La TRIBU non numérotée

COTE HCT 004

TEXTE Observations du Congrès de Paris
Sur le ch. X de Topologie Générale
18-20/I/1947

FONDS Henri Cartan

Nombre de pages numérisées 8

Nombre de feuilles prises en compte 8

Transmis pour communication, avec prière d'envoyer d'urgence vos observations éventuelles à CARTAN.

HCT004

2

OBSERVATIONS DU CONGRÈS DE PARIS (18-20 janvier 1947)
sur le Chap. X de Topologie générale.

Titres du § 1: pour les n^{os} 2 et 3, on préférerait: "convergence uniforme sur les ensembles d'une famille".[cf. la terminologie de la déf.2].

P.6, prop.2: référer éventuellement à la condition de séparation des espaces uniformes.

P.7, prop.4: ~~XXXXXXXXXX~~ Modifier l'énoncé de la prop.; ~~XXXXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~ " soit Φ un filtre sur $\mathcal{F}(E,F)$; pour que Φ soit convergent pour la structure $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$, il faut et il suffit qu'il soit un filtre de Cauchy pour $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ et qu'il converge pour $\mathcal{U}_s$." - Lignes 4 et 5 de la démonstration, écrire: "...tel que $(u(x),v(x)) \in V$ quels que soient u et v dans H, et x dans A; comme $u_o(x)$ ...". Ligne 7 de la dém., supprimer "mais"; lignes 8-9 de la dém., supprimer :"on a $(u_o,v) \in W(A,V)$ pour tout $v \in H$, ce qui démontre que".

P.7, théor.1:ligne 7 de la dém. ($1^{ère}$ ligne de la p.8), remplacer "il faut prouver" par "il suffit de prouver".

P.8, th.2: ligne 8 de la dém., rajouter "en vertu de la continuité de u" entre "d'autre part" et "il existe un voisinage".

P.10, prop.6: on demande le retour à l'ancienne rédaction (prop.4 de la rédaction antérieure):" Si un filtre.... dans un ensemble A, il converge uniformément dans l'adhérence $\bar{A}$." A la fin de la dém., supprimer en conséquence: E= .

Question générale de la topologie déduite de la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.- On a oublié, au Chap.II (Struct. uniformes), de dire que la topologie déduite de la struct. unif. borne sup. d'une famille de struct. unif. $\mathcal{U}_i$, est la borne sup. des topologies déduites des $\mathcal{U}_i$. Il faut réparer cet oubli au Chap.X (ou déjà au Chap.IX, à propos des écarts), et appliquer ici à la topologie ~~XXXXXX~~ de l'espace uniforme $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Ce principe permettrait d'alléger des énoncés, ou tout au moins des démonstrations, relatifs à la topologie de la convergance compacte: on est chaque fois ramené au cas d'un espace compact et de la convergence uniforme. Par ex., à la prop.7, sur laquelle nous faisons d'ailleurs toutes réserves: la bonne caractérisation de la topologie de la convergence uniforme sur un espace compact est celle donnée ~~XXX~~ au § 2 , corollaire de la prop.7. Nous demanderons du reste que ce "corollaire" soit érigé en théorème! La prop. 7 du § 1 pourrait être reléguée en exercice.

Ceci s'applique

P.11, prop.8.- A la fin de la dém., il est canularesque de faire appel au théor. qui dit que tout sous-groupe ouvert est fermé: prouver directement, ce qui est immédiat, que $\mathcal{B}_0(E,F)$ est fermé.

~~[illegible]~~

§ 2, n° ~~XX~~ 1 : rédaction de la remarque 1 qui suit la prop.2 : "dans l'énoncé de la prop.2, on a supposé le filtre $\Phi(x)$ convergent pour tout x ; il suffit de supposer $\Phi(x_0)$ convergent ".

§ 2, n° 2 : il faut arriver le plus vite possible ~~à~~ au coroll. de la prop.7, qui devient théorème. Voici des suggestions précises sur l'ordre à suivre. Le n° 1 prend fin après la prop.2 et les remarques qui la suivent. Le n° 2 commence aussitôt, avec la prop.4, dont on abrégera au maximum la démonstration. Puis, uniquement pour espaces compacts : prop. 3, suivie de l'actuel corol. de la prop. 7, qui devient théorème et s'énonce ainsi: "soit E un espace compact, F un espace uniforme séparé, H une partie de l'ensemble des applications continues de E dans F ; sur H, la topologie de la convergence uniforme ~~XXXXXXX~~ est la moins fine des topologies séparées telles que l'application $(u,x) \to u(x)$ de $H \times E$ dans F soit continue." On traduit ensuite ces résultats pour un E topol. quelconque et la convergence sur les parties compactes. Prendre la peine d'expliciter dans le cas d'un espace localement compact, et donner le corollaire (important): "si H est un ensemble d'applications continues d'un E localement compact dans un F uniforme séparé, et si H est muni d'une topologie telle que $(u,x) \to u(x)$ soit une application continue de $H \times E$ dans F, et telle que H soit compact, alors cette topologie sur H est celle de la convergence compacte". [Cela sert dans la théorie des noyaux de groupes de transformations]. Annoncer l'étude des ensembles compacts pour la convergence compacte (§ suivant). - Maintenant, on peut traduire les résultats précédents dans le langage des applications d'espaces produits: viennent ici le corollaire de la prop. 4, et la prop. 5 qui n'a pas besoin de nouvelle démonstration.- ~~XXXXXXXXX~~ Cette traduction pourrait faire l'objet d'un n° 3, pour décharger le n° 2.- Ainsi finit le § 2.

§ 3, n° 1: supposer tout de suite que les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont fermés.

§ 3, n° 2: ligne ~~X~~ 1 du n°, supprimer "autre".

~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~ Remarque suivant la prop. 1: au lieu de "la condition nécessaire que nous venons d'obtenir", écrire "l'équicontinuité de H relativement à toute partie A $\in \mathfrak{S}$ ".

<u>§ 3, n° 3</u>: tâcher d'éclairer la lanterme le plus tôt possible: le lecteur se demande où l'on veut en venir. Dire, au moins pour le théor. 2, qu'on va s'intéresser à la convergence compacte.

<u>§ 3, n° 4</u>: le théorème est-il d'Arzela ou d'Ascoli?

<u>§ 3, n° 5</u>: donner l'exemple: si E est un groupe topologique séparé, muni de sa structure uniforme gauche, et si F est un espace uniforme séparé, si enfin $x \to f(x)$ est une application uniformément continue de E dans F, alors les $x \to f(ax)$ forment une famille uniformément équicontinue.

<u>§ 3, n° 6</u>: dire que le plus petit ensemble <u>convexe</u> contenant une famille équicontinue est équicontinu avec même module d'équicontinuité. Idem pour les enveloppes supérieures et inférieures <u>finies</u>. Alors le corollaire de la prop. 7 se ramène immédiatement à la prop. 2.

<u>Oubli</u>: pour la prop.2 du § 3, il faudrait faire la remarque <u>explicite</u> que les éléments de H sont des fonctions <u>continues</u>.

<u>D'une manière générale</u>, ce § 3 laisse une impression pénible, mais nous n'avons pas su faire mieux! Il faudrait pouvoir alléger, mais y a-t-il vraiment quelque chose en trop? L'<u>équicontinuité</u> est-elle intéressante <u>en soi</u>,ou seulement dans la mesure où elle entraîne la compacité ?

Restent les <u>n^{os} 7 et 8 relatifs aux groupes d'homéomorphismes</u>. - Il nous semble qu'il y a 2 choses, l'<u>équicontinuité</u> et la <u>compacité</u> des groupes envisagés, et l'équicontinuité semble avoir un intérêt pour elle-même (prop.9), indépendamment des critères de compacité. D'autre part, pour chacune de ces questions, il y aurait deux points de vue: le point de vue <u>global</u>, le seul envisagé dans l'actuelle rédaction, et le point de vue <u>local</u>, dont il était question dans la rédaction antérieure. Enfin, reste la question de savoir s'il y a intérêt à envisager autre chose que des groupes d'<u>homéomorphismes</u>, notamment au théorème 4: quel est l'intérêt de ces groupes de <u>permutations</u> qui ne sont continues que sur les compacts? Avez-vous des exemples précis en vue ?

Voilà beaucoup de questions, auxquelles nous ne voyons pas de réponse nette. CARTAN suggère qu'on substitue au théor. 4 le théorème suivant (formulé dans le cas d'homéomorphismes d'un espace localement compact): "Soit G un groupe d'homéomorphismes d'un espace localement compact E. Si, lorsqu'on munit G de la topologie de la convergence compacte, il existe dans G un voisinage symétrique H de l'élément neutre qui soit relativement compact dans $\mathcal{C}_c(E,E)$, la topologie de G est compatible avec la structure de groupe, et G est sous-groupe partout dense d'un groupe $\overline{G}$ d'homéomorphismes de E, groupe qui est localement compact pour la topologie de la convergence compacte." Pour la démonstration, on montre que $u \circ v$ et u^{-1} sont des applications continues de $G \times G$ (resp. G) dans G, uniformément continues sur $H \times H$ (resp. H); ces applications se prolongent en applications continues de $\overline{H} \times \overline{H}$ dans $\overline{G}$ (resp. de $\overline{H}$ dans $\overline{H}$), et on montre que $\overline{G}$ se compose des $u \circ v$, où $u \in \overline{H}$ et $v \in G$.

En conclusion, il y aurait lieu d'étudier une nouvelle rédaction des n^os^ sur les groupes d'homéomorphismes, avant de donner le manuscrit à l'impression.

Bien entendu, la prop. 11 tombe, puisque nous avons demandé une prop. analogue pour le cas d'un ensemble quelconque (pas seulement un groupe) d'applications continues (cf. § 2, n° 2).

§ 4: approx. des fonctions continues numériques.

Dans l'hypothèse où ce § est maintenu au Ch.X (Voir plus loin), il importe d'abord de ne pas traîner le boulet des applic. continues à valeurs dans un espace normé: ou en n'en parle qu'à la fin, ou, si on en parle au début, c'est pour les liquider immédiatement, sans cacher son jeu et sans attendre le corollaire 1 dont la démonstration est scurrile. Il faut tout de suite montrer que les partitions continues de l'unité permettent d'approcher les fonctions à valeurs dans F par des comb. linéaires (à coeff. dans F) de fonctions numériques. Après quoi on ne parlera plus que de ces dernières.

D'autre part, la lecture du § prouve sans conteste combien il serait commode de pouvoir parler de "partition subordonnée à un recouvrement ouvert fini". On demande donc à nouveau que la définition en soit donnée au Chap.IX.

Enfin, quelles que soient les méthodes qu'on utilisera, il est infiniment désirable d'expliciter le "th. de Stone" sous la forme: "anneau de fonctions numériques contenant les constantes, et séparant les points de l'espace". Le plus souvent, c'est sous cette forme qu'on a à l'appliquer. ~~Nous soupçonnons quelque veto de Weil!~~

Question méthode: il est clair que tous les théor. d'approx. de ce paragraphe sont des conséquences immédiates du th. de Stone ci-dessus; par conséquent, si on pouvait démontrer directement, le plus vite possible, le th. de Stone, tout serait fini. Mais nous ne connaissons pas de démonstration qui ne fasse intervenir au moins un petit bout

y compris l'approximation des fonctions sur un produit

HcT004

de Weierstrass, ne serait-ce que le développement en série de $(1-u)^{\frac{1}{2}}$.
On est alors ramené à montrer que tout espace vectoriel V de fonctions continues numériques, réticulé ($f \in V$ entraîne $|f| \in V$), qui contient les constantes et sépare les points de l'espace (compact), est partout dense dans l'ensemble des fonctions cont. num.; ce qui se démontre avec les part. cont. de l'unité.

~~Nous nous rallions donc finalement au point de vue du rédacteur suivant lequel le théor. de Weierstrass est mis à la base de tout la théorie~~ Mais cela nécessite aussi le "lemme de décomposition" dans un réticulé, ce qu'on peut considérer comme une raison pour rejeter cette manière de faire, ou au contraire comme un argument en faveur du lemme de décomposition, qui n'intervient pas seulement dans la théorie de l'intégration.

Si on se rallie au point de vue du rédacteur et qu'on mette à la base des th. d'appr. le th. de Weierstrass, alors on a besoin de démontrer à part l'approximation sur les produits (ce qui est inutile dans l'autre manière de faire, puisqu'elle résulte de Stone), et en outre il y a l'inconvénient esthétique d'avoir (pour démontrer la prop. 3) à faire un prolongement d'Urysohn qui, après coup, ne sert à rien.

Reste la question de la méthode à employer pour démontrer Weierstrass. Ces questions de méthode avaient à peine été envisagées lors de l'examen de la précédente rédaction (état 3), qui était la première où l'on parlât de l'appr. des fonctions numériques. Argument contre Bernstein: c'est artificiel sans le contexte des probabilités, et cela n'"explique" pas la raison de l'approximation par les polynomes, qui réside, nous semble-t-il, dans le fait que, sur le groupe additif de la droite numérique, le produit de composition d'une fonction continue, nulle en dehors d'un compact, et d'un polynome est un polynome de même degré. L'approximation avec les polynomes-noyaux, qui donne en même temps l'approximation uniforme des dérivées quand celles-ci existent, pourrait fort bien être donnée dans le Livre élémentaire, et il apparaît finalement que c'est bien dans ce Livre que serait la vraie place du th. de Weierstrass. - Argument pour Bernstein: précisément parce que c'est artificiel, c'est à sa place dans le Ch. X, où il est impossible de donner des idées générales sur la question, et où on doit se borner à arriver d'une manière ou d'une autre au résultat, puisque c'est ce résultat qu'on désire.

En conclusion, pourquoi désire-t-on tant obtenir ce résultat au Ch. X ? On a l'impression que c'est pour "rehausser l'intérêt du

Chapitre" ! Ce qui nous parait bien dans la ligne des Ch.IX et X, c'est l'approximation sur les espaces produits et l'utilisation des partitions continues de l'unité. Weierstrass ne peut arriver que par raccroc.

Nous posons donc encore une fois la question de savoir si Weierstrass doit être maintenu en Topologie générale. Et nous posons aussi la question du produit de composition et des noyaux sur la droite, pour le Livre élémentaire.

RÉPONSE de Dieudonné et Weil
(24 mars 1947)

[Insérer ici le texte de la lettre ci-jointe (datée du 24 mars 47) (lettre sur papier pelure), — depuis le signe ⊗ entouré d'un trait de crayon bleu, jusqu'au signe ⊕ entouré d'un trait de crayon rouge]

<u>THEOREME</u>.- Soit G un groupe ~~topologique~~ d'homéomorphismes d'un espace localement compact E, G étant muni de la top. de la conv. comp. dans $\mathcal{C}_c(E,E)$ ~~groupe muni d'une topologie (compatible avec la structure de groupe) telle que l'application (u,x) → u(x) de G×E dans E soit continue.~~ Supposons l'existence d'un voisinage H symétrique de l'élément neutre e, qui soit relativement compact ~~pour la topologie de la convergence compacte~~ (cf. th. d'Arzela). Alors la topologie de G est compatible avec la structure de groupe, ~~G est le de la convergence compacte~~, et G est sous-groupe partout dense d'un groupe $\widehat{G}$ d'homéomorphismes de E, localement compact pour la topologie de la convergence compacte.

~~Tout d'abord, pour montrer que la topologie de G est celle de la conv. compacte, il suffit de montrer que celle de H est la top. de la conv. compacte. On va montrer que l'adhér~~

On ~~va~~ montre~~r~~ que u v et u^{-1} sont uniformément continues sur H lorsqu'on munit ~~H~~ G de la structure uniforme de la convergence compacte.

De plus, u v et u^{-1} sont continues sur G. ~~Si H désigne l'adhérence de H dans $\mathcal{C}_c(E,E)$, H est un voisinage de~~ Soit $\widehat{G}$ l'adhérence de G, et $\widehat{H}$ l'adhérence de H dans $\mathcal{C}_c(E,E)$. L'application u.v de H×H dans G, et l'application u de H dans H, se prolongent en application unif. continue de $\widehat{H}\times\widehat{H}$ dans $\widehat{G}$, et en appl. unif. continue de $\widehat{H}$ dans $\widehat{H}$. Cela prouve que les éléments de $\widehat{H}$ sont des homéomorphismes. Reste à prouver que $\widehat{G}$ se compose des u v, où u $\widehat{H}$, et v G; les éléments de $\widehat{G}$ sont donc des homéomorphismes, et il reste à vérifier que $\widehat{G}$ est un <u>groupe</u>.