La Tribu N°9

COTE HCT 003

TEXTE La Tribu
(Bulletin œcuménique, apériodique et bourbachique)
15/II/1946

FONDS Henri Cartan

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 5

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 5

LA TRIBU

(Bulletin oecuménique , apériodique et bourbachique)

N° 9 - 15 Février 1946

DÉCISIONS DU CONGRÈS DE NANCY (9-11 Février 1946)

En dehors d'une lecture rapide (et quasi sans commentaires) des Notes historiques des chap.V-VIII de Topologie , et d'un essai de discussion du chap.III d'Algèbre , qui avorta faute de temps , le Congrès s'est essentiellement occupé de la dernière lecture du chap II d'Algèbre . Il est entendu qu'une fois les modifications énumérées ci-dessous effectuées , le chapitre sera livré à l'impression.

Modifications décidées (sur l'état 5 de la rédaction): A . Plan général : On insère entre les §§ 6 et 7 actuels un nouveau § en petits caractères (qui porte donc le n°7 , l'ancien § 7 sur les algèbres devenant § 8) , où on groupe tous les résultats sur les applications semi-linéaires qui sont actuellement éparpillés dans quatre §§ .

B. Détail des §§ :

§ 1 . Nouvel ordre des numéros : 1.Définition des modules .2. Modules unitaires .Espaces vectoriels . 3.Sous-modules et modules quotients . 4.Produits de modules ; somme directe d'un nombre fini de sous-modules . ~~XX~~ Sous-modules supplémentaires. 5. Combinaisons linéaires ; familles libres ; bases . 6.Sommes et sommes directes infinies . 7.Annulateurs ; modules monogènes .

Il est entendu que , dans ce § et le suivant , on signalera les propositions qui sont encore valables pour les groupes ~~XX~~ abéliens à opérateurs généraux .

Au n°3 , la prop.1 est supprimée . Au n°5 (nouveau) , appeler module libre un module unitaire ayant une base . Au n°6, ~~comme corollaire~~ le module $M^{(I)}$ est appelé module des sommes formelles d'éléments de M ; comme corollaire de la prop.7 (actuelle) , montrer que tout module sur A est quotient d'un module de sommes formelles de ses générateurs par le sous-module dit "sous-module des relations linéaires" entre ces générateurs . Au n°7 (nouveau) déduire de cette prop. la prop.3 (actuelle) comme corollaire

réserver cette dénom au cas où M est l'anneau de base ?

§ 2 . Le n°6 est repoussé au nouveau § 7 . Après la prop.3 , identifier dans le cas fini les $\mathcal{L}(M,F)$ à des sous-modules de $\mathcal{L}(E,F)$; signaler que pour que u soit un isomorphisme

Au n°5, faire le centre de $\mathcal{L}(E)$ quand E module libre

de E sur F , il faut et il suffit que l'image d'une base soit une base (quand E est module libre). /

§ 3 . Le cor. de la prop.1 devient proposition . La prop.2 reste proposition ; dans sa démonstration , signaler la proposition plus précise : étant donné un système de générateurs , toute partie libre maximale de ce système est une base .

Le th.1 et le th.2 sont remaniés comme suit : Th.1 : Tout espace vectoriel admet une base . De façon plus précise : Th.2 Etant donné un système de générateurs S de E et une partie libre L de E telle que $L \subset S$, il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset S$. En déduire le cor. actuel du th.1 ; la prop.3 actuelle ~~qui devient un corollaire~~ et son corollaire deviennent : cor.2 (th. d'échange) : étant donné une ~~système~~ partie libre L et une base B , il existe une partie B' de B telle que $L \cup B'$ soit une base ; cor.3 : tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire .

avec l'énoncé : "Tt espace vectoriel (à gauche) sur un corps K, etc..."

Corollaire immédiat du th.1 : prendre une base a_i de E/V ; les a_i forment une base d'un suppl. de V [sans Zorniels si E/V est de dim finie]

Pour le th.3 , garder la démonstration actuelle , le lecteur ne doit pas avoir besoin de Jordan-Hölder pour démontrer cela. Commencer seulement la récurrence à n=0 . Dans la déf.1 ; supprimer "linéaire" , et ne mentionner le terme "dimension linéaire" que lorsque E est un surcorps /. Introduire la notation dim E ; définir la codimension d'un sous-espace , notée codim V . Enoncer la remarque avant le cor.4 actuel comme nouveau cor.4 ; le cor.4 actuel devient proposition, et est suivi d'une proposition analogue pour les codimensions.

Faire un n° spécial sur les sous-espaces d'un espace vectoriel : tout ss.-espace d'1 esp. de dim. finie est ~~finie~~ de dim. finie ; codim. d'un tel ss.-espace , et, plus généralt, codim. d'un ss.-espace dont le suppl. est de dim. finie.

Au n°3 , après la déf.2 , énoncer en proposition que le rang de u est la codimension de $\overset{-1}{u}(0)$.

La notion de rang d'une application semi-linéaire est rejetée au nouveau § 7 .

§ 4 . Au n°1 , appeler "canonique" et non "fondamentale" la forme $\langle x, x' \rangle$; la noter $\langle x', x \rangle$ lorsque le module E est à droite ; dire en note de ~~bas~~ de page que la notion générale de forme bilinéaire sera définie ~~aux~~ au chap.III .

Au n°2 , on garde le mot "orthogonal" . Enoncer en proposition le fait que l'orthogonal d'une somme est l'intersection des orthogonaux de ses termes . Abréger la démonstration de la prop.3 en la rattachant à la prop.3 du § 2 (remaniée).Au n°4 , introduire le symbole de Kronecker δ_{ij} .

Nouveau plan du n°5 : D'abord dualité dans les espaces de dimension finie : 3 propositions : 1) prop.4 actuelle ; 2) cor.

~~XXXX~~ 2 du th.1 actuel , avec la remarque sur la réflexivité de l'orthogonalité ;3) orthogonal d'une somme et orthogonal d'une intersection de deux sous-espaces . Puis la dualité dans les espaces vectoriels généraux : th.1 actuel , th.2 actuel , avec comme corollaire la réflexivité de l'orthogonalité dans le cas où V de codimension finie ; puis prop.5 actuelle (réflexivité de l'orthogonalité en général) . Ensuite la caractérisation des hyperplans (cor.1 du th.1 et cor. du th.2) , interprétation ~~des~~ de la prop.5 et du th.2 en termes d'hyperplans .

Faire deux numéros.

Au n°6 , on adopte la rédaction Weil pour la définition d'une équation linéaire ; on supprime la définition des problèmes linéaires , ainsi que les 6 lignes précédant l'actuelle prop.6 . Avant la prop.7 (actuelle), ~~XXXXX~~ donner ~~XXXX~~ la définition du rang d'un système(comme définition 4), puis une proposition pour montrer que le rang du système est égal au rang de l'application $x \to (\langle x, x_i' \rangle)$; ensuite , la prop.7 actuelle , érigée en théorème , et démontrée aussitôt par application de la prop. précédente . Supprimer la remarque 2 . ~~XX~~

Au n°7 , supprimer la remarque suivant le cor. du th.3 ; reporter la transposée d'une application semi-linéaire au nouveau § 7 . Faire un nouveau n°8 , pour mettre la prop.8, ~~XXXXXXX~~ et ensuite la définition de la contragrédiente .

§ 5 . Après la prop.1 et son corollaire , démontrer d'abord le th.1 par la méthode Schwartz : une solution appartient à un sous-espace vectoriel E sur K_0 , contenant 1, contenu dans K et de dimension finie sur K_0 ; décomposer les ξ_λ relativement à une base de E contenant 1 , et identifier dans les équations les coefficients de 1 . Corollaire 2 (érigé en proposition) par la même méthode , puis prop.2 comme conséquence du th.1 . Le n°2 est renvoyé au chap.III , l'espace vectoriel $\bar{E}$ associé à un module régulier E ~~XXX~~ pouvant être défini directement comme le produit tensoriel $K \otimes E$ sans faire toute la démonstration Chevalley , grâce à une remarque de Cartan . A la place , nouveau n°2 contenant le th. de Weil : soit (a_ι) une base d'un espace vectoriel E par rapport à un corps K ~~XXXXXXXXXXXXXXXXX~~ , et soit V un sous-espace de E . Pour tout sous-corps k de K , soit E_k ~~XXXXXXXXX~~ le sous-espace de E (considéré comme esp.vect. sur k) en-

Et l'ancien coroll. de la prop. 2 ?

gendré par la base (a_ι) ; parmi tous les corps k tels qu'une base (par rapport à k) de $E_k \cap V$ soit aussi une base (par rapport à K) de V , il y en a un plus petit k_0. Démonstration par la méthode Weil Zornifiée .

§ 6 . Au n°5 , les matrices monomiales en petits caractères , et abréger . Au n°9 , mettre en proposition le fait que la matrice de passage d'une base duale à l'autre est la contragrédiente de $\underline{P}$. Le n°12 reporté au nouveau § 7 .

Démonstration du théorème de Weil . Proposition : Soit $(a_\iota)_{\iota \in I}$ une base de E . Il existe une partie J de I et une base $(b_\iota)_{\iota \in J}$ de V telle que pour tout $x = \sum'_{\iota \in I} \xi_\iota a_\iota$ appartenant à V , on ait $x = \sum'_{\iota \in J} \xi_\iota b_\iota$, avec les mêmes coefficients ξ_ι .

Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des applications $\iota \to c_\iota$ d'une partie L de I dans V , ayant les propriétés suivantes : 1) les c_ι sont linéairement indépendants ; 2) si V_L est le sous-espace de V qu'ils engendrent , pour tout $x = \sum'_{\iota \in I} \xi_\iota a_\iota$ appartenant à V_L , on a $x = \sum'_{\iota \in L} \xi_\iota c_\iota$ avec les mêmes ξ_ι ; 3) si $c_\varkappa = \sum'_{\iota \in I} \rho_{\iota\varkappa} a_\iota$, et si M(L) est l'ensemble des indices $\iota \in I$ tels que $\rho_{\iota\varkappa} \neq 0$ pour un $\varkappa \in L$ au moins , pour tout $x = \sum'_{\iota \in I} \xi_\iota a_\iota$ appartenant à V et tel que $\xi_\iota = 0$ pour tout ι n'appartenant pas à M(L) , on a $x \in V_L$. On voit aussitôt que l'ensemble $\mathfrak{F}$, ordonné par prolongement , est inductif . Soit J un élément maximal de $\mathfrak{F}$; tout revient à prouver que $V_J = V$. Dans le cas contraire , il y aurait des $y \in V$ n'appartenant pas à V_J ; donc , si $y = \sum'_{\iota \in I} \eta_\iota a_\iota$, et si N(y) est la partie finie de I formée des ι tels que $\eta_\iota \neq 0$, N(y) n'est pas contenu dans M(J) . Soit y un élément de $V \cap \complement V_J$ tel que le nombre d'éléments de $N(y) \cap \complement M(J)$ soit le plus petit possible , et soit α un de ces éléments . En retranchant de y une combinaison linéaire convenable des c_ι , on peut supposer que les η_ι d'indices appartenant à J sont nuls ; posons alors $c_\alpha = \eta_\alpha^{-1} y$. Si $J_0 = J \cup \{\alpha\}$, la famille $(c_\iota)_{\iota \in J_0}$ appartient encore à $\mathfrak{F}$, comme on le vérifie aisément , en raison du choix de y ; il y a donc contradiction .

Pour tirer de cette prop. le th. de Weil , on remarque qu'une base (x_λ) de $E_k \cap V$, pour un corps k ayant la propriété voulue , est formée de combinaisons linéaires des b_ι à coefficients dans k , donc les b_ι sont inversement des combinaisons linéaires des x_λ à coeff. dans k ; le corps k_0 est donc engendré par les coeff. des b_ι exprimés en combin. linéaires des a_ι.