Tribu n 13

LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique)

Compte-rendu du Congrès de Paris
(8-11 novembre 1947)

Présents : Cartan, Chabauty, Delsarte, Ehresmann, Godement, Roger, Pisot, Samuel, Schwartz.

Nos lecteurs ne seront pas étonnés d'apprendre que ce congrès, dédié à l'étude du Livre Élémentaire, fut marqué de peu d'incidents - De lourds souvenirs tôpinoux et gaussatesques emplirent souvent les âmes des participants. Le seul fait marquant fut l'expulsion des ensembles convexes. Signalons enfin le manque d'assiduité de plusieurs participants.

Plan général

Introduction : Espaces vectoriels. Ensembles convexes.

Chapitre I : Dérivées
1) Dérivée première.
2) Théorème des accroissements finis
3) Dérivées d'ordre supérieur.
4) Fonctions convexes.

Chapitre II : Primitives et intégrales
1) Primitives et intégrales
2) Dérivées de fonctions dépendant d'un paramètre.

Chapitre III : Fonctions élémentaires.
1) Dérivées des fonctions exponentielles et circulaires.
2) Développements des fonctions exponentielles et circulaires et des fonctions qui s'y rattachent.

Remarques générales

1) La définition des espaces vectoriels topologiques (dans l'introduction) permet d'énoncer les propositions des chapitres I et II dans le cas ~~le plus~~ ~~général~~ d'un espace des valeurs le plus général (cela ne coûtait pas plus cher) - Ainsi seront évitées de fastidieuses redites (au Livre des espaces vectoriels topologiques) - On ne parlera presque jamais de R^n.

2) Le principal changement a été la supression du chapitre sur les ensembles et fonctions convexes. En effet, considérée en soi, l'actuelle rédaction du bloc convexe ne satisfait pas Cartan qui a mis au point une contre-rédaction. Ses raisons, trop longues à détailler seront résumées ~~dessous~~ ci dessus. Si le Congrès s'est finalement décidé à retirer du Livre Élémentaire le bloc convexe c'est : 1) que les choses sont presque aussi compliquées pour les R^n que pour les espaces généraux ; 2) parce que rien de tout cela ne sert au Livre Elémentaire (à part la définition de la convexité), sauf par l'étude des "cas limites" du th. des accroissements finis relatif à un R^n. Et d'ailleurs, telle qu'elle est faite dans le texte actuel, cette étude des cas limites est incomplète et inutilement compliquée. En fait, il faut introduire la notion de point interne d'un convexe K ($a \in K$ est interne si, pour toute droite D passant par a, $D \cap K$ se réduit à $\{a\}$ ou est un intervalle dont a n'est pas une extrémité) ; les points internes de K sont, dans la variété linéaire engendrée par K, les points intérieurs de K. Ceci dit, le th. des accr. finis affirme : si K est l'enveloppe convexe (fermée ou non) des valeurs de $f'd$, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est point interne de K. Corollaire : si H est un convexe contenant les $f'd$, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est un point A et $f'd$ est toujours dans le porteur du point A. (le porteur d'un point A d'un H convexe est le plus grand sous ensemble convexe de H auquel A soit interne ; c'est l'intersection de H et de la variété linéaire engendrée par A et les droites passant par A qui sont coupées par H suivant un intervalle auquel A est intérieur)

(3) Il a donc été décidé de donner, dans ~~une~~ l'introduction, la définition des ensembles convexes (dans un espace vectoriel sur R)

3) On a gardé l'étude des fonctions convexes, mais dans un esprit assez différent. Cette étude sert surtout d'illustration à la notion de dérivée, d'où sa place.

4) L'ancien chapitre II (Dérivées, primitives, intégrales), jugé trop long, a été scindé en deux.

5) Le Congrès n'a pris que des décisions de détail sur le paragraphe des développements ~~en~~ des fonctions élémentaires. Des décisions d'ensemble ne pourront être prises qu'après étude du ch IV. Le sort dudit paragraphe est donc laissé provisoirement en suspens.

Remarques de Cartan sur la théorie des convexes.

1) Le fait que deux ensembles ~~fer~~ convexes fermés bornés sont homéomorphes ne tient nullement à la compacité de la sphère unité. C'est une ~~cas particulier~~ conséquence du théorème : dans un espace vectoriel normé, tout ensemble convexe, fermé, borné, d'intérieur non vide est homéomorphe à la boule unité fermée (conséquence de la condition d'équivalence de 2 normes)

2) La démonstration de Hahn-Banach pour $n = 2$ peut se faire ainsi : soit A ouvert convexe non vide, tel que $0 \notin A$, et tel que $x \in A$ entraine $\lambda x \in A$ pour tout $\lambda > 0$. Dans le plan pointé, qui est connexe, A possède au moins un point frontière $a \neq 0$ (sinon A = plan ~~plan~~ pointé, ce qui est absurde) ; alors $a \notin A$ et $-a \notin A$ (sinon $0 = \frac{a + (-a)}{2}$ serait intérieur à A d'après la prop 7 de l'actuel par. 1). Donc la droite Oa ne rencontre pas A.

3) Le "th. de Minkowski" n'a rien à voir avec la compacité de

l'espace des hyperplans passant ~~pour~~ par O. D'une manière générale, dans tout E.V. topologique (même non localement convexe) on a : si A fermé convexe a un intérieur non vide, par tout point frontière de A passe au moins un hyperplan d'appui (fermé)

4) à propos de la dualité : soit E un "espace de Fréchet" (espace vectoriel localement convexe, métrisable et complet) ; si $K \subset E$ est fermé convexe et si E est le plus petit sous espace engendré par K, les points intérieurs de K ne sont autres que les points internes. Conséquence : la topologie faible détermine la topologie forte !!

5) Dans le chapitre sur les convexes (probablement ch. I du Livre sur les E.V. Topologiques) il y aurait intérêt à bloquer tout ce qui concerne les cônes convexes.

Une proposition relative au Livre Elémentaire

Le Congrès a vivement approuvé une proposition de Cartan, tendant à mettre dans le Livre Elémentaire un chapitre relatif aux équations différentielles (dont la nature est très différente de celle des équations aux dérivées partielles). On y étudierait les équations de la forme : $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ (x réel, y dans un Banach) où F est une fonction vectorielle, réglée en x pour chaque y, et où l'application $y \to F(\cdot, y)$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. On y traiterait du théorème d'existence, de la continuité et de la dérivabilité par rapport au paramètre, et des équations linéaires. L'esprit du chapitre serait : "trouver une fonction $y(x)$ qui soit une primitive de la fonction (réglée) $F(x, y(x))$. Le fait que $F(x, y(x))$ doit être réglée se déduit du facile comme

(5) suivant : " Si, pour chaque y, $F(x,y)$ est une fonction réglée de x, et si cette fonction réglée dépend continûment de y (topologie de la convergence compacte) alors, pour toute fonction continue $\varphi(x)$, $F(x,\varphi(x))$ est réglée ".

Introduction : Espaces vectoriels. Ensembles convexes

Dire qu'on va traiter dans ce livre des fonctions définies sur R ; valeurs numériques, et aussi, par extension, valeurs vectorielles (laïus page 25 remanié)

Quelques notions sur les E.V. réels : définition, segments de droite, ensembles convexes (définition seulement), quelques exemples.

Définition d'un EV topologique ($x+y$ et λx continues) - EVT complets. Exemple de EV normés.

Définition de EVT localement convexes. Exemple des EV normés.

Chapitre I. Derivées

I Derivée première

Laïus d'introduction (beaucoup de propriétés marchent avec C ou un corps topologique commutatif quelconque au lieu de R)

Remarque générale de rédaction : dire "numérique" au lieu de "scalaire"

n°1) Si f est définie dans un intervalle I, non réduit à un point, on dira qu'elle est dérivable en $x_0 \in I$ (même si x_0 n'est pas intérieur !) si $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \in A,\, x \neq x_0}$ - - - -. La dérivée à droite n'est alors autre que la dérivée de la restriction de f à un sous-intervalle - Ceci allège (ou modifie) les énoncés suivants

(p. 28) - Prop 1 : L'ensemble des fonctions vectorielles définies dans un intervalle I, prenant - - - -, et dérivables

130

⑥ en un point $x_0 \in I$ ...

(p. 28) Prop 2 et prop 3 : inutile de supposer f définie "dans un voisinage de x_0

(p. 33) Prop 5 Inutile de supposer g définie dans un voisinage de $f(x_0)$; il suffit de supposer que $g \circ f$ a un sens pour $x \in I$.

(p. 34) Prop 6 Homéomorphisme d'un intervalle I sur un intervalle J, x_0 point de I.

Corollaire Inutile de supposer A ouvert.

(p. 35) . Bas : la référence aux Rectif. du fasc III est devenue inutile

(p. 37) Les 7 premières lignes sont presque supprimées, ainsi que la prop 7.

(p. 55) : Inutile de supposer I ouvert (x_0 peut être une borne de I) - ceci est essentiel (la formule de Taylor est encore valable en une borne d'un intervalle)

(p. 57) : 1ère ligne du n° 2 : idem.

(p. 79) : Def. 1 "si $f(x)$ est la dérivée de g en tout point de I" ; ici

(p. 92) , ligne 8 : supprimer ouvert.

Par contre l'énoncé du th 2 (p. 84) doit rester inchangé.

n° 2) Titre : "linéarité de la dérivation" (et non de la dérivée) (p. 28)

La prop 2 rentre dans ce numéro. Un autre exemple pour la prop 2 : produit par un nombre complexe constant. Dire dans l'énoncé de la prop 2 que u est une application linéaire continue (on ne se borne pas aux R^n). A ce propos mettre une remarque : l'application linéaire $f \to Df$ n'est pas continue pour la topologie de la convergence uniforme (exemple d'une sinusoïde aiguë tendant vers Ox). En corollaire : forme linéaire continue.

Petits caractères

n° 3) Dérivée d'un produit (nouveau n° commençant au milieu de la page 29)

Prop 3 : application multilinéaire continue

Page 30 : "considérons l'identité $[b_1 \cdots b_p] - [a_1 \cdots a_p] = \sum_i [b_1 \cdots b_{i-1}(b_i - a_i) \cdots$

(ligne 1) ... "en tenant compte de la continuité de ..." (ligne

... "sont nuls" (ligne 10) - Ecrire la formule

$$[f, g]' = [f', g] + [f, g']$$

Exemple 1 : en faire une condition nécessaire et suffisante par un renvoi à l'exemple 1 page 28 (ceci pour les R^n ...

seulement - contre exemple en exercice)

Exemple 3 : ajouter que la dérivée d'un vecteur de longueur euclidienne constante lui est perpendiculaire.

Exemple 5 : Supposer que l'on a affaire à une algèbre topologique (dire ce que c'est)

n°4) Dérivée de l'inverse d'une fonction (nouveau n° commençant au milieu de la page 32 - Prop 4 : algèbre normée complète.

n°5) Dérivée d'une fonction composée (commence ligne 9, page 33) - Ajouter "et g" à la ligne 10.

n°6) Dérivée d'une fonction réciproque. Dans la remarque 1 (ligne 4 du bas) dire "Les espaces vectoriels (resp. algèbres) topologiques ... sur K, pourvu que dans les prop 2 et 3 ..."

n°7) Dérivées à droite et dérivées à gauche. ~~(Litre~~

A partir de la page 37 (milieu, ancien n° 6), on demande un chambardement important. L'ordre suivant est proposé

Les dérivées infinies (texte pages 37 et 38 jusqu'à la ligne 7 - puis la seconde moitié de la page 39). Pour les dernières lignes de celle ci, faire passer les f'_g et f'_d en resp. ..., et énoncer les choses pour f'.

Graphes. Demi tangentes. Tangente.

Signes de f'_g et f'_d en un maximum relatif - f' est nulle ou ∞ en un tel point.

Théorème de Rolle (ancienne prop 2, page 46) - Son corollaire. Interprétation géométrique. Attention : pour cette prop 2. la dérivée doit être supposée finie partout ! (sinon dire que $f'(c) = 0$ ou ∞)

6

Ehresmann demande l'exercice suivant : toute fonction définie sur les quaternions ~~réels~~, à valeurs dans un EV quaternionien, et qui est dérivable, est linéaire.

encadrer
(?) la solution à
Ehresmann

(8)

IV Théor II Théorème des accroissements finis.

mettre Rolle ici

Rolle, dont la démonstration est très différente, a été mis au par I (Sur ce point le Congrès est très partagé ; certains proposent de mettre Rolle au début du par II afin de conserver au par I son homogénéité "locale") - On pourrait donc commencer par un laïus du genre : "La plus grande partie du par I a un caractère local ... sauf Rolle.
On va maintenant dire quelque chose de plus fort ..."

n^{os} 1 et 2) Il y aura quatre formes (et 4 seulement !) du th. des accroissements finis :

1) Proposition : $f'_d \geq 0$ entraîne que f est croissante (montrer que $f(a) \leq f(b)$ au moyen de l'inégalité : $f(x) - f(a) \leq -(x-a)\varepsilon - \left(\sum_{a_n < x} \frac{1}{2^n}\right)\varepsilon$

Complément : si $f'_d > 0$ en un point, $f(b) > f(a)$

2) Théorème : inégalité des accroissements finis avec une fonction g, et cas limite (prop 1 du texte) - application : $g(x) = x$, M et m.

3) Théorème dans le cas vectoriel (sans cas limite) avec une fonction numérique g (convexe fermé K, $f'_d(x) \in g'_d(x) K$ - s'appuyer sur : $f(x) - f(a) \in (g(x) - g(a)) K + (x-a) V + \left(\sum_{a_n < x} \frac{1}{2^n}\right) V$ (2).
V est ici un voisinage convexe de 0 ; opérer dans un E.V. localement convexe)

4) Le théorème de la norme (cor. 2 de la page 48 - Il est bien trop utilisé pour l'appeler corollaire !)

Ainsi le cor 1 (page 47, bas) saute. Comme conséquence de 4) on a immédiatement la prop. 5 et le soi disant corollaire (page 51 bas)

Puis reprendre à la ligne 9 page 49.

n^{o}3) Continuité des dérivées. La prop 5 et le "corollaire" (page 51) passent au n^o 2. Le n^{o}3 ne contiendra qu'une proposition combinant 4 et 6

(9) "Soit I un intervalle, $x_0 \in I$. Soit, dans $I \cap \complement\{x_0\}$, f définie, continue, dérivable à droite sauf aux points d'un ensemble dénombrable. Pour que f'_d ait une limite quand $x \to x_0$ ($x \in I$, $x \neq x_0$) il faut et il suffit que $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ ait une limite c quand $x \to x_0$, $y \to x_0$, $x \in I$, $y \in I$, $x \neq y$, $x \neq x_0$, $y \neq x_0$. Dans ces conditions f se prolonge par continuité au point x_0, c est la limite de f'_d quand $x \to x_0$, et le f prolongé a une dérivée égale à c en x_0"

On demande un exercice sur les fonctions croissantes à droite (sont croissantes). L'exercice 8 (page 53) est canulé (si $\alpha < 3/2$, f_n tend uniformément vers zéro! Prendre $\alpha = 3/2$)

muel s'est couvert.

III Dérivées d'ordre supérieur.

n° 1) page 56 ligne 1 : supprimer "aussitôt" - ligne 3 "lorsque l'un des membres est défini" - Ligne 9 : "dans E" - Ligne 10 "On montre en effet les formules".

Ligne 8 du bas : A au lieu de I.

page 57 : supprimer le laïus des lignes 6 à 11 ("On peut aussi .... au lecteur")

n° 3) Formule de Taylor

3ème ligne mal rédigée ; écrire "dire que f a une dérivée en un point $a \in I$ signifie que l'on a --"

Faire la formule de Taylor (th 1) avec valeurs dans un localement convexe.

Remplacer les inégalités en norme par des "$\in V$"

~~Les remarques~~ pages 59 et 60 sont à supprimer On les remet.

IV Fonctions convexes d'une variable réelle.

Le n° 1 de l'ancien par. 4 saute : en effet la prop 1 se trouve au par 2, et la def 1 et la prop 2 à la fin du par. 1 - Le franc de la page 69 est une tôpinade.

Le Congrès, après de longues discussions, a jugé que c'était ici la meilleure place pour un paragraphe sur les fonctions convexes. C'était impossible avant, à cause de la dérivée seconde - On ne pouvait pas couper les paragraphes sur les primitives et intégrales. Introduire les fonctions convexes au chapitre III (fonctions élémentaires) aurait rompu la belle homogénéité (assez algébrique) de celui ci. L'avantage de la place choisie ici est de donner un exemple assez concret des notions exposées antérieurement, - et aussi de reposer le lecteur des 3 paragraphes assez arides qui précèdent. Quelques figures aideront à ce dernier but. Le plan détaillé suivant, proposé par Cartan, a été adopté.

n°1) Définition (valable pour une fonction définie sur un ensemble quelconque de R) : le graphe est au dessous de la corde.

$\left(f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')\right)$

Équivalent à : ensemble au dessus du graphe est convexe (si f est définie dans un intervalle)

Exemples : linéaire, x^2, $|x|$.

Remarquer que la restriction à un sous intervalle est convexe.

Extérieurement au sous intervalle le graphe est au dessus de la corde - Cas limite (si ça se conçoit) - Figure.

Convexité stricte.

Formule "$f(\sum \lambda_i x_i)$ ..." (avec les resp. pour les strictement convexes

Fonctions concaves.

n°2) Familles de fonctions convexes (somme, enveloppe supérieure, limite simple)

n°3) Continuité et dérivabilité des fonctions convexes (prendre les notations de l'état 3 : pentes)

Proposition : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante (dessin)

Conséquences : existence de f'_g, f'_d (en tout point intérieur) ; $f'_g \leq$

autre conséquence : si $b < a$, $f'_d(b) \leq f'_g(a)$

(11) Croissance de f_d et f_g's - Sont égales et continues sauf sur un dénombrable.

Continuité de f.

n°4) Critères de convexité

a) Dérivée croissante (sauf sur un dénombrable)

b) Critère avec la dérivée seconde.

c) Semi continue supérieurement telle que, en aucun point de la courbe, il n'y ait de droite qui soit localement au dessus du graphe sans être sur le graphe.

Applications : $f\left(\frac{x+x'}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x) + f(x')\right)$; toute fonction "localement convexe" est convexe.

Mettre en exercices les critères de l'ancien chap. I.

Chapitre II

Primitives et intégrales

Dire qu'à partir de maintenant, les espaces vectoriels des valeurs seront supposés complets.

I Primitives et intégrales

n°1) Page 79 ligne 10 : supprimer "de dimension finie" ; ligne 5 du bas "f doit être continue".

On propose de changer la terminologie : "primitive propre" au lieu de "primitive", "primitive" au lieu de "primitive impropre" ; ceci pour éviter des confusions avec la terminologie "intégrales impropres"

Page 80 : ligne 5 : "Si g est continue et admet - -" (supprimer "et continue" à la ligne 4) - Remarquer qu'on peut changer la fonction donnée sur un ~~ensemble~~ dénombrable, et qu'on peut parler de primitive d'une fonction non définie sur un dénombrable - Les lignes 9, 8, 7 du bas deviennent le texte de la prop. 1 - Remarquer, avant le th1, que, pour que g soit

(12) primitive de f, il faut et il suffit que la restriction de g à tout intervalle compact soit primitive de f ; ceci allègera la démonstration du th. 1

n°2) Existence des primitives - On démontre le th. 1 pour un intervalle compact

n°3) Fonctions réglées - Le plan suivant est proposé :

Définir les fonctions en escalier à valeurs dans un ensemble quelconque (existe une partition finie ...")

Prop 1 : les fonctions en escalier à valeurs dans un EV forment un EV (Démonstration par la partition $A_i \cap B_j$)

Remarquer qu'elles ont des primitives

Fonctions réglées (sur espace vectoriel complet) - Ont des primitives (théorème du n°3)

Remarquer que "réglée = réglée sur tout compact"

Caractérisation des fonctions réglées (th. 2 - p 84)

En corollaire : la fin du th 3 (p. 86) (dérivée à droite de la primitive d'une fonction réglée) - Dans l'énoncé supprimer " si ce point appartient à I".

Exemples : continues (préciser que c'est la dérivée de la primitive - Remarque page 86) - monotones (caractérisation des fonctions convexes comme primitives de fonctions croissantes)

~~La remarque que remarque 2 (p. 87) saute.~~ (?)

n°4) Intégrales

Commencer par la prop 2 (p. 88 - Sommes de Riemann) - Introduire alors le terme d'intégrales - ~~On ne~~ Dire qu'on ne parlera ici ~~que~~ d'intégrales que pour les fonctions réglées - Un laïus sur les généralisations possibles de la notion d'intégrale (s'étendra à des fonctions qui n'ont pas de primitives, mais ne s'étendra pas à toutes les fonctions qui ont des primitives) - Définir d'abord $\int_a^b f(t)\,dt$ par $g(b) - g(a)$; n'introduire qu'ensuite la notation $\int_a f(t)\,dt$ pour la primitive d'une réglée. Sup

(13)

la notation $\int_{x_0} f(t)$ (sans dt) (resp. $\int_{x_0}^{x} f(t)$)

Page 89 (milieu) : "dans lesquels f ne soit pas constante"

n° 5) Propriétés des intégrales

Page 90 : commencer par la formule $\int_x^x = 0$ (!) - En bas, supposer u continue.

Page 91 (lignes 2 et 3) : supprimer "de dimension finie" ; ajouter "continue" après bilinéaire.

Page 93 : mettre $\frac{1}{b-a}$ dans l'énoncé des corollaires (cas $b < a$) - Supprimer le laïus de 2 lignes (milieu) sur les limites à droite. Supprimer la fin de la prop. 4 ("se ne peut appartenir ...")

Page 94 : le corollaire sans cas limite, et en proposition (Bourbaki ne réfère plus qu'à des corollaires !)

n° 6) Forme intégrale du reste. Primitives d'ordre supérieur.

Page 94 : "$f'(a) \frac{x-a}{1!}$" (formule 15)

n° 7) Intégrales impropres

~~On étudiera ici des f continues à valeurs dans~~ $\bar{\mathbb{R}}$ - Remarquer que l'on peut donner ~~donner~~ un sens à la notion de primitive dans un intervalle I de $\bar{\mathbb{R}}$ (définie, continue, admettant $f(x)$ pour dérivée ~~....~~ pour tout x fini de I, sauf ensemble dénombrable) - Condition d'existence de la primitive g de f réglée par morceaux (déf. 5, p. 96) : si elle existe, $g(b) - g(a)$ s'appelle intégrale impropre de f (Expliquer qu'on a vu un procédé de calcul des intégrales de f réglée par les sommes de Riemann ; en décomposant en intervalles partiels on va calculer une intégrale impropre) - On supposera, dans ce n°, que $a < b$ (limites d'intégration)

- Dire que les formules 4, 5, 6, 7 sont valables. La prop 5 (p. 97) est une trivialité ~~(pas en proposition en tous cas)~~

Avant la prop 6, démontrer le lemme suivant (qui servira ~~encore~~ aussi plus tard ; "lemme des intervalles" ~~p.α~~ :

"Soient J_0 un intervalle - Pour que $\| \int_J - \int_{J'} \| \leq \varepsilon$ si $J \supset J_0$, $J' \supset$

il faut que $\| \int_K \| \leq \varepsilon$, et il suffit que $\| \int_K \| \leq \varepsilon/2$ pour tout K

tel que $K \cap J_0 = \emptyset$ "

Page 99 : lignes 5 et 8 : mettre des η au lieu des ε - Supprimer les tirets

(la def 5 montre - - - par parties d'ordre n")

Pour énoncé des prop 6 (p 98) et 7 (p. 100). ~~fonctions régl~~ dire "f réglée

dans un intervalle I de bornes a et b ; pour que $\int_a^b f(t)\,dt$ existe ..."

Abréger le laïus du milieu de la p. 100 afin de rapprocher les prop 6 et 7.

n°8) Intégrales impropres de fonctions positives

Page 101 ligne 7 : "Par abus de langage" au lieu de "par extension"

prop. génl des réglées | Texte de la prop 8 : "$0 \leq f(x) \leq g(x)$ sauf sur un ensemble dénombrable"

n°9) Intégrales absolument convergentes.

~~Supprimer "dans I" à la 3ème ligne de la def 6.~~

Corollaire (p 102) "EV topologiques - - - bilinéaire continue ..."

Page 103, ligne 7 : supprimer "bien entendu".

On demande un exercice montrant que toute fonction à variation bornée est réglée. (avec footnote VOCA à l'Intégration)

II Dérivées et intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre.

n°1) Faire passer la remarque (p. 111) au n°2 (la joindre au contre exemple du bas de la page 113) - EV topologiques dans la prop 2 p. 112.

n°2) Les 10 premières lignes sont prématurées ; dire qu'il y a 2 cumulars : intervalle non borné, convergence non uniforme, - et que le fait que l'intégrale est propre ou impropre important peu au n°2 - Après ce chapeau on fera les 2 contre exemples (pages 111 et 113)

Page 114, ligne 10 du bas : supprimer "aussi".

(15) A partir de la ligne 3 du bas de la page 114 on peut clarifier notablement la démonstration. La convergence suivant le filtre produit est équivalente à

1) Quelque soit ε, il existe J_0 compact et $M \in \mathfrak{F}$ tels que
$\| \int_{J_0} f_\alpha - \int_J f_\beta \| \leq \varepsilon$ pour $J \supset J_0$ et $\alpha \in M$, $\beta \in M$.

2) Il faut $\| \int_{J_0} f_\alpha - \int_J f_\alpha \| \leq \varepsilon$ pour $J \supset J_0$ et $\alpha \in N$ - Cela suffit (car $\| \int_{J_0} f_\beta - \int_{J_0} f_\beta \| \leq \varepsilon$ pour $\beta \in N'$, nous prendrons donc $M = N \cap N'$)

3) Transformation au moyen du "lemme des intervalles"; on obtient la condition du haut de la page 115

4) Définition de la page 116 (dire qu'on prend M indépendant de ε)

Page 116, ligne 5 du bas "convergente pour tout α dans A"

Page 117 ligne 3 du bas : "aussi" au lieu de "aussitôt"

n°3) Page 118 : espaces vectoriels normés.

Ligne 6 et suivantes : couper la phrase par un "dans A ; en effet pour tout intervalle ..."

n°4) Page 119 : E espace vectoriel normé

Page 120, ligne 3 du bas : "généralisation" au lieu de "proposition analogue"

Page 121, prop 6 : alléger le texte par un "dans les conditions de la prop 5"

Éclairer sa lanterne dans la démonstration de la prop. 6 (On va remplacer $f(t,\alpha)$ par $f(t,\alpha_0)$) - Dire, en haut de la page 122, que ça s'écrit tout seul avec la dérivée d'une fonction composée. Delsarte demande de rédiger l'exercice 3 dans le texte. Commencer alors (ligne 4, p. 122) un nouveau numéro (n°5) : "dérivée d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre"

n°5) (nouveau). Commencer la démonstration de la prop. 7 en disant que l'on va utiliser le th. 1, par l., et préciser le frebe utilisé.

Supprimer la remarque 2 page 123, ~~ainsi que la remarque 3 qui est une topinade~~. (abel !!)

n°6) Interversion des intégrations.

page 124 : E est un EV normé.

Page 125 : ajouter à la ligne 4 : "Toutefois on a le résultat suivant"

Chapitre III

Fonctions élémentaires

I Dérivées des fonctions exponentielles et circulaires.

n°1) et n°2) Commencer par les 6 premières lignes du n°2 et dire "on va voir que $f(x) = a^x$ a une dérivée ca^x, où c est évidemment $f'(0)$. Cela résulte du th. suivant" - Le th 1 doit être fait pour E normée complète. La réciproque est vraie ($f(0) = e$ et $f'(x) = cf(x)$ entraînent que f est une représentation) ; la mettre en exercice ; la mentionner dans le texte (Bas de la page 130), et dire que ça résulte aussi de la théorie des équations différentielles linéaires.

n°3) Page 132 : parler seulement de dérivée (à propos de la dérivée logarithmique) et non de dérivée à droite ou à gauche.

n°4) Page 133 prop 3 : renvoyer à la page 31 (dérivée d'un vecteur unitaire lui est perpendiculaire) - Puis la question du signe de $i\, e(x)$

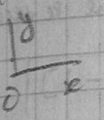
Page 134 : ne pas exercice (13) (; le faire ~~[illegible]~~ pour $a = 2\pi$ en commençant par la formule $D(\cos x + i \sin x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) + i\sin(x$ suivent les formules (14)

n°5) On demande des figures.

n°6) A remettre au point - Partir du point de vue des homomorphi

(17) Si c'est dérivable à l'origine, ça c'est partout et $g'(z) = f'(0)f(z)$. Quand on a un homomorphisme dérivable on les a tous ($(f/g)' = 0$ après changement convenable de la variable). On va étudier le plus simple de tous, c'est à dire l'homomorphisme produit $x+iy \to e^x e(\frac{y}{2\pi})$ - Vérifier que c'est dérivable à l'origine au moyen de la formule de Taylor (sans forme trigonométrique : $(1+x+\varepsilon' x)(1+iy+\varepsilon'' y) = 1+(x+iy)+\varepsilon|z|$) - Finir par les 3 lignes suivant la formule (22) page 137, et terminer là ce numéro.

Regarder les dérivées sur Ox et Oy



n°7) Propriétés de e^z - Faire d'abord les identités ($e^{z+z'}$, $e^x(\cos y + i\sin y)$, Euler) et le laïus de la périodicité - Puis les propriétés de dérivation avec les exemples de calcul de primitives.

Le Congrès, mû par l'Esprit de Bourbaki, décide de flanquer en l'air le logarithme complexe et les primitives de fonctions rationnelles ; le premier à cause de sa désagréable odeur de coupures ("Quiconque coupera une surface de Riemann la tuera"); les secondes parce ~~que c'est~~ qu'on en dit trop ou trop peu, et parce que la méthode indiquée n'est jamais employée étant plus longue que l'ordinaire (cf : concours de vitesse Cartan - Delsarte - Dieudonné au Congrès de Liffré)

Dieudonné pas content

n°10) (ancien) - On montrera directement les identités à partir du milieu de la page 143 - On ne fera que signaler en remarque le principe de permanence des identités qui sera mis en exercice (méthode
Référence dans le texte (petites [illegible])
des relations primordiales - cf : exercice 15)

Page 144 : supprimer les lignes 6 à 10.

II Développements des fonctions exponentielles et circulaires et des fonctions qui s'y rattachent

n°11) Référence annulée à la page 153, ligne 10 ; il s'agit de l'ex. 6, par 8, ch IV.

Lignes 11 et suivantes : mettre partout des $>$; aller jusqu'au terme en x^n inclus, à cause du e^x/x^n de la ligne 12 du bas

n°2) Donner les développements de sh x et ch x à la fin du n°.

n°3) Faire le développement du binôme pour un exposant m complexe

Delsarte ??

ne pas oublier le cas $R(m)=0$ où le reste (formule (20)) a une forme un peu différente (logarithme) ; écrire en général le second membre sous la forme $\left|\binom{m-1}{n} x^n \frac{m}{R(m)}\left[(1+x)^{R(m)}-1\right]\right|$ des autres limitations du reste (page 156, lignes 2 à 19) en exercice ; les trucs en petits caractères (du milieu de la page 157 à la ligne 4 du bas de la page 158) également. Mentionner la série géométrique après la formule 29 (page 157, bas)

n°4) Terminer par une remarque : on verra (ch IV) que les fonctions étudiées n'admettent pas d'autres développements en série entière que ceux donnés ici.

Il est là

Pisot promet de mettre au point un exercice sur l'irrationalité de π. Mettre en exercice le développement de ~~la~~ tg x (nombres de Bernoulli)

Projets ultérieurs

Deux Congrès ont été projetés, l'un à Paris du 18 au 23 décembre, un autre, très important, au début de juin 1948. Le programme du Congrès de décembre est :

Algèbre chap IV (Polynomes)

Fascicule de résultats de Topologie Générale

Le dictionnaire de Topologie Générale (si on l'a)

Le chap IV et les appendices du Livre Elémentaire.

On regardera éventuellement le chap IX et X de Topologie Générale

(19) (Topologies d'espaces fonctionnels) à la condition (problématique) que la contre-rédaction Chevalley arrive à temps — L'examen du chap V d'algèbre (corps commutatifs) semble exclu, faute de temps d'abord, et aussi à cause de l'absence des spécialistes Weil et Chevalley — On espère donc la réunion, au début de 1948, d'un Congrès "Américain" sur cette question (Cartan, Chevalley, Eilenberg, Koszul et Weil)

Le Méga Congrès de juin 1948 établira des projets à longue échéance qui porteront au moins sur toute la Première Partie — Le terrain sera alors déblayé, au moins en ce qui concerne la Topologie Générale et le Livre Élémentaire. Il n'en est pas de même, malheureusement, de l'algèbre où, après les Corps Commutatifs, la situation est confuse — Voici l'opinion (toute personnelle) du rédacteur de ces lignes à ce sujet

a) Il ~~croit qu'il ne~~ se demande s'il peut être question de faire toute l'algèbre au Livre II, — ~~mais~~ et non pas seulement les théorie élémentaires, et aussi ce qui est nécessaire à la Première Partie — Ceci exclurait du Livre II les corps cycliques, les anneaux locaux, les valuations, — et peut être même ~~la théorie de Galois~~, les corps finis, les extensions linéairement disjointes et autres, la décomposition primaire dans les anneaux noethériens, et pas mal de choses sur la représentation linéaire des groupes.

b) Il y a, au contraire, des choses absolument nécessaires; par ordre d'urgence : les formes quadratiques et hermitiennes, la géométrie élémentaire, les diviseurs élémentaires, les anneaux semi simples et des faits de représentation linéaire des groupes (Pour ce dernier point on attend le rapport de Godement sur les algèbres normées)

c) L'étude des groupes (et semi groupes) ordonnés, en insistant sur le

1449 (90)

rôle du lemme de décomposition (qui, d'après Cartan, ouvre de nombreuses portes, depuis l'unique factorisation jusqu'aux pré cônes convexes et l'intégration), est nécessaire.

Un projet minimum serait donc:

V Corps commutatifs (allégés) (sans les corps cycliques en tous cas, avec les corps ordonnés par les formes définies positives, et le fait que c'est algébriquement stable)

VI Formes quadratiques et hermitiennes

VII Géométrie Élémentaire

VIII Divisibilité (ou "Les relations d'ordre en algèbre") (grand)

IX Anneaux semi simples - Représentations linéaires des groupes (allégé)

Dans le cas où l'on voudrait déciderait de faire le plus d'algèbre possible dès le Livre II, on doit remarquer que

α) ~~La connaissance des formes quadratiques et hermitiennes permettra de traiter plus complètement de la représentation linéaire des groupes.~~

β) Certaines notions d'algèbre non commutative sont utiles en algèbre commutative (Radical à la Chevalley-Jacobson, extension du corps de base d'une algèbre semi simple).

Un projet maximum pourrait donc être.

V Corps commutatifs (avec les ordonnés, et peut être même les corps cycliques)

VI et VII : Inchangés.

VIII Anneaux semi simples - Algèbres simples. Corps gauches (on pourrait peut être y mettre la cohomologie des groupes, et donc les corps cycliques)

IX Représentation linéaire des groupes

X Divisibilité (allégé vers la fin. Il vaut mieux reprendre les anneaux de Dedekind par la méthode des valuations, ou, à la rigueur, par la Quasigleichheit)

XI Anneaux commutatifs noethériens (décomposition primaire, anneaux locaux, étude locale des corps valués, et peut même leur étude globale au moyen de la "product formula" d' afin d'alléger les théories des nombres et fonctions algébriques

Transmis pour communication, avec prière d'envoyer d'urgence vos observations éventuelles à CARTAN

OBSERVATIONS du CONGRES de PARIS (18-20 Janvier 1947)

sur le Chap. X de Topologie générale

Titres du § 1 : pour les n^{os} 2 et 3, on préfèrerait : "convergence uniforme sur les ensembles d'une famille" . [cf. la terminologie de la déf. 2].

P. 6, prop. 2 : référer éventuellement à la condition de séparation des espaces uniformes.

P. 7, prop.4 : modifier l'énoncé de la prop. ; "soit Φ un filtre sur $\mathcal{F}(E,F)$; pour que Φ soit convergent pour la structure $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$, il faut et il suffit qu'il soit un filtre de Cauchy pour $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ et qu'il converge pour $\mathcal{U}_s$." - Lignes 4 et 5 de la démonstration, écrire : "... tel que $(u(x),v(x))\in V$ quels que soient u et v dans M , et x dans A ; comme $u_o(x)$ ..." . Ligne 7 de la dém., supprimer "mais" ; lignes 8-9 de la dém., supprimer : "on a $(u_o,v)\in W(A,V)$ pour tout $v\in M$, ce qui démontre que ".

P. 7, théor. 1 : ligne 7 de la dém. ($1^{ère}$ ligne de la p.8), remplacer "il faut prouver" par "il suffit de prouver".

P. 8, th.2 : ligne 8 de la dém., rajouter "en vertu de la continuité de u" entre "d'autre part" et "il existe un voisinage" .

P.10, prop.6 : on demande le retour à l'ancienne rédaction (prop.4 de la rédaction antérieure) : "si un filtre ... dans un ensemble A , il converge uniformément dans l'adhérence $\bar{A}$. " A la fin de la dém., supprimer en conséquence : E = .

Question générale de la topologie déduite de la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.- On a oublié, au Chap.II (struct. uniformes), de dire que la topologie déduite de la struct. unif. borne sup. d'une famille de