LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique)

N°11 - 15 Juillet 1945

COMPTE-RENDU DU CONGRÈS DE PARIS (22 Juin-4 Juillet)

Nos lecteurs savent comment, après de laborieuses négociations, les Nations Unies ont enfin reconnu officiellement Bourbaki, et mis à sa disposition un bombardier quadrimoteur pour lui permettre de tenir son premier Congrès intercontinental. Chargé de Weil et de café, l'appareil traversa sans encombre l'Océan pour déposer sa précieuse cargaison à Paris le 20 Juin ; aussitôt alertés, les membres du Congrès arrivaient dans la capitale, et les discussions pouvaient commencer dès le 22 . On ne déplora que l'absence d'Ehresmann, sous le vain prétexte de copies à corriger ; à titre de blâme, le Congrès lui interdit le feu et l'eau pour l'hiver prochain. Par contre, mû par l'Esprit de Bourbaki, on vit arriver Pisot, qui n'avait pu être touché faute d'adresse connue ; le Congrès lui fit un accueil enthousiaste.

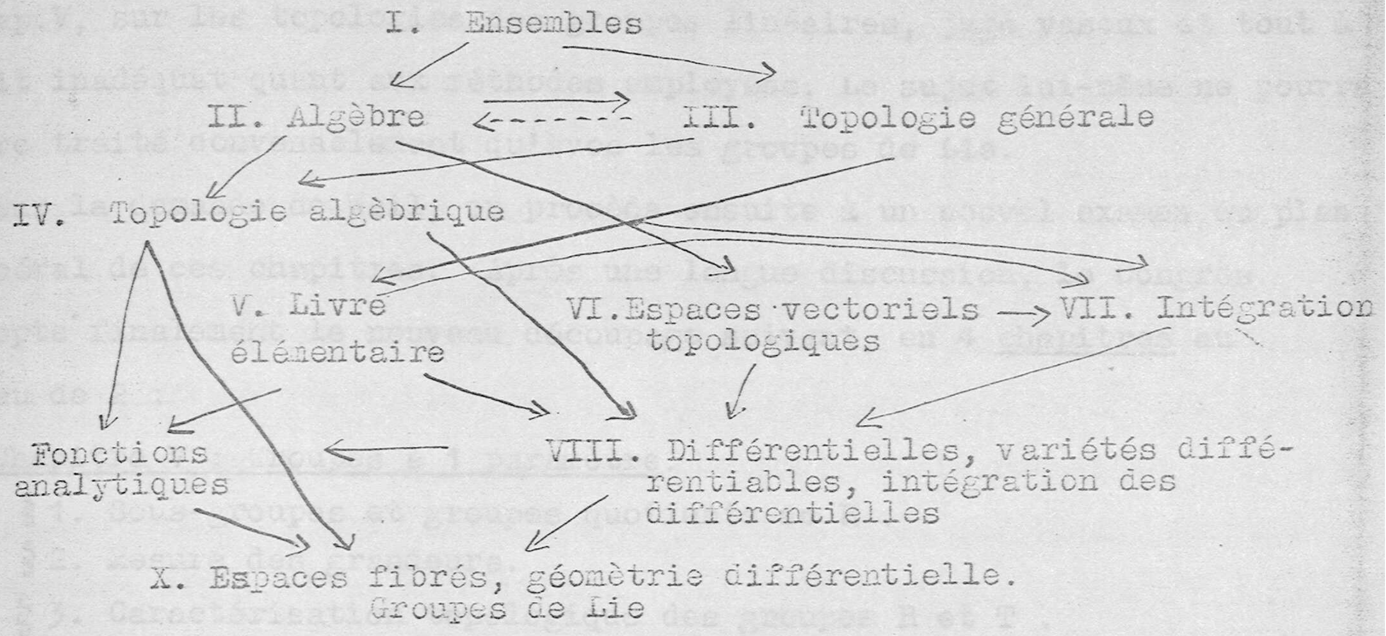
Afin de ne pas être en reste vis-a-vis des autres chefs d'Etat, le Congrès décide tout d'abord, à l'unanimité, d'élever Bourbaki au grade de généralissime des armées mathématiques. On sait qu'en raison de son grand âge, notre illustre Maître est affligé d'une légère surdité : " De quoi s'agit-il ? On n'y comprend rien. Ce n'est pas ici le lieu de déconner à pleins tubes " déclara-t-il tout d'abord à la délégation chargée de lui annoncer cette grande nouvelle. Mais le malentendu fut vite dissipé, et pour célébrer l'évènement, Bourbaki fit aussitôt tirer 240 salves de corps compacts bourrés de noyaux de groupes, nomma dix nouveaux tabous généraux, et, dans un ordre de jour adressé à tous ses fidèles, annonça solennellement, qu'il ne procéderait plus désormais que du généralissime au particulier. L'absence de notre dessinateur officie retenu à Londres par la défense nationale, nous empêche malheureusement de présenter à nos lecteurs l'image du Maître revêtu de son nouvel uniforme.

Le Congrès fut marqué par une heureuse innovation, la présence assidue de deux cobayes normaliens, Samuel et Thom, soigneusement sélectionnés par Cartan pour leur réceptivité notoire au virus bourbachique. Le Congrès s'est réjoui de voir refleurir en ce jeune sang l'enthousiasme des premières réunions bourbachiques ; leur présence a parfois constitué un efficace contrepoids aux tendances conservatrices de certains membres plus rassis, et permis entre autres de sauver in extremis les espaces vectoriels de dimension infinie, menacés de démembrement sans condition. Sur un plan plus matériel, ils participèrent activement à la confection journalière du café brésilien destiné à ranimer les forces déclinantes des fidèles viellissants ; ils surent déjouer les attentats perfides perpétrés du haut des toits par de vils suppôts des ennemis de la vraie Mathématique ; enfin, les précieux documents bourbachiques trouvèrent un asile sûr dans leur thurne vouée au Maître, ornée de son portrait, et protégée par la flamboyante devise platonicienne : "Μηδεις 'αβουρβακιστικος 'εισιτω".

Le Congrès fut essentiellement consacré à la discussion de la fin de la Topologie générale et des chapitres II à VI de l'Algèbre ; on en trouvera le détail ci-dessous, et on verra comment il y a lieu d'espérer que 4 fascicules pourront être donnés à l'impression avant le prochain Congrès intercontinental (fixé à l'hiver 1946-47). De sourdes tentatives de diversion furent menées par Cartan sur les arrières de Bourbaki, dans le but sournois d'empêtrer le Congrès dans les filets de sa Logique ; elles furent heureusement déjouées. Un essai de discussion sur l'Intégration ne réussit pas davantage ; il apparaît que le diable occupe toujours en cet endroit des positions en hérisson fortement défendues. On attend le secours d'Eilenberg pour aider à l'accouchement de la Topologie combinatoir

94

Enfin, signalons que Dieudonné ne manqua pas d'exécuter son numéro rituel du Plan général, réduit cette fois à la 1ère partie, mais agrémenté d'une variante, le fil conducteur ; le résultat est le suivant :



N-B. A titre de prime, nous offrons en Appendice à nos fidèles lecteurs, le sonnet suivant à la gloire de Bourbaki, dû à la plume du cobaye Samuel :

Le Filtre

O puissant, ô formel, ô toi clair Bourbaki,
Vas-tu nous déchirer dans un accès de crise
Le Goursat filandreux, miroir de l'Analyse
Défenseur attardé d'un passé qui a fui.

La suite d'autrefois se croyait l'infini,
Inutile, et que sans la comprendre utilise
Le maladroit conscrit, lui que Valiron grise
De son cours ténébreux qui distille l'ennui.

Ignorant les secrets de la Topologie
A l'espace infligée, et toi qui l'étudies
Il nage dans l'erreur où son langage est pris.

Il contemple étonné, comme enivré d'un philtre,
L'adhérence, un manteau qu'il n'a jamais compris,
Que vêt, sur un compact, immobile, le FILTRE.

Livre III (Topologie générale). a) Chap.V et VI actuels : Le Congrès décide tout d'abord la suppression pure et simple du § 5 de l'actuel chap.V, sur les topologies des groupes linéaires, jugé vaseux et tout à fait inadéquat quant aux méthodes employées. Le sujet lui-même ne pourra être traité convenablement qu'avec les groupes de Lie.

Sur la demande de Weil, on procède ensuite à un nouvel examen du plan général de ces chapitres. Après une longue discussion, le Congrès adopte finalement le nouveau découpage suivant, en 4 chapitres au lieu de 2 :

Chapitre V : Groupes à 1 paramètre.

§ 1. Sous-groupes et groupes quotients de R .
§ 2. Mesure des grandeurs.
§ 3. Caractérisation topologique des groupes R et T .
§ 4. Fonctions exponentielles et logarithmiques.

Chapitre VI : Espaces numériques et espaces projectifs.

§ 1. L'espace numérique R^n .
§ 2. Distance euclidienne ; boules et sphères.
§ 3. Espaces projectifs réels.

Chapitre VII : Les groupes additifs R^n.

§ 1. Sous-groupes et groupes quotients de R^n .
§ 2. Représentations continues de R^n et de ses groupes quotients.
§ 3. Sommes infinies dans les groupes R^n .

Chapitre VIII : Nombres complexes.

§ 1. Nombres complexes ; quaternions.
§ 2. Mesure des angles.
§ 3. Produits infinis de nombres complexes.
§ 4. Espaces numériques et espaces projectifs complexes.

Il est bien entendu qu'on ne revient pas sur le détail du texte actuel, qui reste inchangé aux menues retouches près qu'exigera le nouvel ordre des matières. Une fois ces retouches faites, le fascicule sera donc livré à l'impression, au plus tard en Octobre. Comme d'habitude, les Notes historiques seront discutées ultérieurement, lors du petit Congrès qui se tiendra en Décembre 1945 à Nancy ; Weil et Chevalley enverront leurs observations à ce Congrès par correspondance.

b) Chap.VII et VIII actuels. Ces chapitres deviennent donc les chap.IX et X dans le nouveau plan.

Le chap.IX (Utilisation des nombres réels en Topologie générale) est adopté à de faibles modifications près ; les plus importantes de ces dernières sont la suppression de l'Appendice (on conservera en exercice la détermination des valuations sur Q), la suppression du n°1 du § 3 (écarts invariants sur un groupe non abélien), et le remaniement du § 5 (espaces de Baire) conformément à un papier Cartan qui réduit au strict nécessaire les notions introduites. Ces modifications ne sont pas assez notables pour nécessiter un nouvel etat du chapitre, qui ne sera donc plus discuté en Congrès.

Le chap.X (ancien chap.VIII, Topologies des espaces fonctionnels) est dans un état beaucoup moins satisfaisant. Le § 1 est adopté avec de légères simplifications d'exposé (notamment dans la convergence uniforme locale) ; le § 2 (ensembles équicontinus) est jugé acceptable pour le fond, mais de forme confuse, et Cartan est chargé d'un nouveau plan de ce § ; le § 3 est à redébrouiller entièrement, et est confié à Weil, qui enverra une nouvelle rédaction d'ici la fin de l'année ; enfin, le § 4 est réduit au th. de Weierstrass, au th. sur l'approximation des fonctions continues sur un produit de compacts et à leurs conséquences ; le reste est réparti entre les §§ 1 et 2 , à l'exception du th. de Dini, rejeté dans l'Intégration.

Une fois parvenus les §§ rédigés par Cartan et Weil, une nouvelle rédaction d'ensemble du chapitre sera tirée, et discutée le plus tôt possible, afin de pouvoir donner le fascicule à l'impression avant le Congrès de l'hiver 1946-47 .

Livre II (Algèbre). A) Chap. II (Algèbre linéaire). La rédaction actuelle (état 4) est complètement remaniée après confrontation avec la contre-rédaction Chevalley. On adopte le nouveau plan suivant :

§ 1. Modules.

§ 2. Applications linéaires.

§ 3. Structure des espaces vectoriels.

§ 4. Dualité dans les espaces vectoriels.

§ 5. Restriction du corps d'opérateurs.

§ 6. Matrices.

§ 7. Algèbres.

Détail : § 1 : 1. Définition des modules et des espaces vectoriels (n° inchangé). 2. Sous-modules et modules quotients (n° inchangé). 3. Produit de modules (n° inchangé). 4. Annulateurs (on ne conserve que la définition des annulateurs, et les 6 premières lignes de la p. 11). 5. Combinaisons linéaires (structure du sous-module d'un module unitaire engendré par une partie donnée ; en particulier structure d'un module monogène. 6. Somme et somme directe de sous-modules (ce qui est fait sur la somme directe reste sensiblement inchangé, seul le 3^{e} alinéa de la p. 17 disparaît). 7. Systèmes libres. Bases (la déf. du système libre (a_ι) est changée : $\sum \lambda_\iota a_\iota = 0$ entraîne $\lambda_\iota = 0$ pour tout ι. Les seules bases considérées sont donc les "bases régulières" de l'ancienne rédaction. Comme cas particulier des systèmes libres, élément libre (ancien élément régulier), puis définition des modules réguliers).

§ 2 : 1. Applications linéaires (n° inchangé). 2. Applications linéaires d'un module quotient (n° 3 actuel, mieux rédigé). 3. Applications linéaire dans une somme directe (se borner au cas fini, commencer par les applications d'un module quelconque dans une somme directe, puis les applications d'une somme directe dans une somme directe). 4. Endomorphismes d'un modul (n° 5 actuel inchangé). 5. Applications semi-linéaires (en petites lettres ; donner tout de suite la définition, puis des exemples, et se ramener aux applications linéaires : une application semi-linéaire est composée d'un di-isomorphisme et d'une application linéaire).

§ 3 : 1. Caractérisation d'une base = système libre maximal = système de générateurs minimal. Existence de la base et théorème d'échange (une seule prop., correspondant à la prop.11 du § 1 actuel). Corollaire: tout sous-espace admet un supplémentaire ; cas où le supplémentaire a une base finie. 2. Espaces vectoriels de dimension finie : s'il y a une base de n éléments, toute autre base a n éléments (récurrence sur n) Dimension. Corollaires : tout espace de dimension n est isomorphe à K^n ; un système libre de $p < n$ éléments n'engendre pas l'espace ; tout système libre a au plus n éléments, c'est une base s'il a n éléments ; cor. 2 de la p.27. Rang d'une application linéaire (n°2 du § 2 actuel).

§ 4.: 1. Formes linéaires, espace dual, forme bilinéaire fondamentale, bidual. 2. Eléments orthogonaux ; sous-espace orthogonal à un sous-espace de E (resp. de E^*) ; suppression de la notation $M^{\perp}$. 3. Dual d'un espace quotient ; dual d'une somme directe finie. 4. Formes coordonnées ; bases duales (cas fini) ; bi-dualité des espaces de dimension finie. 5. Propriétés des sous-espaces orthogonaux. Th.1 : si V a dans E un supplémentaire de dimension p , l'orthogonal de V est de dimension p . Hyperplans. Tout sous-espace de E est intersection d'hyperplans. Th.2 : si V' dans E^* est de dimension p , l'orthogonal de V' a un supplémentaire de dimension p . 6. Equations linéaires énoncer en proposition la détermination de toutes les solutions d'une équation lorsqu'on en connaît une ; donner comme ex. de 3^e espèce un système d'équations différentielles linéaires. On supprime la résolutio "par substitutions successives". 7. Transposée d'une application linéai

§ 6 : 1. Matrices sur un ensemble (uniquement matrices <u>finies</u>). 2. Matrices sur un anneau et applications linéaires. 3. Produit de matrices. 4. Matrices carrées. 5. Transposée d'une matrice ~~sur un corps~~ (reprendre la rédaction, en donnant d'abord la définition, puis le lien avec la transposée d'une application). 6. Rang d'une matrice sur un corps. 7. Application aux équations linéaires. 8. Changement de base (suivre la rédaction Chevalley). 9. Matrices équivalentes. 10. Matrices semblables. 11. Matrice d'une application semi-linéaire.

§ 5 : 1. Restriction du corps des scalaires à un sous-corps ; prop.14 e 15 de la p. 32 ; application aux équations linéaires (prop.14 de la p.64 2. Modules réguliers sur un anneau d'intégrité : immersion dans un espac vectoriel sur le corps des quotients (th. de Chevalley). 3. ~~Formes linéaires et dualité sur un module régulier (rapports avec la dualité sur l'espace vectoriel correspondant~~).

§ 7 : Le § 4 actuel est inchangé ; y rajouter l'algèbre infinie d'un monoide S tel que dans S tout élément u ne puisse se représenter que d'u nombre fini de manières comme composé de deux éléments (application : séries formelles de Dirichlet, en prenant pour S le monoide multiplicatif N^*). Application de l'algèbre d'un monoide : passage d'un groupe abélien à opérateurs quelconque à un module, en considérant le monoide libre engendré par les opérateurs, puis l'algèbre sur Z de ce monoide comme anneau d'opérateurs.

La rédaction du chap.II suivant ce nouveau plan sera discutée au Congrès de Décembre 1945, Weil et Chevalley envoyant leurs observations par correspondance ; sauf imprévu, elle doit être ensuite livrée à l'impression.

b) Chap.III (Algèbre multilinéaire). D'une façon générale, la rédaction actuelle est jugée très satisfaisante pour un état #3, et il semble qu'elle puisse être publiée rapidement en gardant le même plan, avec quelques retouches dont voici les plus notables :

§ 1 : La prop.5 est supprimée, son corollaire maintenu en petits caractères. Le n°4 (produit tensoriel d'un nombre quelconque de modules) est considérablement abrégé, en laissant au lecteur le soin de formuler la plupart des énoncés. Aux n^{os} 5 et 6, on se borne au cas n=2 ; au n°6, la dualité ne se fait que sur les corps ; il en est de même pour les tenseurs. Avant l'algèbre tensorielle, insérer un n° sur les matrices considérées comme tenseurs mixtes et la définition invariante de la trace comme tenseur contracté (cf. exerc.4).

§ 2 : Alléger la rédaction du n°2 ; la prop.3 est supprimée, ainsi que le n°3 tout entier.

§ 3 : Le § est réduit à la notion de formes alternées et de l'antisymétrisation des tenseurs et des formes, avec la prop.2 sur l'identité des formes alternées et antisymétrisées, et il est fondu avec le § 4, qui devient § 3.

§ 4 (ex-5). On adopte les notations det(u), det(X). Après la prop.1, échange simultané des lignes et des colonnes. Puis déterminants d'une matrice dont les deux ensembles d'indices sont équipotents mais <u>non identiques</u>. La matrice $\overset{p}{\bigwedge} \underline{X}$ et la prop.4 en exercices. Développement de Laplace supprimé, on ne conserve que le développement par rapport à une colonne. La prop.12 est reportée immédiatement après la prop.5. Le calcul des relations de Grassmann est supprimé.

§ 5 (ex-6). La prop.1 est supprimée. Le produit intérieur se fera en utilisant l'isomorphisme entre p-vecteurs et (n-p)-formes, sauf si Cartan sait rédiger son effroyable fourbi de contraction en une 1/2 page. L'adjointe et les relations de Jacobi sont rejetés en exercices.

si possible, la nouvelle rédaction tenant compte de ces remaniements sera discutée en décembre 1945, sinon à Pâques 1946, en vue d'impression immédiate.

c) Chap.IV, V et VI. Le Congrès examine assez rapidement ces 3 chapitres (surtout V et VI) et détermine les grandes lignes des nouvelles rédactions qui devront en être faites pour être discutées au Congrès de l'hiver 1946-47 .

Chap.IV (Polynomes et fonctions polynomes).

§1. Polynomes et séries formelles. Polynomes d'un nombre quelconque (fini ou non) d'indéterminées ; sur un anneau d'intégrité, ils forment un anneau d'intégrité. Division euclidienne des polynomes à une indéterminée. Séries formelles à un nombre fini d'indéterminées (termes à exposants $\geqslant 0$ seulement) ; sur un anneau d'intégrité, elles forment un anneau d'intégrité. Substitution de séries formelles dans une série formelle .

§2. Fonctions polynomes. Opérateurs polynomes sur des éléments permutables d'une algèbre (en nombre quelconque). Fonctions polynomes sur une algèbre commutative. Racines d'un polynome à une indéterminée sur un anneau d'intégrité ; formule d'interpolation de Lagrange. Fonctions polynomes sur un anneau d'intégrité à une infinité d'éléments.

§3. Fractions rationnelles et fonctions rationnelles. Fractions rationnelles sur un corps commutatif, à un nombre quelconque d'indéterminées. Cas particulier des séries formelles à une indéterminée, caractérisation de leur corps des fractions (séries commençant par un terme d'exposant < 0) ; en particulier, développement en série formelle d'une fraction rationnelle à une indéterminée. Fonctions rationnelles d'un nombre quelconque de variables.

§ 4. Dérivées des polynomes et des séries formelles. On ne définit que la dérivée première (dérivées partielles pour les séries formelles à plusieurs indéterminées). Dérivée d'une somme, d'un produit, d'une série obtenue par substitution de séries dans une série ; dérivée d'une fraction rationnelle. Critère de simplicité d'une racine d'un polynome à une indéterminée.

Chap.V (Divisibilité).

§ 1. Groupes et semi-groupes ordonnés. Conserver des deux premiers §§ actuels ce qui est nécessaire pour la théorie de la divisibilité, et faire aussi les propositions correspondantes (celles qui marchent) pour les semi-groupes ordonnés où inf(x,y) existe et satisfait à inf(x+z,y+z) = z+inf(x,y) .

§ 2. Divisibilité dans les anneaux arithmétiques et les anneaux principaux. Conserver le plan du § 3 actuel, en supprimant toutes les généralités sur les idéaux.

§ 3. Divisibilité dans l'anneau des entiers rationnels et dans les anneaux de polynomes. Conserver le plan du § 4 actuel ; supprimer ~~xx~~ l'algorithme d'Euclide. Ajouter la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Rejeter en exercices les alternants et la décomposition des polynomes homogènes.

§ 4. Modules de type fini sur un anneau principal. Garder la méthode Chevalley pour les diviseurs élémentaires. Essayer de faire d'abord les modules indécomposables, puis l'unicité de la décomposition en modules indécomposables, et enfin seulement l'existence de cette décomposition. Le th. de Heger-Smith est supprimé.

§ 5. Réduction d'une matrice sur un corps commutatif. Le plan actuel est adopté en principe. Supprimer l'identité des polynomes caractéristiques de AB et de BA (lidentité des traces aura été faite au chap.III).

§ 6. Anneaux de Noether. Weil enverra un plan de ce § , contenant ce qui est indispensable pour la Géomètrie algèbrique, notamment les théorèmes de Krull et Zariski.

Chap. VI (Corps commutatifs).

§ 1. Caractéristique. Corps premiers. Distinguer l'idéal caractéristique ~~[illegible]~~(p), et le nombre caractéristique ~~[illegible]~~ qui est p si $p > 0$, et 1 si $p = 0$.

§ 2. Extensions transcendantes. Indépendance algèbrique. Systémes algèbriquement libres. Extensions transcendantes pures. Toute extension est extension algèbrique d'une extension transcendante pure. Degré de transcendance.

§ 3. Extensions algèbriques. Extensions algèbriques finies ; extensions algèbriques simples. Corps linéairement disjoints (pour les §§ 2 et 3, ainsi que le § 5, Weil enverra les résultats exposés dans son livre de Géomètrie algèbrique, ainsi que ceux de Zariski).

§ 4. Extensions algèbriquement fermées. Le plan du § reste inchangé.

§ 5. Isomorphismes d'extensions algèbriques. On garde sensiblement le plan actuel, sujet aux modifications résultant des papiers envoyés par Weil ultérieurement. La prop.4 passe en remarque, la prop.5 disparaît ; la déf.2 et la prop.7 sont permutées ; la prop.8 en petits caractères. La déf. des corps parfaits aura été donnée au § 1, comme les corps tels que $x \rightarrow x^p$ soit un automorphisme du corps ; la déf.3 devient proposition. On supprime la norme et trace d'un élément.

§ 6. Extensions galoisiennes. Galoisien signifiera normal et séparable. Faire le § à la manière d'Artin ; un seul théorème : si E est un corps, G un groupe d'ordre n formé d'automorphismes de E , K le sous-corps de E formé des éléments invariants par G , E est une extension séparable de K de degré n. Tout le reste en découle aisément. Enoncer la prop.8 en théorème. Supprimer la détermination explicite du groupe de Galois.

§ 7. Racines de l'unité. Corps finis. Utiliser les diviseurs élémentaires pour la démonstration de la prop.1. Donner l'expression du polynome Φ_n au moyen de la fonction de Möbius. Faire l'extension algébriquement fermée d'un corps fini et son groupe de Galois.

§ 8. Corps ordonnés et corps ordonnables. Le plan actuel est conservé. Simplifier la dém. du th.1 en supprimant la condition (KP_V), on obtient ainsi en même temps le th.1 et la prop.4 . Dans le th.2, remplacer a) par la condition que K est pythagoricien, et modifier en conséquence la prop.7 .

Appendice. Extensions galoisiennes infinies. Inchangé.

En outre, il devra figurer dans ce chapitre la théorie générale des dérivations de Weil ; ce dernier enverra le plus tôt possible un résumé de cette théorie et de ses applications.

Un nouveau chapitre VII est prévu ensuite, comportant la théorie des anneaux locaux ; avec en particulier les applications aux anneaux de valuation et anneaux de Dedekind, ainsi que les extensions algébriques d'anneaux de valuation et anneaux de Dedekind. Une rédaction sur ces sujets sera demandée d'urgence à Chevalley.

ENGAGEMENTS DU CONGRÈS de PARIS.

CARTAN : fait une nouvelle rédaction du § 2 du chap.X (ex-VIII) de Topologie (ensembles équicontinus)

- envoie à Dieudonné ses papiers sur le § 1 du chap.V d'Algèbre (semi-groupes ordonnés)
- continue à mettre en petits papiers la suite de la Topologie algébrique, et fait une rédaction des Revêtements en collaboration avec Ehresmann.

CHABAUTY : fait une première rédaction du Fascicule de résultats de Topologie générale, ~~en collaboration avec Pisot.~~

CHEVALLEY : fait une rédaction du nouveau chap.VII d'Algèbre

- continue sa contre-rédaction du Livre élémentaire et l'expédie dès que possible.
- envoie aussitôt que possible un exemplaire de son Livre sur les groupes de Lie (ou un jeu d'épreuves)

WEIL : fait une nouvelle rédaction du § 3 du chap.X (ex-VIII) de Topologie (groupes d'homéomorphismes)

- envoie un plan détaillé de rédaction du § sur les anneaux noethériens (avec les astuces de Zariski).
- envoie le chap.I de son bouquin de Géométrie algébrique pour les questions relatives aux corps et dérivations et communique également ce qu'a fait Zariski là-dessus.

DIEUDONNÉ : s'occupe de tout le reste -

Si un sous-groupe partout dense d'un groupe ordonné G est archimédien, G est archimédien. En particulier, le complété d'un groupe archimédien est archimédien.

Définition du groupe additif $\mathbb{R}$ de la droite numérique. C'est le complété du groupe additif $\mathbb{Q}$ de la droite rationnelle. $\mathbb{Q}$ étant archimédien, $\mathbb{R}$ l'est aussi. Nombres irrationnels : ils forment un ensemble partout dense. Définition et propriétés élémentaires de x^+, x^-, $|x|$. Longueur d'un intervalle d'extrémités x et y : $|x-y|$; invariance par translation.

Caractérisation axiomatique de $\mathbb{R}$.

Tout groupe archimédien complet non discret est isomorphe à $\mathbb{R}$.

Il en résultera que tout groupe archimédien non discret est isomorphe à un sous-groupe partout dense de $\mathbb{R}$. En particulier, tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ est, soit formé des multiples entiers d'un élément $\neq 0$, soit partout dense ; tout sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, différent de $\mathbb{R}$, se compose des multiples entiers d'un élément.

Lemme : Dans un groupe archimédien complet non discret, la division par un entier $\neq 0$ est possible d'une manière et d'une seule. Car si $y = \lim_{x\to 0, x>0} x.\rho(x,y)$, $\lim_{x\to 0, x>0} x.\text{ent}(\rho(x,y)/n)$ existe (critère de Cauchy) et cette limite z est telle que $nz=y$. En outre $nz = nz'$ entraîne $n(z'-z)=0$, donc $z' = z$.

Cela posé, soit G archimédien complet non discret. Choisissons arbitrairement $a \in G$, $a\neq 0$. Désignons par a/q le quotient de a par l'entier $q\neq 0$, par pa/q la produit de a/q par l'entier p. On a $\lim_{q\to\infty} a/q = 0$ d'après Archimède, donc tout x est égal à $\lim_{q\to\infty} a/q.\rho(a/q,x)$; c'est dire que les pa/q sont partout denses.

Or, ils forment un sous-groupe G' isomorphe au groupe $\mathbb{Q}$. Donc G et $\mathbb{R}$ sont isomorphes.

Unicité : il y a un seul isomorphisme f ~~ak~~ de G sur $\mathbb{R}$ tel que f(a)=1 car dans un tel isomorphisme $f(pa/q)=p/q$ nécessairement, et l'isomorphisme de G' sur $\mathbb{Q}$ se prolonge d'une seule manière en un isomorphisme de G sur $\mathbb{R}$.

Dans l'isomorphisme, la relation d'ordre est conservée si $a > 0$, inversée si $a < 0$; car il en est ainsi pour G'.

Théorème de la borne supérieure. Toute partie $A \subset \mathbb{R}$, majorée et non vide, possède une borne supérieure. En effet, les traces sur A des intervalles $[a, \rightarrow[$ où $a \in A$, forment la base d'un filtre de Cauchy, d'après Archimède. La limite de ce filtre est un point adhérent à A, et majore A.

En particulier, toute suite croissante majorée a une limite. Cette propriété, pour un groupe ordonné G, entraîne que G est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{N}'$: car G est archimédien, et ne peut être partout dense dans $\mathbb{R}$ sans être $= \mathbb{R}$.

La droite numérique achevée. On adjoint à $\mathbb{R}$ deux éléments : $+\infty >$ tout élément de $\mathbb{R}$, $-\infty <$ tout élément de $\mathbb{R}$. $\overline{\mathbb{R}}$ ainsi obtenu est totalement ordonné ; la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ induit sur $\mathbb{R}$ celle de $\mathbb{R}$. On constate que toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure (3 cas à examiner) ; donc $\overline{\mathbb{R}}$ est compact, et comme $\mathbb{Q}$ est partout dense dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}}$ aurait pu s'obtenir à partir de $\mathbb{Q}$ par le procédé du §1.

$\overline{\mathbb{R}}$ étant compact, toute partie bornée et fermée de $\mathbb{R}$ est compacte ; réciproquement, toute partie compacte doit être fermée dans $\overline{\mathbb{R}}$, donc fermée et bornée dans $\mathbb{R}$.

Tout intervalle de $\overline{R}$ étant "sans trou" , $\overline{R}$ est connexe ; R aussi. Les parties connexes de R (resp. $\overline{R}$) sont les intervalles de R (resp. $\overline{R}$). En particulier, l'image d'un intervalle de R ou $\overline{R}$ par une application continue dans R ou $\overline{R}$ est un intervalle.

Toute composante connexe d'un ouvert étant un ouvert, est un intervalle ouvert (limité ou non) ; ces composantes forment une famille dénombrable.

Tout groupe ordonné connexe non réduit à l'unité est isomorphe à R

Tout groupe topologique G homéomorphe à R est isomorphe à R ; car on peut l'ordonner, et il est connexe.

La multiplication des réels. Fonctions logarithmique et exponentielle.

Chaque $a \neq 0$ définit un automorphisme continu $x \to S_a(x)$ de R, tel que $S_a(1)=a$. Ces automorphismes forment un groupe G , dont S_1 est l'unité ; ceux qui conservent l'ordre sont ceux pour lesquels $a > 0$, ils forment un sous-groupe G^+. On ordonne G^+ en posant $S_a \leqslant S_b$ si $a \leqslant b$ (car $a \leqslant b$ entraîne $S_a(x) \leqslant S_b(x)$ pour tout x rationnel, donc pour tout x ; et $x \leqslant y$ entraîne $S_a(x) \leqslant S_a(y)$). G^+ devient un groupe topologique ordonné, connexe puisque $]0,+\infty[$ est connexe. Donc G^+ est isomorphe à R (et en particulier abélien.)

G s'obtient en combinant les opérations de G^+ avec la symétrie $x \to -x$; G est aussi abélien, et on a la règle des signes.

On a ainsi défini le groupe multiplicatif des réels $\neq 0$; c'est un groupe topologique ordonné, qui a deux composantes connexes.

Le produit ab est continu sur $G \times G$, a^{-1} est continu sur G . Mais le produit de x par a a aussi pour valeur $S_a(x)$; ceci permet de définir le produit de 0 par un nombre, et établit la règle de distributivité. On constate que le produit, pour les éléments de Q , coïncide avec celui défini en Algèbre.

L'isomorphisme f de G^+ sur $\mathbb{R}$ tel que $f(a)=1$ se note $\log_a$; cas $a > 1$, $a < 1$. Notation a^x pour la fonction réciproque. Existence de $x^{1/n}$ pour $x > 0$ (ce qui prouve $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$).

~~L'isomorphisme f de G^+ sur tel que f(a)=1 se note $\log_a$~~ ;

La fonction log fournit un homéomorphisme entre les intervalles suivants : $]-\infty, +\infty[$ et $]0, +\infty[$; $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$; $]-\infty, 0]$ et $]0, 1]$. En faisant intervenir les translations et symétries, on voit qu'il n'y a que trois sortes d'intervalles (à des homéomorphismes près).

<u>Extension à $\overline{\mathbb{R}}$ des opérations définies dans $\mathbb{R}$</u> . <u>Propriétés des fonctions numériques qui font intervenir l'addition et la multiplication</u>. Voir la rédaction actuelle.

<u>Compléments sur les noyaux de groupes ordonnés</u>. Une fois donnée la définition, on constate rapidement qu'on peut généraliser aux noyaux de groupes ordonnés la plupart des propriétés des groupes ordonnés. Ainsi :

Tout noyau de groupe archimédien est abélien, et isomorphe à un noyau porté par la droite $\mathbb{R}$. Tout noyau de groupe ordonné connexe, non réduit à l'unité, est isomorphe à un voisinage de 0 dans le groupe $\mathbb{R}$; autrement dit, c'est un noyau de groupe <u>à un paramètre</u>. Tout groupe connexe G dont un voisinage de l'unité est un noyau à 1 paramètre, est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}$. Pour le voir, on remarque d'abord que G est <u>abélien</u> ; puis on définit un homomorphisme de $\mathbb{R}$ sur G , et on utilise le th. sur les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$.

CRITIQUES DIEUDONNE AU CONTRE-PROJET CARTAN

Les détails du contre-projet Cartan me semblent en général excellents sur la plupart des points où il donne des démonstrations différentes de celles de la rédaction actuelle, il améliore nettement ces dernières et la rédaction définitive devra tenir compte de ces heureuses innovations. Je suis par contre complètement opposé au remaniement complet qu'il fait subir à l'ordre actuel, ne serait-ce que parce que son nouveau plan viole outrageusement deux des principes bourbachiques les mieux établis ; 1° rattacher toujours, dans la mesure du possible, les faits particuliers aux faits les plus généraux ; 2° ne pas faire de Tératologie par plaisir quand on peut s'en dispenser.

L'amour passionné de Cartan pour les espaces totalement ordonnés ne date pas d'hier, comme chacun sait ; tant que l'idylle ne met en jeu que les intéressés, personne ne peut y trouver à redire ; mais Bourbaki est en droit de s'insurger lorsqu'on veut lui faire partager ces fréquentations malsaines ! Jusqu'à preuve du contraire (à fournir, naturellement, par l'intéressé), la théorie des espaces totalement ordonnés est de la Tératopologie pure, une "théorie (F)" dirais-je, en l'honneur de notre maître illustre : parfait exemple de théorie générale construite pour un seul cas particulier. Or, dans le contre-projet Cartan, tout est subordonné à cela : alors qu'on s'est donné beaucoup de mal, au Ch. II, pour établir des critères généraux de compacité et de connexion pour les espaces uniformes, voila qu'on nous propose ici de démontrer les propriétés de cette nature pour la droite, en faisant appel aux théorèmes sur les totalement ordonnés achevés. C'est vouloir à tout pri qu'on se paie notre tête ! Il semble en outre qu'on ne puisse rien fair sans plonger la malheureuse droite, qui n'en peut mais, dans son horrible "achèvement" , triste exemple de l'intervention bien connue du diable en Mathématique : et au lieu de passer au plus vite, en jetant un voile pudique sur cet espace honteux, il faudrait en faire le pivot de toute la théorie ! Pour ma part je ne marche pas.

Si on veut d'autres exemples de ce goût du baroque et du singulier, qu'on admire la définition des fonctions semi-continues inférieurement, lorsque l'espace des valeurs n'est pas achevé : à quoi cela peut-il bien servir ? L'auteur ne nous le dit pas. Mais le joyau, à mon sens, est la définition du produit de deux nombres réels, avec le grand rétablissement pour trouver le produit de 0 par un nombre, et la "constatation" remarquable que, pour les nombres rationnels, on retrouve le produit habituel ! C'est de la haute voltige ; mais on se demande ce que pensera le malheureux lecteur lorsqu'il voudra appliquer la même méthode au produit des p-adiques, par exemple, ou à la complétion d'un espace linéaire ?

Je regrette particulièrement, dans le contre-projet Cartan, la dislocation du ch.VI : l'idée de faire sortir l'exponentielle et les fonctions trigonométriques d'une même source, le théorème sur les groupes à un paramètre, m'a toujours paru une des plus heureuses de Bourbaki ; il serait désolant qu'elle disparaisse. En outre, on ne voit guère le bénéfice de cette opération ; pourquoi a-t-on besoin de l'exponentielle dès le début ? D'après le texte, cela servirait à la définition du produit (voir ci-dessus), aux homéomorphismes d'intervalles (où la fonction $x/(1+|x|)$ joue avantageusement le même rôle) et enfin à définir $x^{1/n}$, pour lequel le théorème sur les homéomorphismes d'intervalles fournit une définition indépendante naturelle qu'il serait dommage de ne pas donner. Tout cela ne justifie pas, à mes yeux, le bouleversement proposé.

CONTRE-PROJET DIEUDONNÉ POUR LES CHAPITRES III et IV.

CHApITRE III . On bloque dans un § 5 toutes les questions relatives aux noyaux de groupes généraux, actuellement dispersées dans le § 1 et insuffisamment développées pour la suite :

§ 5 . Noyaux de groupes.

Définition (celle du texte) ; caractérisation des voisinages de l'origine, avec le nombre minimum d'axiomes (voir le projet Cartan en Annexe). Sous-noyau ; restriction d'un noyau à un voisinage de l'unité. Noyau engendré par un voisinage de l'unité (il existe un voisinage symétrique V_0 de l'unité tel que, pour tout voisinage W de l'unité, tout élément de V_0 soit composé d'un nombre fini d'éléments de W). Noyau quotient. Structures uniformes (gauche, droite, bilatère) sur un noyau. Complétion d'un noyau. Isomorphisme, isomorphisme local.

CHAPITRE IV . Nombres réels.

§ 1. Noyaux de groupes ordonnés.

Définition d'une relation d'ordre sur un noyau de groupe topologique (abélien ou non), compatible avec la structure de ce noyau (voir Annexe). Propriétés des ensembles P (éléments positifs) et N (éléments négatifs. Inversement, ces propriétés définissent une structure d'ordre compatible avec la structure de noyau.

La topologie définie par la relation d'ordre est localement identique à celle du noyau. Cas où on se donne d'abord la relation d'ordre, et où on en déduit la structure de noyau (voir Annexe) ; cas particulier des groupes ordonnés (globaux).

Si N' est un sous-noyau partout dense d'un noyau de groupe ordonné N , la relation d'ordre induite par N sur N' est compatible avec la structure de sous-noyau de N' . Réciproquement, une structure d'ordre sur N' , compatible avec la structure de noyau, se prolonge d'une manière et (localement) d'une seule sur N .

D'où la complétion d'un noyau ordonné.

Condition pour qu'un noyau ordonné soit engendré par un voisinage quelconque de l'unité : noyaux archimédiens. Tout noyau archimédien est abélien (démonstration de Cartan). Tout noyau connexe ordonné est archimédien (s'il existe $x > e$ et y tel que $x^n < y$ quel que soit n entier > 0 , l'intervalle $[e, x]$ engendre un groupe contenu dans le noyau, qui est nécessairement ouvert et fermé, et ne contient pas y , d'où contradiction). Le complété d'un noyau archimédien est archimédien. Cas particulier des groupes globaux.

§ 2. Définitions et propriétés fondamentales de la droite numérique.

Groupe additif $\mathbb{R}$ défini comme le complété du groupe additif $\mathbb{Q}$ des rationnels. Il est archimédien. Les irrationnels sont partout denses. Existence d'un système fondamental dénombrable de voisinages. Fonctions x^+, x^-, $|x|$, propriétés. Longueur d'un intervalle ; invariance par translation.

Caractérisation des parties compactes de $\mathbb{R}$ (théorème de Borel-Lebesgue), par le critère de compacité des uniformes et Archimède.

Théorème de la borne supérieure (on se ramène à un ensemble contenu dans un intervalle compact, et on applique le raisonnement de Cartan).

Caractérisation des intervalles par le th. de la borne supérieure (si a et b sont dans I et $a < b$, tout c tel que $a \leq c \leq b$ est dans I).

Caractérisation des ensembles connexes sur la droite (comme dans la rédaction actuelle). La droite est localement connexe ; tout ensemble ouvert a une famille dénombrable de composantes (par l'ensemble dénombrable partout dense).

§ 3. La multiplication des nombres réels. Prolongement de xy et de 1/x de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ (en appliquant les théorèmes généraux de prolongement). Propriétés ; $\mathbb{R}$ est un corps ; continuité des polynomes et des fractions rationnelles.

Caractérisation des homéomorphismes d'intervalles (fonctions continues et strictement monotones). Applications : 1° classification topologique des intervalles (3 espèces, deux à deux non homéomorphes), à l'aide de la fonction $x/(1+|x|)$. 2° Définition de $x^{1/n}$ pour n entier >0.

§ 4. La droite numérique achevée. Rédaction actuelle, allégée des séries, et abrégée si possible. On pourra remarquer, si on veut, que la droite achevée aurait pu être obtenue par le procédé général d'achèvement d'un ensemble ordonné quelconque (et non seulement d'un totalement ordonné) qu'il aura fallu donner au chapitre sur les ensembles ordonnés, dans le Livre I.

§ 5. Fonctions numériques.

Rédaction actuelle, en ordonnant mieux les diverses propriétés, comme le veut Cartan. Comme application des limites suivant un filtre, somme d'une famille de nombres réels : on ordonne par inclusion les parties finies de l'ensemble d'indices I, on a ainsi un ordonné filtrant ; si $\mathfrak{F}$ est le filtre des sections correspondant, la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ a pour somme $\lim_{\mathfrak{F}} (\sum_{\iota \in H} x_\iota)$ si cette limite existe lorsque H parcourt le filtre $\mathfrak{F}$; toutes les propriétés des sommes de nombres réels se déduisent très aisément de là et des propriétés des limites. Somme d'une famille de fonctions numériques.

§ 6 . Approximation des nombres irrationnels. Puissance de R . Comme fait.

Appendice I. Espaces totalement ordonnés. On y mettrait tout le § 1 du contre-projet Cartan, abrégé de préférence, et de nombreux exercices.

Appendice II. Nombres p-adiques. Y faire ce qui est actuellement en exercices après le § 3 , aussi succinctement que possible. Il serait bon d'avoir d'autres exercices sur le sujet ; on en demande aux spécialistes.

CHAPITRE VI. § 1. Utiliser les méthodes de Cartan pour les groupes, adaptées aux noyaux de groupes, comme il le signale à la fin de son contre-projet, et qui simplifient considérablement l'exposé.

Annexe (d'après des papiers Cartan).

I. Noyaux de groupes généraux. Il semble préférable de commencer à donner la définition du texte, parallèle à celle des groupes topologiques. N-B.- Ceci n'est pas l'opinion de Cartan, qui voudrait uniquement partir du filtre $\mathfrak{V}$, comme il est exposé ci-dessous.

On en déduit les propriétés du filtre $\mathfrak{V}$ des voisinages de l'unité e dans le noyau :

(NGV_I) Quel que soit x suffisamment voisin de e , et $U \in \mathfrak{V}$, il existe $V \in \mathfrak{V}$ tel que $xVx^{-1} \subset U$.

(NGV_{II}) Quel que soit $U \in \mathfrak{V}$, il existe $V \in \mathfrak{V}$ tel que $V^2 \subset U$.

(NGV_{III}) Quel que soit $U \in \mathfrak{V}$, il existe $V \in \mathfrak{V}$ tel que $V^{-1} \subset U$.

(NGV_{IV}). Quel que soit $U \in \mathfrak{V}$, $e \in U$.

Dans l'énoncé de ces axiomes, il est entendu que l'<u>existence</u> des expressions xVx^{-1}, V^2, V^{-1} qui y figurent est en outre affirmée.

Réciproquement, donnons-nous un ensemble E filtré par un filtre $\mathfrak{V}$, satisfaisant à (NGV_{IV}) pour un élément e de E ; supposons définies sur un ensemble V_o du filtre $\mathfrak{V}$ des fonctions $x.y$ et x^{-1}, et de sorte que les axiomes (NGV_{II}) et (NGV_{III}) soient remplis. On commence par déduire de ces axiomes que, pour tout n entier > 0 il existe un $V_n \in \mathfrak{V}$ tel que le composé (pour le moment non associatif) de n éléments de V_n ou de leurs inverses existe toujours. On peut alors énoncer en premier lieu les axiomes algèbriques sur les fonctions $x.y$ et x^{-1} :

(NG'_I). Quel que soit $x \in V_o$, $e.x = x$.

(NG'_{II}). Quels que soient x,y,z dans V_3, $x(yz) = (xy)z$.

De ce dernier axiome, on déduit l'associativité d'un produit de n éléments contenus dans V_n.

(NG'_{III}) Quel que soit $x \in V_2$, $x^{-1}x = e$.

Enfin, on peut énoncer (NGV_I) en supposant x et V contenus dans V_3.

Reste à montrer que la structure satisfaisant à ces axiomes est une structure de noyau de groupe :

1) si $x^2 = x$, et x assez voisin de e, $x=e$; en effet, on a

$$x^{-1}.x^2 = x^{-1}x = e$$

et $x^{-1}x^2 = (x^{-1}x)x = ex = x$.

2) si x est assez voisin de e , $xx^{-1}=e$. En effet, on a

$$xx^{-1}x = xe \ , \text{ donc } \ xx^{-1}xx^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1}$$

d'où, d'après 1) , $xx^{-1} = e$.

3) $xe = xx^{-1}x = ex = x$.

4) si $xy = e$, $x^{-1}xy = x^{-1}e = x^{-1}$, donc $y = ey = x^{-1}$.

5) si $ax = x$, $axx^{-1} \underset{xx^{-1}=}{=} e$, donc $ae = a = e$.

6) $(x^{-1})^{-1}x^{-1} = e$, donc $(x^{-1})^{-1}x^{-1}x = ex = x$, d'où $(x^{-1})^{-1}e = x$.

Dans ces 4 dernières propriétés, on a toujours supposé les éléments qui y figurent suffisamment voisins de e .

De 4) , on tire encore que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, car $xyy^{-1}x^{-1} = xex^{-1} = e$ toujours en supposant x et y assez voisins de e .

Ceci posé, on définit une topologie sur V_3 en translatant à gauche ou à droite les ensembles de $\mathfrak{V}$; et on voit qu'avec cette topologie xy et x^{-1} sont continues (même raisonnement que pour un groupe).

II. <u>Noyaux de groupes ordonnés.</u>

On considère un noyau de groupe sur un ensemble E , et on suppose que E est muni d'une relation d'ordre telle que les intervalles ouverts contenant e forment une base du filtre $\mathfrak{V}$. On suppose en outre que $x < y$ entraîne $xz < yz$ et $zx < zy$ pour x,y,z suffisamment voisins de e . Si ces conditions sont remplies, on dit que la relation d'ordre sur E est compatible avec la structure de noyau de groupe. La topologie du noyau est identique à celle définie par l'ordre.

On peut inversement définir la structure de noyau ordonné en partant de la relation d'ordre sur E., et des fonctions x.y et x^{-1} , supposées définies dans un intervalle ouvert V_o contenant e . Sur ces fonctions, on postule d'abord les axiomes (NG'_I) , (NG'_{II}) ,(NG'_{III}) lorsque les expressions qui y figurent sont définies. On suppose en outre que x^{-1} applique V_o <u>dans</u> V_o que $xe=x$, $xx^{-1}=e$ et enfin que $x < y$ entraîne $xz < yz$ et $zx < zy$ si x,y,z sont dans V_o .

On en déduit en premier lieu que, si $x \geqslant e$, $x \in V_o$, on a $x^{-1} \leqslant e$. En effet, si on avait $x^{-1} > e$, on aurait $x^{-1}x > ex$, ce qui a un sens puisque $x^{-1} \in V_o$, et donne $e > x$, contrairement à l'hypothèse.

Montrons ensuite que $x \geqslant y$, x et y dans V_o , entraîne $y^{-1} \geqslant x^{-1}$. C'est évident si $x \geqslant e \geqslant y$, d'après ce qui précède ; il n'y a à examiner que le cas où $x \geqslant y \geqslant e$. On a alors $xy^{-1} \geqslant yy^{-1} = e$, et comme $y^{-1} \leqslant e$, $xy^{-1} \leqslant xe = x$; donc $xy^{-1} \in V_o$; alors $x^{-1}(xy^{-1})$ a un sens et est égal à $(x^{-1}x)y^{-1} = y^{-1}$, et de $xy^{-1} \geqslant e$, on tire $x^{-1}(xy^{-1}) = y^{-1} \geqslant x^{-1}e = x^{-1}$.

Le raisonnement de 6) (voir plus haut) montre que $(x^{-1})^{-1}=x$, donc que V_o est symétrique. Le raisonnement de la rédaction actuelle permet alors de voir que x.y et x^{-1} sont continues au voisinage de e , d'où la structure de noyau.
