NBT 016 — 155

Samuel

LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique)

Compte-rendu du Congrès de Noël 1947

(Paris - 19-26 Décembre 1947)

Présents : Cartan - Delsarte - Dieudonné - Pisot - Roger - Samuel - Schwartz.

Nos lecteurs doivent déjà se douter que ce Congrès fut bien plus animé que le précédent. Aussitôt rentré du Brésil, Dieudonné convoquait les fidèles par un "Bourbaki's Diktat" conforme aux plus pures traditions, et qui souleva des "mouvements divers" parmi les plus jeunes membres non encore initiés à ces dernières. Dès l'ouverture du Congrès, on vit renaître les classiques duels Cartan-Dieudonné ; l'absence de Weil fut déplorée plus d'une fois lorsqu'il s'agissait de dégager un point de vue bourbachique satisfaisant pour tous ; aussi fut-il décidé de recourir à son arbitrage pour sortir de nombreuses impasses (voir l'Encyclique du Maître "De commutativis corporibus") . Les autres participants, dûment stylés par Cartan au cours des années précédentes, lui apportèrent en général leur appui, bien que Dieudonné ait par moments réussi à disloquer cette phalange. Signalons enfin que quelques cobayes normaliens apparurent par intermittences.

La Note historique des chap. II-III d'Algèbre, lue en guise de discours inaugural, mit le Congrès "in the right mood" quant à l'Algèbre : il glorifia Fermat, suivit docilement les méandres du Linéaire et scruta l'influence de Mallarmé sur Bourbaki. Cela fait, on passa aux Chap. IV-V de l'Algèbre, avec les décisions suivantes :

CHAPITRE IV (Polynomes) : Après examen détaillé, il est décidé que ce chapitre ne sera plus discuté en Congrès.

§ 1 : Conformément aux traditions, il est décidé de procéder "du généralissime au particulier" en définissant d'abord les polynomes à un nombre quelconque de variables ; on y gagne de ne plus être canulé par le remplacement mystérieux de e_1 par X , qui laisse une impression de malaise ; les polynomes à une indéterminée viennent ensuite comme cas particulier (milieu de la p. 4 actuelle).

On restreint le nom de "monômes" à ceux qui ont coefficient 1 (autrement dit, à la base canonique de l'algèbre de polynomes).

Le terme d'"adjonction" est balancé (p. 3).

La remarque 2 du bas de la p. 3 saute.

En haut de la p.4, préciser comment l'isomorphisme des algèbres de polynomes se déduit d'une application biunivoque de I sur I' .

P. 5 (bas) utiliser la notion de produit tensoriel infini : l'algèbre des polynomes à un nombre quelconque d'indéterminées est produit tensoriel des algèbres de polynomes par rapport à chacun des indéterminées.

P. 8 : inutile d'appeler $H_{p,J}$ le sous-module défini au milieu de la page.

P. 10 : exemple 1, inutile d'employer les notations $H_p, H_{p,J}$.

Après maintes vicissitudes, la division euclidienne sur un anneau est gardée, avec la présentation suivante proposée par Cartan : si f est un polynome unitaire de $A[X]$, de degré n , et ξ la classe de X modulo (f) dans $A[X]/(f)$, cet anneau quotient a pour <u>base</u> les éléments $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$. Pour la division par un polynome non unitaire $f=b_0x^n+\dots$, considérer le module M des polynomes dont le coefficient de x^m est divisible par b_0^{m-n+1} (pour m n) ; le quotient $M/(f)$ est alors un module ayant pour base $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$ ceci en remarque ou exercice ξ^p = classe de X^p par définition) .

Conséquence : forme habituelle de la division euclidienne, unicité du quotient lorsqu'il s'agit d'un anneau d'intégrité A (et en particulier d'un corps), enfin tout idéal est principal dans K[X] (K corps).

§ 2 : le corollaire de la p.20 est érigé en théorème. Dire que l'idéal des relations algèbriques est le module des relations linéaires entre monômes. Donner un exemple de 3è espèce (X^2+1 sur $\mathbb{C}$). Enoncer la prop.2 en calquant sur la prop.8 du chap.I du livre de Weil (p. 6).

Commencer p. 22 un nouveau numéro : Substitution d'un polynome dans un polynome . Bas de la p.22, ajouter comme conséquence que si $f(X,X)=0$, $f(X,Y)$ est divisible par $X-Y$.

Ne pas utiliser la notation E^{E^I} , jugée horrible (p. 24) .

Faire le n° sur les racines d'un polynome à une indéterminée sans la division, en utilisant la substitution $X = \alpha+Y$.

P. 26, calquer la rédaction sur celle du degré : l'ordre de multiplicité n'est pas défini pour le polynome 0 ; par abus de langage, on en parlera dans des <u>inégalités</u> (remarque 2). Mettre la remarque 3 en gros caractères.

P. 27, la première partie du th.1 devient proposition ; la 2è partie est jointe au cor.1 et érigée en théorème.

P. 28, (haut) deux remarques distinctes (non intégrité, racines non dans l'anneau). La formule de Lagrange comme problème linéaire à second membre (utilisation de la base duale).

Le corollaire du bas de la p. 29 érigé en proposition.

Milieu de la p.30, dire : l'isomorphisme permet d'identifier ..

P.31 , la remarque 2 en petits caractères, la remarque 3 en exercice.

Dire partout "polynome nul" et non "polynome identiquement nul" .

P. 32, ligne 4 du bas, dire : on peut prendre pour E l'anneau A lui-même ou le corps des fractions de A .

§ 3 : P. 39 , titre du n°2 : fractions rationnelles considérées comme opérateurs. Au lieu d'un corps commutatif K_0 , il faut prendre un anneau $A \supset K$ (exemple : fraction rationnelle opérant sur des matrices), avec "inversible" au lieu de $\neq 0$.

Bas de la p.40, nouveau numéro : Substitution d'une fraction rationnelle dans une fraction rationnelle. P.41, nouveau numéro : fonctions rationnelles.

Un exercice montrant que l'anneau U (page 40) est un anneau où les éléments non inversibles constituent un idéal (anneau local).

§ 4 : Après une vive discussion, le Congrès se rallie à l'ordre adopté dans le texte. Avant la prop.1 (p.44) remarquer (avec Z) que $df=0$ n'entraîne pas $f=c^{te}$ (caractéristique p).

P. 46 : ne pas expliciter la formule donnant $D_i f$.

Donner l'exemple des dérivations intérieures $(x \to ax-xa)$ p. 47 .

Bas de la p. 53, nouveau n° : application aux polynomes.

<u>CHAPITRE V</u> (<u>Corps commutatifs</u>) : Ce chapitre donna lieu aux plus violentes discussions de tout le Congrès. Ce n'est pas ici le lieu d'exposer les projets d'"Algèbre large" et "Algèbre étroite" entre lesquels le Congrès s'est débattu ; nous renvoyons nos lecteurs à l'Encyclique "De commutativis corporibus" .

Plan adopté :

§ 1 : Caractéristique ; corps premier.

§ 2 : Extensions.

§ 3 : Extensions algébriques.

§ 4 : Extensions transcendantes.

§ 5 : Extensions composées.

§ 6 : Théorèmes d'existence.

§ 7 : Isomorphismes. Dérivations. Séparabilité.

§ 8 : Théorie de Galois.

§ 9 : Racines de l'unité ; corps finis.

Appendice : Extensions galoisiennes infinies.

La rédaction suivante (état 4) qui doit être faite par Samuel, devant encore revenir devant le Congrès, les observations d'ordre stylistique ne sont pas mentionnées ci-dessous.

§ 1 : Dire explicitement qu'on étudie le sous-anneau engendré par l'élément unité, et tout tirer de là. Noter que la caractéristique d'un corps est égale à celle de tout sous-corps.

§ 2 : un premier n° contiendra le n° 1 de l'actuel § 2 , dans l'ordre suivant : prop.1, prop.3, prop.2, déf. 1 . On mettra en relief, conformément à une idée de Samuel, le fait que le mot "extension" réfère à la structure d'algèbre sur le corps de base, celui de "surcorps" (peu employé) à la structure d'anneau sous-jacente. On dira extension monogène au lieu de "simple" ; on admet la notation EF au lieu de $K(E \cup F)$ comme abus de langage.

Un second n° consacré à la structure linéaire d'une extension (actuelle p.6) : le th.1 dans un cas plus général, en supposant seulement que E est un anneau.

§ 3 : n° 1 : définition d'élément algèbrique et élément transcendant (sub judice), faite plus généralement dans une algèbre sur K contenant K dans son centre. Décomposer le th.2 en deux parties (voir Encyclique) ; dire que si $K[x]$ est un anneau d'intégrité, c'est un corps (on aura vu au § 2 que si une algèbre de rang fini n'a pas de diviseurs de 0 , c'est un corps). Remarquer que maximal = premier pour un idéal de $K[X]$; le corollaire de la p.8 est érigé en proposition, et fait lorsque E est une algèbre. Mettre dans ce n° le lemme de la p.29 en proposition.

N° 2 (extensions algèbriques). Définition. Prop.6 (qui devient évidente grâce au fait que $K[x] = K(x)$ caractérise les éléments algèbriques ; ceci aura été fait au n°1 , avec l'expression de x^{-1} comme polynome en x). Prop.4 ; les 2 lignes suivant la prop.4 sont érigées en proposition. La prop.5 est fondue avec la première moitié du corollaire et faite directement (base télescopique). Les trucs sur l'idéal en remarque.

N° 3 (ancien n°4), sans changement, sauf qu'on ne dira plus "relativement" algèbriquement fermé, mais simplement "algèbriquement fermé dans E" , le mot "clos" servant pour désigner la notion absolue (analogie entre "compact" et "clos").

§ 4 : N° 1 (extensions transcendantes). Un chapeau (on a vu ce qu'est un élément transcendant, on va généraliser). Famille algèbriquement libre (monômes linéairement indépendants, ou encore idéal des relations nuls), puis tout de suite le th.3, devenu proposition ; ensuite seulement les propriétés des familles algèbriquement libres (pour la prop.9, dire que c'est une propriété de caractère fini).

N° 2 (bases de transcendance). La prop.10, puis un corollaire pour le cas où N a un élément ; l'ancien corollaire (p.16) érigé en proposition. Echanger la prop.11 et la déf.7 (pour faire comme au chap.II). Dire en remarque que l'extension algèbrique et l'extension transcendante pure qui interviennent dans le th.4 ne sont pas déterminées de façon unique.

N° 3 (ancien n° 7) inchangé.

Exercice : les fonctions symétriques élémentaires sont algèbriquement libres.

§ 5 (extensions composées). La modification de plan, consistant à faire, immédiatement après les extensions transcendantes tout ce qui est élémentaire sur les extensions composées (notamment la notion d'extensions algèbriquement disjointes, qui se rattache aussitôt à la prop.10 du § précédent) a été approuvée par tous sans opposition. On enlève de l'actuel § 5 tout ce qui se rapporte à la séparabilité. Remarquer que si deux extensions sont linéairement disjointes et si l'une est algèbrique, leur produit tensoriel est le corps composé entier (réciproque en exercice). Donner une définition symétrique des corps algèbriquement disjoints. La prop.5 (p.77) (th. de Zariski) est vidée. Dans les critères de disjonction linéaire, aller jusqu'au th. de Weil (prop.9) exclus ; tout le reste est vidé.

§ 6 (théorèmes d'existence). Les théorèmes de Steinitz seront faits par la méthode Cartan (immersion simultanée d'une famille de surcorps de K dans un même corps, au moyen d'un produit tensoriel infini et d'un idéal maximal dans celui-ci). Plan adopté :

1) Le théorème d'immersion.

2) Existence de l'extension algèbrique monogène et du corps des racines d'une équation (par extensions monogènes successives).

3) Propriétés des corps algèbriquement <u>clos</u> (pages 22, 23).

4) Existence de la clôture algèbrique (immerger dans un même corps tous les corps des racines de tous les polynomes). Si on pouvait démontrer très élémentairement le th. suivant : "Si toute équation à coefficients dans K a <u>une</u> racine dans E , elle les a <u>toutes</u>" , il ne serait pas besoin de construire les corps des racines ; Samuel a une démonstration non élémentaire, où il faut distinguer 2 cas, suivant que K est fini ou infini. La question est mise au concours.

5) Unicité de la clôture algèbrique (on immerger deux dans un même corps).

6) Prolongement des isomorphismes (d'abord aux clôtures algèbriques par l'unicité, puis aux extensions algèbriquement closes et non algèbriques ; un seul théorème). Corollaire : le grand corps Ω où on met tout ce qui est raisonnable.

§ 7 (Isomorphismes ; dérivations ; séparabilité).

1) Dire (dans la déf.1) "isomorphisme de la structure d'extension" Dire (en note) que la déf.1 s'applique aussi à des corps non préalablement plongés dans un même corps Ω . Remarquer (avec la prop.1) que le théorème d'immersion permet de tout plonger dans un même Ω . Ensuite, montrer qu'un élément transcendant (resp. algèbrique) est transformé en un élément de même nature ; et dire qu'on va regarder quand on peut transformer un élément algèbrique en un autre. Prendre la prop.2 comme définition et la déf. 2 comme proposition, la définition étant donnée d'abord (ceci afin de tout mettre sur une même ligne : toutes les définitions de ce § ont un caractère extrinsèque provenant de la notion d'isomorphisme qui les relie toutes, et peuvent ensuite prendre une forme intrinsèque).

2) On dira radiciel au lieu de "purement inséparable". Remonter les lignes du bas de la p.36 aussitôt avant la prop.3, puis déf. 3 après la prop.3 .

3) Dire "K-isomorphisme". On étudie l'indépendance linéaire des isomorphismes relativement à un sous-espace, et on détermine le rang d'une telle famille d'isomorphismes. D'abord le th. de Dedekind (th.1) ; puis un théorème (extrait par Cartan de la démonstration du critère de Mac Lane) : le rang (dans V) de la famille de tous les isomorphismes est égal au rang de V sur $K^{p^{-\infty}}$; la prop.7 vient alors en remarque.

4) (Extensions séparables). Définition. Prop.8 (conséquence du théorème de Cartan) ; comme corollaire toute extension transcendante pure est séparable (on sait déjà qu'une extension transcendante pure est linéairement disjointe de toute extension algèbrique), puis les autres corollaires (insister sur le cas de la caractéristique 0). Le th. de MacLane comme critère immédiat (disjonction linéaire par rapport à $K^{p^{-1}}$ suffit ; d'où définition intrinsèque de la séparabilité). Prop.9 (comme dans le texte).

5) Se borner à des renvois pour les prop.10 et 11. Dans la déf. 6 dire que $[E:K]_s$ est le rang de E sur $K^{p^{-\infty}}$. On aura fait au § 5 la prop. d'après laquelle l'espace vectoriel engendré par deux extensions E et F de K est un sous-anneau de Ω, et identique à l'extension composée lorsque l'une est algèbrique. Ceci permet de vider la prop.12 et de démontrer son corollaire directement par l'algèbre linéaire ; en outre, la prop.13 devient triviale, et la démonstration de la prop. 14 est simplifiée. La prop.15 reste sans modification. Enfin, on fait dans ce n° le th. de l'élément primitif par la méthode Godement (éviter un nombre fini d'hyperplans).

6) Parler explicitement de nombre d'isomorphismes et de rang dans la prop.16. Un nouveau n° avant la prop.20 ("éléments séparables d'une extension algèbrique"). Le facteur inséparable du degré est vidé, ainsi que les corps algèbriquement quasi-formés, et les bases séparantes. On garde le n° des dérivations tel que, à l'exception de la prop. 27.

§ 8 (extensions normales ; théorie de Galois).

1) Dire au début qu'on va s'occuper d'extensions algèbriques, puis donner la prop.1 . Puis définition des extensions <u>galoisiennes</u>

(K est le sous-corps des invariants des K-automorphismes de E) ; groupe de Galois ; E est toujours galoisien sur le sous-corps des invariants de ses K-automorphismes. Proposition : E galoisien sur K signifie que pour tout $x \in E$, le polynome minimal de x dans $K[X]$ a toutes ses racines simples dans E (ou se décompose en facteurs distincts du premier degré dans $E[X]$; autrement dit, la définition est intrinsèque). Ce résultat se décompose en 2 : l'extension est séparable et tout polynome irréductible ayant une racine dans E les a toutes. D'où la définition d'extension normale. Critères de normalité (tout K-isomorphisme est un automorphisme ; E est globalement invariant par tout K-automorphisme de Ω) ; prop.5 en corollaire. Puis prop.3 et 4 ; application : fonctions symétriques des racines (qui n'utilise pas la théorie de Galois).

2) On décide de ne pas parler du groupe de Galois d'une extension normale non galoisienne ; ceci exclut les prop.6 et 7 (à moins que Weil n'insiste pour les garder). Le th.1 (p.96) est renvoyé au n° 4 ; il n'y aura donc plus de n° 2 (actuel).

3) (théorie de Galois). Pour les extensions galoisiennes seulement. Dire "groupe associé, corps associé". Les prop.8 et 9 dans le texte, et en français. La prop.10 et son corollaire sautent. La prop.11 sera appelée "lemme d'Artin" ; un Σ pour les sous-groupes Δ infinis. La remarque du haut de la ~~prop~~ p.104 en exercice.

4) (Sous-corps conjugués ; sous-corps galoisiens). Tel que, avec en plus le th.1 (p.96) à la fin, sa démonstration se simplifiant (Vandermonde disparaît) grâce au th. de l'élément primitif.

5) Essayer d'éclaircir ou de simplifier la démonstration de la base normale. Beaucoup de diagrammes de Hasse dans tout le chapitre.

La méthode de la prop.14 (élément primitif) en exercice.

Les fonctions symétriques des racines sont passées au n°1 ; Norme et trace, notions hypercomplexes, sont renvoyées au chap.VII .

§ 9 (racines de l'unité ; corps finis).

Litige au sujet du grand corps Ω ; on attend l'arbitrage de Weil. Pour couper court aux hypocrisies, on décide de mettre un chapeau où on admettra la décomposition des entiers en facteurs premiers, avec renvoi au chap.VI, et démonstration en note de bas de page. Utiliser alors au maximum cette décomposition pour démontrer plus simplement la prop.1 (peut être d'abord le cas des racines n-èmes ; le Congrès n'a pas pris de décision ferme sur ce point). Ensuite, point en litige sur la place des polynomes cyclotomiques.

2) Dire explicitement qu'une permutation du groupe de Galois élève à une certaine puissance toutes les racines de l'unité. En remarque, théorème de l'élément primitif pour les corps finis.

Les extensions cycliques sont vidées (voir l'Encyclique).

Appendice (extensions galoisiennes infinies).

On simplifie beaucoup la présentation en disant que la topologie mise sur Γ est la topologie de la convergence simple, ce qui rend Γ précompact ; comme le fait d'être un automorphisme se vérifie à l'aide de 3 éléments du corps, Γ est complet ; enfin, la topologie étant définie par des sous-groupes est une topologie de groupe totalement discontinue. Résumer tout cela en un théorème. La prop.2 devient évidente. Pour la prop.3, dire que, pour les restrictions à des extensions finies, on a $\overline{\Delta} = \Delta$; ceci rend la démonstration très courte. Mettre l'exercice 1 dans le texte.

FASCICULE DE RESULTATS DE TOPOLOGIE GENERALE.

Chabauty ayant été d'abord dûment félicité par le Congrès de son résumé intelligemment fait, est ensuite démembré foutu suivant la pratique bourbachique bien connue. Le Congrès propose d'essayer une autre méthode, destinée à augmenter l'utilité du fascicule.

En premier lieu, une introduction, comprenant : 1) un laïus heuristique (étoffer l'introduction du chap.I, 2) un plan plus détaillé du Livre III (avec éventuellement Leitfaden) ; 3) un mode d'emploi du fascicule.

Pour ce dernier, on projette de grouper les résultats de Top. générale utiles aux chercheurs en plusieurs listes, d'après les divers points de vue sous lesquels on peut les considérer ; on ne craindra pas les redites. Une liste provisoire de ces divers points de vue est la suivante :

1) Filtres, limites, suites.
2) Voisinages, boules, ouverts, fermés.
3) Uniformes, métriques, complétion.
4) Compacts, localement compacts.
5) Fonctions continues, uniformément continues, semi-continues.
6) Algèbre topologique.
7) Connexion.
8) Axiomes de séparation.
9) Sommes et produits infinis.
10) Espaces fonctionnels.
11) Une série d'exemples (?)
12) Sous-espaces, produits, quotients (?)

On supposera connus les nombres réels, qui seront donc pris comme exemples. Signaler éventuellement l'utilité ultérieure de diverses notions (p.ex. fonctions semi-continues dans l'Intégration ou le Calcul des variations). Système de cross-references dans le texte, renvoi aux démonstrations du Traité par références en marge. Il est convenu que deux fiches d'essai ("compacts" et "fonctions continues") seront rédigées pour discussion au Congrès de Pâques.

DICTIONNAIRE DE TOPOLOGIE GENERALE.

Quelques sondages satisfont pleinement le Congrès. Seules pourront intervenir des suggestions de détail ; on attend le tirage et la distribution de ce Dictionnaire.

Suggestions : ajouter les termes du Kuratowski. Introduire les noms "régulier","complètement régulier", "normal", etc. ~~xxxx~~ à l'article sur les axiomes de séparation.

ETUDE LOCALE DES FONCTIONS (Livre élémentaire, état 2).

Le point de vue du projet Weil sur le début du chapitre est adopté à l'unanimité, ce qui remanie les 2 premiers paragraphes. Bien insister sur la distinction entre les fonctions de comparaison et les autres. On dira "prépondérant", "négligeable" et "semblable" pour $\succ$, $\prec$ et $\asymp$.

Au § 2 (développements asymptotiques) on adopte une proposition de Cartan, d'après laquelle on définit un développement asymptotique "à la précision de g_α", et on admet des coefficients 0 pour les $g_\beta \succ g_\alpha$. Pour la somme, on ajoute deux développements à la même précision ; pour le produit, on supprime les termes trop précis.

Remarques de détail : le n° 3 du § 1 disparaît (fait dans l'introduction Weil), les exemples restent ; le $\gtrsim$ avant la déf. 2 est vidé. Elargir l'exemple 2 du § 2, n°1 en parlant de normes dans des Banach ; au n° 2 du § 2, un exemple de 3^{e} espèce sur les fonctions algébriques, au lieu de l'exemple des nombres premiers.

Vider les remarques scurriles du n°4 . Au § 3, n°4, dire quelle que chose de positif dans la 2è remarque qui suit la prop.4 .

CORPS DE HARDY. FONCTIONS (H) (Etat 2).

N° 1 déjà fait dans l'introduction Weil du chap.IV .

N° 2) Schwartz fait remarquer qu'on n'a pas besoin d'équations différentielles au lemme 2, puisqu'on polynome ne change de signe qu'un nombre fini de fois.

N° 5) Donner dès le début les notations $e_0(x)=x$, $e_1(x)=e^x$, $\ell_0(x)=x$, $\ell_1(x)=\log x$; arranger les formules de dérivation :

Les n^{os} 6, 7 et 8 passent en exercices.

Problèmes : que donnent les prop.1 et 2 (n°3) par transformation de Fourier ? Zornifier les corps de Hardy ; Schwartz réclame un grand corps Ω .

FONCTION GAMMA (Etat 1).

Rendre plus clair la fin du n°1 . Au n°2, revenir à la version d'Artin en ne traitant le th.1 que pour $f(x)=\log x$ (le th.1 actuel en exercice). Donner le graphe au n°3 . Avec le lemme 1 (n° 4) mettre en note qu'il est valable pour les fonctions non dérivables. Dire que $B(x,y)$ est un bêta majuscule. Au n°6 , ajouter que $\Gamma(x+a)/\Gamma(x) \sim x^a$.

L'Appendice III (Intégrales dépendant d'un paramètre) est vidé.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES (Ancien chap.II du Livre VII, état 1).

On confirme le projet Cartan de Novembre, d'après lequel ce chapitre formera le chap.V du Livre élémentaire.

§ 1 (théorèmes d'existence). Après de laborieuses discussions, le plan suivant est adopté :

1) Existence de solutions approchées (méthode Cauchy-Lipschitz, sans condition de Lipschitz, mais en supposant seulement la continuité du second membre).

2) Majoration de l'erreur commise lorsqu'il y a une condition de Lipschitz.

3) Existence et unicité de la solution dans le même cas.

4) Prolongement des intégrales ; ce qui se passe aux bornes du plus grand intervalle où on puisse prolonger.

On se bornera aux équations <u>résolues</u> $y'=F(x,y)$ (cf. projet Cartan de Novembre), et au cas où x est <u>réel</u>. On n'utilisera pas les approximations successives. Dans la question de dépendance des conditions initiales la résolution par rapport à la constante d'intégration est balancée (ne peut se faire qu'après les fonctions implicites).

§ 2 (équations linéaires).

1) Notation $y'=A(x).y$. Prendre tout de suite $x \to A(x)$ continu pour la convergence en norme des opérateurs linéaires (interpréter dans le cas de dimension finie). Dire quels théorèmes du 1 sont utilisés pour le th. 1 .

2) On note $C(x,x_1).y_0$ la solution de l'équation égale à y_0 pour x_1 ; alors démontrer successivement que :

a) $C(x,x_0)=C(x,x_1)C(x_1,x_0)$, d'où $C(x,x_0)$ application linéaire biunivoque sur ;

b) $C(x,x_0)=C(x)$ est une application linéaire continue ;

c) $x \to C(x)$ est continue et dérivable, et satisfait à

$$C'(x) = A(x).C(x) \quad .$$

Faire un renvoi à la fonction exponentielle. Le corollaire est rejeté à la dépendance par rapport au paramètre.

3) Faire d'abord la remarque de la fin ; dire "méthode de variation des constantes" . Formule $y(x)=C(x).y_0+\int_{x_0}^{x} C(x,\xi)b(\xi)d\xi$.

4) Faire l'équation adjointe en sens inverse (recherche de v tel que $\langle u(x),v(x)\rangle = C^{te}$) .

5) Essayer d'améliorer la démonstration de la prop.2 (au concours, en tâchant d'éviter le calcul de la dérivée d'un déterminant).

6) Pour les coefficients constants, une réduction incomplète de la matrice suffit (zéros au-dessous de la diagonale).

7) Prendre $a_0(x)=-1$. Expliciter l'équation avec second membre (cf. n°3) ; rapprocher de la formule donnant la primitive d'ordre n par une seule intégration. Remarquer comme conséquence l'indépendance linéaire des $x^n e^{rx}$.

9) La méthode d'Heaviside suscite de violentes discussions. On s'aperçoit qu'on n'a pas parlé en Algèbre linéaire des équations linéaires à inconnues vectorielles. On essaie d'y voir clair dans le corps des opérateurs R(D) (qui, comme on s'en aperçoit après coup, n'est pas un corps : (1/D).D n'est pas l'opérateur identique!!): "C'est les produits gradués", "c'est les produits tensoriels", "c'est les fonctions moyenne périodiques", "c'est les corps valués"... En tout cas il y aura en général des conditions de dérivabilité pour les seconds membres. Roger, persuadé que le calcul brutal donne toutes les intégrales, promet de débrouiller la question.

10) Adopté, on se restreignant au cas où il n'y a qu'un seul paramètre réel.

Le § 3 (équations complètement intégrables) est rejeté au Livre VII (Différentielles).

Signalons que Dieudonné s'est livré, comme à l'ordinaire, au classique numéro du <u>Plan général</u> :

I. Ensembles

II. Algèbre　　　　III. Topologie générale

IV. Fonctions d'une variable réelle　　V. Espaces vectoriels topologiques　　VI. Intégration　　VII. Différentielles (théorie locale)

Bloc linéaire

VIII. Topologie algèbrique　　IX. Variétés différentiables　　X. Groupes de Lie

Bloc topologico-différentiel

<u>Etat des publications</u> : Le chap.III d'Algèbre (fasc.VII) et le chap.IX de Topologie (fasc. VIII) sont en épreuves.

Les chap.I, II, III du Livre IV seront livrés à l'éditeur le 1er Avril (fasc. IX) .

Le chap.X et le Dictionnaire de Topologie en juillet (fasc. X)

Les chap.IV (Polynomes) et V (Corps) d'Algèbre en Décembre (fasc. XI) ; si possible aussi le fascicule de résultats de Topologie en Décembre (fasc. XII).

<u>Prochains Congrès</u> :

I. <u>Congrès d'Avril</u>. Se tiendra à Nancy dans la première quinzaine d'Avril, dès que Weil (qui arrive fin Mars sur le "De Grasse") sera disponible. Programme :

a) Lecture détaillée des Ensembles chap.I-II en vue de rédaction état 4 .

b) Dernier examen du Dictionnaire de Topologie (chacun est prié d'apporter ou envoyer sa liste de suggestions de détail).

c) Examen des deux fiches d'essai pour le Fascicule de résultats et décisions pour la rédaction finale de ce Fascicule.

II. <u>Congrès oecuménique de Juin</u> (entre l'arrivée de Cartan et le départ de Weil). Se tiendra à Paris du 1er au 11 Juin, à Nancy du 15 au 25. Programme :

a) Lecture détaillée des chap.I, II, III de l'Intégration (état 3) en vue de rédaction état 4 .

b) Lecture détaillée du chap.VI d'Algèbre (Divisibilité) en vue de rédaction état 3 .

c) Examen du Livre V (Espaces vectoriels topologiques) et du Rapport Godement sur les algèbres normées, en liaison avec les chap.VII (Algèbres semi-simples) et VIII (Formes quadratiques) de l'Algèbre.

d) Echange de vues sur les Livres VII et IX (Différentielles et variétés différentiables), et examen des rapports Schwartz et Roger sur la question.

e) Examen du rapport Cartan-Weil sur la Topologie algébrique.

III. <u>Congrès d'Octobre</u>. Se tiendra à Paris en Octobre (date à fixer vers le milieu du mois). Programme :

a) Lecture détaillée du chap.V d'Algèbre (corps commutatifs) en vue de rédaction définitive et remise à l'impression.

b) Lecture détaillée du Fascicule de résultats de Top.gén., pour rédaction définitive et remise à l'impression.

c) Lecture détaillée de la rédaction état 4 de la fin du Livre élémentaire (Livre IV) en vue de rédaction définitive et remise à l'impression.

En principe, il n'y aura pas de Congrès à Noël 1948.

Engagements du Congrès de Noël :

Cartan-Weil : rédigent un rapport général sur la Topologie algèbique (que Weil doit apporter avec lui fin Mars).

Delsarte : rédige les 2 premiers paragraphes de l'Etude locale des fonctions (doit être livré en Juin).

Dieudonné : Fait la rédaction définitive des chap.I,II,III du Livre IV, puis celle du chap.X de Topologie (Espaces fonctionnels et enfin celle du chap.IV d'Algèbre (Polynomes) ; et s'occupe de tout ce qui n'est pas mentionné dans les autres engagements.

Pisot : fait un rapport sur le Calcul des probabilités (Intégration, chap.VI) (doit être livré en Octobre).

Roger : fait un rapport sur la géomètrie différentielle locale (à livrer en Avril) ; arrange la méthode d'Heavisido.

Samuel : fait une fiche d'essai pour le Fascicule de résultats de Topologie ("Allgemeine Topologie von stetigem Standpunktaus") (pour le 15 Février) ; rédige en état 4 les Corps commutatifs (pour Juin).

Schwartz : Fait une fiche d'essai pour le Fascicule de résultats ("Allgemeine Topologie vom kompakten Standpunkt aus") (pour le 15 Février) ; fait un rapport sur les formes différentielles (pour Avril).

ENCYCLIQUE "De commutativis corporibus".

Nous, NICOLAS BOURBAKI, Lord Protecteur des Filtres, Président de la Société des Structures Induites, membre honoraire de la Société de "Class-Field Archeology" , - étant donné la douleur extrême que nous a causé la vue, parmi nos fidèles européens, des signes les plus caractérisés de querelle, schisme, zizanie, litige et désaccord, - enjoignons à nos sages et bien-aimés fidèles d'Amérique de rétablir la paix, l'ordre et l'union parmi leurs frères orientaux.

1) Corps, § 2, p.7. Cartan, Samuel et Schwartz se refusent à jeter à la tête du lecteur la déf.2 (x algèbrique si $K(x)$ est de rang fini). Ils veulent l'introduire naturellement par une rapide étude de la structure linéaire de $K[x]$: si l'idéal des relations n'est pas 0 , $K[x]$ est de dimension finie (ce qui est un peu moins que ce que demande la définition actuelle). Dieudonné objecte que pour les entiers algèbriques sur un anneau A , on ne pourra pas procèder de même, parce qu'on ne saura rien dire en général sur $A[x]$, tandis qu'on peut poser de façon tout à fait analogue la définition de x entier algèbrique par "$A[x]$ de type fini" , et développer ensuite la théorie des entiers algèbriques parallèlement à celle des éléments algèbriques sur un corps sans s'inquiéter de ce qui arrive lorsque $A[x]$ n'est pas de type fini. Cartan, Samuel, et Schwartz trouvent que cette analogie n'est ~~pas~~ que partielle, parce qu'on demande beaucoup plus par la condition "$A[x]$ de type fini" que par "$K[x]$ de rang fini" : Dieudonné ne comprend pas cette objection. Schwartz a peur d'autre part que la définition du texte n'induise le lecteur à croire que toute extension algèbrique est de rang fini.

<u>Projet Cartan-Samuel-Schwartz</u> : Etude de $K[x]$. Définition : x est transcendant sur K si les monômes sont linéairement indépendants, algèbrique dans le cas contraire. Théorème : si x transcendant, $K[x]$ est isomorphe à $K[X]$; si x est algèbrique $K[x]$ est de rang fini sur K (x dans un grand anneau contenant K). Puis un théorème plus précis dans le cas où on est dans un grand corps et où x algèbrique (polynome minimal, $K(x)=K[x]$, base sur K). Dieudonné est d'accord sauf sur un point : il demande qu'on intervertisse la définition et l'étude de $K[x]$. Le désaccord sur ce point s'avère irré- -ductible

2) Dans l'étude des racines de l'unité et des corps finis, Cartan, Delsarte, Pisot, Roger et Schwartz s'insurgent contre le grand corps Ω_p : "détruire les idoles" !! Ils veulent pouvoir parler in abstracto du corps de décomposition d'un polynome. Ils trouvent que Ω_p est un carcan inutile ici, et peut être aussi à d'autres endroits.

Dieudonné et Samuel défendent Ω_p avec acharnement : ils sont accusés d'idolâtrie et de sacrifices hummins accomplis chaque jour sur l'autel d'un Ω_p de caractéristique variable !

3) Cartan et Delsarte demandent d'étudier les polynomes cytloto-miques Φ_n juste après l'indicateur d'Euler (haut de la p. 124). Ils demandent des formules explicites

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|x} (x^d-1)^{\mu(n\ d)}$$

Ils veulent qu'on montre, par un calcul de division de polynomes, que les coefficients de $\Phi_n(x)$ sont entiers. Dieudonné et Samuel s'y opposent violemment : la place de $\Phi_n(x)$ dans le texte (p. 125) est la meilleure (raisonnement de théorie de Galois, et non calcul d'allure fortuite). Ils se refusent à mettre la formule explicite ailleurs qu'en exercice. Quant à l'intégrité des coefficients, Dieudonné refuse, comme à l'ordinaire, une démonstration constructive ; et Samuel dit que la vraie raison de cette propriété est le fait que les racines de l'unité sont des entiers algèbriques puisqu'ils sont des unités pour toutes les valuations (en car.0) ; et en caractéris-tique $p > 0$, il n'y a rien à démontrer.

4) Sans qu'il y ait désaccord, le Congrès se demande s'il ne vaudrait pas mieux vider les prop.6 et 7 (p. 94-95) relatives aux extensions normales non séparables. Il se rangera à l'avis de Weil.

D'autres <u>décisions</u> sur les Corps et Polynomes ont été adoptées à l'unanimité :

A) <u>Terminologiques</u> : 1) Extension <u>monogène</u> au lieu de simple (cf.: groupe, module monogène).

2) Corps algèbriquement <u>clos</u> et non "fermé" ("fermé" s'applique à une notion relative. Cela évitera la confusion avec "K algèbriquement fermé dans L" . "Stable" est rejeté faute de substantif du genre de "clôture" et "fermeture").

3) <u>Monômes</u> : auront le coefficient 1, ce qui est beaucoup plus linéaire (Un polynome est combinaison linéaire de monômes). "Les éléments du monoïde s'appellent des monômes" dit Delsarte.

4) Extension <u>radicielle</u> au lieu de "purement inséparable" qui donne lieu à des canulars sémantiques du genre "K est à la fois séparable et purement inséparable sur lui-même" .

B) <u>Expulsives</u> : 1) Les bases séparantes, les théorèmes fins de Zariski (prop.5, p.77) et de Weil (prop.9,p.83), les corps relativement algèbriquement quasi-fermés, les extensions régulières, le facteur inséparable du degré, sont <u>vidés</u> (ça ne sert que dans une <u>théorie</u>, la Géomètrie algèbrique, et il n'y a pas lieu d'en gonfler le Livre II. Ce serait un précédent fâcheux qui autoriserait certains à réclamer les valuations (utiles dans <u>deux</u> théories, nombres et fonctions algèbriques) les anneaux locaux, et des tas d'autres choses). Il est décidé que la place de tout cela est dans la partie (2è ou 3è) de Bourbaki qui s'intitulera "Analyse algèbrique", et où ces notions viendront comme préliminaires.

2) On réduira au minimum les extensions normales non séparables.

3) Norme et trace, notions hypercomplexes, sont rejetées au chap.VII.

4) Les extensions cycliques sont vidées également, et repoussées avec les algèbres cycliques dans la partie "Analyse algèbrique".

Toutes ces expulsions se situent dans le cadre d'un compromis difficile entre deux projets ("Algèbre large" et "Algèbre étroite") que le Congrès a pris soin d'avoir constamment sous les yeux :

<u>Algèbre étroite</u>	<u>Algèbre large</u>
V. Corps (avec les expulsions susdites)	V. Corps (avec les résultats fins de la rédaction actuelle, et en plus l'ordre d'inséparabilité).
VI. Divisibilité (avec les anneaux noethériens, mais non les anneaux de Dedekind, qu'on ne peut traiter correctement sans les valuations)	VI. Anneaux semi-simples. Algèbres simples (avec les systèmes de facteurs et éventuellement la cohomologie des groupes et algèbres).
VII. Anneaux semi-simples. Représentations linéaires des groupes (allégé)	VII. Représentation linéaire des groupes.
VIII. Formes quadratiques et hermitiennes.	VIII. Divisibilité.
IX. Géomètries élémentaires.	IX. Anneaux noethériens (décomposition en idéaux primaires). Anneaux locaux ; valuations ; anneaux de Dedekind ; étude locale des corps valués ; éventuellement leur étude globale par la formule du produit d'Artin.
	X. Formes quadratiques et hermitiennes
	XI. Géomètries élémentaires.