La tribu n° 12 NBT 013

COMPTE-RENDU du CONGRES de STRASBOURG

(8 - 19 Juin 1946)

Présents : Cartan, Chabauty, Chevalley, Delsarte, Pisot, de Possel, Schwartz.

I - Topologie.

Les revêtements reviennent décidément en Topologie générale ; de POSSEL est chargé d'en faire une rédaction sans "chemins".

On utilisera les chemins en Topologie algèbrique quand on étudiera les divers groupes d'homotopie ; EHRESMANN rédigera un chapitre sur l'homotopie.

Il est décidé d'admettre EILENBERG au sein de Bourbaki, s'il accepte et si le groupe brésilien n'y met pas son veto. Eilenberg sera chargé de faire une rédaction de Topologie algèbrique.

II - Algèbre.

Plan du début de l'Algèbre (Chap.I exclu)

Chap. II : algèbre linéaire.
Chap. III : Algèbres ; polynomes.
Chap. IV : Corps commutatifs.

Commentaire explicatif.- Deux objections contre l'actuel ~~xxxxxxxxx~~ Chap. II :

1°- la considération systématique des modules (au lieu des espaces vectoriels) alourdit beaucoup l'exposition sans grand bénéfice immédiat. Les modules, dont personne ne conteste l'importance, feront l'objet d'un paragraphe ultérieur, probablement dans le Chapitre de divisibilité.

2°- pour les applications aux espaces vectoriels topologiques, la théorie de la dualité, telle qu'elle est exposée dans la dernière rédaction du chap.II, est inutilisable, car on ne considère alors qu'une partie du dual algèbrique.

En conséquence, il est décidé de procéder à un remaniement du Chapitre II. Tout d'abord, ce Chapitre sera précédé de :

Prolégomènes.- Groupes abéliens à opérateurs : sommes (infinies), sommes directes (infinies), sous-groupes supplémentaires (isomorphie du supplémentaire et du quotient) : toutes choses qui auraient dû trouver leur place au Chap. I .- En outre : axiomatique Cartan servant de fondement à la notion de système de générateurs et de systèmes libres, avec démonstration des théorèmes qui en découlent. Application immédiate : théorèmes sur les groupes (à opérateurs) semi-simples.

...

Plan du Chapitre II -

§ 1.- Espaces vectoriels.

1 - Espaces vectoriels : définition, exemples.
2 - Sous-espaces, quotients, produits.
3 - Combinaisons linéaires, familles libres, bases, dimension.
4 - Codimension des sous-espaces d'un espace vectoriel.

§ 2.- Applications linéaires : inchangé (mais en parlant du rang).

§ 3.- Dualité.

1 - Formes bilinéaires.
2 - Espaces en dualité ; orthogonalité.
3 - Bases duales pour la dimension finie. Applications aux espaces de dimension infinie.
4 - Transposée d'une application linéaire ; rang.
5 - Equations linéaires.

§ 4.- Changement du corps de base.

§ 5.- Matrices (à peu près inchangé).

Les applications semi-linéaires sont définitivement foutues en l'air, malgré l'opposition de Charles.

L'ex-Chapitre III (Algèbre multilinéaire) : dont la nécessité ne s'impose pas pour traiter des polynomes et des corps commutatifs, est repoussé à des temps meilleurs (ou pires, dit Chevalley), dans le vague espoir d'un accord futur. On envisage de joindre les tenseurs au Chapitre consacré à la représentation des groupes ; on a même envisagé de les éliminer entièrement !

Nouveau Chapitre III : (Algèbres, polynomes).

On y reporte le paragraphe sur les algèbres, expulsé du chap.II.

Définition des polynomes : on désire pouvoir parler des polynomes en x , et des polynomes en y , sans qu'ils constituent le même anneau. Après deux jours de discussions, l'accord s'est fait sur la définition à choisir (Voir la toute prochaine rédaction de Chevalley).

On ne considèrera pas de polynomes à coefficients dans un anneau d'intégrité seront considérés comme polynomes à coefficients dans le corps des quotients.

Les anneaux de polynomes à une infinité de variables sont abandonnés ; ils ne servent plus à rien (cf. démonstration de Chevalley du théorème de Steinitz, vaguement modifiée par Cartan).

La division euclidienne des polynomes est balancée, et renvoyée à la divisibilité ; il paraît en effet saugrenu de la faire passer avant la division euclidienne des entiers. Quand on fera la division des polynomes, ne pas oublier de noter que le quotient et le reste de la division de f par g ont leurs coefficients dans l'anneau engendré par les quotients des coefficients de f par le coefficient dominant de g..

Les séries formelles sont expédiées dans le chapitre (ou paragraphe ?) des anneaux locaux. La raison principale est que les séries formelles sont des <u>schémas de calcul</u> dans les anneaux locaux.

<u>Différentielles et dérivées des polynomes</u>.- On décide de supprimer les différentielles, parce qu'on n'a jamais à s'en servir.

Taylor pour une variable paraît indispensable ; l'utilité de Taylor pour plusieurs variables est controversée.

La dérivation des polynomes sera traitée comme cas particulier de la dérivation dans les algèbres ; gros avantage : démonstration de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$!

<u>Plan du nouveau Chap.III</u> -

§ 1 - Algèbres ; algèbre d'un monoïde (cf ancien Chap.II)

§ 2 - Définition d'un polynome ; fractions rationnelles. Eléments algèbriquement indépendants, relations ; degré ; substitution dans un polynome.

§ 3 - Fonctions polynomes, racines d'une équation, prolongement des identités algèbriques.

§ 4 - Dérivations ; dérivées des polynomes, Taylor, Leibniz.

<u>Le chapitre sur la divisibilité</u> est rejeté après les corps commutatifs, et peut-être après beaucoup d'autres choses. Chevalley tient à la distinction entre problèmes <u>algèbriques</u> et problèmes <u>arithmétiques</u> (ces derniers englobant : modules, divisibilité, anneaux locaux). Il peut d'ailleurs être intéressant de grouper ensemble, et <u>assez tard</u> dans le Livre d'Algèbre, les questions qui font intervenir <u>à la fois</u> les structures algèbriques et les structures d'ordre. A ce titre, les <u>corps quasi-réels</u> et la <u>divisibilité dans les extensions algèbriques</u> seront expulsés du Chapitre des corps commutatifs.

<u>N-B</u>.- Pour faire la théorie des <u>extensions algèbriques</u> dans les corps commutatifs, on se passe aisément de la division des polynomes, grâce à l'axiome de choix (idéal maximal !), ce qui ne sera pas pour déplaire à Dieudonné !

<u>Nouveau Chapitre IV (Corps commutatifs)</u>

La rédaction Chevalley a été étudiée en détail, compte tenu des observations du Congrès de juin-juillet 1945. Delsarte est chargé d'une nouvelle rédaction du Chapitre.

<u>Chapitre N (N = ?) : Formes quadratiques et hermitiennes.</u>

On envisage les éléments de plan suivants, pour <u>une partie</u> de ce Chapitre.

1 - Etude d'une forme quadratique (corps commutatif), puis hermitienne (y compris quaternionienne). Rang. Loi d'inertie.

2 - Réduction simultanée de deux formes hermitiennes, dont l'une est définie positive (corps commutatifs ; au concours pour les quaternions !) .

3 - Formes bilinéaires alternées : réduction.- Réduction simultanée d'une telle forme et d'une forme définie positive.

4 - Diverses espèces de groupes linéaires ; décomposition du groupe linéaire général.

5 - (?) - Variétés linéaires sur une quadrique, sur une ~~dxxx~~ variété définie par une forme hermitienne.

III - En outre, il a été posé quelques jalons du Livre des variétés différentiables et du Livre des groupes de Lie :

Variétés différentiables.-

On a essayé de faire une première classification des matières à traiter :

1°- Problèmes locaux, de nature plutôt algèbrique, concernant les formes différentielles et les systèmes différentiels (équations aux variations, formes invariantes, "calcul des variations",etc...)

2°- Problèmes semi-locaux : variétés caractéristiques d'un système de Pfaff, condition d'intégrabilité complète de Frobenius ; également : points critiques.

3°- Problèmes globaux.- En vrac : intégrales de formes différentielles, triangulabilité, de Rham, parallélisme, champs de vecteurs, théorèmes d'immersion.

On a ensuite longuement discuté des définitions initiales. On est arrivé à une définition générale des espaces à structure locale ou semi-locale, définition qui s'applique en particulier aux espaces fibrés. La voici :

On se donne un espace topologique A , et une famille $\mathcal{U}$ d'ensembles ouverts de A telle que :

1°- toute réunion d'ensembles de $\mathcal{U}$ est un ensemble de $\mathcal{U}$;

2°- toute intersection finie d'ensembles de $\mathcal{U}$ est un ensemble de $\mathcal{U}$ (donc $A \in \mathcal{U}$).

On se donne en outre, pour chaque $U \in \mathcal{U}$, un ensemble $\mathcal{F}_U$ d'homomorphismes de U dans A , telle que :

1°- si U est réunion de U_i $(U_i \in \mathcal{U})$, la condition pour qu'un homéomorphisme φ de U dans A appartienne à $\mathcal{F}_U$ est que, pour tout i, sa restriction à U_i appartienne à $\mathcal{F}_{U_i}$;

2°- pour tout $U \in \mathcal{U}$, et tout $\varphi \in \mathcal{F}_U$, on a $\varphi(U) \in \mathcal{U}$, et $\varphi^{-1} \in \mathcal{F}_{\varphi(U)}$; en outre, si $\psi \in \mathcal{F}_{\varphi(U)}$, alors $\psi \circ \varphi \in \mathcal{F}_U$.

[On dira que les homéomorphismes des divers ensembles $\mathcal{F}_U$ constituent un pesudo-groupe de transformations de A ; on aura une "structure locale" si $\mathcal{U}$ contient <u>tous</u> les ouverts de A, sinon une "structure semi-locale"].

Cela posé, pour définir, sur un espace topologique E, une structure de l'espèce précédente, on définit, pour chaque $U \in \mathcal{U}$, un ensemble $\mathcal{G}_U$ d'homéomorphismes de U dans E (ensemble $\mathcal{G}_U$ qui peut être vide ! de manière que :

1°- si U est réunion de U_i $(U_i \in \mathcal{U})$, la condition pour qu'un homéomorphisme g de U dans E appartienne à $\mathcal{G}_U$ est que, pour tout i, la restriction de g à U_i appartienne à $\mathcal{G}_{U_i}$ [principe de localisation] ;

2°- (est-ce indispensable ?) tout point de A possède un voisinage ouvert $U \in \mathcal{U}$ tel que $\mathcal{G}_U$ ne soit pas vide ;

3°- l'ensemble des <u>ouverts</u> V de E tels qu'il existe un $U \in \mathcal{U}$ et un $g \in \mathcal{G}_U$ tels que $g(U) = V$, constitue un <u>recouvrement</u> de E ; et, pour un tel V, les homéomorphismes g^{-1} se déduisent de l'un d'eux (homéomorphisme de V sur un $U \in \mathcal{U}$) par composition avec les $\varphi \in \mathcal{F}_U$.

<u>Exemple</u> : si A est le <u>produit</u> de 2 espaces topologiques B et F, si les $U \in \mathcal{U}$ sont les ensembles $u \times F$ (où u est un ouvert quelconque de B), et si enfin $\mathcal{F}_U$ désigne l'ensemble des automorphismes de $U = u \times F$ définis par

$$(x,y) \longrightarrow (x, s_x(y))$$

[où $x \in B$, $y \in F$, s_x appartenant, pour tout $x \in B$, à un groupe donné G d'automorphismes de la <u>fibre</u> F ; et cela de manière que $s_x(y)$ soit continu en x et y sur l'espace $B \times F$], alors E est un <u>espace fibré</u> ayant B comme espace de base, F comme fibre, et G comme groupe d'automorphismes de la fibre.

- Pour en revenir aux <u>variétés différentiables</u>, il paraît préférable de s'en tenir d'abord à une définition plus rapide, mettant en évidence le rôle joué, dans ce cas, par les fonctions <u>numériques</u>. Voici cette définition :

Espace topologique E ; à chaque <u>ouvert</u> V de E est associée une famille $\mathcal{H}_V$ (qui peut être vide) de fonctions numériques, de manière que soient satisfaites les deux conditions suivantes :

1°- si V est une réunion de V_i , la condition pour qu'une fonction numérique, définie dans V , appartienne à $\mathcal{H}_V$ est que, pour tout i , la restriction de f à V_i appartienne à $\mathcal{H}_{V_i}$;

2°- pour tout point x de E , et pour tout voisinage ouvert V assez petit de x , existe un homéomorphisme φ de V sur un ouvert de R^n , qui transforme $\mathcal{H}_V$ en l'ensemble de toutes les fonctions différentiables dans $\varphi(V) \subset R^n$.

L'espace vectoriel T_x , tangent en x , est alors défini comme l'espace des fonctions linéaires $f \longrightarrow \xi(f)$ définies sur l'ensemble des f des $\mathcal{H}_V$ pour tous les V tels que $x \in V$, et telles que

si $f = F(f_1,\dots,f_n)$, alors $\xi(f) = \sum_i \frac{\partial F}{\partial f_i} \xi(f_i)$.

L'ensemble des vecteurs ξ des différents T_x définit la "variété prolongée" : on y définit la topologie suivante : $\lim \xi = \xi_0$ si $\lim x = x_0$ et si, pour toute f d'un V contenant x_0 , $\xi(f)$ a pour limite $\xi_0(f)$. On vérifie que cet espace topologique est fibré, et est une variété $(n-1$ fois différentiable si la variété E l'est n fois) .

Groupes de Lie.-

Il est établi un plan du Chapitre I de ce Livre :

Définition :

Algèbres de Lie ; formes différentielles invariantes.
Sous-algèbre $\longleftrightarrow$ idéaux différentiels $\longleftrightarrow$ sous-groupes.
Espaces homogènes.
Homomorphismes $\longleftrightarrow$ homomorphismes $\longleftrightarrow$ homomorphismes.
Paramètres canoniques ; représentation adjointe.
Idéaux $\longleftrightarrow$ sous-algèbres différentielles $\longleftrightarrow$ sous-groupes distingués.

Calcul des formes invariantes à l'aide des paramètres canoniques [il aura fallu mettre la définition des exponentielles de matrices dans le paragraphe du Chap. IX (Top. gén.) consacré aux anneaux normés] .

Tout ce qui précède doit être traité pour les groupes à paramètres complexes en même temps que pour les groupes à paramètres réels . Ce qui suit ne vaut que pour les groupes à paramètres réels, savoir :

Théorème : tous les homomorphismes continus sont analytiques ;
Théorème sur les sous-groupes fermés, et généralisations.

Remarque : la théorie ci-dessus devra être illustrée au fur et à mesure par des exemples de groupes classiques.

124

IV.- Décisions diverses.

1°- Dans le Livre des Ensembles, Chap. des entiers (ainsi que dans la 2è édition du Chap.I d'Algèbre), faire une convention pour la notation a^{bc} .

2°- Quand, dans un Chapitre, ou dans un paragraphe, un mot, est systématiquement utilisé dans un sens restreint (ex : corps, au lieu de corps commutatif, dans le Chap. des corps commutatifs), il convient que cet emploi soit signalé dans l'Index à la fin du fascicule.

Engagements du Congrès de STRASBOURG

CARTAN - rédige la nouvelle (et dernière ?) version du Chap.II d'Algèbre qui devra être prête pour le prochain Congrès de décembre.
- rédige un résumé du bloc local des variétés différentiables : technique des formes différentieels, systèmes différentiels, variations, etc...

(ou PISOT?)CHABAUTY - prépare une nouvelle rédaction du Chapitre "Divisibilité"

CHEVALLEY - rédige la nouvelle version du Chapitre "Polynomes" d'Algèbre.
- prépare une rédaction de l'Algèbre multilinéaire et algèbre extérieure.
- potasse bourbachiquement les Invariants intégraux de papa Cartan.

DELSARTE - rédige le Chapitre des Corps commutatifs.

EHRESMANN - promet une rédaction de l'Homotopie, et un rapport sur la topologie des variétés différentielles et des espaces fibrés.

EILENBERG - prépare la Topologie Algèbrique.

de POSSEL - rédige le Chapitre des Revêtements.

(ou CHABAUTY?) PISOT - rédige le Chap. I des Groupes de Lie.

On suppose que DIEUDONNÉ poursuit son travail intensif de rédaction, et que WEIL prépare un rapport sur la Géomètrie Algèbrique.

-=-=-=-=-=-=-=-