La Tribu n° 9

DÉCISIONS DU 1er CONGRÈS DE LIFFRÉ (10-18 Septembre 1943)

LIVRE II (Algèbre). Chapitre II (Algèbre linéaire) . Le plan de Clermont est légèrement modifié , le § sur les produits tensoriels et tenseurs étant rejeté au chap. III .

§ 1 : Modules et espaces vectoriels

§ 2 : Fonctions linéaires ; dualité .

§ 3 : Matrices .

§ 4 : Algèbres .

Détail : § 1 : la rédaction faite d'après le plan de Clermont est adoptée dans son ensemble , à de petites modifications de détail près. On y ajoute : 1° une remarque sur l'assimilation de tout groupe à opérateurs abélien à un module , ce qui dispense d'étudier les groupes abéliens à opérateurs généraux ; 2° la proposition que toute somme de sous-modules est isomorphe à un quotient de leur somme directe .

§ 2 : Plan remanié : Fonctions linéaires ; définition , propriétés générales . Cas des espaces vectoriels : rang . Applications linéaires d'un module quotient , d'une somme directe (dans n'importe quel module); en petits caractères , applications linéaires dans une somme directe . Endomorphismes.

Dualité . Définition d'une forme linéaire , structure du module à droite du dual. Exemples de duals . Forme bilinéaire fondamentale, définition du bidual . Orthogonalité . Dual d'un quotient . Dual d'une somme directe : 1) cas général ((en particulier formes coordonnées), isomorphie avec le produit des duals) 2) cas fini , somme directe des sous-modules orthogonaux à la somme de n-1 des sous-modules composants . Bases duales dans le cas d'une base régulière finie , isomorphie avec le bidual .

Dualité dans les espaces vectoriels . Sous-espaces vectoriels maximaux (hyperplans) ; leur caractérisation par les formes linéaires . Th.1 : si un sous-espace a un supplémentaire à p dimensions , son dual est à p dimensions , si un sous-espace a p dimensions, son ~~XXX~~ dual a un supplémentaire à p dimensions . Th.2 : application au cas des espaces de dimension finie . Th.3 : tout sous-espace vectoriel est intersection des sous-espaces maximaux qui le contiennent . Th.4: toute forme linéaire qui s'annule sur l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans est combinaison linéaire des premiers membres des équations de ces hyperplans (se servir de la prop.: si p formes sont linéairement indépendantes , on peut choisir une base de façon que ce soient des formes coordonnées).

Equations linéaires : on se borne à un nombre fini d'équations scalaires sur un module . Condition nécessaire immédiate ; elle est suffisante dans le cas des espaces vectoriels ; dans ce dernier cas, dimension du supplémentaire de l'ensemble des solutions (par la prop. servant au th.4). Cas où les coefficients et les seconds membres sont dans un sous-corps.

Transposée d'une application linéaire : définitions et propriétés générales, définition de la contragrédiente. Transposée d'une application sur=isomorphisme dans ; réciproque dans le cas des espaces vectoriels ; traduction en équations linéaires. Th.5: le dual de u(E) est isomorphe à $u^*(F')$; en particulier, égalité des rangs de u et u^* dans le cas fini.

Applications semi-linéaires (très bref).

§ 3 : Plan remanié : On ne considère que des modules à droite : quand on tombe sur un module à gauche, on décrète que c'est un module à droite sur l'anneau opposé.

Définition abstraite des matrices sur un anneau : structure de bimodule sur leur ensemble. On se borne ensuite aux anneaux ayant un élément unité. Correspondance entre applications linéaires de $A^{(L)}$ dans $A^{(M)}$ et matrices semi-finies par colonnes : la colonne d'indice λ étant image par l'application linéaire de l'élément e_λ de la base canonique. Produit de deux matrices. Matrices carrées.

Identification d'un vecteur $x=(\xi_{\lambda 1})$ avec l'application linéaire ~~XXXX~~ $\alpha \to x\alpha$; la matrice correspondante est la matrice à une colonne $(\xi_{\lambda 1})$ qu'on note x par abus de langage. La matrice à une ligne correspondant à une forme linéaire x' se note x' par un abus de langage analogue : $x'=(\xi'_{1\lambda})$. La valeur de la forme linéaire x'(x) est le scalaire $x'.x=\sum_\lambda \xi'_{1\lambda}.\xi_{\lambda 1}$.

Transposition (cas fini): on considère les duaux comme modules à droite sur l'anneau opposé. La matrice $\underline{A}(u^*)$ est la transposée de $\underline{A}(u)$, mais ses éléments appartiennent à l'anneau opposé.

Matrices sur un corps : égalité des rangs de deux matrices transposées, condition pour qu'une matrice carrée soit inversible. Condition de compatibilité d'un système d'équations linéaires par le rang des matrices.

Changement de base : matrice de passage, matrice contragrédiente pour la base duale, changement de coordonnées. Matrices équivalentes, cas d'un corps. Matrices semblables.

§ 4 (ancien § 5) : inchangé, à part la suppression des produits tensoriels d'algèbres, reportés au chap.III.

Chapitre III : Algèbre multilinéaire.

Nouveau plan du chapitre :

§ 1 : Produits tensoriels et tenseurs .
§ 2 : Produits tensoriels d'algèbres .
§ 3 : Tenseurs symétriques et tenseurs antisymétriques .
§ 4 : Algèbre extérieure .
§ 5 : Déterminants .
§ 6 : Dualité dans l'algèbre extérieure .

<u>Détail</u> : § 1 : Fonctions multilinéaires sur un produit de n modules qu'on supposera unitaires (sur un anneau A <u>commutatif</u>); formes multilinéaires .

Produit tensoriel de <u>deux</u> modules E et F ; méthode Whitney , 3^{e} édition Cartan : définition par une propriété caractéristique assurant l'unicité à une isomorphie près : c'est un module M tel qu'il existe
simplement xy)
une application bilinéaire $(x,y) \to x \otimes y$ de $E \times F$ sur une partie de M engendrant M , telle que toute fonction bilinéaire sur $E \times F$ soit de la forme $(x,y) \to g(x \otimes y)$, g linéaire sur M . Existence : on prend la somme directe $E^{(F)}$, et on passe au quotient par un sous-module convenable .

Isomorphie de $E \otimes F$ et de $F \otimes E$; produits $A \otimes E$ et $A \otimes A$. Produit tensoriel de deux sommes directes ; cas des bases régulières , base régulière de $E \otimes F$. Produit $(E/M) \otimes (F/N)$ en petits caractères .

Extension au produit tensoriel de n modules (même méthode). Associativité ; produit de sommes directes (sans démonstration).

Produit tensoriel d'applications linéaires (traduction en matrices) ; composition de deux produits tensoriels d'applications linéaires . Produits tensoriels de formes linéaires , correspondance avec les formes multilinéaires . Dualité pour les bases régulières finies .

Tenseurs . Puissance tensorielle de E : ses éléments sont appelés tenseurs contravariants ; puissance tensorielle du dual E': ses éléments sont appelés tenseurs covariants . Produit tensoriel de ces deux puissances tensorielles : tenseurs mixtes . Structure d'espace tensoriel : tout automorphisme de E définit un automorphisme de l'espace des tenseurs mixtes ; d'où loi de composition externe sur cet espace , en plus de la structure d'espace vectoriel .Sous-espaces tensoriels , applications tensorielles (représentations pour la structure tensorielle); exemples: produit , contraction .Traduction avec les bases .

<u>§ 2</u> : Produit tensoriel de deux algèbres E et F sur A : le produit $(x \otimes y)(x' \otimes y')$ est $(xx') \otimes (yy')$. Rang de $E \otimes F$ (cas où A est un corps). Produit tensoriel de composées directes . Cas où A est un

corps et où E et F ont des éléments unités : identification de E et F avec deux sous-algèbres permutables de $E\otimes F$, telles que $E\cap F=A$; identification de $x\otimes y$ avec le produit dans $E\otimes F$; le centre de $E\otimes F$ est le produit tensoriel des centres de E et F .

Application aux bimodules : assimilation à un module sur un produit tensoriel .

Extension de l'anneau d'opérateurs A d'une algèbre E sur A : B étant une extension commutative de A , on définit sur $B\otimes E$ une structure d'algèbre par rapport à B : $t(x\otimes y)=(tx)\otimes y$.

Exemples : produit tensoriel de deux algèbres de matrices ; l'algèbre du produit $S\times T$ de deux monoïdes est le produit tensoriel des algèbres des monoïdes S et T .

§ 3 : Groupe d'automorphismes de la puissance tensorielle n-ème $E^{ⓝ}$ d'un module E , correspondant au groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$:

$$\sigma(x_1\otimes x_2\cdots\otimes x_n)=x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes x_{\sigma^{-1}(2)}\cdots\otimes x_{\sigma^{-1}(n)}$$

C'est un automorphisme de la structure tensorielle . Tenseurs symétriques et tenseurs antisymétriques : ils forment des sous-espaces tensoriels . Généralisation aux tenseurs mixtes : symétrie pour une seule variance ; la contraction conserve la symétrie (pour la même variance).

Symétrisation et antisymétrisation d'un tenseur z : le symétrisé de z est $\sum_\sigma \sigma z$, l'antisymétrisé est $\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \sigma z$. On obtient ainsi tous les tenseurs symétriques (resp. antisymétriques) tout au moins lorsque la caractéristique est nulle (sinon il y a des canulars).

Fonctions multilinéaires symétriques et antisymétriques . Dans le cas de la caractéristique 2 , distinguer les fonctions antisymétriques des fonctions alternées (=s'annulant lorsque 2 arguments sont égaux).

Symétrisation et antisymétrisation des fonctions multilinéaires ; dans le cas d'une base régulière , et pour une caractéristique quelconque , les fonctions alternées sont identiques aux antisymétrisées.

§ 4 : Définition de la puissance antisymétrique d'un module E (la puissance symétrique sera définie de la même manière avec les polynomes , au chap.IV) : quotient de $E^{ⓝ}$ par le sous-module où s'annulent les fonctions alternées . Notations : $\overset{n}{\bigwedge} E$ pour la puissance antisymétrique , $x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_n$ pour l'image du tenseur $x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_n$ par l'application canonique ; terminologie : n-vecteur=élément de $\overset{n}{\bigwedge} E$, n-vecteur simple (ou décomposable)=n-vecteur de la forme $x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_n$. Dans le cas où E a une base régulière , base régulière de $\overset{n}{\bigwedge} E$, nombre d'éléments de la base . Isomorphisme canonique de $\overset{n}{\Lambda}E$ sur le sous-module des tenseurs antisymétrisés (par passage au quotient de $z \longrightarrow \sum_{\sigma}\varepsilon_{\sigma}.\sigma z$).

Produit d'un p-vecteur z et d'un q-vecteur z' (provient du produit des tenseurs par passage au quotient); notation $z\wedge z'$. Associativité ; les n-vecteurs simples sont des produits ; semi-commutativité .

En petits caractères , l'algèbre extérieure (tous les p-vecteurs réunis dans un même anneau); table de multiplication dans le cas d'une base régulière .

Puissance antisymétrique d'une application linéaire u de E dans F : à $x_1\wedge x_2\wedge \dots \wedge x_n$ correspond $u(x_1)\wedge\dots\wedge u(x_n)$; notation $\overset{n}{\Lambda}u$; composition des puissances antisymétriques .

§ 5 : On se borne aux modules à base régulière finie de n éléments.

Déterminant d'un endomorphisme u (définition indépendante de la base) : la puissance antisymétrique n-ème de u est une homothétie dont le déterminant de u est le rapport. Propriété multiplicative .

Déterminant d'une matrice carrée = déterminant de l'endomorphisme correspondant . Déterminant de n vecteurs par rapport à une base .

Calcul d'un déterminant (développement n-aire). Le déterminant est forme multilinéaire alternée des lignes et des colonnes ; échange des lignes et des colonnes .

Mineurs d'une matrice quelconque ; coordonnées d'un p-vecteur décomposable . Développement de Laplace .

Applications géométriques de l'Algèbre extérieure (sur un corps) : condition pour qu'un p-vecteur simple soit nul ; rang d'une matrice . Relation entre p-vecteurs simples et sous-espaces de dimension p . Traduction avec les déterminants .

Condition de décomposabilité d'un p-vecteur x : il faut et il suffit que les vecteurs y tels que $x\wedge y=0$ forment un sous-espace à p dimensions ; d'où les relations quadratiques de Grassmann .

§ 6 : Isomorphismes canoniques entre : 1) dual de $\overset{p}{\Lambda}E$; 2) ensemble des formes p-linéaires alternées ; 3) $\overset{p}{\Lambda}E'$ (E' dual de E). Formule

(1) $$\langle x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_p, x'_1\wedge x'_2\wedge\cdots\wedge x'_p\rangle = \boxed{\langle x_i, x'_j\rangle}$$

Transposée de la puissance antisymétrique d'une application linéaire.

Produit intérieur d'un p-vecteur et d'une q-forme . Si $p \geqslant q$, on contracte (q fois) l'antisymétrisé du p vecteur avec un des tenseurs d'où est issue la q-forme , et on utilise l'isomorphisme canonique du §4, ce qui donne un(p-q)-vecteur . Définition analogue si $p \leqslant q$, qui donne une(q-p)-forme ; si p=q , on retrouve la formule (1) dans les 2 cas . Interprétation géométrique pour les p-vecteurs et q-formes décomposables .

Isomorphisme (défini à un facteur scalaire près , dépendant de la base) entre p-vecteurs et(n-p)-formes : soit x un p-vecteur fixe , y un (n-p)-vecteur variable ; $y \wedge x$ est un n-vecteur , qu'on identifie à un scalaire (en utilisant la base) ; alors $y \to y \wedge x$ est une forme linéaire $\varphi(x)$ sur les (n-p)-vecteurs , donc une (n-p)-forme ; φ est linéaire et biunivoque , donc un isomorphisme <u>sur</u> . Applications diverses .

<u>Chapitre IV</u> : <u>Polynomes</u> .

Le Congrès constate l'état larvaire du chapitre , et remet à une rédaction suivante un examen approfondi. Il se borne à émettre quelques suggestions d'ordre général :

Il y a deux sortes de polynomes : 1° polynomes abstraits (algèbre du monoïde N , ou N^n , ou éventuellement Z (polynomes à exposants entiers quelconques)); 2° fonctions polynomes de degré n sur E^n , E étant un module = fonctions obtenues par identification des n arguments dans une fonction n-linéaire sur E^n. Dans ce second cas , si on prend une base régulière de p éléments dans E , on obtient un polynome de degré n de p variables scalaires, à coefficients vectoriels .

Les polynomes abstraits <u>forment</u> un anneau d'opérateurs par rapport à n'importe quelle algèbre sur le même anneau de base (algèbre supposée commutative si le nombre des variables est > 1). D'où les fonctions polynomes sur une algèbre , qui font le raccord avec les fonctions polynomes de la seconde sorte .

Composition des fonctions polynomes de la seconde sorte ; en particulier , $f\circ(g_1,g_2,\dots,g_n)$, où f et les g_i sont des polynomes abstraits . Exemple : $f\circ(x+y)$ (dérivée d'un polynome).

La décomposition des fractions rationnelles est renvoyée au chap.V (Divisibilité) ; la formule d'interpolation est conservée ; on remet dans le texte le calcul des différences . Les fonctions symétriques sont reportées au chap.VI (théorie de Galois).

LIVRE III (Topologie générale).

<u>Chapitre VII</u> : <u>Utilisation des nombres réels en Topologie générale</u> (nouveau titre) .

§ 1 : Espaces uniformisables .
§ 2 : Espaces métriques et espaces métrisables .
§ 3 : Groupes et anneaux métriques .

§ 4 : Espaces normaux .

§ 5 : Espaces de Baire .

Détail : § 1 . Définition d'un écart f(x,y) (on n'exclut pas la valeur $+\infty$, et on peut avoir f(x,y)=0 pour $x \neq y$); exemples. Somme et enveloppe supérieure d'écarts ; inégalité (1) de la p.87 pour un écart fini . Structure uniforme définie par un écart ; équivalence de deux écarts ; on peut se borner au cas des écarts finis. Structure uniforme définie par une famille d'écarts ; familles d'écarts équivalentes ; on peut se borner à une famille contenant le maximum d'un nombre fini d'écarts de la famille . Comparaison des structures définies par 2 telles familles . Condition (Tout écart est uniformément continu.
de séparation) . Exemple : structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues des fonctions numériques finies .

Restriction d'une famille d'écarts à un sous-espace . Prolongement des écarts au complété : ce sont des écarts donnant la structure uniforme de ce dernier . Th.1 : toute structure uniforme peut être définie par une famille d'écarts . Th.2: caractérisation des espaces topologiques uniformisables par l'axiome (O_{IV}). Définition des complètement réguliers : identité avec les sous-espaces des compacts , et plus particulièrement immersion dans un cube ; raccord avec le th. d'Alexandroff pour les localement compacts (cf. exerc.4,p.100).

Fonctions semi-continues dans un uniformisable .

§ 2 : Définition d'une distance : écart fini d(x,y) tel que d(x,y)=0 entraîne x=y . Espace métrique = ensemble muni d'une distance. Structures uniforme et topologique d'un espace métrique : elles sont séparées . Structure définie par un seul écart : espace métrique associé .

Structure d'espace métrique : Isomorphismes (applications isométriques); système d'entourages ; boules , sphères ; distance de deux ensembles , diamètre ; oscillation d'une fonction à valeurs dans un métrique , d'où condition de continuité . Complété d'un espace métrique .

Structures uniformes métrisables . Définition ; th.1: condition pour qu'une structure uniforme soit métrisable .

Structures topologiques métrisables ; définition . Conditions nécessaires de métrisabilité : 1° complètement régulier ; 2° tout fermé est intersection dénombrable d'ouverts ; en particulier , tout point a un système fondamental dénombrable de voisinages .

Emploi des suites dénombrables . Condition pour qu'un point soit adhérent à une partie d'un espace métrisable . Pour qu'un espace métrique soit complet , il faut et il suffit que toute suite de Cauchy converge (conséquence de la condition précédente).

Espaces métriques compacts : condition de précompacité d'un espace métrique ; condition de compacité d'un espace topologique métrisable: il suffit que toute suite ait une valeur d'adhérence (démonstration en 2 temps : 1° l'espace est complet ; 2° il est précompact).

<u>§ 3</u> : Définition de la structure uniforme gauche (resp. droite) par des écarts glissants à gauche (resp. droite) et symétriques. Groupes métrisables (il suffit que e ait un système fondamental dénombrable de voisinages et que le groupe soit séparé); distance~~s~~ glissante~~s~~ ; cas des groupes abéliens , notation $\|x-y\|$. Tout quotient d'un groupe métrisable complet est complet .

Corps valués : valuation $|x| \geqslant 0$, nulle seulement pour 0 , telle que $|1|=1$, $|x-y| \leq |x|+|y|$, $|xy| = |x| \cdot |y|$. Exemples . Complétion . Valuations archimédiennes et th. d'Ostrowski sur la détermination des corps valués archimédiens (?) .

Espaces normés sur un corps valué . Définition ; normes équivalentes. Exemples . Complétion . Convergence normale des séries . Condition de continuité des fonctions linéaires et multilinéaires dans un normé , à valeurs dans un autre normé .

Anneaux normés = espaces normés munis d'une structure d'anneau compatible avec la topologie; on se ramène au cas où $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Dans un anneau complet ayant un élément unité 1 , inversion des x tels que $\|x-1\|<1$. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit infini $\prod_\alpha (1+u_\alpha)$ soit multipliable : ~~XX~~ $\sum_\alpha \|u_\alpha\| < +\infty$.

<u>§ 4</u> : Définition d'un espace normal : espace séparé vérifiant (O_V) 1^er th. d'Urysohn : équivalence de (O_V) et (O'_V). Tout compact est normal ; tout espace métrisable est normal . 2^e th. d'Urysohn : prolongement d'une fonction continue numérique . Raffinement d'un recouvrement ouvert fini (prop.3,p.139) ; partitions continues de l'unité.

<u>§ 5</u> : On introduit 4 notions topologiques , 2 ayant un caractère relatif , 2 un caractère absolu :

1) Sous-ensemble <u>rare</u> de E = l'adhérence n'a pas de point intérieur .

2) Sous-ensemble <u>maigre</u> de E = réunion dénombrable de sous-ensembles rares .

3) Espace topologique <u>inépuisable</u> = qui n'est pas maigre dans lui-même .

4) Espace de Baire = tout sous-espace ouvert est un espace inépuisable .

Développement : exemples d'ensembles rares et d'ensembles maigres , réunion finie d'ensembles rares , réunion dénombrable d'ensembles maigres . Transitivité des notions de sous-ensemble rare (resp. d'ensemble maigre). Pour qu'un espace soit inépuisable , il faut et il suffit que toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses soit non vide . Dans un espace inépuisable , le complémentaire d'un ensemble maigre est un espace inépuisable .

Pour qu'un espace soit de Baire , il faut et il suffit que toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses soit partout dense. Dans un espace de Baire , le complémentaire d'un sous-ensemble maigre est un espace de Baire . Remarque : si tout point d'un espace possède un voisinage qui soit un espace de Baire , c'est un espace de Baire .

Théorème de Baire : tout espace métrique complet (resp. localement compact) est un espace de Baire .

Th.2 : Sur un espace inépuisable , si l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions continues numériques est partout finie , elle est bornée dans un ouvert non vide (se déduit de la proposition: dans un espace inépuisable , toute fonction semi-continue inférieurement et partout finie est bornée dans un ouvert).

rice : Dans un espace de Baire , la limite d'une suite simplement convergente de f_n continues à valeurs dans un métrique, est continue sauf aux points d'un ensemble maigre .

Chapitre VIII : Topologies d'espaces fonctionnels .

§ 1 : Structures uniformes sur les espaces fonctionnels.

§ 2 : Familles également continues .

§ 3 : Groupes d'homéomorphismes .

§ 4 : Espaces de fonctions continues numériques .

Appendice :Dualité dans les groupes localement compacts élémentaires.

Détail : § 1 : Soit E espace topologique , F espace uniforme . On définit une structure uniforme sur l'ensemble $\mathfrak{F}$(E,F) de toutes les applications de E dans F (on en a besoin , notamment pour les fonctions continues par morceaux); d'une façon précise : structure de la convergence uniforme sur une famille $\mathfrak{S}$ de parties de E . Exemples : convergence simple , convergence uniforme , convergence compacte (uniforme sur tout compact) , convergence sur les boules dans les métriques . Comparaison de structures de ce type.

$\mathfrak{F}$(E,F) est séparé si F l'est et si tout point de E appartient à un ensemble de $\mathfrak{S}$. $\mathcal{F}(E,F)$ est en outre complet si F est complet . Pour qu'un filtre de Cauchy sur $\mathcal{F}(E,F)$ converge , il faut et il suffit qu'il converge simplement .

Sous-espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ de $\mathcal{F}(E,F)$ formé des fonctions continues dans E ; il est fermé (donc complet) si tout point de E est intérieur à un ensemble de $\mathfrak{S}$. Si un filtre de fonctions continues converge uniformément sur un ensemble partout dense de E , il converge uniformément sur E .

Convergence uniforme locale d'un filtre Φ , formé de fonctions continues en un point $x_0 \in E$: condition nécessaire et suffisante pour que l'application $(x,X) \rightarrow X(x)$ ait une limite suivant le filtre produit de Φ et du filtre des voisinages de x_0 . Conséquence: continuité de $(x,X) \rightarrow X(x)$, pour $x \in E$, $X \in \mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, si tout point de E est intérieur à un ensemble de $\mathfrak{S}$. Cas où E localement compact: pour qu'un filtre Φ sur $\mathcal{C}(E,F)$ soit localement uniformément convergent en tout point , il faut (et il suffit) qu'il soit convergent pour la convergence compacte ; corollaire : la topologie de la convergence compacte est la moins fine rendant continue $X(x)$ par rapport à l'ensemble des variables ; elle est donc indépendante de la structure uniforme de F .

Eventuellement , définition de l'homotopie (connexion dans un espace $\mathcal{C}(A,E)$).

§ 2 : Définition d'une famille également continue , amenée par la recherche des ensembles compacts de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Propriétés : 1) si H est également continue , la structure uniforme de la convergence simple et celle de la convergence compacte sont identiques ; 2) le complété de H pour la structure de la convergence simple est une famille également continue ; 3) pour que H soit précompacte , il faut et il suffit que $H(x)$ soit précompact pour tout x (th. d'Arzela). Conséquences lorsque F est compact , et E localement compact .

§ 3 : Etude de la continuité de $X \circ Y$ au voisinage de (X_0, Y_0) , dans un espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$; divers cas . Etude de la continuité de X^{-1} au voisinage de X_0 , dans le sous-espace de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,E)$ formé des homéomorphismes de E : divers cas . Cas intéressants : 1) groupe d'homéomorphismes d'un compact ; 2) groupe également continu d'homéomorphismes (ex: groupes d'isométries , groupes linéaires du chap.V). Les structures uniformes droite et gauche d'un groupe d'homéomorphismes ne sont pas nécessairement identiques à celle induite par $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,E)$; ex: $GL_n(R)$.

Groupe discontinu d'homéomorphismes (pour une structure induite par $\mathcal{C}_\sigma(E,E)$) : discret pour cette structure . Groupe proprement discontinu : dont le complété pour cette structure est discret ; si le groupe est également continu et si l'ensemble des transformés d'un point n'a pas de point adhérent , le groupe est proprement discontinu (sic!!).

§ 4 : (En vrac) Définition de la norme sur l'espace des fonctions continues numériques bornées sur un espace E ; c'est un anneau normé complet . Th. de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues sur $[0,1]$ (démonstration de S.Bernstein); généralisation de Stone ; application aux polynomes trigonométriques .Approximation d'une fonction continue sur un produit de compacts (en nombre fini ou infini) par une somme de produits. Th. de Dini (limite d'un filtrant décroissant de fonctions continues (ou semi-continues supérieurement) sur un compact , qui convergent simplement vers 0 : la limite est uniforme). Application aux fonctions semi-continues sur un compact (prop.5 de la p.141) . Familles également continues de fonctions numériques (p.169-171) .

En exercices : généralisations du th. de Weierstrass , de l'approximation sur un produit de compacts , et du th. de Stone , pour les fonctions à valeurs dans le corps p-adique.

Appendice . Dualité pour les groupes R^n, Z^n, T^n et leurs produits.

LIVRE IV (Fonctions d'une variable réelle (théorie élémentaire)).

Chapitre I : Dérivées , primitives , intégrales .

§ 1 : Dérivées . Fonctions définies dans R , à valeurs dans un vectoriel normé sur R (la plupart des propriétés s'étendent aux fonctions définies dans C ,à valeurs dans un normé sur C ; en petites lettres , on remarque que le calcul formel s'étend plus généralement à des fonctions définies dans un corps commutatif valué , à valeurs dans un vectoriel topologique sur ce corps). Pour les espaces vectoriels , on adopte la notation à droite . Définition de la dérivée ; calcul formel (somme , produit (au sens de fonction bilinéaire),fonction composée ,fonction réciproque d'un homéomorphisme quand la dérivée est $\neq 0$). Dérivées à droite et à gauche : notations f'_d ,f'_s ; généralisation du calcul formel (sans démonstrations , mais donner des énoncés explicites pour la fonction composée et la fonction réciproque). Théorème de la moyenne (en 2 étapes : 1° $\|f'_d\| \leq M$ entraîne $\|f(y)-f(x)\| \leq M|y-x|$; 2° $\|f'_d\| \leq M \cdot g'_d$, g continue et croissante , entraîne $\|f(y)-f(x)\| \leq M(g(y)-g(x))$; se ramener au cas où $g'_d > 0$ en remplaçant g par $g+\varepsilon x$, puis au 1° par un changement de variable). Conséquences : limite à droite (ou à gauche) d'une dérivée à droite ; fonction continûment dérivable en un point .

Cas des fonctions à valeurs réelles : inégalité stricte de la moyenne pour les fonctions non linéaires; dérivées infinies ; variation des fonctions .

§ 2 : <u>Primitives et intégrales</u> . Problème A : recherche d'une fonction admettant une dérivée donnée f ; s'il a une solution , elle est aussi solution du problème B : recherche d'une fonction continue admettant f comme dérivée <u>à droite</u> . Inversement , si B est possible , il n'y a qu'une solution à une constante près ; la solution de B ne sera pas toujours solution de A . On étudie le problème B en se restreignant à certaines catégories simples de fonctions . Primitive = solution du problème B . Th.: dans l'espace des fonctions bornées sur $[a,b]$, le sous-espace des fonctions admettant une primitive est <u>fermé</u> . Conséquences : 1° primitive d'une fonction continue (par les polynomes);2° primitive d'une limite uniforme de fonctions en escalier continues à droite ; ces limites uniformes ne sont autres que les fonctions continues à droite et ayant en tout point une limite à gauche (en particulier fonctions réelles monotones ,fonctions continues par morceaux). Notation intégrale : traduction des propriétés des dérivées en langage intégral .Intégrale impropre = intégrale sur un intervalle <u>quelconque</u> I d'une fonction qui , sur tout intervalle <u>compact</u> contenu dans I , appartient à la classe ci-dessus .Extension des propriétés des intégrales.. Cas des fonctions positives ; principe de comparaison ; application aux séries (Cauchy-Maclaurin). Intégrales absolument convergentes ; th. de la moyenne.

§ 3 : <u>Dérivées d'ordre supérieur</u> . Définition et calcul formel ; intégration par parties générale . Formule de Taylor (utiliser le th. de la moyenne sous la forme du § 1 pour avoir le meilleur reste); mettre le reste sous forme intégrale quand c'est possible .

§ 4 : <u>Dérivées et intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre</u>. Le paramètre est à valeurs dans un espace filtré . Convergence uniforme des dérivées , des intégrales propres et des intégrales impropres ; dans ce dernier cas , intégrales uniformément convergentes , intégrales normalement convergentes . Pour le cas d'un paramètre réel ou complexe , dérivation et intégration sous le signe somme .

Chapitre II : Fonctions convexes ; fonctions élémentaires .

§ 1 : Fonctions convexes . Définition , sous forme géométrique et analytique ; fonctions strictement convexes . Propriétés des familles de fonctions convexes (convergence , enveloppe supérieure). Continuité ; premier critère de convexité . Dérivabilité ; 2e critère de convexité. Droite d'appui ; variation des fonctions convexes .

§ 2 : Fonctions exponentielles ; fonctions circulaires . Dérivée de a^x par la convexité ; nombre e . Dérivée de e(x) par la concavité de sin x ; nombre π . Fonctions circulaires réciproques. Homomorphismes de C sur C^* : définition de e^z par la condition $\lim_{z\to 0}(e^z-1)/z=1$; dérivée de e^{ax} (a complexe , x réel). Fonction réciproque de e^z dans une bande de largeur 2π ; dérivée de log z (c'est la fonction réciproque d'un homéomorphisme , cf.ch.I,§ 1).Primitives des fractions rationnelles (sans calcul pratique , rejeté au Calcul numérique).

§ 3 : Développements des fonctions exponentielles et circulaires et des fonctions qui s'y rattachent . Principe général : on donne le développement de Taylor des fonctions considérées avec la forme intégrale du reste ; on majore ce reste grossièrement , de manière à avoir l'intervalle de convergence exact des séries de Taylor (la majoration du reste par le calcul de la série est reportée au Calcul numérique) . Application de ce principe à e^x , sin x , cos x , $(1+x)^m$, log(1+x) , Arc tg x ; Arc sin x .

Chapitre III : Etude locale des fonctions .

Le Congrès constate la déficience de Delsarte , qui n'a pas rédigé ce chapitre contrairement à ses promesses . Jusqu'à nouvelle discussion , le plan de 1942 reste valable .

De même pour les 2 Appendices (Corps de Hardy ; fonction gamma).

ETAT DES LIVRES ET CHAPITRES NON DISCUTES AU CONGRES .

LIVRE I : On constate la regrettable disparition du monstre logique de Dieudonné , mais il semble avoir fait des petits , sous forme d'un récent article de Cartan , où ce dernier retrouve et perfectionne l'essentiel dudit monstre (le perfectionnement consistant à appliquer l'idée des éléments et fonctions "explicites" à la théorie de Fraenkel-Zermelo désontologisée , ce qui élimine les tabous de la théorie des types). Dans l'enthousiasme de cette découverte , Cartan propose dans le courant de l'année des petits papiers fournissant un squelette possible pour les chap.I et II du Livre I . Le plan général des chapitres suivants ne parait pas devoir être modifié .

LIVRE II. Le chapitre VII est rédigé et sera prochainement distribué .Dieudonné compte rédiger en cours d'année le chap.VIII (formes bilinéaires, quadratiques , hermitiennes , groupes orthogonal , unitaire , symplectique,etc.)

LIVRE III . Conformément à ses habitudes , Charles n'a pas livré le chap. IX (revêtements) dans les délais prévus .

LIVRE V (Topologie combinatoire) : inexistant .

LIVRE VI (Espaces vectoriels topologiques) : en sommeil .

LIVRE VII (Différentielles) : la rédaction du chap.I sera prochainement achevée , les autres chapitres suivront dans le courant de l'année .

LIVRE VIII (Intégration) : le chap.I est terminé et sera prochainement distribué ; les autres chapitres suivront au fur et à mesure .

LIVRE IX : Cartan s'engage à rédiger , dans le courant de l'année , une larve comprenant : théorie générale des séries entières à un nombre quelconque de variables sur un corps valué complet ; intégrale de Cauchy et ses conséquences classiques ; variétés abstraites à structure analytique ; dans le cas d'une variable , représentation conforme ; étude locale des fonctions analytiques de n variables : anneau des fonctions holomorphes <u>en un point</u> , idéaux , variétés irréductibles et autres , etc.. Cette offre extraordinaire (et , espérons-le , honnête) provient d'un renouveau d'intérêt de Cartan pour ces ~~questions~~ théories , à la suite d'importantes découvertes faites par lui cet été sur la question des idéaux de fonctions holomorphes (étude globale !) , qui lui ont permis de résoudre des ~~questions~~ problèmes posé~~e~~s par André : soient f_k holomorphes dans A ouvert dans C^n , telles que l'ensemble B où $|f_k(x)|\leq 1$ $(1\leq k\leq p)$ soit compact ; B étant identifié à la variété $y_k=f_k(x)$ du polycylindre $|x_i|\leq M$ $(1\leq i\leq n)$, $|y_k|\leq 1$, toute fonction holomorphe sur B est la trace d'une fonction holomorphe sur le polycylindre (parce que la variété peut être définie par des équations holomorphes sur le polycylindre); en outre , si des $g_j(x)$ sont holomorphes sur la "face" $|f_1(x)|=1$ de B , et n'ont pas de zéro commun, il existe des $h_j(x)$ holomorphes sur cette face , telles que $\sum_j h_j g_j=1$.