LA TRIBU NON NUMÉROTÉE

COTE HCT 005

TEXTE OBSERVATIONS DU CONGRÈS DE PARIS
SUR LES CH. I ET II DU LIVRE ÉLÉMENTAIRE
15-18/III/1947

FONDS HENRI CARTAN

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 6

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 6

Présents : Cartan, Chabauty, Ehresmann (intermittent), Godement, Pisot, Roger, Schwartz.

OBSERVATIONS DU CONGRÈS DE PARIS (15-18 mars 1947) sur les Chap. I et II du Livre élémentaire.

[Réponse de D. et W. : voir lettre de Dieud. du 5 avril 1947]

Après de longues et vaines discussions rappelant l'époque héroïque de Besse, les trotzkistes ont fini par se rallier au point de vue du rédacteur dans ses commentaires, point de vue déjà adopté par W. et Dieud., et, dès avant le Congrès, par Cartan et Chabauty : il s'agit du théorème de ~~Schefer~~ Scheffer sur la détermination d'une fonction par la connaissance de sa dérivée en tous les points du complémentaire d'un ensemble dénombrable.

Quant à la suggestion du rédacteur relative à la place respective des fonctions numériques et des fonctions à valeurs dans un vectoriel, voici la position finale du Congrès : d'abord, accord, bien entendu, pour traiter directement le cas des vectoriels pour les notions générales jusqu'à la page 11 (accroissements finis exclus). La question reste ouverte de savoir s'il y a lieu, dans ce Livre élémentaire, d'envisager autre chose que des espaces normés, car la notion d'espace vectoriel topologique, sans norme, est moins immédiate et nécessiterait des développements spéciaux. Quant aux accroissements finis, il est apparu que Hahn-Banach n'a rien à voir avec la question : ~~la démonstration du~~ le th. des accroissements finis [le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$ appartient au même ensemble fermé convexe que les dérivées dans l'intervalle $[a,b]$], se démontre directement comme pour les fonctions à valeurs numériques, sans la théorie des hyperplans d'appui. Précisons : si f'_d appartient à un convexe K dans l'intervalle $[a,b]$, soit c la borne sup. des y tels que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ appartienne à K+V pour tout x tel que $a \leq x < y$; V désigne un voisinage de o, donné une fois pour toutes. On montre, par un raisonnement habituel, que c est nécessairement égal à b. Ensuite, on fait varier V : l'intersection des K+V est l'adhérence de K.- Reste la question des "cas limites" : là, il nous paraît inutile de préciser ce qui se passe pour les fonctions à valeurs dans un vectoriel (car cela entraînerait assez loin dans la théorie des ensembles convexes), et seul le cas des fonctions numériques nous paraît devoir être précisé dans ce Livre élémentaire.

Au point de vue présentation, il nous parait bon de traiter d'abord le théor. des accr. finis pour les fonctions numériques, et d'indiquer ensuite dans quelle mesure on le généralisera aux fonctions à valeurs dans un vectoriel.

D'autre part, il paraît souhaitable de bloquer dans un même paragraphe tout ce qui se rapporte à la notion de convexité ; la théorie des fonctions convexes y trouverait sa place. Mais où placer ce bloc convexe ? Tout au début nous paraîtrait fâcheux ; mais d'autre part, on aura besoin du th. des accr. finis pour les fonctions à valeurs dans un vectoriel (au moins normé) pour pouvoir traiter de l'unicité de la primitive d'une fonction à valeurs vectorielles. Le Congrès n'a finalement pris aucune décision sur ce bloc convexe.

Autres questions de plan : On propose de limiter le § 1 (du Ch. I) à tout ce qui est facile et marcherait (en gros) pour tout corps valué, c'est-à-dire pages 1-11 auxquelles on joindrait les p.16 et 17. Un § 2 serait consacré aux accroissements finis, qui font intervenir essentiellement la structure de la droite réelle, et ne vaudraient pas, par ex., pour le corps p-adique. Tout ce qui touche aux accr. finis serait bloqué dans ce § (matière des p.11-15 et 18-22), Bien entendu, le th. des accr, finis sera donné sous la forme Scheffer. ~~A ce § 2 on joindra des prop~~

fer. ~~Y~~ Dans ce § 2 ~~en joindra~~ seront comprises des propositions comme celle-ci: si f continue a une dérivée (sauf aux points d'un ensemble dénombrable), et si cette dérivée a une limite en un point a, f possède une dérivée en a égale à cette limite. cf corollaire prop 9

Questions de plan (Suite): le § des dérivées d'ordre supérieur et de la formule de Taylor vient, dans l'actuelle rédaction, couper fâcheusement la théorie des primitives, intégrales indéfinies et passage à la limite sous le signe somme. Au contraire, ce § viendrait facilement après le § (ou plutôt les deux § que nous demandons) sur la dérivée première et l'inégalité des accroissements finis. Nous demandons donc que la formule de Taylor vienne avant la théorie des primitives ; cela obligera, bien entendu, à renoncer à donner tout de suite le reste intégral de Taylor; ce dernier viendra à propos de l'intégrationpar parties itérée, qui ne se trouvera plus séparée de l'intégration par parties ordinaire.

Toujours au sujet de Taylor, et du § 3 du Ch.II (p! 118), le Congrès soulève la question des développements limités : où trouveront-ils place ? Le Congrès se refuse à envisager les dével. en série avant les dével. limités.

DÉTAIL.-

Pages 3-4 : fondre les prop. 1 et 2 en une seule : la dérivation est une opération linéaire (en détaillant, bien entendu). Faire suivre de : dérivée de u(f), où u est linéaire sur l'espace des valeurs de ~~f~~ f (cela ne résultera pas du th. des fonctions composées !). Exemple : dérivée d'une fonction à valeurs complexes ; exemple de 3[e] espèce : vitesse en projection.

P.4, prop.3 : avant de l'énoncer, écrire entre parenthèses: "dérivée d'un produit". Faire précéder l'énoncé de la prop.3 d'exemples d'applications bilinéaires, n'en donnerait-on qu'un ou deux, pour prendre en pitié le pauvre lecteur "élémentaire". Après la prop., ne pas oublier de signaler ~~que~~ le cas où l'un des facteurs du produit est constant.

P.5: mettre ce qu'on dit des polynomes en accord avec l'actuelle rédaction d'Algèbre. - En outre, donner ~~xxxx~~ l'exemple de la la dérivée d'un déterminant (fonction multilinéaire des lignes!) dont les éléments sont fonctions d'une variable réelle. - Enfin, dernier exemple à rajouter: ~~xxxxxxxxxxxxxx~~ dérivée d'un produit dans une algèbre normée (sur R).

A propos de la prop.3 : il ne faudra pas oublier, dans le § des ~~p~~ primitives, de mettre la formule d'intégration par parties pour les fonctions bilinéaires.

P.6, prop.4: modifier la parenthèse comme suit: "dérivée d'une fonction composée". Le corollaire 1 doit être érigé en proposition spéciale, énoncée pour 1/f lorsque f prend ses valeurs dans une algèbre normée complète.

P.6, prop.5 : mettre entre parenthèses: "dérivée d'une fonction réciproque".

P.7, ligne 9 du bas: après "espaces vect. top. sur K", rajouter entre parenthèses: "resp. anneaux normés sur un corps valué K".

P.8, 4 premières lignes : il semble qu'il n'y ait là rien de neuf si K'=R, et dans les autres cas, est-ce la peine de le dire ?

P.8, ligne 5 du bas: pourquoi "semi-ouvert" ?

P.8, définition 3 : étant donné les rectif. au Chap.IV, ce n'est pas ici une définition, mais un rappel. D'ailleurs, ce qu'il faut rappeler, c'est précisément la définition de la limite à droite, et pas seulement celle de la continuité à droite.

P.1o, prop.6 : à reléguer en exercice ! Ne conserver dans le texte que le corollaire de la p.11.

P.18, ériger la prop.13 en théorème.

P.21, prop.10: unanimité pour balancer le "théorème de Rolle" (en exercice!), sauf naturellement Charles, qui trouve que c'est, de tout le chapitre, le seul théorème intéressant du point de vue géométrique.
P.56, ligne 3 du texte: il ne faut pas supposer f' continue.
P.56, dire que D^n est une opération linéaire.
P.58: au lieu de donner la formule (12) comme conséquence du reste intégral, on peut ici prouver directement que si $f^{(n+1)}$ existe et est majorée par M dans un voisinage de a, on a (12). On pourrait signaler, au moins en exercice, que si $f^{(n+1)}$ appartient à un ensemble fermé convexe K, le reste appartient à l'ensemble $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ K.
P.59, remarque 2 : sa place est avec les développements limités. Idem pour les 4 premières lignes de la p.60.

Paragraphe des primitives et intégrales.-

On semble désirer que le terme de "primitive" soit réservé à une fonction qui a partout pour dérivée la fonction donnée. S'il y a des points exceptionnels en nombre fini ou en infinité dénombrable, dire "primitive impropre" (ou, par abus de langage, "primitive"). Dire tout de suite l'unicité de la primitive (impropre) à l'addition près d'une constante, si cette primitive existe.

Ensuite, au lieu de donner d'abord la prop.2 et le th.1 de la p.31, énoncer explicitement le théorème suivant, auquel on aura constamment à se référer : " Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de fonctions continues f (sur un intervalle compact I), dont chacune est une primitive (propre ou impropre) d'une fonction g. Soit Φ un filtre tel que: 1° g converge uniformément vers une fonction g_0 suivant Φ ; 2° f(a) a une limite suivant Φ , pour un point particulier a de I. Alors f converge uniformément, suivant Φ , vers une fonction continue f_0, qui est une primitive impropre de g_0 ."
[Remarque: pour prouver le dernier point, considérer f_0 comme limite d'une suite de fonctions f de l'ensemble $\mathcal{A}$].

La prop.2 et le th.1 deviennent des corollaires du théor. précédent. Il faut présenter les choses ainsi : on s'occupe d'abord des primitives des fonctions bornées dans un intervalle compact. [Ultérieurement, les "intégrales impropres" seront envisagées comme un problème de primitive de fonction non bornée, ou dans un intervalle non borné.]
P.32 : le Congrès préférerait ici qu'on n'utilisât pas Weierstrass, qui tombe sous le coup d'une procédure d'épuration (cf. discussions sur le Ch.X de Topologie). Il est excellent de le signaler s'il a été fait, mais on demande, en tout état de cause, de commencer par l'approximation par les fonctions en escalier(ou "étagées" ?).
P.35, corollaire 1 : l'inclure dans l'énoncé du théor. précédent, et le démontrer en considérant la fonction réglée comme limite d'une suite de fonctions étagées.
P.35, corollaire 3 : dire que la norme d'une fonction réglée est une fonction réglée.
P.36, la prop.4 tombe d'elle-même.
P.37, intégrales : dire que l'indétermination de la primitive disparaît quand on considère celle qui s'annule pour une valeur donnée x_0 de la variable.
P.37, notation $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$: il y aurait peut-être lieu d'attendre, pour introduire cette notation, d'avoir vu les sommes de Riemann, qui l'expliquent.- D'autre part, t (doit être) présentée comme une "variable

muette". Il est fâcheux de dire que "t ne joue aucun rôle", m que faut-il dire au juste sur les "variables muettes" ? On charge Weil de nous rédiger une escroquerie sur ce sujet.

P.38, prop.5: pour la démonstration, dire d'abord que la prop. est évidente si f est continue, puisque les sommes de Riemann sont les intégrales de fonctions étagées qui convergent uniformément vers f.

P.42, prop.7 : comme pour le th. des accr. finis, il faut aussi donner la prop. dans le cas d'un ensemble convexe d'un espace vectoriel. Bien entendu, dans la prop.7 et toutes les questions analogues, il faut tout diviser par (b - a), et n'introduire en somme que des moyennes [dans la version actuelle de la prop.7, il eût fallu supposer b > a].

P.43 et suivantes: intégrales impropres.- Poser d'abord le problème des primitives pour une fonction qui est réglée au voisinage de tout point sauf un nombre fini : tout revient à trouver la primitive dans chaque intervalle partiel, puis à faire le raccord aux bornes, si ce raccord est possible. On est simplement ramené à chercher si la primitive a une limite aux bornes ; extension à un intervalle infini, considéré comme intervalle fermé de la droite achevée L'actuelle définition 4 (p.43) devient une proposition qui donne une condition néces. et suff. d'existence de la primitive.

§ 4, pages 67 et suiv.- La prop. 1 n'est que la traduction, dans le cas d'une famille de fonctions, du théorème réclamé pour le début de la théorie des primitives, et relatif à un ensemble de fonctions. Cette traduction, sous la forme de la "prop.1", est inutile ici: il suffit de donner la traduction dans les termes de la prop.2 (p.68), du premier coup.

P.68 et 69, corollaires: commencer par le corollaire 2 (traduction des filtres en suites) ; quant aux 6 dernières lignes de la p.68, qui font suite au corol.1, les ériger en proposition séparée.

P.70:ce qui vient là s'applique même aux intégrales non impropres: il s'agit de savoir ce qui se passe quand la convergence des fonctions (que l'on intègre) est uniforme au voisinage de chaque point sauf un nombre fini de points exceptionnels. Préciser, d'autre part, sans plus attendre : "l'intégrale d'une fonction bornée est une fonctionnelle linéaire qui n'est pas continue pour la conv. uniforme, lorsque l'intervalle d'intégration n'est pas borné".

P.71: d'accord pour considérer l'interversion des limites, mais dans un style aussi peu rébarbatif que possible. Et dire, avant la déf.1, que la convergence suivant le filtre produit entraîne l'inégalité (5) ; ceci justifie la définition.

P.72: le total des ε nous semble être de 3 et non de 5 : ligne 15, il suffit de ε dans chacun des seconds membres.

P.72-73, corollaires: comme plus haut, commencer par le coroll.2. Faire remarquer que, dans les hypothèses du coroll.1, la démonstration de la prop.3 n'est autre chose que celle de la continuité d'une limite uniforme de fonctions continues.

P.74: dire explicitement que $\|u_n(x)\|$ est une fonction réglée.

P.75, prop.4: se placer dans les hypothèses suivantes : f'_α réglée en x, la convergence des f'_α étant uniforme en x. Les hypothèses de l'actuelle prop. 4 doivent venir en corollaire ~~XXXXXXXXXXXX~~. Modifier de la même manière la prop. 5, page 76.

P.77, première moitié:il faut expliciter la formule de dérivation d'une intégrale à limites variables.

P.78, avant la formule (12), on demande un virage dangereux. ~~Eviter de donner un numéro à une formule fausse, du moins tant qu'e~~

ter de donner un numéro à une formule fausse, du moins tant qu'elle n'est pas vraie !

Remarques isolées sur le Chap.II.-
On définira, bien entendu, une fonction convexe comme une fonction f telle que l'ensemble $y \geq f(x)$ soit convexe. P.83, la formule (2) résultera d'une formule analogue relative aux ensembles convexes. P.84, l'enveloppe sup. de fonctions convexes se traduira en intersection d'ensembles convexes.
P.85-86 : le "critère local" n'est malheureusement pas indiqué: pour tout x existe $\varepsilon(x) > 0$ tel que

$$f(x) \leq 1/2\ (f(x-h)+f(x+h))$$ [f semi-continue supérieurement]

quel que soit $h < \varepsilon(x)$. En particulier, une fonction qui est convexe au voisinage de chaque point est convexe.
Proposition précise pour la dérivation de la fonction exponentielle
On considère $\int_0^1 a^{x+t}dt$ (produit de composition de a^x et de la fonction caractéristique d'un intervalle). D'une part, c'est $a^x \int_0^1 a^t dt$, d'autre part, c'est $\int_x^{x+1} a^u du$, qui admet pour dérivée $a^{x+1} - a^x = a^x(a-1)$. Donc a^x a pour dérivée $a^x f(a)$, où $f(a) = (a-1)/\int_0^1 a^t dt$ est une fonction continue de a. Mais l'identité $(ab)^x = a^x . b^x$ donne, en dérivant, $f(ab)=f(a)+f(b)$, donc f est un logarithme (népérien), etc...
La convexité de a^x résulte du fait que sa dérivée seconde est > 0 ; déduire de là les inégalités entre moyenne géom. et moy. arithmétique. En somme, l'ordre de la rédaction actuelle est complètement renversé.

APPENDICE AU CONGRÈS

Lecture est faite de l'Appendice 1 (Applications universelles) du Chap.III d'Algèbre. L'auditoire est vivement intéressé, et une partie de l'auditoire est séduite. Il se manifeste néanmoins une assez vive opposition à l'insertion dudit appendice au Chap.III d'Algèbre. Ne sont pas opposants: Charles, parce qu'on y parle du groupe libre (!) ; Cartan, qui ~~préfère~~ aime mieux le voir au Chap.III d'Algèbre que dans le livre de théorie des ensembles, où l'on n'aura aucun exemple à montrer. Les opposants n'ont pas de suggestion précise à faire quant à la place la plus opportune de cet Appendice.

Le temps manqua pour lire l'Appendice sur les produits tensoriels infinis d'algèbres.

SUPPLÉMENT: p.24, donner en exercice : si f est dérivable sur I, la dérivée f' est bornée au voisinage de chaque point d'un ensemble ouvert partout dense (applic. du th. de Baire).

CHABAUTY demande :au sujet de la prop.5, p.76, envisager la possibilité de valeurs exceptionnelles de x, em nombre fini, pour lesquelles f'_α n'existe pas [et ceci, même dans le cas des intégrales propres]. Mais il est essentiel que ces valeurs de x ne dépendent pas de α .

Exercice proposé par Cartan (en relation avec le th. des accr. finis): si f continue dans I ~~est~~ "croissante à droite" en tout point de I sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable, f est croissante dans I [f est croissante à droite au point x_0 si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \geq x_0$ et suffisamment voisin de x_0].