

LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique)

N° 6 - 1<sup>er</sup> Mai 1941COMPTE-RENDU DU 2<sup>e</sup> CONGRES DE CLERMONT

(16-19 Avril 1941)

Etaient présents : CARTAN, DELSARTE, DIEUDONNE, EHRESMANN, SCHWARTZ comme chrysalide. De POSSEL, retenu à Marseille pour d'obscures raisons familiales et judiciaires, est sévèrement blâmé par Bourbaki (que son Nom soit loué !).

Arrivée de DELSARTE le 15 à midi. En attendant CARTAN, qui ne pourra se trouver à Clermont que le 16, et conformément à une suggestion de ce dernier, les congressistes présents se livrent à une discussion sommaire du Ch. II de l'Algèbre. Sans entrer dans le détail de la rédaction, on écoute un rapport de DIEUDONNE. Les idées directrices sont les suivantes :

1<sup>o</sup>- Le § 1 contient 3 théorèmes importants relatifs aux modules complètement réductibles. Ces théorèmes s'appliquent comme cas particulier aux espaces vectoriels, et donnent alors les 3 théorèmes bien connus (existence de la base ; austauschsatz ; invariance de la dimension). Dans le cas des modules complètement réductibles quelconques, ces théorèmes s'établissent aisément par Zorn. De la même façon, la théorie de la dualité pour les espaces vectoriels (prop. essentielles : prop. 4 et 7 du § 3) trouve sa véritable origine dans le fait qu'un espace vectoriel est un module complètement réductible (1<sup>es</sup> prop. précédentes sont valables encore pour des modules comp. réd. quelconques). DIEUDONNE insiste donc pour qu'on mette bien ces faits en évidence. De là son idée de consacrer un paragraphe entier, le § 1, à la théorie des modules. Le principe est admis, mais, lors d'une discussion ultérieure (le 19), il fut entendu que les espaces vectoriels seraient définis immédiatement après les modules (dans le § 1), et qu'on donnerait les applications aux espaces vectoriels des th. 1, 2, 3 du § 1, immédiatement après ces théorèmes.

2<sup>o</sup>- Il est important, en vue des applications aux espaces vectoriels topologiques, d'être en possession des th. 1 et 2 du § 3, ainsi que de la prop. 9 de ce même §, sous leur forme la plus générale. Par contre, le th. de l'invariance de la dimension semble n'avoir d'intérêt que dans le cas fini. De même aussi, la théorie des matrices infinies, sous la forme purement algébrique semble sans portée réelle (ici, réserve de DELSARTE ; les matrices infinies n'ayant qu'un nombre fini d'éléments dans chaque ligne ou colonne - les seules d'ailleurs qui aient une existence algébrique intrinsèque - sont aussi les seules qui jouent un rôle en physique moderne).

Quoi qu'il en soit, DIEUDONNÉ propose de renvoyer en Appendice les parties correspondantes du § 2. Le plan serait alors le suivant :

- § 1. Modules et espaces vectoriels ( § 1 actuel, allégé ; début du § 3 actuel).
- § 2. Fonctions linéaires ; dualité ; équations linéaires (théorie sans les bases, en insistant sur le cas des modules comp. réd. et des espaces vectoriels, et en supprimant ce qui a rapport aux matrices)
- § 3. Matrices finies.

Ces décisions furent prises à la suite de la discussion finale du 19. Notons encore que la terminologie suivante fut adoptée :

- Fonction linéaire (pour "linéaire et homogène") ;
- Fonction affine ( pour "linéaire (non homogène)".

Une partie de la discussion porta aussi sur le § 4, sans qu'aucune décision en résulte. Il s'agit ici du calcul tensoriel. DIEUDONNÉ utilise la méthode de H. WHITNEY ; méthode assez lourde surtout en ce qui concerne la définition du produit tensoriel pour une infinité de dimensions. Le détour de Whitney est-il bien indispensable ? DIEUDONNÉ fait observer, en tout cas, qu'il faut montrer que tout élément  $z$  du produit  $E \otimes F$  a une infinité de "représentants" de la

forme  $\sum x_i y_i$  ( $x_i \in E, y_i \in F$ ), et qu'on peut toujours passer d'un de ces représentants à un autre en appliquant aux "produits symboliques"  $x_i y_i$  les règles de distributivité et d'échange avec les opérateurs, un nombre fini de fois.

Ce résultat est très utile, car il vaut quand les  $x_i$  et  $y_i$  sont quelconques (linéairement indépendants ou non) ; il donne une grande souplesse aux démonstrations d'invariance ; c'est le cas par exemple lorsqu'il s'agit de prouver la signification intrinsèque de la contraction. Il importe donc de garder, d'une façon ou de l'autre, la définition de Whitney. Reste à la présenter le mieux possible.

Les journées des 16, 17, 18 Avril furent consacrées à l'ultime lecture des chap. III et IV de la Topologie générale.

Le résultat essentiel, et c'est le point marquant du Congrès, est que les Nombres réels sont enfin adoptés.

Aucune modification d'ordre ne fut apportée à ces chapitres, mais de nombreuses petites modifications de détail, portant le plus souvent sur la rédaction, quelquefois sur de petits perfectionnements de démonstration. Il ne peut être question de les reproduire ici. Disons seulement que l'impression générale est nettement favorable. Malgré le puissant ennui dégagé par le sujet même, ennui que nous connaissons trop, il est hors de doute que la rédaction à laquelle nous nous sommes arrêtés constitue un très sensible progrès sur les rédactions publiées antérieurement, tant au point de vue de la brièveté qu'au point de vue de l'efficacité des méthodes utilisées.

En fin de Congrès, les dernières heures du samedi 19 furent consacrées à l'établissement d'un plan général de l'Intégration. On propose la solution suivante, qui ne semble pas faire de difficultés pour le moment :

Chap. I : Intégration élémentaire (§ 1 du projet Weil, étude d'une seule intégrale, sans complétion). Chap. II : Espaces et anneaux de Riesz (§ 2 du projet Weil, traité d'une manière abstraite, comme indiqué dans les "Notes sur l'Intégration"). Chap. III : Espaces et anneaux de Riesz fonctionnels (tout ce qui est particulier au cas où les éléments de l'anneau de Riesz initial sont des fonctions : théorie des  $L^p$  ; produit d'intégrales (Lebesgue-Fubini pour les intégrandes) ; pseudo-fonctions (?)). Chap. IV : Réalisation des intégrandes (étude du cas où  $\inf f_\alpha = 0$  (les  $f_\alpha$  formant un filtrant) entraîne  $\inf \int f_\alpha = 0$  . Fonctions additives d'ensemble, notions de mesure et de tribu ; étude des fonctions mesurables). Chap. V : Mesure de Radon (application du chap. IV au cas des fonctions continues dans un localement compact (et aussi dans des espaces plus généraux ?) ; cas particulier : Stieltjes sur la droite ; mesures k-dimensionnelles ?). Chap. VI : Mesure de Haar (avec l'étude particulière de la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$ ). Chap. VII : Intégrales de fonctions à valeurs vectorielles, et mesures à valeurs vectorielles.

Sur la proposition de Cartan, on adopte le principe général suivant : au début de chaque chapitre, on rappellera les propriétés de l'intégrale de Cauchy (int. des fonctions continues réelles d'une variable réelle, qu'on aura depuis le Livre V), qui sont relatives au sujet du chap. traité, et on dira que c'est l'étude de ces propriétés, convenablement généralisées, qui va faire l'objet du chapitre.

ENGAGEMENTS ET PROJETS DIVERS. L'ordre d'urgence des travaux des prochains Congrès est envisagé comme suit : 1) Dernière lecture des chap. V et VI de la topologie, pour publication ; 2) Lecture détaillée de la rédaction Weil du chap. I de l'Algèbre (pour publication si possible) ; 3) Lecture détaillée de la rédaction des Techniques élémentaires (Livre V), en vue d'une rédaction définitive ; 4) Lecture détaillée des chap. II et III de l'Algèbre, en vue d'une nouvelle rédaction (définitive ?).

Ensuite, CARTAN et DIEUDONNÉ voudraient qu'on aborde les chap. VII et VIII de la Topologie, ainsi que le Livre IV in toto : cela forme un groupe de questions étroitement liées, et qu'il faudrait tout de même étudier sérieusement.

En ce qui concerne les revêtements, EHRESMANN continue à étudier à fond la question, en vue d'arriver à une synthèse entre les 2 papiers "Topologia Bourbachica III" et le contre-projet CARTAN sur les espaces étalés (qui semble d'ailleurs assez satisfaisant à première vue). Il songe aussi à raccorder cette question à celle des groupes d'homotopie (en tant qu'ils sont indépendants des théories combinatoires) ; à son avis, la place de ce chapitre dans Bourbaki serait donc comme chap. IX de la Topologie générale.

C'est toutefois assez indépendant des chap. VII et VIII pour être discuté (sinon exposé) en même temps que ces derniers (ou même avant).

L'état actuel des travaux et les engagements de chacun (branche européenne) sont les suivants :

CARTAN a presque terminé son rapport sur l'Intégration (touchant surtout les questions relatives au chap. VII du plan ci-dessus) ; il essaie par ailleurs de continuer ses études sur les horologies sans être encore parvenu à démontrer le théorème fondamental de la dualité horologique. Enfin, il a pondu un contre-projet sur les espaces étalés, qui semble clarifier et mettre au point (en partie tout au moins) le dernier projet sur les revêtements.

DELSARTE a presque terminé le chap. I de l'Intégration : il promet pour Juillet les chap. II et III (du plan ci-dessus).

DE POSSEL a mis au point, pour son cours, une théorie élémentaire des différentielles, qui pourra être utile pour les Techniques élémentaires.

DIEUDONNÉ compte envoyer à l'imprimeur les chap. III et IV de la Topologie avant fin Mai, avec les modifications décidées au Congrès. Il a terminé le chap. V de la Topologie, et va entamer le chap. VI. Il a presque terminé le chap. V (et dernier) du Livre IV. Enfin, il continue à rédiger l'Algèbre, où il est arrivé au milieu du chap. V (Divisibilité).

EHRESMANN promet pour Juillet une première rédaction sur les espaces étalés et revêtements.

Terminons en donnant quelques indications sommaires sur la physionomie du Congrès, ce, à l'usage des lointains absents.

Signalons d'abord que l'influence traditionnellement catastrophique des grandes heures bourbachiques sur le cours des événements politiques n'a pas manqué de se faire sentir (voir les journaux de ces jours-là, où il est entre autres fortement question du mont Olympe, symbole incontestable de la grandeur de Bourbaki!). A ceux qui objecteraient qu'il est vraiment trop facile, à une époque où tous les événements peuvent être qualifiés d'historiques, de trouver dans l'actualité journalière des manifestations de la puissance du Maître, nous répondrons par un seul fait : dans la nuit du 16 au 17 Avril, seconde nuit du Congrès, Clermont connaissait sa première alerte depuis la cessation des hostilités, nouvelle preuve, nous accordera-t-on sans doute, du mauvais vouloir de certaines puissances cachées, dont Bourbaki a su jusqu'ici heureusement déjouer les desseins ténébreux !

A part ce phénomène traditionnel et marquant, le Congrès fut surtout caractérisé par un annui latent, dû évidemment à la nature des sujets examinés. DIEUDONNÉ oubliera de parler du plan général et de ce qu'on ferait au Livre XXVII, CARTAN n'eut aucune astuce graveleuse, seuls EHRESMANN et DELSARTE conservèrent leur attitude habituelle, qui est de n'en pas avoir. Signalons seulement, pour mémoire, la nombreuse correspondance de CARTAN et sa propension marquée à se répandre en courses variées et en visites nombreuses à toutes ses familles et pseudo-familles.