ainsi les désirs avoués de Chevalley (et cachés de certains autres).

Chap. VI : Groupes ordonnés (notation additive et notation de la divisibilité). Corps ordonnés.

Chap. VII - 1) Anneaux et modules noethériens.

- 2) Anneaux principaux
- 3) Diviseurs élémentaires.
- 4) Réduction des matrices.

Chap. X - Valuations et spécialisations (le quadrilatère).

Les chapitres intermédiaires étant VIII (formes quadratiques..), IX (NEUF! géométrie élémentaire) ; les algèbres semi-simples et algèbres de Lie venant après.

Note du rédacteur : si Chevalley maintient son veto au sujet des anneaux et modules noethériens, il est très facile de supprimer ce § : il suffira de montrer que tout anneau principal satisfait au Teilerkettensatz au § des anneaux principaux (cf. rédaction Weil), - et de mettre un n° au début des diviseurs élémentaires pour montrer que tout sous-module d'un module de type fini sur un anneau principal est de type fini. C'est tout ce qui est nécessaire ici, et on peut donc ne pas donner le fait que polynomes et séries formelles sont des anneaux noethériens autrement qu'en exercice. Avec cette solution il semble ridicule de séparer groupes ordonnés et anneaux principaux, ce qui permettrait de fondre VI et VII en un seul chapitre, les corps ordonnés venant à la fin. Les propriétés mystiques du nombre 9 demanderaient alors d'intercaler un nouveau chap. VII, et la "grande divisibilité", est tout indiquée pour des raisons évidentes. (le rédacteur suivra Chevalley s'il fait cette proposition).

#### B) Groupes ordonnés.

Le Congrès vomit unanimement les considérations non commutatives. Il décide de donner le pas à la notation additive qui est la seule utile pour les analystes, et dont la commodité est telle que, au lieu de multiplier les fonctions, la géométrie algébrique préfère additionner les diviseurs. Cependant on donnera de temps en temps la traduction en langage "pgcd" (par exemple : prop. 3 add., et prop. 3 div.). Cartan dit qu'un bon procédé est de ne pas traduire les propriétés de familles infinies.

- n°1) Monoïdes et groupes ordonnés ; exemple des fonctions ; préordre et passage au quotient (pour les monoïdes).
- n°2) Eléments positifs. P donne un préordre ; condition pour que ce soit un ordre ; le quotient par  $P \cap (-P)$ . La condition pour que ce soit un groupe filtrant (cor. p.5, en prop.) et le lemme permettant la translation d'un nombre fini d'éléments dans P . Exemple des cônes.
- n°3) Exemple de la Divisibilité (n°1 du § 2 de Weil).
- n°4) Opérations élén. sur les groupes ordonnés ; ajouter l'ordre lexicographique.
- n°5) Homomorphismes croissants, caractérisation des isom. (déjà définis au n°1 .
- n°6) Lemme de décomposition (pour les réticulés).
- n°7) Bornes sup. et inf. ; se "borner" aux réticulés. Définir pgcd et ppcm au milieu de la p.9 . Démontrer la prop.4, et la traduire.  
Simplifier la prop.6 (translation). Bloquer les prop. des p.12 et 45 en une grande prop. (additive), et la traduire.
- n°8) Définir (formellement) étrangers pour deux éléments ; exemple de  $x^+$  et  $x^-$  ; définition d'étrangers deux à deux et d'étrangers dans leur ensemble dans le texte. Traduire les cor. de la prop.8 ; donner les cor. de la prop.2 p. 46 ici. Dire que les quotients par le pgcd sont étrangers (en prop., avec traduction). Comme on ne s'intéresse qu'aux réticulés, donner la prop.10 en cor. de la prop.11 ; y mettre la prop.3 (p.47) ; donner les formules du bas de la p. 47 avec énoncé explicite. Dire que le cor. (p.14) est une propriété spéciale aux groupes (contre exemple en exerc.)
- n°9) Eléments minimaux. En notation additive, car ça sera traduit en plusieurs notations multiplicatives (éléments dans les anneaux factoriels et idéaux dans les anneaux de Dedekind), et que "c'est la République le régime qui divise le moins Légitimistes et Orléannistes" .

c) Corps ordonnés.

Le Congrès félicite Serre de sa rédaction, adoptée définitivement modulo quelques détails. Dire p.2 que 1 est strictement positif s'il existe, en en déduire l'ordre (unique) sur  $\mathbb{Z}$ . Souligner le strictement dans le  $\mathbb{Z}$ . Dire, dans la déf.2, qu'on peut se restreindre aux corps totalement ordonnés. Vérifier  $(AP_1)$  dans la prop.2. Remonter p.2 le début de l'exemple du haut de la p.4. Dire p.5 qu'il n'y a pas d'ordre sur un corps algèbre clos. Footnote pour la notation  $E^2$ . Dire (début du p.4) qu'on identifie polynômes et fonctions polynômes. Une remarque p.8 sur la notation  $\sqrt[n]{a}$  (et  $\sqrt[n]{a}$ ): on note ainsi la racine positive si elle est déjà dans  $K$ , sinon il y a deux possibilités d'ordre dans l'extension quadratique, ce qui définit  $\sqrt[n]{a}$  quand cet ordre est choisi. Annoncer que l'ordre évoqué au th.2 est unique (cf. exer. sur Sturm). Mettre la remarque dans l'énoncé de la prop.5. Ajouter la discussion du signe des racines du trinôme.

D) Anneaux et modules noethériens.

L'équivalence de (N) et (N') est un lemme de théorie des ensembles que l'on démontrera ici. Le Congrès vomit l'"engendrement fini" et revient à "type fini" comme pour les corps; ceci est à définir avant la déf. de "noethérien". D'accord avec Weil pour que "noethérien" soit toujours avec élément unité. Abréger la prop.1 (image d'un module de type fini); faire la prop.2 pour une extension de  $E$  par  $F$ . Donner (dès la p.82) les exemples de  $\mathbb{Z}$  et de  $K[x]$ ; une remarque: sous-anneau pas tjrs noethérien (un exer.). Alléger la prop.4 en introduisant la notation des produits de sous-groupes d'un anneau. Donner les th.1 et 2 dans le cas commutatif seulement (le reste en exer., avec endomorphisme pour permuter coeff. et variable, comme dans un exer. du chap.IV).



E) Anneaux principaux.

Regardés d'un oeil distrait. Comme chez Weil. Traduire le th.1 .  
S'arrêter en haut de la p.33 . Ne pas oublier la prop.14 qui sera  
utile plus loin.

F) Diviseurs élémentaires.

On bloquera les lemmes oubliés aux chap.II et III en un n° spécial  
au début (précédé d'un petit laius) : lemme 1 (102), un énoncé en haut  
de la p.105, prop.1 et son cor.; un n° de projecteurs (pp.109 sqq,  
allégé du cor.2 qui est au chap.II). Dieudonné s'oppose à un signe  
spécial pour la somme directe (loi de composition non partout définie).

La déf.1 sera donné pour un anneau  $A$  non intègre, puis laius avec  $A$   
intègre et son corps des fractions (p.106).

Pour le th.2 (111) il y a deux aspects : position du sous-module,  
conséquences pour le quotient ; on fera comme pour le th. de complétion:  
tout dans l'énoncé, existence, une prop.intermédiaire (le cor.1),  
unicité. Il semble que, pour qu'il y ait somme directe, il suffise que  
le module de torsion soit de type fini (~~FR~~). Un  $\Sigma$  au cor.4 (115) :  
 $\mathbb{Q}$  est sans torsion mais non libre. *Exercice*

Le Congrès n'est pas très fixé sur la terminologie "diviseurs  
élémentaires" "facteurs invariants". La terminologie de Weil étant  
la même que celle de v.d.W., le rédacteur de "La Tribu" propose de s'y  
tenir. Annoncer (p.115) le cas des polynomes. Sauf protestation des  
absents le cas de deux modules qui chevauchent (prop.3, p.116) semble ne  
pas mériter plus qu'un exer. Donner l'homologie comme exemple de  
troisième espèce.

Dire au n°3 bis) que l'on peut agrandir le module où l'on applique  
sans changer les diviseurs élémentaires ( $\neq 0$ ).

Malgré les doutes de Weil, le Congrès est d'avis de garder le n°4  
(que l'on pourrait appeler "facteurs locaux" d'un module de torsion) ;

il contient une décomposition intéressante et qui vient se croiser avec la première (il faudra d'ailleurs montrer ce qu'elles donnent par combinaison). Leur indépendance fait qu'on peut les traiter dans l'ordre qu'on veut ; il vaut cependant mieux laisser la décomposition locale à la fin, pour que les div.éléments restent le plus près possible des lemmes oubliés, qui sont là pour fournir l'unicité. La prop.4 (121) a été faite au chap.II, et il suffit d'un rappel ; raccourcir ce qui suit ; le mot module "primaire" est mauvais (idéaux primaires) ; "local" serait mieux. Il faut inverser les prop.5 et 6 . La décomposition des fractions rationnelles est acceptée.

G) Endomorphismes des espaces vectoriels.

Le Congrès a été peu inspiré par ce § , et a regretté quelque peu l'état 2 . Il laisse toute liberté au rédacteur de l'état 4 pour puiser dans les états précédents, et disposer les choses à sa guise (liberté dont ledit rédacteur se serait bien passé étant donné le peu d'intérêt qu'éveillent en lui toutes ces tîpinades).

Au n°1) suivre l'ordre déf.1, condition d'isom. (le cor.), prop.1 (contractée). Dire que l'anneau de polynômes est là à la place de l'algèbre engendrée, mais que l'on met l'intégrité au-dessus de la fidélité. Éclairer sa lanterne p.13) :  $P(f).x$  est bilinéaire en  $x$  et  $P$  ce qui introduit le produit tensoriel, et son application linéaire  $A[X] \otimes E \rightarrow E (1)$  ; le noyau de (1) est  $A$ -engendré par les  $P(X) \otimes x - 1 \otimes P(f).x$  , donc  $A[X]$  -engendré par les  $X \otimes x - 1 \otimes f(x)$  .

Au concours : peut-on déduire de là Hamilton-Cayley sur un anneau quelconque (c'est vrai par prolongement des identités). Il faudrait essayer de raccrocher ici (et de façon naturelle) l'introduction du polynôme caract. par les valeurs et vecteurs propres. Dire que le dernier des div.éléments est le polynôme minimal, et qu'il y a des div.éléments égaux à 1 (cf.p.140). Remonter la prop.3 (138) avant la déf.3 .

Mettre la prop.4 (extension du corps de base) après la prop.5 .  
Donner l'énoncé de la prop.6 avant sa démonstration.

A partir de la p.145 intervient le point de vue des facteurs irréductibles du polynome caract. (surtout sur un algt clos), c'est-à-dire celui des facteurs locaux. Il sera bon d'exprimer les projecteurs correspondants (il y a uniquement à se servir de la décomposition en facteurs irréd. et de Bezout) ; relation entre la multiplicité de la racine caract. et la dim. du sous-espace ; égalité lorsque la matrice est réductible à la forme diagonale (c.à-d. si le polynome minimal a ses racines simples). On ajoutera les choses demandées par Chevalley (réduction simultanée de n matrices à la forme <sup>triangulaire</sup> ~~diagonale~~), et questions voisines, -sans aller jusqu'à la semi-simplicité ; décomposition (diagonale)+(nilpotente) commutant, par la méthode du rapport sur les Algèbres de Lie (polynomes p. r. matrice initiale) (via un alg. des)

Pour l'ordre de tous ces fourbis : Hedactor Demerdetur, macte animo et vae victis !

-----

par récurrence

triangulaire: c'est  
~~Jack H. Hölder~~

Si toutes red. diag.  
et commutant => réduction  
simultane

COMPTE-RENDU DU COMITÉ DE L'INTEGRATION (8-10 Février 1950)

Présents : Cartan, Delsarte (par intermittences), Dieudonné (avec une fausse sortie), Godement, Mackey, Pisot, Roger, Serre, Schwartz.

Dans l'ensemble, le Comité s'est borné à remanier l'ordre des paragraphes et propositions, sans modifications substantielles. Les décisions les plus importantes sont les suivantes :

1° Le § sur l'image d'une mesure et la moitié du § sur les inégalités de convexité (inégalités de Thorin-Riesz et leurs applications à la dualité des  $L^p$ ) sont rejetés au chap. IV .

2° Le Comité n'a pu se mettre entièrement d'accord sur le plan du § 5 (ensembles et fonctions mesurables). Deux schémas de rédaction seront préparés de toute urgence pour le Congrès d'Avril, l'un par Cartan et l'autre par Godement.

3° Le § des  $L^p$  (§ 3 dans la rédaction état 5) est scindé en 2, le premier étant consacré aux  $L^p$  sans intégrale (c'est celui qui se généralise aux sommes continues), le second à la définition de l'intégrale par prolongement et à ses propriétés.

4° La question des propriétés impliquant plusieurs mesures (mesure extérieure  $(\mu + \nu)^*$ , semi-continuité de  $\mu \rightarrow \mu^*(f)$  quand  $f$  est sci., intégrabilité de  $f$  pour  $\mu + \nu$ , etc.) est réservée pour discussion au Congrès d'Avril, en connection avec le § sur les fonctions mesurables et le chap. IV .

5° Le Comité est revenu sur la décision du Congrès d'Octobre 49 de rejeter les mesures bornées au chap.III. Elles réintègrent le chap.II, à l'exception des propriétés qui impliquent prolongent (autre que le prolongement trivial aux fonctions continues nulles à l'infini) .

6° Le Comité est d'accord pour examiner une rédaction nouvelle proposée par Cartan, sur la construction d'une mesure à partir de ses valeurs sur certaines familles d'ensembles, ce qui donnerait entre autres une meilleure présentation de l'intégrale de Stieltjes.

7° Il est entendu qu'un examen très sérieux sera fait au Congrès d'Avril en ce qui concerne les répercussions possibles du chap.IV sur le chap.III (il s'agit de savoir si, pour obtenir tous les théorèmes dont il a besoin sur mesures induites, Lebesgue-Nikodym, intégrale faible et mesure quotient, Godement a besoin ou non d'autres choses que celles qui se trouvent dans le chap.III actuel). Cela fait, il est convenu que sauf le § sur les fonctions et ensembles mesurables, le n° sur les phratries cartaniques et les additions éventuelles nécessitées par le chap.IV, le reste du chap.III ne reviendra plus devant le Comité, et que la rédaction finale sera examinée par un Comité restreint formé de Cartan, Godement et Dieudonné, avant d'être livrée à l'impression.

DÉTAIL DES PARAGRAPHES.- § 1.- signaler au début que dans le chapitre, "mesure" signifiera toujours "mesure positive". Le résultat de la prop.1 est incorporé au th.1, la prop.3 bloquée avec le th.2, le cor. du th.2 devient proposition. La prop.4 est rejetée au § 2 (fonctions négligeables) ; la prop.5 est réservée (éventuellement rejetée au chap.IV). Dans la prop.9, dire : les  $G_2$  sont deux à deux sans point commun. La prop.10 est reportée au § 2 (ensembles négligeables), la prop.11 au § 5 (ensembles intégrables) où tout ce qui se rapporte aux mesures bornées sera bloqué. P.7, mettre en proposition la mesure des ouverts dans  $\mathbb{R}$ . Le support de la mesure de Lebesgue aura été fait au chap.II. Le cor. de la prop.13 est vidé. Dans la prop.15 (qui devient théorème) mettre l'égalité et expliquer ce qu'on fait dans la démonstration. Donner un contre ~~exemple~~ exemple au bas de la p.9. Le lemme de Fatou devient cor.1, le cor.1 devient proposition. Tout ce qui concerne

l'application  $\mu \rightarrow \mu^*$  (prop.16 et corollaires) est réservé ; il faudra en tout cas dans la prop.16 utiliser les limites au lieu de sup. Vider l'exemple de la p.12.

§ 2.- Fonctions et ensembles négligeables. Commencer par les fonctions numériques positives négligeables ; bloquer la prop.5 et son corollaire. Insérer ici la condition pour qu'une sci. soit négligeable. Ensuite ensembles négligeables, bloquer les prop.7 et 8, caractérisation des ouverts négligeables. Propriétés presque partout ; on ne fait le th.2 (devenu th.1) que pour les fonctions  $\geq 0$ , puis les prop.9 et 10 ; un  $\Sigma$  pour la réciproque de la prop.10. Vient ensuite un nouveau n° : fonctions vectorielles négligeables (à valeurs dans n'importe quel vectoriel). Elles forment un module sur les fonctions numériques. Laïus sur la compatibilité de l'égalité presque partout avec toutes les opérations qui ne font intervenir qu'une infinité dénombrable de fonctions :  $\lim$ ,  $\sup$ ,  $\limsup$ , somme de série, etc. Cas des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel topologique F dont le dual F' contient une suite faiblement dense  $(a'_n)$  ; pour que f soit négligeable, il suffit que les  $\langle f, a'_n \rangle$  le soient. Cas où F est un Banach, pour que f négligeable, il faut et suffit que  $\mu^*(|f|) = 0$  ; plus généralement, cas où il y a dans F une infinité dénombrable de semi-normes. Classes de fonctions équivalentes, opérations sur les classes, relation d'ordre entre les classes, cas de compatibilité déjà vus pour les fonctions. Fonctions définies presque partout ; chacune définit une classe, et deux définissent la même classe si elles sont égales presque partout ; opérations définies presque partout (éventuellement sur des fonctions partout définies).

§ 3.- Les espaces  $L^p$ . Commencer par Minkowski et son compagnon (Hölder est rejeté au § 7). Définition des  $N_p$  et prop.1, théorème de convexité dénombrable ;  $N_p$  est définie sur les classes de fonctions.

Définition de  $\mathcal{F}_F^D$  (en règle générale, utiliser aussi peu que possible cette notation ; on omet le  $F$  lorsque  $F = \overline{\mathbb{R}}$ ) ; l'adhérence de  $0$  est l'ensemble des  $f$  négligeables. On utilisera la notion de "convergence en moyenne d'ordre  $p$ " le plus possible, et on ne passera au quotient que quand c'est indispensable. L'espace  $\mathcal{F}_F^D$  est complet (bloquer le th.3 de la p.19 avec la prop.1 de la p.22). Définition de  $\mathcal{L}_F^D$  par adhérence de  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{F}_F^D$ , et extension aux fonctions définies presque partout. Donner (déjà dans  $\mathcal{F}^D$ ) le fait que la convergence uniforme dans un compact de fonctions dont le support reste dans ce compact entraîne la convergence en moyenne. L'espace  $L_F^D$  (quotient de  $\mathcal{L}_F^D$ ) est complet ; aussitôt après, la prop.5 et ses 2 premiers corollaires. Ensuite, le th.2 de la p.27 (sans le supplément relatif à l'intégrale) ; y raccrocher les fonctions à valeurs dans un Banach complexe ; annoncer l'intégrale faible après le cor.1, et ne pas mettre le cor.3 en corollaire. Ensuite, le fait que  $f \in \mathcal{L}_F^D$  entraîne  $|f| \in \mathcal{L}_F^D$ , et  $f \in \mathcal{L}_F^D$  équivaut à  $f^+$  et  $f^-$  dans  $\mathcal{L}_F^D$ . Borne supérieure d'un filtrant dans  $L_F^D$ , dans la démonstration dire ce qu'on fait avant de donner le lemme. Ensuite le th.4, en référant au § 2 pour la compatibilité de  $\sup f_n$  avec le presque partout. Les corollaires du th.4 sans changement, puis le th. de Lebesgue sans le supplément relatif à l'intégrale, et sans les corollaires. Le th.6 avec la réciproque, et sans le cor.3.

§ 4.- Fonctions intégrables. Définition de l'intégrale par prolongement. Intégrale d'une fonction linéaire, inégalité (3) de la p.26, et égalité de  $\mu(f)$  et  $\mu^*(f)$  pour une  $f \geq 0$ . Conséquence : expression de  $\Pi_p(f)$  par une intégrale. Passage à la limite sous le signe somme dans le cas du th. de Lebesgue, avec les corollaires filtrants, et l'application aux séries. On fait le th.7 avant la prop.8, de la façon suivante : on montre d'abord que  $f \geq 0$ ,

sci. et de  $\mu^*(f)$  fini est intégrable (premier morceau de la prop.8) ; on en déduit le th.7, pour les fonctions  $\geq 0$  seulement, mais en introduisant dans l'énoncé le fait que  $g$  est à support compact : considérer  $h-f$  au lieu de  $f-g$ . Corollaire : toute fonction scs. positive et telle que  $\mu^*(f)$  fini est intégrable.

§ 5.- Ensembles intégrables. Bloquer les prop.2 et 3 en une seule. La moitié de la prop.6 devient un cor. de la prop.5, la seconde moitié une nouvelle proposition. Donner comme variante au th.1 le fait que si  $K \subset A$ ,  $K$  compact et  $\mu^*(A \setminus K) < \epsilon$ ,  $A$  intégrable. Avant les fonctions étagées, un nouveau n° consacré aux mesures bornées : elles auront été définies au chap.II et mises en rapport avec les fonctions continues nulles à l'infini. Ici, dire que cela équivaut à  $E$  intégrable, montrer que les fonctions continues bornées sont intégrables, et que si un filtre converge uniformément sur tout compact, et est formé de fonctions uniformément bornées, il converge dans tous les  $L^p$ . La prop.9 et son corollaire sont vidés (reportés au § 6). La définition<sup>d</sup> des fonctions étagées ne doit comporter que le a) de la prop.10, le reste de la prop.10 saute. Ici doit s'insérer (si le Comité l'accepte) la rédaction de Cartan sur l'approximation par les fonctions étagées sur certaines phratries, ce qui contiendra en particulier la prop.12, et donnera la mesure de Stieltjes.

§ 6.- Fonctions et ensembles mesurables. Réservé jusqu'après examen des rédactions de Cartan et Godement. Faire le th.4 dans les espaces métriques (et non seulement les Banach) ; ajouter (dans le cas d'un Banach séparable) que la mesurabilité faible entraîne la mesurabilité forte. Dans la prop.16, supprimer la réciproque ; après cette prop., un  $\sum$  pour les ensembles de mesure finie. Pour la prop.17, dire que lorsque  $E$  dénombrablement mesurable, l'intégrale supérieure est la borne supérieure des intégrales supérieures sur les compacts. La prop.18 passe en exercice.



§ 7.- Inégalités de convexité. Supprimer l'expression de  $M_\infty(1/f)$ . Introduire la locution : essentiellement borné. Au début du n°4, dire qu'on ne considèrera que des fonctions finies presque partout. Le calcul du cor.4 du th.2 est remonté au chap.I. Dans la prop.3, se ramener au cas où  $N_p(f)=1$ . Faire le même par passage à la limite à partir de  $|f|^{a-1} \cdot f$  lorsque  $a$  tend vers 0. La prop.4 est fautive,  $N_p(f)$  peut être discontinue en une extrémité de  $J$  : ce qui est exact c'est que la limite (relativement à  $J$ ) en une telle extrémité est égale à la valeur en ce point de  $N_p(f)$ . Ajouter au cor.1 le cas opposé des espaces discrets.

§ 8.- Fonctions intégrables pour un produit de mesures. Essayer de démontrer la prop.3 en passant à la limite à partir des fonctions continues. Pour la prop.7, ne faire que la condition suffisante, signaler avec un  $\Sigma$  la condition nécessaire et la relèguer en exercices.

L'Appendice n'a pas été lu en Comité et sera lu à l'occasion du Séminaire Bourbaki de Mars.

Il est convenu qu'on fera un second Appendice pour signaler la possibilité de généraliser le chapitre aux "mesures abstraites", en laissant au lecteur toutes les démonstrations.

Prochains Comités : en Mars (les matins du Séminaire), Comité de Topologie générale (réédition des chap.I-II), pour examen de la nouvelle rédaction des §§ sur les espaces quotients et espaces compacts et localement compacts. Comité de l'Intégration, pour lecture de l'Appendice au chap.III

En Mai-juin : 1° Comité de la Divisibilité pour examen de la rédaction Samuel des chap.VI-VII. Composition minima : Cartan, Dieudonné, Samuel.

Bien entendu, tout membre de Bourbaki qui le désire peut participer aux travaux du Comité ; il serait en particulier souhaitable que Weil consentît à s'y intéresser.

2° Comité de l'Intégration pour examen de la nouvelle rédaction des chap.I-II. Composition minima : Cartan, Dieudonné, Godement.

Dieudonné propose que ces Comités se tiennent à Strasbourg, au moment du festival Bach, ce qui aurait l'avantage de joindre l'utile à l'agréable

$$\frac{\pi}{1} = 5 \operatorname{Arctg} \frac{1}{7} + 8 \operatorname{Arctg} \frac{3}{79}$$

$$\operatorname{Arctg} t = \frac{t}{1+t^2} \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{t^2}{1+t^2} + \frac{8 \cdot 1}{3 \cdot 5} \left( \frac{t^2}{1+t^2} \right)^2 + \dots \right]$$