.LA TRIBU.

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique).

N° 19 - 1er Novembre 1949

COMPTE-RENDU DU CONGRÈS DE LA RÉFORME (Paris, 2-8 Octobre 1949)

Présents : Cartan - Dieudonné, Ehresmann - Godement - Roger -Samuel - Serre - Schwartz - Weil.

Cobayes : Blanchard - Malgrange.

Weil s'endormit, écoeuré par les incessants déplacements de virgules, et, durant son sommeil, Bourbaki lui apparut en songe. A son réveil, il se leva, et d'une voix tonitruante, harangua les fidèles et prêcha la Réforme : " En vérité je vous le dis ! Nous ne pouvons continuer à perdre tous notre temps sur des broutilles. Lorsque le contenu d'un chapitre devient stable, plus n'est besoin d'un Congrès pleinier pour en discuter les détails. Des comités restreints sont plus aptes pour ce labeur. Les Congrès n'examineront plus que les rapports et les premiers états " .

La foule applaudit ce projet. On décide de faire fonctionner le système avec la plus grande souplesse : le passage d'une rédaction du Congrès aux comités sera décidé dans chaque cas particulier ; chacun peut demander de s'adjoindre à un comité ; chaque comité, une fois son travail terminé, rédigera un rapport qui sera distribué à tous ; un délai suffisant pour que tout membre puisse envoyer ses observations par écrit s'écoulera avant que les décisions du comité soient mises à exécution ; chacun est fondé à réclamer un nouvel examen du chapitre en Congrès, s'il juge que les décisions d'un comité dépassent trop les questions de pure rédaction. Cartan et Dieudonné ayant demandé d'être de tous les comités, il est décidé, par crainte d'enlisement, de leur adjoindre au moins un autre membre qui aura mission de mettre de l'huile dans les rouages.

Dans le proche avenir les réunions suivantes sont prévues :

Décembre 49 (à Paris, les matins de Séminaire) :

Comité de réédition des Structures Topologiques (Cartan, Dieudonné, Ehresmann, Samuel ; réduire les modifications au strict minimum).
Comité d'Euler-Maclaurin (Cartan, Delsarte, Dieudonné, Schwartz).

Février 50 (à Nancy)

Examen en Congrès de la Divisibilité.
Comité du chap. III (prolongement) de l'Intégration (Cartan, Dieudonné, Godement, Mackey, Roger, Schwartz).

Mars 50 (à Paris, les matins de Séminaire)
Comité des ordonnés et entiers (Cartan, Dieudonné, Samuel ; on fera au début du chap. III un paragraphe préliminaire permettant sa lecture avant les chap. I et II, afin de publier ce chapitre avant la Logique et les Ensembles.

Avril 50 : Congrès oecuménique (Variétés différentiables, Topologie Algèbrique, Géomètrie différentielle ; Lebesgue-Nikodym, Mesure de Haar ; espaces de Fréchet et d'Hilbert ; Formes quadratiques et Géomètries élémentaires, rapport CHevalley sur les algèbres de Lie).

Juin 50 (à Paris)
Comité (plus ou moins) logique sur les chap. I et II (Cartan, Dieudonné, Weil).
Comité des différentielles sur un Banach (Dieudonné, Mackey, Roger, Schwartz).

Octobre 50
Comité des espaces vectoriels topologiques (Chap. I et II) (Dieudonné, Godement, Serre, Schwartz)
Second comité des Ordonnés et Entiers (Dieudonné, Cartan, Samuel)
Comité de l'Intégration élémentaire (chap. I et II) (Cartan, Dieudonné, Godement, Serre, Roger, Schwartz).

<u>Engagements du Congrès</u> :

CARTAN : rédige 3 pages sur l'intégration des fonctions vectorielles.

CHEVALLEY : Rédige l'introduction générale.
Fait un rapport sur les algèbres de Lie.

DELSARTE : comme précédemment.

DIEUDONNÉ : Intégration III, Euler-Maclaurin, Ordonnés et Entiers, Formes quadratiques, Intégration I et II, Espaces vectoriels topologiques I et II, Hilbert.

EHRESMANN : Fait un rapport sur les connexions et les espaces de Cartan.

GODEMENT : Continue l'intégration (urgent)
Rédige l'Algèbre non commutative en collaboration avec Serre (2 ans).

PISOT : Fait un rapport sur le calcul des Probabilités.

263

ROGER : Continue les variétés différentiables.

SAMUEL : Continue l'homologie.

SERRE : Rédige les corps ordonnés.

SCHWARTZ : Rédige les espaces de Fréchet (urgent).
Fait un rapport sur les Groupes de Lie.

WEIL : Termine la Divisibilité (urgent)
Fait un "Report on Differential Geometry" qui sera tiré à Chicago.

Anneaux primitifs.

On adopte le plan suivant pour la fin de l'Algèbre :

Chap.VI - Relations d'ordre en Algèbre.
Chap.VII - Variations sur les modules.
Chap.VIII - Formes quadratiques.
Chap.IX (oui ! IX) - Géomètries élémentaires.
Chap. X - Algèbre non commutative.
Chap.XI - Algèbres de Lie.

Une feuille séparée donne les détails des chap.VI et VII. Le chap. des anneaux primitifs, fortement remanié (et surtout allégé) devient le Chap.X , avec le plan suivant :

1) Modules simples et semi simples, Radical, Représentations (définitions générales).
2) Anneaux d'Artin, théorèmes de Wedderburn.
3) Commutation, théorème de Skolem-Noether.
4) Représentations des groupes.

Ecoeuré par la rédaction de Samuel et par ses pesants "modules sur une algèbre", le Congrès décide (sauf avis contraire de Chevalley), de relèguer en appendice les anneaux et algèbres sans élément unité ; Godement, qui est le seul à avoir rencontré de pareils animaux, se déclare satisfait par cette solution.

§ 1 - Notations : capitales cursives pour les modules, romaines pour les anneaux, lettres grasses pour les éléments des modules, italiques pour ceux des anneaux. On adopte le principe de classification suivant:

a) Anneau et module donnés. Soigner les notations du n°1 (calcul des idéaux) ; ne pas oublier la multiplication par un élément. Faire la prop.1 avant de parler de modules semi-simples. Définition de ceux-ci: "s'il existe une famille de sous-modules simples dont E soit la somme directe". On montrera que, si tout sous-module monogène admet un supplémentaire, le module est semi-simple.

b) (ancien n°4) Le module est donné, on fait varier l'anneau d'opérateurs; A sera un anneau d'endomorphismes de E . On aura dit (en a) ; comme propriété des modules simples) que tout homomorphisme d'un module simple dans un module simple est un isom. ou est nul. Mettre les exemples (p.9) en gros caractères. On décomposera le th. de densité en trois parties : 1) Si E est semi-simple sur A , tout sous-groupe invariant par A l'est par A" ; 2) Passer à E^n et y faire opèrer A ; 3) Démonstration du th. de densité dans le cas n=1 (ceci pourrait passer avantageusement en première partie).

c) L'anneau est donné, on cherche des A-modules. On commence par le n° 3 (définitions) ; pas de resp. dans la déf.3 ; y mettre des "à gauche" ; la remarque 3 (p.6) en prop.; supprimer la rem.4 et la rem.1 ; ajouter la rem.3 de la p.14 ; les exemples 4 et 5 en prop.; dire que Z n'est pas primitif. Remonter les premières lignes du n°5 à la définition du radical ; remonter les rem.1 et 2 (fondues ; p.14) avant le th.3 ; montrer les représentations irréductibles de l'anneau des polynomes ; un exemple d'anneau de fonctions. Le n°6 passe en appendice.

Il est bien entendu que les généralités sur les représentations des algèbres viennent dans ce § .

§2 - Référer au livre I pour l'équivalence des deux conditions ; dire qu'un anneau qui contient un corps et qui est de dimension finie dessus est un anneau d'Artin ; anneau quotient d'un anneau d'Artin est d'Artin (pas un sous-anneau). Pour la prop.2 on remarquera que $E = A/\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ est maximal et où $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{a}$ (les annulateurs des éléments de E ont une intersection réduite à (0)) ; alors A est somme directe de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. On met le n°4 à la suite du th.2 (commencer par la double correspondance biunivoque monotone de la prop.7, d'où l'on déduira géomètriquement le fait que A est simple ; puis la somme directe des idéaux minimaux ; le truc du centre est fait en Alg.II ; le sort de la prop.6 (rejet en exer. ou maintien) est remis au rédacteur). On passe alors aux anneaux semi-primitifs ; un anneau d'Artin a un système complet fini de représ.irréd. (prop.3) ; on démontrera le second th. de Wedderburn par récurrence sur le nombre minimum d'idéaux bilatères primitifs d'intersection (0) (utiliser la simplicité des anneaux primitifs d'Artin) ; ajouter ici la prop.1 du § 5 (p.28).

§ 3 - Weil s'oppose à ce qu'on parle des canulars d'inséparabilité et de nilpotence dans les produits tensoriels de corps commutatifs (il pense qu'il y a des multiplicités là-dessous, ce qui aurait suffit à calmer les algèbristes, n'était leur malthusianisme bien connu) ; on se bornera donc à étendre le <u>centre</u> d'une algèbre primitive, et à constater qu'il n'y a pas de canulars ; on aura ainsi le fait que le rang d'un corps gauche sur son centre est n^2 (prop.3, p.27) ; notion de corps de décomposition ; la prop.4 et le groupe de Brauer sont vidés (c'est de la cohomologie). On garde la commutation et ce qui suit du § 5.

§ 4 - (Représentations de degré fini). Pas de matrices sauf en remarques La trace sera une fonction (pas trop de pédanterie). Les caractères seront irréductibles, mais pas trop, pour la bonne marche de Bourbaki. On ne parlera pas de classes de représ. Introduire la forme de Killing Tr(xy) (non dégénérée pour les représ. semi-simples). Montrer que le le caractère caractérise la représentation. Maschke et les relations d'orthogonalité passent aux groupes compacts.

Formule d'Euler-Maclaurin.

Le Congrès se déssaisit de ce chapitre qu'il livre en pâture à un comité. Nom : "opérateurs de composition". On mettra dans le texte l'exer. 1 exprimant U comme série formelle en D ; les polynomes d'Appell seront définis par inversion de cette série. Les formes 1-2 et 3-4 de la formule d'Euler-Maclaurin (sans majoration du reste) seront faites au § 1 ("calculs formels"). La forme 5 reste au § 3 ("application aux majorations").

Fonction Gamma.

Ce chapitre est adopté, et ne sera plus lu. Vérifier si on a la notion de produit infini normalement convergent. Intervertir Weierstrass et Gauss en bas de la p.36. Rester au cas réel pour l'intégrale de Raabe pour éviter les canulars de détermination des log. ("Après les compléments, voici le Raabe" s'est écrié Cartan).

Ordinaux.

On adopte d'enthousiasme le point de vue proposé par Chevalley, et on livre la prochaine rédaction aux fureurs d'un comité. Dire (p.1) que l'existence d'ensembles totalement ordonnés non bien ordonnés sera à peu près l'axiome de l'infini. La prop.1 aura déjà été faite. La déf 3 veut dire : "$x \in a \Rightarrow S_x = x$" ; dire que la relation d'ordre est $\in$; dire tout de suite que $a \notin a$ (si a est un ordinal ; l'axiome "$x \in x$" ne semble pas amener à une contradiction !). Il faudra naturellement pouvoir parler de relation d'ordre dans "un type". Donner l'analogue de la prop.2 (p.16) pour les ordinaux, et définir 0,1,2 dans les ordinaux. Dans la prop.7 on notera $\bar{f}$ l'extension canonique de f aux parties écrire S_x au lieu de x là où ce sera plus clair ($S_x = x$) ; bien montrer où intervient l'axiome de la réunion (on veut considèrer l'<u>ensemble</u> des ordinaux tels qu'il existe une p-application dans une partie de E) ; un exemple (à 3 ou 4 éléments) éclairera la prop.7,. On aura montré, avant la prop.7, que deux ordinaux isomorphes sont égaux ; ceci raccourcira la démonstration du th.3, qui remonte avant le th.1 . En haut de la p.7 commencera un nouveau n° ("Ensembles inductifs"). Etoffer les exemples après la déf.4. Pour le th. de Zorn on montrera le résultat plus fort suivant : si toute partie bien-ordonnée admet un majorant, l'ensemble a un élément maximal. Les remarques polonaises relatives à l'axiome du choix sont réservées. La prop.9 (munie d'une figure avec gnomons, et ordre explicité) viendra en lemme à "card(E^2) = card(E)" .

<u>Cardinaux</u> ; <u>entiers</u> ("vere habet et bene pendentes!").

Dire que les cardinaux sont souvent appelés des alephs. Définir 2 (p.15) ; ne pas cacher d'un voile pudique les faits suivants : $0=\emptyset$, $1=\{0\}$, $2=\{0,1\}$ ... et leurs conséquences baroques. L'analogue des lignes suivant la prop.2 (p.16) aura été dit pour les ordinaux. Les remarques relatives à l'axiome de choix seront bloquées en fin de chapitre (ce qui facilitera leur éventuelle expulsion). Il faudra avoir défini au chap.II la notion d'ensemble somme d'une famille d'ensembles dont certains sont vides ; un $\sum$ en haut de la p.20 ; prop.5 (associativité), prop.6 ((distributivité). La remarque à la prop.10 passe en exer. Pas de "structuralement défini" à la p.25 ; dire que $0^0=1$ (prop.15) et répéter ici la footnote d'Alg.I . Pour la prop.16 (et analogues) on réfèrera systématiquement au chap.II où les démonstrations sont faites. La déf.5 remonte plus haut ; la prop. 20 mérite le nom de théorème. Il faudra, dans ce § , faire le pont avec les ensembles explicités à 2 et 3 éléments du chap.II .

On dira "entiers" au lieu de "entiers naturels" par abus de langage ; une footnote dira que la distinction sera un jour utile (en Alg) mais pas ici. Le § 2 commencera par un n° : "définition des entiers" ; ne pas mentionner la restriction aux entiers de la relation d'ordre entre cardinaux (on n'a pas les "sous-types"). Les intervalles (p.31) auront été déjà définis pour les cardinaux et ordinaux. Un nouveau n° commence en haut de la p.32 ("le principe de récurrence"). La déf.des suites (p.41 et 42) remontera <u>avant</u> la récurrence (on aura démontré la prop.7 pour les cardinaux quelconques sous la forme "card($[1,a]$) = a" , en enlevant 0 et en ajoutant a ; on montrera que $x_n \geqslant n$ pour les suites stric^t croissantes).

Pour la récurrence (partagée ici en deux morceaux, le second étant le th.4,p.58), certains voudraient avoir fait le plus vite possible l'axiome de l'infini pour pouvoir parler de fonctions et non plus de symboles fonctionnels (ce que facilite encore l'axiome de la réunion). Cependant la constatation de l'inutilité de l'axiome de l'infini pour la théorie des entiers (faite par Chevalley) est chose fort intéressante, et mérité (au moins temporairement) d'être gardée. Le rédacteur s'efforcera donc de ne donner ici, de la récurrence, que le strict minimum ; bien des variantes de celle-ci, par exemple, pourront venir avec le th.4 (p.58) où elles seront plus digestibles. Détail de présentation : mettre les relations à la ligne. Donner $\mathfrak{P}^n(E)$ comme exemple de définition par récurrence.

Après le n° des opérations, commencera p.39 un nouveau n° ("inégalités"). On y mettra ensemble les propriétés additives et exponentielles analogues. Le cor.1 de la prop.4 sera donné en prop., sous forme de condition nécessaire et suffisante d'égalité, et rapproché de la prop.5 . A la prop.6 on parlera de translations, et on récurrera sur a pour b donné.

Définit tiers et quart (haut de la p.45). On donnera, dans la prop.9, l'unicité du développement, ce qui permettra d'alléger le bas de la p.47 relatif à la numération. On donnera aussi le critère d'inégalité de deux développements.

Au lieu de "structuralement définis" on donnera qq. exemples (p.49). Dire (prop.10) que ap=bq est le nombre d'éléments de U ; une figure. Il faudra avoir dit auparavant (au n°1) que toute application biunivoque d'un ensemble fini dans lui-même est sur (ceci mérite une prop.). Essayer de donner plus tôt la prop.14.

Les lignes entourant l'axiome de l'infini (p.56) passent en footnote. Vider la remarque 1 . Rendre plus clair le th.4. Avant la prop.1 (p.59) viennent deux lemmes : la prop.9 du ch.III (sur l'ordination des produits) et le fait qu'un cardinal infini n'a pas de plus grand élément. Dire (dans les cor.) que a+b=max(a,b). Dire explicitement que tout ensemble infini admet une partition en ensembles dénombrables.

Malgré une vive opposition, il est décidé de laisser le §4 (ensembles finis et structures d'ordre) en fin de chapitre afin de ne pas couper en deux plus d'une question. Donner des exemples (même de troisième espèce) de propriétés de caractère fini.

<u>Espaces de Riesz</u>.

§ 1 - On décide de vider les notions de sous-espaces propres et impropres et de passer tout de suite à la définition des bandes ; les canulars intermédiaires seront signalés en petits caractères, avec référence à des exercices.

p. 2 et 3 : signaler dans le texte (avec renvoi à ces exer. en général, et footnotes pour les formules (8) et (11)) qu'il n'est pas besoin des astuces de Alg.VI pour démontrer pas mal de formules. Expliciter les ensembles d'indices dans le lemme de décomposition.

p.5 : vider l'exemple et le remplacer par celui des sous-harmoniques (que Cartan rédigera).

A partir d'ici on saute aux "complètement" réticulés ; donner la condition du milieu de la p.8 en prop., avec un cor. pour les bornes inférieures ; là-dessus la définition des bandes (mettre en évidence le fait que le seul canular est "sup. dans le sous truc ≠ sup. dans le grand"). Pour les questions gravitant autour du th. de Riesz, on adopte l'ordre suivant :

1) Un lemme : si A est un ensemble d'éléments positifs tel que $A+A \subset A$, et que tout élément majoré par un élément de A est dans A, alors tout x positif s'écrit, et d'une seule manière $x=y+z$, où y est borne sup. d'élém. de A , et où z est étranger à A (Unicité triviale ; existence : prendre pour y le sup des élém. de A majorée par x) .

2) Faire les remarques triviales suivantes : les élém. étrangers à A forment une bande ; d'une décomposition pour les élém. positifs on déduit une décomp. pour élém. qqconques ; la bande engendrée par A est l'ensemble des différences de sup. d'élém. de A .

Il faudra avoir rappelé au n°1 la notion de somme directe ordonnée. Une remarque : bande (a) = bande ($|a|$).

<u>§ 2</u> - On mettra la mult. scalaire dans les hypothèses de la prop.1, et son élimination en exer. (avec renvoi). Dire au début du n° (sans trop de secteurs coniques!) que les formes positives définissent une relation d'ordre. Le th.1 ne recevra plus le patronnage de F. Riesz ; mettre en évidence le fait que le bas de la p.16 est un passage à la limite suivant les bornes sup. finies. Dire, au cor.1, que sup(L,M)(x) est égal à

$\sup_{(y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ y+z=x)}(L(y)+M(z))$. Le n°3 est <u>vidé</u> (voir ci-dessous).

<u>§ 3</u> - Vider le secteur conique (p.20) ; on suivra la méthode Cartan pour le début de ce § (on prend pour S l'ensemble de <u>toutes</u> les fonctions positives ; on bloque 2) et 3) grâce à un x-y). On notera f,g... les fonctions, c,φ la fonction convexe. Alléger les énoncés des prop.2 et 3 (S=toutes les positives). On supposera, au début du n°3, que M est définie sur un sous-espace de Riesz ne canulant pas les sup.

<u>Mesures de Radon</u>.

On décide de donner à ce chapitre un caractère extrêmement élémentaire, et d'en éliminer tout ce qui ferait entrer, peu ou prou, dans les engrenages du prolongement et de Lebesgue-Nikodym (ces expulsions seront expliquées par (P) ou (LN)). Les mesures envisagées ici seront réelles, les fonctions réelles (aux §§ 1 et 2) puis vectorielles (§ 3); pour les fonctions vectorielles on se bornera même aux mesures positives. La théorie des mesures vectorielles se fera au chap.IV au moyen du th. de Dunford-Pettis, qui est un raffinement de Lebesgue-Nikodym ; ceci rend inutiles les fonctions convexes de mesures, d'où leur expulsion du chap.I .

Le titre du chapitre sera "mesures sur les espaces compacts et loc. compacts" ; on omet le nom de Radon, car il semble de plus en plus qu'il n'y a pas d'autres mesures. Le mot "intégrale" désignera la valeur de la forme linéaire "mesure". La moyenne est une valeur, donc l'intégrale d'une fonction.

<u>§ 1</u> (compacts) - On se bornera aux fonctions réelles (l'extension aux fonctions complexes viendra comme application du § 3 relatif aux fonctions vectorielles). On vide donc (notamment) le haut de la p.27 .

Avec l'exemple V commencera un nouveau n° "produit d'une mesure par une fonction continue ; mettre les lignes en petits caractères après les considérations de linéarité du bas de la p.27 ; vider l'ex.VI. L'ex.2 (p.29) est rejeté au § 3 . Le n° des intégrales réelles saute. (p.31) : on définira la relation d'ordre avant le th.1, puis on constatera que c'est celle du chap.I ; décomposer le th.1 en deux parties (une mesure positive est continue ; une mesure qqconque est différence de deux positives. On vide la valeur absolue d'une mesure (considérations du milieu de la p.33) ; la prop.3 devient triviale car on se borne aux mesures réelles ; la prop.4 également (lui ajouter un autre cor.: cas où la mesure est positive. Le nom de topologie <u>vague</u> (p.36) sera donné "pour plus de précision" (!). A la prop.7 la continuité résulte des définitions.

<u>§ 2</u> (localement compacts)

L'espace des fonctions continues bornées sera noté $\mathcal{C}_b(E)$; on ne parlera pas de support pour les fonctions non continues ; au lemme 1 (p.38 bis) on supprimera U et on rajoutera un point à l'infini (ce qui est le moyen le plus simple de se fourrer dans un espace normal). Inverser somme directe et idéal maximal (p.39). Après la déf.1 et les ex. (ajouter en petits caractères à l'ex.I qu'il n'y a pas d'autres mesures que les discrètes, c.à.d. avec un nombre fini de masses sur tout compact, sur un espace discret) un n° spécial introduira la topologie de $\mathcal{K}(E)$ (par ses voisinages convexes de 0) ; on remarquera que c'est la plus fine qui ... ; donner des conditions <u>suffisantes</u> de convergence et de densité ; prolongement à partir d'un ensemble total. Les mesures non réelles sautent ; pour les positives on commence par définir l'ordre (faire comme pour les compacts ; la prop.2 (p.47) devient triviale ; son cor.2 est vidé. Les "intégrales bornées" sont vidées du Chap.II et reportées au chap.III (prolongement). On <u>réserve</u> la topologie forte (aussi bien pour les compacts) mais il faut, en tous cas, garder la notion de fortement borné ; à la prop.8 (p.51) on dira seulement que "fortement borné" entraîne "vaguement relt.compact" (réciproque en petits caractères ; un cor. dira que l'ensemble en question est fortement borné) ; la prop.9 (fausse!) passera en exerc.. Le n° de la topologie ultraforte est vidé ; la prop.10 reste (avec la topologie vague seulement).

<u>§ 3</u> (support d'une mesure) Ici commencera un nouveau § , avec le plan suivant : existence et unicité d'une mesure définie localement (2 ouverts, nombre fini par récurrence, le truc de l'ordonné filtrant) ; caractère local des opérations μ^+ , μ^- , $|\mu|$; support d'une mesure, définition, support de μ^+ , μ^- , $|\mu|$ (prop.14 et 15) ; le th.4 en prop. ($\mu(f)=0$ si f (supp. μ)=0) ; réciproque si f et μ sont positives (prop.13) ; support de $g\mu$ (prop.16, en th., avec condition n. et s.); enfin les passages à la limite (prop.17 et 18 ; prop.20 avec "faiblement" seulement). Ainsi le th.3 (des sommes de Schwartz) est versé aux mesures ponctuelles ; on fera le th.4 sans utiliser le th.3, en approchant convenablement f . La prop.19 est vidée.

Vient alors le n° des mesures ponctuelles. On y met le th.3 d'approximation ; pour cela on aura démontré (au début du § 2, avec l'autre lemme topologique) le <u>lemme</u> suivant : étant données des fonctions (f_α), il existe une partition (g_i) de g telle que $\left|f_\alpha - \sum_i f_\alpha(x_i)g_i\right| \leq \varepsilon\, g.$; on en déduit aussitôt la prop.21 ; faire son cor.2 pour un compact ; lui ajouter le fait que $\|\mu\| \leq$ limite de la somme (facile). La caractérisation des mesures ponctuelles est rejetée au chap.des caractères et algèbres normées.

Pour l'image d'une mesure par application propre, on dira en remarque (p.69) que c'est la transposée, qu'en cas d'homéomorphisme ça se réduit à un transport de structure, et on mentionnera le cas où n'est pas propre mais où la mesure est à support compact. Un ⊇ p.70 : il n'y a pas égalité à la formule (12) ; dire (dans la prop.25) qu'il y a égalité des supports si la mesure est positive ; se servir du fait qu'on a une transposée dans la prop.26 (utiliser les esp.vect.top.) ; on vide la prop.27 ; remonter les lignes du bas de la p.71. Signaler l'injection d'un sous-espace fermé.

§ 4 (Intégrales de fonctions vectorielles continues et à support compact) - La topologie de Dieudonné-Schwartz (qui aura été définie au début du § 2 pour les fonctions vectorielles) simplifie l'exposé (par exemple on dira "partout dense" p.74) ; le principe général est que toutes les propriétés viennent de ce qu'elles ont lieu pour des trucs partout denses. On essaiera de dire ce qu'il faut pour intégrer des mesures (cf. Lebesgue Fubini), mais on n'est pas dans des espaces complets. Cartan est chargé de rédiger ce § .

§ 5 (Produits de mesures) - On adopte le plan suivant :

On veut définir $\nu(x,y)$ telle que

(1) $$\int g(x)h(y)d\,\nu(x,y) = \int g(x)d\,\lambda\,(x) \cdot \int h(y)d\,\mu(y).$$

Unicité de ν (les $g(x)h(y)$ forment un ensemble total)

Existence : un lemme (support et limitation de $\int f(x,y)d\,\mu(y)$ si f est nulle en dehors d'un compact et $\leqslant \varepsilon$) ; alors

$\int d\,\lambda(x) \int f(x,y)d\,\mu(y)$ (avec f numérique) est de la forme

$\int f(x,y)d\,\nu(x,y)$ (car c'est linéaire et continu) ; en appliquant

ceci à $f(x,y)=g(x)h(y)$ on trouve (1) .

Définition : l'unique ν .... est dit le produit de λ par μ .

La double égalité du th. d'interversion.

Elle vaut aussi pour les fonctions vectorielles (approcher par des combinaisons linéaires et passer à la limite dans chacun des 3 membres).

Remarques de détail : donner ε_x et ε_y comme exemple (bas de la p.83) ; la prop.6 en exer. (sauf dans le cas des compacts) ; déduire la prop.7 du fait que la restriction du produit est le produit des restrictions et de celui que le produit de mesures $\neq 0$ est $\neq 0$; la prop.8 en exer.; dire que $(\lambda, \mu) \longrightarrow \lambda \otimes \mu$ est séparément continue sans restrictions ; donner la prop.11 en exemple.

Pour les produits finis on suivra l'ordre des n^{os} 1 et 2, mais il faut une récurrence pour l'existence de la mesure produit.

Pour les produits infinis on dira tout de suite où l'on veut en venir,. On ne s'y occupera que de mesures positives, de masse totale 1 et de compacts. On donnera une définition en forme avec une formule. Les prop.13 et 14 sont vidées en exer.

Une <u>décision générale</u> (de dernière minute, et que le compilateur de ces lignes s'excuse de n'avoir découverte que maintenant dans on fatras de notes contradictoires) : on VIDE de ce chapitre tout ce qui se rapporte à μ^+ , μ^- , $|\mu|$ sauf le th. de Riesz .

INSTRUCTIONS AU RÉDACTEUR DE LA DIVISIBILITÉ

Le découpage suivant est adopté :

Chap.VI (Relations d'ordre en algèbre)
- § 1 - Groupes ordonnés (étude multiplicative)
- § 2 - Divisibilité dans les corps ; anneaux factoriels et principaux
- § 3 - Groupes ordonnés (étude additive).
- § 4 - Corps ordonnés.

Chap.VII ("Variations sur les modules")
- § 1 - Modules de type fini ; anneaux et modules noethériens.
- § 2 - Diviseurs élémentaires.
- § 3 - Applications (matrices, base normale d'une extension cyclique

Ces chapitres seront rédigés dans l'esprit "Algèbre étroite". Le § des diviseurs élémentaires contiendra essentiellement trois théorèmes :

1) Tout sous-module d'un module libre (infini) sur un anneau principal est libre (on biennordonne la base du grand module ; voir exposé III du Séminaire Cartan).

2) Existence des diviseurs élémentaires (le sous-module étant fini, et le grand module quelconque).

3) Unicité des diviseurs élémentaires (on utilisera l'astuce de Cartan-Kaplanski-Serre de l'algèbre extérieure ; ici l'anneau de base sera quelconque ; l'algèbre extérieure du module $M = \sum_k A/I_k$ est identifiée au produit tensoriel (de modules) des $\bigwedge(A/I_k)$; dans ces dernières il n'y a que des degrés 0 et 1 ; les diviseurs élémentaires apparaissent comme les annulateurs des modules $\bigwedge(M)$. Dans le cas des matrices on retrouve ainsi le truc de Frobénius des p.g.c.d. des mineurs).

On mettra en exer. la méthode de réduction des matrices sur un corps algèbriquement clos (proposée par Dieudonné). Weil fera tirer à Chicago un résumé des résultats de Ulmzippinmackeykaplanski relatifs aux modules dénombrables sur un anneau principal.

Ne pas oublier que "les projecteurs éclairent toute la question" !
