NBT 010

LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique)

n°10 - 15 Avril 1944

Bien que n'ayant pas déclanché d'évènements sensationnels, le récent Congrès Bourbaki qui s'est tenu à Paris du 6 au 8 Avril 1944 n'en a pas moins réalisé un progrès important et depuis longtemps souhaité par la Rédaction : le démarrage de la Topologie algèbrique. Grâce à l'important travail préparatoire accompli depuis 3 mois par Cartan, et à la compétence technique de Charles, le Congrès a pu se faire une première idée d'ensemble des matières à traiter, et dresser un plan assez détaillé des premiers chapitres à rédiger ; la mise en train de cette rédaction est prévue pour le début de la prochaine année scolaire, au plus tard.

I. Plan général. En vue de circonscrire plus nettement le noyau central de la Topologie algèbrique qui appartient aux "Structures fondamentales" le Congrès est d'abord amené à faire un vaste inventaire de toutes les branches s'y rattachant plus ou moins directement, et à prendre des décisions (provisoires) concernant certaines d'entre elles :

a) On ne traitera pas la théorie des "courbes" au sens de Menger (compacts à 1 dimension) ; tout au plus y aura-t-il peut-être lieu d'en tirer des exercices ou exemples pathologiques. Même décision au sujet des graphes (complexes à 1 dimension) ; de même (malgré l'insistance de Charles) pour les continus péaniens (compacts connexes et localement connexes), et plus généralement la théorie des continus (compacts connexes), notamment continus irréductibles, continus indécomposables, etc. (voir travaux de l'école polonaise et de l'école américaine de R.L. Moore et Whyburn).

b) On réserve jusqu'à plus ample informé la question de la place éventuelle à donner aux problèmes spéciaux de topologie des R^n, notamment les problèmes de <u>position</u> des compacts plongés dans R^n (accessibilité, caractérisation des frontières, bouts premiers, etc..) Charles est chargé d'un rapport sur ces questions, pour une date qu'il vaut mieux laisser indéterminée.

c) Il n'est pas question de faire un chapitre sur la théorie des <u>noeuds</u> : ceux-ci n'interviendront que comme exemples d'application des théories générales. De même pour les diverses études particulières sur les variétés à plus de deux dimensions.

d) La théorie des groupes d'homotopie supérieurs (Hurewicz) et celle des espaces fibrés apparaissent au Congrès comme pleines d'intérêt et d'avenir, mais leur état présent semble trop larvaire pour pouvoir dès maintenant faire l'objet d'un exposé didactique. Ici encore, on attendra pour prendre une décision plus motivée un rapport détaillé de Charles sur ces théories.

Le terrain étant ainsi déblayé, le Congrès adopte le premier projet suivant de plan général :

<u>Chapitre I</u> . <u>Dualité dans les groupes topologiques</u>.

<u>Chapitre II</u> . <u>Complexes euclidiens et complexes abstraits</u>.

<u>Chapitre III</u> . <u>Groupes d'homologie</u>.

<u>Chapitre IV</u> . <u>Classes d'applications continues et prolongements d'applications continues. Théorie de la dimension</u> (1 ou 2 chap.)

<u>Chapitre V</u> . <u>Variétés</u>.

<u>Chapitre VI</u> . <u>Groupe de Poincaré. Revêtements</u> (1 ou 2 chapitres).

<u>II. Détail des chapitres</u>. Chap.I . Ce chapitre préliminaire n'a rien à voir en principe avec la Topologie algébrique ; c'est plutôt un chapitre

d'Algèbre topologique, qui pourrait aussi bien se placer à la fin de la Topologie générale. Toutefois, il est décidé de le laisser en tête de la Topologie algébrique, étant donné qu'il renferme les outils essentiels pour la théorie de l'homologie, et qu'il est plus commode pour le lecteur de cette dernière de l'avoir immédiatement sous la main.

Détail : Définition de la limite projective et de la limite inductive d'une famille de groupes topologiques ; étude de leur topologie (la définition à donner est celle du rapport Cartan, tout au moins pour la limite projective ; elle est plus générale que celle du fasc. Weil ; pour la topologie de la limite inductive, confronter le rapport Cartan et le mémoire de Freudenthal (Comp.Math.,t.4), à débrouiller). Définition d'une représentation d'une limite projective (resp. inductive) de G_α dans une limite projective (resp. inductive) de H_α, par des représentations de G_α dans H_α.

Dualité dans les groupes localement compacts abéliens : essentiellement toute la partie de la théorie qui peut se faire sans la mesure de Haar et Peter-Weyl (dual d'un groupe quotient, transposée d'un homomorphisme, dualité des groupes "élémentaires", dual d'un groupe discret, le dual du dual est dans ce cas identique au groupe discret initial). Dualité entre limite projective et limite inductive (débrouiller la question, à l'aide du 1er papier Cartan et du fasc.Weil).

Chap.II. Détail : Ensembles convexes dans un R^n ; définition, exemples; points internes, dimension ; tous les convexes ouverts de même dimension sont homéomorphes, de même tous les convexes compacts de même dimension . Produit de deux ensembles convexes. Enveloppe convexe d'un ensemble : elle est compacte si l'ensemble est compact.

Polyèdre convexe = enveloppe convexe d'un ensemble fini. Sommets faces, hyperplans d'appui, dualité (voir Alexandroff-Hopf, et aussi un article de H.Weyl dans Commentarii, 1932). Simplexe à n dimensions.

Complexe cellulaire euclidien (formé de polyèdres convexes en nombre fini) ; complexe simplicial euclidien (ou polytope). Subdivision simpliciale d'un complexe cellulaire (récurrence sur le nombre de dimensions).

Schéma d'un complexe cellulaire (ensemble ordonné fini) ; schéma d'un complexe simplicial (le schéma est déterminé lorsqu'on connait les sommets de chaque simplexe).

Définition d'un complexe simplicial abstrait. Applications simpliciales de complexes abstraits et de complexes euclidiens. Réalisation euclidienne d'un complexe simplicial abstrait de dimension n , dans un R^{2n+1}

Déformation continue d'une application d'un espace topologique dans un polytope. Théorème d'approximation simpliciale d'une application continue d'un polytope dans un autre.

Nerf d'un recouvrement fini (quelconque) : c'est un complexe simplicial. Recouvrement canonique d'un polytope (2è papier Cartan) ; son nerf a même schéma que le polytope. Définition de la dimension d'un espace compact.

Orientation d'un R^n ; applications linéaires affines directes et rétrogrades. Orientation d'un hyperplan déterminée par celle de l'espace ambiant et la donnée d'un des demi-espaces définis par l'hyperplan. Conséquence pour un polyèdre convexe : en associant à l'hyperplan d'une face le demi-espace contenant le polyèdre, on oriente cet hyperplan, et, par récurrence sur le nombre de dimensions des faces, on oriente chacune des variétés linéaires contenant une face ; par cette méthode, une face à n-2 dimensions reçoit 2 orientations opposées provenant des faces à n-1 dimensions qui la contiennent. Inversement, la donnée d'une suite de faces $(F_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, où F_k est face à k dimensions de F_{k+1}, détermine de proche en proche une orientation de tout l'espace : c'est par définition orienter le polyèdre. Cas du simplexe, traduction dans le schéma simplicial.

<u>Chap.III</u> : <u>Détail</u> : <u>§ 1</u> : <u>Groupes d'homologie d'un complexe abstrait</u>.

Chaînes entières = fonctions définies dans l'ensemble des simplexes orientés, à valeurs dans Z, telles que $f(-\sigma)=-f(\sigma)$ pour tout complexe. Elles forment un Z-module G. Base canonique de G obtenue en choisissant arbitrairement une orientation pour chaque simplexe.

Bord d'un simplexe, bord d'une chaîne ; la fonction "bord" est un endomorphisme φ de G tel que $\varphi\circ\varphi = 0$.

Le Z-module G est isomorphe au Z-module G^* des représentations de G dans Z ("dual" au sens algèbrique) ; l'endomorphisme φ de G <u>transposé</u> de φ, c'est-à-dire tel que $\varphi^*\circ x^* = x^*\circ\varphi$, est par définition la fonction "co-bord". Réciprocité de la relation entre G et G^*. Théorie analogue pour les chaînes "modulo un sous-complexe H", en remplaçant φ par la fonction "bord modulo H".

Réduction du module G à une forme canonique relative à l'endomorphisme φ (diviseurs élémentaires) ; séparation des chaînes des diverses dimensions ; réduction correspondante de G^*. Théorie analogue pour les chaînes modulo H.

Groupe de chaînes à coefficients dans un groupe abélien topologique g (tel que toute représentation continue d'un g^n dans un g^n soit un homomorphisme ; en pratique, on se limitera à Z, Z/(2), R et T).

On définit $G_{\mathcal{G}}$ comme le groupe des représentations continues de G^* (discret) dans $\mathcal{G}$, topologisé par la structure de la convergence simple ; la fonction Lord φ_g est par définition $\varphi_g(x) = x\circ\varphi^*$. Définition duale de G^*_g. Si g et g' sont en dualité, G_g et $G_{g'}$ sont en dualité.

Cycles (tels que $\varphi_g(x)=0$) ; cocycles (tels que $\varphi^*_g(x)=0$). Cycles et cocycles homologues à 0 ; groupes d'homologie et de cohomologie. Relation entre ces groupes lorsque g et g' sont en dualité.

Théorie parallèle pour les chaînes modulo H . Représentations canoniques et théorèmes d'isomorphisme (1[er] papier Cartan, p.1 et 2 compléter en considérant plus généralement 3 complexes K,H,L tels que $K\supset H\supset L$, le cas du papier Cartan est le cas où L est vide). Le 4[e] th. d'isomorphisme correspond au cas où le groupe des chaînes G (modulo H) est somme directe de groupes G_i tels que $\varphi(G_i)\subset G_i$.

Représentation des groupes d'homologie et cohomologie définie par une application simpliciale f (on a $f\circ\varphi = \varphi\circ f$, $f\circ\varphi^* = \varphi^*\circ f$). Transitivité. Si 2 applications simpliciales sont telles que les transformés d'un même simplexe par les 2 applications appartiennent à un même simplexe, elles définissent la même représentation des groupes d'homologie.

§ 2. Groupes d'homologie et de cohomologie des espaces compacts.

Suivre le papier Cartan (p.5-16). En plus, définition des groupes de cohomologie comme limite inductive des groupes de cohomologie des nerfs des complexes K_α ; voir comment s'étendent aux groupes de cohomologie tous les théorèmes sur les groupes d'homologie. Définir aussi le groupe de Lefschetz en un point, et éventuellement les groupes d'homologie et de cohomologie des espaces localement compacts (rapport Cartan, p.28-31).

Débrouiller la question des groupes d'homologie et cohomologie d'un espace produit (th. de Künneth).

---

§ 3. Groupes d'homologie des complexes cellulaires.

Groupes d'homologie de B_n et S_n (mais non de leurs sous-ensembles). Questions d'orientation (isomorphismes canoniques). Calcul des groupes d'homologie d'un complexe cellulaire (papier Cartan, p.22-25). Nombreux exemples (en particulier $P_n(R)$, $P_n(C)$, T^n , produits de sphères, "Linsenraüme", etc..).

§ 4. Topologie des surfaces. Triangulabilité des surfaces (th. de Rado, Acta Szeged , t.2,p.101). Classification des surfaces par leur groupe d'homologie.

§ 5. Invariance du domaine. Voir papier Cartan, p.17-20 ; interprèter avec la notion de groupe de Lefschetz en un point.

Chap. IV. Voir les 2° et 3° papiers Cartan, ainsi que les mémoires de Hopf , Freudenthal, Borsuk et Eilenberg.

Chap. V. Les questions devant figurer dans ce chapitre ne sont pas encore au point. Il s'agit essentiellement d'arriver au th. de dualité d'Alexander-Pontrjagin. Cartan se propose de débrouiller prochainement la question, en vue d'arriver à une démonstration pour les variétés non triangulables (cf. les mémoires de Cech et Flexner, qui feraient la dualité dans ce cas). Cartan se propose aussi de voir si le th. ne s'étendrait pas aux "multiplicités cantoriennes" d'Urysohn.

Dans ce chapitre figurera également la théorie du degré topologique (application des résultats de la théorie de l'homologie), et celle des points fixes.

Chap.VI. Le groupe de Poincaré sera défini en principe comme les groupes d'homologie, c'est-à-dire d'abord pour un complexe abstrait, puis par passage à la limite projective. Il faudra raccorder ensuite à tout ce qui précède le projet Bourbaki sur les revêtements.

ENGAGEMENTS de DIEULEFIT.

Il est entendu que Dieudonné fera toutes les rédactions presque-définitives, et se retirera quand on les aura repoussées.

Ensembles : Dieudonné fournira pour le 1er décembre la rédaction presque définitive des résultats d'ensembles. (avec figures et sans logique). (sans soulignages).

Ensembles, mégarédaction : Weil fournira les chap. 1 et 2 (presque définitifs).

Algèbre : Lois de composition : Dieudonné fournira une presque définitive (avec les corps, entiers positifs et négatifs etc.).

Algèbre linéaire, Ehresmann complète et livre pour une date voisine de la présente. Il promet un chapitre "Application des vectoriels à la définition de divers groupes de transformation" (Idée générale, apprendre à manipuler un G/g), avec : espace linéaire et leçon d'axiomatique ; espace projectif, espaces de Siegel ; espaces euclidien et hermitien (?? euclidien sur un corps quelconque, hermitien sur un corps quelconque ne contenant pas i).

Chevalley fera un rapport sur les vectoriels avec corps non commutatif (question simple module - double module § !).

Chapitre III de l'Algèbre, Pisot (plan de Dieulefit, cf. ancienne rédaction Delsarte) : suite de l'algèbre, avec les polynomes, hypercomplexes etc.. (rédaction Delsarte/Chevalley).

Un jour d'insomnie, Chabauty fera un fascicule sur les idéaux primaires, variétés algèbriques, variétés algèbroides sur un corps quelconque (point générique d'une variété algèbrique, méthode simplifiée de van der Waerden).

TOPOLOGIE.

Dieudonné fournira une presque définitive de chap I, nouveautés de II, III, IV, V, VI, VII.

Weil fait l'introduction et les laius historico-bibliographico-existants.

Weil fera un rapport détaillé sur le degré topologique et la topologie combinatoire.

Les Chrysalides feront une rédaction (1) de la topologie III.

Weil fera pour le 15 Octobre :

1. Résumé des relations d'équivalence.
2. Démonstration de la caractérisation de R et T .
3. Introduction et historique de la topologie.

BLOC LINEAIRE.

Espaces linéaires en sommeil sous la garde de Delsarte et de l'adjudant.

Delsarte se lance sur l'espace de Hilbert et compte l'atteindre dans un temps fini (sans quitter sa trajectoire). (Filtrage de Stone) . Intégration en suspens.

PAVÉ ÉLÉMENTAIRE.

Reste suspendu sur la tête de Dieudonné.

DIVERS.

Cartan fera les théorèmes d'existence pour les équations différentielles ordinaires et les systèmes complètement intégrables. (cas régulier, existence locale).

Ehresmann fera les variétés localement différentiables et les formes différentielles (théorie élémentaire ; il consultera les papiers de de Possel). Il définira l'intégrale des formes différentielles (à coefficients continus) sur les variétés différentiables régulières (cf. de Possel) ; théorème de Stokes.

Groupes de Lie (Chevalley). (N.B. C'est une proposition sérieuse et honnête, qu'il dit). (Rédaction $\frac{1}{2}$).

Réclamer à de Possel les papiers sur les fonctions analytiques.

PLAN DE L'ALGEBRE.

I. Lois de composition ; entiers positifs et négatifs.
Corps (commutatifs ou non) ; caractéristique ; corps réels.
Pas d'homomorphisme dans les corps.

II. Groupes additifs à opérateurs. Algèbre linéaire.

III. Anneaux. Homomorphismes (idéaux). Corps des quotients (cas commutatif). Rationnels. Exemples divers (entre autres Gruppenring). Algorithme d'Euclide. Corps finis. P.G.C.D. (par les modules). Nombres premiers. Structure des groupes abéliens à opérateurs.

IV. Systèmes hypercomplexes sur un corps commutatif.
Exemples : quaternions sur un corps (ils forment un corps quand le corps de base est réel)- nombres duels de Clifford.
Algèbre extérieure. Déterminants.

V. Matrices A^{mn} = homomorphismes de K^m dans K^n
Opérations : somme produit.
Multiplication à gauche et à droite par les éléments de K.
Rang. Matrices inverses.
Transposition. Contragrédience.
Correspondance biunivoque entre les matrices et les transformations linéaires d'un M^m dans un M^n. Cette correspondance est un isomorphisme d'espace vectoriel dans le cas commutatif.

PLAN DE LA TOPOLOGIE.

I. Structures topologiques (3)

II. Structures uniformes (3)

III. Groupes topologiques (2)

IV. Nombres réels (2)

V. Sous espaces et espaces quotients de R^n (2)

VI. Espaces (uniformisables (1)
(métrisables
(normaux

VII. Espaces fonctionnels (1)

Chap. III. GROUPES TOPOLOGIQUES.

§ 1 (Cf. Chev.) (On y met l'exemple des p-adiques).

§ 2 (= § 3 Chev.). Ajouter structures séparées.

§ 3 (= § 4 Chev.). Sous-groupes, groupe engendré par un voisinage, groupe quotient, produit direct (on supprime les homogènes).

§ 4 Groupes complets, complétion d'un abélien ; tout localement compact est complet.

Chap. IV. § 1 . Groupes ordonnés (archimédiens, complets, localement compacts).

§ 2. Nombres réels. Intervalles, système fondamental dénombrable de voisinages, représentation a-male, parties connexes, borne supérieure, fonctions monotones, homéomorphisme des intervalles, intervalles non empiétants, structure des ouverts.

§ 3. Multiplication.

§ 4. Droite achevée, calcul de l'infini.

§ 5. Fonctions numériques : Weierstrass, maximum atteint, lim. sup. et lim.inf., semi-continues, discontinuités des monotones.

hap. V - Sous-groupes et groupes quotients de R^n

§1. Sous-groupes fermés de R^n, groupes quotients : tores.

§2. Caractérisation de R et T .

§3. Exponentielle et logarithme.

§4. Groupe multiplicatif des complexes, angle, cos et sin.

ESPACES FONCTIONNELS

CHAPITRE VII.

Le schéma général est foutu dehors.

On part d'un espace topologique E et de l'espace des fonctions continues, C, sur E (le cas dit "abstrait" s'obtient en prenant E discret). Observer que si on raffine la topologie on agrandit C.

Structure uniforme de C : structure de la convergence uniforme sur une famille S de parties de E. Pour que C soit complet, il suffit que tout point soit intérieur à un ensemble au moins de S

Cas à envisager : conv. uniforme (C_u), convergence simple sur un discret, convergence sur les compacts dans un localement compact.

NOTE

AJOUTER A LA FIN DU § 4 DES STRUCTURES UNIFORMES.

---

1) Si A et B sont fermés dans un compact et si $A \quad B \quad \emptyset$, alors il existe un entourage V tel que $V(A) \quad V(B) = \emptyset$

2) L'ensemble des points qu'on peut joindre à l'un d'eux par une V-chaîne forme un ouvert-fermé

Dans un compact, deux points d'une composante peuvent être joints par une V-chaîne.

3) La composante connexe est l'intersection des ouverts-fermés.

GEOMETRIES.

Il est entendu que l'étude de chaque géométrie (affine, projective, etc.) commencera par un paragraphe purement algébrique avec corps de base quelconque, après quoi on passera au corps réel ou complexe ou les deux suivants les cas, avec ce qu'on voudra faire de géomètrie différentielle.

Il est entendu que l'on va étudier les invariants différentiels et intégraux des groupes de transformations (suggestion d'Ehresmann). (C'est le problème essentiel de la Géométrie différentielle). Définir les invariants différentiels comme des invariants des espaces prolongés.

Espaces projectifs manière Ehresmann.

Espace projectif = quotient de $K^n - o$. - Groupe projectif. (Théorème soi-disant fondamental, d'après lequel toute transformation qui conserve les droites, dans le cas du corps des réels, est projective, renvoyé au laïus historico-existant). Th. de Pascal et Desargues (comme conditions nécessaires et suffisantes de commutativité et associativité).

Ehresmann propose ici les involutions, antiinvolutions, polarités et antipolarités.

Sous-géométries de la géomètrie projective : géométrie euclidienne et géométries non-euclidiennes.

En vue des groupes de Lie : il faut faire les formes différentielles et les équations différentielles (Cartan promet un rappor sur ce qu'il aura envie de nous dire). (N.B. Promis pour janvier en principe s'il a fini l'intégration).

On fera les riemanniens symétriques des groupes projectifs des formes quadratiques (définies ou non, cf. espaces de Siegel).

NOTE

1. " E ordonné ; toute partie totalement ordonnée de E possède une borne supérieure " entraîne " quel que soit a , il y a un élément maximal de E supérieure à a "

2. " E ordonné ; toute partie totalement ordonnée de E possède une borne supérieure " entraîne " si f(x) (application de E dans E) est supérieur à x quelque soit x , il y a x tel que f(x) = x ". (et même, quelque soit a, il y a x supérieur à a!)

3. " F, ensemble de parties de E ; la réunion de tout sous-ensemble de F , totalement ordonné par inclusion, appartient à F " entraîne " quel que soit X dans F, il existe un élément maximal de F , contenant X " .

4. " F, ensemble de parties de E ; " X appartient à F " équivaut à "toute partie finie de X appartient à F" "entraîne" il ex. un élément maximal de F " .

(N.B. Il faut dire que si une famille de fonctions est totalement ordonnée par prolongement, la réunion est une fonction ; et il faut donner le prolongement, dans un ensemble d'applications, comme exemple de relation d'ordre).

(N.B. La prop. 2., de Cartan, est indépendante de Zermelo !).

(La prop. 2, que dit Cartan, est la plus commode à démontrer directement ; en déduire les autres).

N O T E

Il faut faire par une méthode unique les trois théorèmes :

1. Théorème fondamental sur les formes linéaires.
2. Théorème des fonctions implicites.
3. Changement de variables dans les intégrales multiples.

Par exemple

pour 1.: Soit une base $a_1, a_2, \ldots a_n$ et un système libre $b_1, b_2, \ldots b_n$. On obtient des bases en substituant successivement $b_1, b_2, \ldots b_n$ à un élément de la base a_i.

pour 2.: on appelle base des fonctions continument différentiables en un point, un système de fonctions au moyen desquelles toutes les autres peuvent s'exprimer d'une manière cont.diff. Théorème : pour que des fonctions forment une base, il faut et il suffit que leurs différentielles forment une base du système des différentielles. Démonstration par substitution successive des fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n$ aux éléments de la base $x_1, x_2, \ldots x_n$ (on a démontré au préalable le théorème pour une dimension, avec des paramètres en nombre quelconque).

pour 3.: cf. 2 (on a démontré au préalable pour une dimension); on obtient ainsi le théorème local (globalisation par une partition de Dieudonné ; il faut le degré topologique quand la transformation, localement biunivoque, ne l'est pas globalement).

Ehresmann s'offre à faire une rédaction de tout ce qui concerne les variétés différentiables.

Chevalley promet de pousser l'algèbre jusqu'à ce qu'elle se foute par terre.