LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique).

N° I - 15 Mars 1940.

A tous nos frères en Bourbaki, salut et bénédiction.

Voici plus de six mois que la colère de Bourbaki s'est déchaînée, et que son peuple choisi gémit dans l'adversité, dispersé aux quatre coins de l'Univers. D'aucuns, sans connaître la main qui les a frappés, en demeurent encore étonnés, le nez dans la poussière, cherchant dans les grondements de l'air et de la terre un présage incertain d'une fin prochaine de leurs maux, et usant leurs forces à des besognes serviles ; d'autres, isolés et privés de tout secours vraiment bourbachique, se sont laissés aller, dans leur désespoir, jusqu'à porter leurs offrandes à de faux dieux, en l'honneur de qui ils crachent jour et nuit la flamme et le fer vers le ciel. Partout règne le découragement ; nul ne chante plus la gloire de Bourbaki et les ennemis de la vraie Mathématique se réjouissent dans le fond de leur coeur.

Or, sachez que la miséricorde de Bourbaki est infinie, et qu'en ces temps de détresse, il a daigné se manifester en personne et confondre ses detracteurs. Le fascicule I (Résultats des Ensembles) est paru : quelques rares fidèles ont eu le privilège de le voir et de l'admirer. Le fascicule II , ayant franchi le cap des ultimes épreuves ne saurait tarder à son tour. Mais la route est encore bien longue jusqu'à l'achèvement de l'Oeuvre et la grande médaille en chocolat (n^{o} 63 du Jeu de l'Oie bien connu). Ce Bulletin se propose d'y contribuer et de ranimer les énergies défaillantes : il servira de véhicule à la discussion des Livres et chapitres déjà polycopiés, diffusera tous renseignements sur les travaux en cours, et en général, toutes informations utiles. Que les cerveaux donc se dérouillent ! Que les plumes grattent le papier ! Que le cliquetis des machines à écrire et la rumeur des presses portent en tous lieux le nom de Bourbaki ! Amen.

La rédaction.

(Adresse actuelle de la rédaction : Lieutenant Dieudonné, 196è Batterie, 404è Rég^{t} de D.C.A., Guérigny (Nièvre)).

I. Parties polycopiées.

Vu l'impossibilité actuelle de tenir un Congrès, un essai de discussion par correspondance va être tenté pour les chapitres déjà tirés de la Topologie générale. La première tranche de la discussion portera sur les Chapitres III, IV, V et VI. La rédaction invite instamment chacun à lui envoyer ses critiques, observations, remarques contre-projets, etc..., le tout sous la forme la plus détaillée et la plus constructive possible ; une première phase de la discussion est jointe en Annexe au présent numéro, les numéros suivants en publieront les progrès ultérieurs, en groupant toutes les réponses reçues de la manière la plus commode.

II. Travaux en cours.

Algèbre. Ehresmann est prié de renvoyer d'urgence (ou de faire renvoyer par son épouse) à la Rédaction tous les papiers sur l'Algèbre qu'il détient, en vue d'une redistribution ultérieure. Dieudonné rédige actuellement une 2è version du ch.I (Lois de composition).

Espaces vectoriels topologiques. Cartan poursuit actuellement des recherches sur la théorie générale de la dualité, dont il attend beaucoup, et dont les premiers résultats sont très encourageants. Dieudonné a commencé la rédaction des 2 premiers chapitres (indépendants de la théorie Cartanique).

Intégration. Le prochain numéro de ce Bulletin publiera un résumé détaillé du projet Weil sur l'Intégration, avec des remarques complémentaires de Dieudonné. Par ailleurs, Cartan a obtenu de nouveaux résultats dans la voie où il s'était engagé en 1938 et se propose de nous les communiquer bientôt.

Intégration des formes différentielles. Weil croit enfin tenir le bon bout : espérons qu'il ne le lâchera pas !

III. Informations diverses.

En ce qui concerne la répartition des exemplaires du fascicule I que Freymann met à notre disposition, chacun est prié de faire savoir à la Rédaction :

1° combien d'exemplaires il a déjà reçus ;

2° combien d'exemplaires il désire recevoir pour lui-même ;

3° le nom et l'adresse des personnes à qui il désirerait faire envoyer des exemplaires.

Pour tout cela, prière instante de ne pas s'adresser directement à Freymann ; la Rédaction fera le nécessaire pour donner satisfaction aux demandes faites dans la mesure du possible. De cette manière, il ne risquera pas d'y avoir de doubles emplois.

A N N E X E

OBSERVATIONS CARTAN (O.C) ET CONTRE-OBSERVATIONS DIEUDONNE (C.O.D.) SUR LES CHAPITRES IV ET VI DE LA TOPOLOGIE.

CHAPITRE IV (Nombres réels).

p. 27 : O.C : avant déf. 2 , rajouter

$x < y$ et $x+z < y+z$ sont équivalents ;

$x+x=0$ entraîne $x=0$; plus généralement $n.x = 0$ entraîne $x = 0$.

C.O.D. : d'accord.

p. 31, ligne 8 : O.C : ne pas oublier que l'on a proscrit la "base" d'une topologie.

C.O.D. : inexact, voir ch.I, § 2 .

p. 32 et suiv. : O.C : il y a mélange regrettable entre groupes archimédiens et complétion.

C.O.D. : d'accord.

p. 33 O.C. : il faut dire que la structure d'ordre sur $\hat{E}$ est unique.

C.O.D. : d'accord.

p. 35, lignes 5 à 8 : O.C : une démonstration directe ne serait peut-être pas inutile.

C.O.D. : je n'en vois pas la nécessité.

p. 35 et suiv.: O.C : A partir d'ici, salade abominable ; pourquoi la compacité et pas la connexion ? Que viennent faire ici les noyaux de groupes ? Reporter à un § spécial ce qui concerne les noyaux.

C.O.D. : voir mon contre-projet.

p. 38, lignes 5 à 13 : il eût été bon, au ch.III, de remarquer que, si G' est un sous-~~xxx~~ groupe partout dense d'un groupe topologique G , et si G' $\neq$ G , le complémentaire de G' est partout dense.

C.O.D. : d'accord.

p. 39, 11 dernières lignes : O.C.: ceci devrait trouver place dans le ch.III, pour les fonctions à valeurs dans un groupe topologique quelconque.

C.O.D : d'accord.

p. 40 : O.C : il est paradoxal que la condition nécessaire ne vienne que p. 43, alors qu'elle est triviale, tandis que la condition suffisante est traitée dès la p.40. D'ailleurs cette démonstration a le tort de faire intervenir l'axiome d'Archimède, alors qu'intervient seulement le fait qu'on a affaire à un ensemble totalement ordonné compact (voir mon contre-projet). En outre, pour caractériser les ensembles connexes, il faut avoir parlé de la borne supérieure. Conclusion : "borne sup." doit venir avant "connexion" .

C.O.D : il est certain qu'il vaut mieux réunir les deux parties de la caractérisation des parties connexes de la droite, et pour cela, mettre la borne supérieure avant la connexion ; mais la démonstration de la p.40 a l'avantage de faire intervenir un principe bien plus général que celui de la borne sup., celui des V-chaînes, et me semble donc préférable ; le reproche de faire intervenir l'axiome d'Archimède n'a guère de portée, car cet axiome intervient bien pour démontrer que la droite est localement compacte !

p. 42 O.C : la prop.3 serait avantageusement remplacée par : la borne supérieure d'un ensemble majoré non vide est le seul majorant adhérent.

C.O.D : c'est un énoncé équivalent à ajouter aux autres.

p. 44-45 , dém. du 2° du th.4 : O.C : le fait que la correspondance est bicontinue résulte simplement du fait qu'elle conserve l'ordre.

p. 45 : O.C.: longueur d'un intervalle à joindre à $|x|$. Pas à sa place ici.

p.46 et 47 : O.C : le fait que les composantes connexes d'un ouvert forment une famille dénombrable résulte simplement du fait qu'on a un ensemble dénombrable partout dense.

C.O.D (pour ces trois observations) : d'accord.

p. 50, lignes 3 à 10 : O.C : référer aux notions générales qu'il aura fallu donner dans le ch.III .

C.O.D. : d'accord.

p. 50 O.C : pour la caractérisation topologique des intervalles de $\mathbb{R}$, il serait plus esthétique de ne se servir que de la fonction exponentielle, ainsi que des translations et homothéties. Rien ne s'y oppose, car, à mon avis, l'isomorphie du groupe multiplicatif des réels >0 et de $\mathbb{R}$ doit être traitée en même temps que la multiplication.

C.O.D : je ne vois pas ce que la fonction a^x a de plus "esthétique" que la fonction $x/(1+|x|)$. L'emploi de cette dernière a d'ailleurs l'avantage de se généraliser à $\mathbb{R}^n$ (voir ch.V, §3,prop.2). En outre, démolir toute l'ordonnance si satisfaisante du ch.VI pour une raison aussi purement sentimentale me semble excessif (voir mes critiques au contre-projet Cartan).

p. 52 : O.C : qu'est-ce que ces exercices ont à voir avec les groupes ordonnés ?

C.O.D : observation pertinente ; je serais d'avis de faire un Appendice où on traiterait de façon aussi succincte que possible les principales propriétés des nombres p-adiques.

p. 53 : O.C : pour la topologie de la droite achevée, définir un système de générateurs de la topologie qui ne fasse pas jouer un rôle particulier à $+\infty$ et $-\infty$; cette définition doit être valable pour tout ensemble ordonné. Les générateurs de la topologie sont les intervalles $x > a$ et $x < b$ (a et b dans l'ensemble).

C.O.D. : l'intérêt de cette observation me paraît bien mince ; elle ne se comprend que si on suit Cartan dans ses préoccupations relatives aux ensembles totalement ordonnés généraux, que je trouve pour ma part tératopologiques (voir mes critiques à son contre-projet).

p. 55 : O.C : seul le fait que $\overline{R}$ est ordonné intervient.

C.O.D. : même remarque que pour la précédente observation.

p. 56 : O.C : réserver pour un paragraphe spécial l'addition et la multiplication dans $\overline{R}$: on y traiterait aussi les propriétés des fonctions numériques qui font intervenir l'addition et la multiplication (p. 69 et 70).

C.O.D. : je ne vois pas l'intérêt de cette modification.

p. 60 et suiv. : O.C : reporter les séries au début de l'intégration, en réservant toute discussion sur le fond.

C.O.D : je ne suis pas de cet avis ; on peut réduire au quart la rédaction actuelle en utilisant les filtres et en définissant la somme "en vrac" sans partager en parties positives et négatives (le procédé se généralise à un espace linéaire quelconque). Il est d'autre part ridicule de se mettre un carcan pareil en refusant d'utiliser une notion si simple et naturelle jusqu'à ce qu'on ait défini l'Intégrale dans le cas général ; exemple, la représentation décimale d'un nombre réel, où il faut faire des contorsions verbales si on ne veut pas parler de série.

p. 68 et suivantes : O.C : classer les propriétés : 1° celles qui ne font intervenir que l'ordonnance ; 2° celles qui font en outre intervenir l'addition et la multiplication.

C.O.D : d'accord.

p. 76 : O.C : th.1, joindre à la connexion ; th.2 , joindre à la compacité.

C.O.D : contraire aux décisions prises, d'après lesquelles, en raison de l'importance particulière des théorèmes de Weierstrass, il avait été entendu qu'on les énonçait à nouveau dans ce § .

p. 77 et suivantes : O.C : je demande un § spécial pour les fonctions semi-continues. Cette notion ne faisant intervenir que la structure de totalement ordonné (de l'ensemble des valeurs), elle prendrait place avantageusement tout au début, dans des généralités sur les ensembles totalement ordonnés. En outre, il faut donner d'une fonction semi-continue inf^{t} (ou sup^{t}) une première définition qui ne fasse pas intervenir le théorème de la borne supérieure autrement dit qui soit valable pour un ordonné <u>non achevé</u>.

C.O.D : jusqu'à preuve du contraire, tout cela est de la tératopologie pure !

p. 78, O.C : le th.4 est valable si l'espace des valeurs n'est pas achevé : l'ensemble des valeurs <u>prises</u> par f semi-continue inférieurement sur un compact possède un <u>plus petit élément</u>.

C.O.D : même remarque.

<u>CHAPITRE VI</u> (<u>Groupes à un paramètre</u>).

O.C : dans toutes ces questions, il y a avantage à procéder par étapes : 1° caractériser axiomatiquement le groupe $\mathbb{R}$ et ses sous-groupes (pris en entier) ; 2° passer de là aux noyaux de groupes, ce qui d'ailleurs n'est pas beaucoup plus difficile ; mais à vouloir commencer par les noyaux, on surcharge l'exposé de façon pénible.

C.O.D : pas d'accord ; l'argument me semble plutôt contradictoire : s'il n'y a pas plus de difficultés à traiter le cas des noyaux de groupes que celui des groupes entiers, on ne voit pas pourquoi faire 2 fois de suite des raisonnements analogues, c'est celà qui surcharge l'exposé !

p. 43-45 : O.C : on peut réduire celà à presque rien si on utilise la prop. 2 du § 4 du ch. III ; voir mon contre-projet.

p. 46 : O.C : la déf. 2 me choque. Par exemple, dire que le produit direct $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ordonné lexicographiquement, est un groupe à 1 paramètre, me paraît abusif ! Il faut donc simplement parler de <u>noyau de groupe à un paramètre</u>.

p. 47 : O.C : ligne 10 en remontant, $g(y^{-1}) < g(x^{-1})$ est inutile (cf. déf. des groupes ordonnés).

p. 48 : O.C.: la définition d'un homomorphisme de $\mathbb{R}$ sur G est correcte, mais peu esthétique. Je préfèrerais ceci : partons de l'isomorphisme $x \to f(x)$ entre noyaux de groupes pour prolonger f à $\mathbb{R}$, posons, pour x quelconque, $f(x)=nf(x/n)$, n étant assez grand pour que x/n appartienne au noyau. Cette définition est indépendante de n , car $f(x/n)/p = f(x/pn)=f(x/p)/n$. Que f définisse un homomorphisme est alors évident.

A ce sujet, si, comme je le demande, G n'est pas a priori supposé commutatif, il faut remarquer tout d'abord (au ch. III) que, dans un groupe topologique, le sous-groupe engendré par un voisinage abélien de l'unité est abélien.

C.O.D : d'accord sur les 4 remarques ci-dessus.

p. 54 : O.C : produits infinis à reléguer avec les séries.

C.O.D : voir observations sur les séries.

p. 56 : O.C : le théorème de l'Alembert est-il là à sa place ?

C.O.D : la démonstration est si simple qu'il serait dommage, à mon avis, d'attendre jusqu'au Livre consacré aux fonctions analytiques pour savoir que le corps des nombres complexes est algèbriquement fermé.

fin du ch.VI (§ 5) : O.C : le joindre aux matières du ch.V .

C.O.D : voir mes critiques du contre-projet Cartan.

Exemples de Cartan pour les groupes ordonnés non abéliens :

1° groupe G formé des couples (a,b), où $a > 0$, b réel quelconque ; la loi de composition est celle qui correspond à la composition des applications $x \to ax+b$; enfin, on pose $(a,b)\leqslant(a',b')$ si $a<a'$ ou si $a=a'$ et $b\leqslant b'$. Ce groupe a un voisinage de l'unité abélien.

2° groupe G' formé des suites (α_n) d'éléments de G , avec la loi de composition $(\alpha_n)(\beta_n)=(\alpha_n.\beta_n)$, et en ordonnant lexicographiquement ; aucun voisinage de l'unité dans G' n'est abélien.

CONTRE-PROJET CARTAN POUR LES

CHAPITRES IV et VI.

Résumé : les matières du ch.IV (sauf § 6) et VI (sauf § 3) sont refondues en un seul chapitre, détaillé ci-dessous. Un autre chapitre est consacré à l'actuel ch.V et au § 3 du ch.VI (nombres complexes). Quant aux séries, elles sont reportées au début de l'Intégration.

---

§ 1 . Espaces totalement ordonnés.

Définition : E ensemble totalement ordonné ; les intervalles ouverts illimités, à droite et à gauche, engendrent une topologie (dite définie par la relation d'ordre) ; E , muni de ces deux structures, est appelé espace totalement ordonné.

Système fondamental de voisinages de a ; cas où a est le plus petit ou le plus grand élément, cas général. L'espace est séparé.

Structures induites sur un sous-ensemble.

Si a majore une partie A , il majore l'adhérence $\bar{A}$; en particulier, les intervalles $\left]\leftarrow ,a\right]$, $\left[a,\rightarrow\right[$, $\left[a,b\right]$ sont fermés.

L'ensemble B des majorants d'une partie A est fermé .

<u>Théorème</u>. <u>Dans un espace totalement ordonné compact E , toute partie possède une borne supérieure</u>.

E possède un plus grand élément, car les intervalles fermés illimités à droite ont une intersection non vide. Si $A \subset E$, et si B est l'ensemble des majorants de A , B est non vide, fermé, donc compact ; l'intersection des ensembles fermés $B \cap \left]\leftarrow, x\right]$, où x parcourt B , n'est pas vide.

<u>Réciproque</u>. <u>Si, dans un espace totalement ordonné E , toute partie possède une borne supérieure, E est compact</u>.

Si $\mathfrak{F}$ est un filtre, a la borne supérieure des éléments de E qui minorent au moins un ensemble de $\mathfrak{F}$, a est adhérent à $\mathfrak{F}$

<u>Remarque</u> : a est le plus petit des points adhérents à $\mathfrak{F}$; on l'appelle la plus petite limite de $\mathfrak{F}$; de même pour la plus grande limite.

Caractérisation des intervalles d'un espace totalement ordonné compact : avec a et b , contient tous les points de l'intervalle qu'ils bornent.

<u>Théorème de prolongement</u>. Démonstration du texte (Appendice du ch.IV); remarquer que tout intervalle ouvert de $\tilde{E}$ a pour trace un ensemble ouvert de E .

<u>Exercice</u>. $\tilde{E}$ est caractérisé entièrement si on précise que tout intervalle <u>semi-ouvert</u> de $\tilde{E}$ a une trace non vide sur E .

<u>Connexion</u>. Si E est totalement ordonné, et $A \subset E$ connexe, et si $a \in A$, $b \in A$, $a < b$, l'intervalle $\left]a,b\right[$ n'est pas vide et est contenu dans A (A "n'a pas de trou"). Si on plonge E dans $\tilde{E}$ compact, <u>A est un intervalle</u> de E sans trou.

Réciproque : si un intervalle d'un compact est sans trou, il est connex

<u>Conclusion</u> : les parties connexes d'un totalement ordonné connexe E sont les intervalles de E .

<u>Fonctions à valeurs dans un espace totalement ordonné</u>.

1) <u>Fonctions définies dans un ensemble quelconque</u>.

Définition de $f \leqslant g$. Quand l'espace des valeurs est compact, définition de $\sup\limits_{x \in A} f(x)$, etc...

2) <u>Fonctions définies sur un ensemble filtré</u>.

$f \leqslant g$ entraîne $\lim f \leqslant \lim g$ quand ces limites existent. Si f est monotone, l'ensemble des arguments un ordonné filtrant, et l'espace des valeurs compact, $\lim f$ existe.

Pour un ensemble filtré quelconque, et lorsque l'espace des valeurs est compact, définition de $\lim.\sup f$, etc...

3) <u>Fonctions définies sur un espace topologique</u>.

Si f est <u>continue</u>, l'image d'un compact est un compact ; l'image d'un connexe, dans un espace totalement ordonné connexe E , est un intervalle de E .

Caractérisation des homéomorphismes d'un intervalle d'un espace totalement ordonné connexe sur un intervalle d'un espace totalement ordonné connexe : il faut et il suffit que f soit continue et strictement monotone.

f est <u>semi-continue inférieurement</u> au point a si, pour tout $\alpha < f(a)$, on a $f(x) > \alpha$ aux points x suffisamment voisins de a ; donc si $\overset{-1}{f}(]\alpha, \rightarrow[)$ est un voisinage de a lorsque cet ensemble contient a . f est semi-continue inférieurement en tout point si $\overset{-1}{f}(]\alpha, \rightarrow[)$ est <u>ouvert</u> pour tout α ; condition équivalente : $\overset{-1}{f}(]\leftarrow, \alpha])$ <u>fermé</u> pour tout α . Remarque : il suffit que cette condition soit remplie pour des α partout denses.

Si f et g sont semi-continues inférieurement, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ le sont.

L'image d'un <u>compact</u> A par une f semi-continue inférieurement possède un plus petit élément.

f continue équivaut à f semi-continue à la fois inf^t et sup^t.

Fonction semi-continue à valeurs dans un totalement ordonné <u>compact</u> : $\lim\inf_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Enveloppe supérieure d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement.

----

§ 2. <u>Groupes ordonnés</u>.

Relation d'ordre compatible avec structure de groupe sur G : fait de G un ensemble totalement ordonné, avec invariance par translation à gauche ou à droite. Equivalence de $x \leq y$, $xy^{-1} \leq e$, $y^{-1}x \leq e$, $y^{-1} \leq x^{-1}$. Multiplication des inégalités membre à membre. $x^n > e$ (n entier >0) entraîne $x > e$; $x^n = e$ entraîne $x = e$. Eléments positifs (ensemble P) ; éléments négatifs (ensemble N) ; propriétés : $P \cup N = G$, $P \cap N = \{e\}$, $aPa^{-1} = P$ pour tout a ; $P^{-1} = N$, $P.P \subset P$. Réciproquement, la donnée de P et N satisfaisant à ces conditions définit une structure de groupe ordonné.

<u>Groupe topologique ordonné</u>. <u>Théorème</u>. La topologie définie par la structure d'ensemble totalement ordonné est compatible avec la structure de groupe.

D'où : groupe topologique ordonné. Pour un groupe topologique donné une structure d'ordre sera dite compatible avec la structure de groupe topologique si elle est compatible avec la structure de groupe et avec la topologie.

Sous-groupes d'un groupe topologique ordonné.

Théorème. Si G' est un sous-groupe partout dense d'un groupe topologique ordonné G , la relation d'ordre induite est compatible avec la structure de groupe topologique induite.

Réciproquement, si G' est un sous-groupe partout dense d'un groupe topologique G , et si une relation d'ordre sur G' est compatible avec la topologie induite sur G' , elle se prolonge, d'une manière et d'une seule, en une relation d'ordre sur G , compatible avec la structure de groupe topologique de G (on montre qu'on a nécessairement P = adhérence de P' , etc...)

Complétion : si on opère comme ci-dessus sur le complété d'un groupe topologique ordonné G , on obtient un groupe topologique ordonné complet $\hat{G}$, et un seul, tel que G soit partout dense dans $\hat{G}$.

Groupes archimédiens. Définition : quel que soit $x \neq e$, le sous-groupe engendré par x n'est pas majoré. Poser, pour $x > e$, y quelconque, $\rho(x,y)$ = plus grand des n tels que $x^n \leq y$. Exemple : groupe additif des rationnels, $\rho(1,y)$ = partie entière de y.

Tout groupe archimédien discret est isomorphe au groupe additif des entiers : si x est le plus petit élément $> e$, on a $y=x^{\rho(x,y)}$ pour tout y .

Pour un groupe non discret, archimédien équivaut à : tout voisinage de l'unité engendre le groupe. Tout groupe ordonné connexe est archimédien. Pour un groupe archimédien non discret, on a $y = \lim_{x \to e, x > e} x^{\rho(x,y)}$, d'où résulte la commutativité.

Tout sous-groupe d'un groupe archimédien est archimédien.