COTE DELTA 006

TEXTE Traité d'analyse
Réunion du 11 mars 1935

FONDS Jean Delsarte

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 8

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 8

DELTA 006

TRAITÉ D'ANALYSE.

-:-:-

<u>Réunion du 11 Mars</u>. Etaient présents :

WEIL, DELSARTE, CARTAN, DIEUDONNÉ, de POSSEL, CHEVALLEY, LERAY et à titre consultatif, ROCARD.

Après quelques remarques de DIEUDONNÉ sur le compte rendu de la précédente réunion et sur l'opportunité qu'il y a ou qu'il n'y a pas de s'occuper dés maintenant des équations différentielles, la parole est donnée à ROCARD qui expose les désirs des physiciens.

L'ensemble des demandes de ROCARD est joint à ce rapport. Voici les commentaires et décisions suscités par ces demandes :

Au sujet des équations et des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants, il est décidé que les théorèmes relatifs à la localisation des racines d'un polynome dans un domaine donné, - en particulier dans un cercle ou un demi-plan - seront exposés dans la théorie des fonctions analytiques.

Il est entendu aussi qu'on exposera certains résultats simples relatifs à l'élimination d'une ou plusieurs fonctions inconnues entre des équations différentielle à coefficients constants, résultats qui se rapprochent de certaines méthodes d'algèbre. On ne ~~xxxx~~ prend pas de décision bien nette sur le lieu où ces questions seront traitées.

ROCARD parle ensuite assez longuement des équations non linéaires qui se présentent dans l'étude des phénomènes de relaxation ; il parle aussi d'un certain nombre de questions connexes : solutions périodiques, recherches de Poincaré, cycles limites, dimultiplication de fréquence, etc.... L'impression générale est qu'il y a là tout un ensemble de travaux récents dus à un grand nombre de spécialistes - dont le principal est Van der Pool. Il est nécessaire de décanter, de dépouillet tout celà, peut être est-il possible d'extraire une idée générale qui suggérera ensuite d'utiles simplifications. C'est en tous cas un travail assez long qui est en principe confié à DELSARTE, lequel s'engage, dans deux ans, à rédiger un chapitre sur ces questions.

En dehors de cela, il est entendu qu'on fera un fascicule sur les méthodes de Poincaré.

ROCARD parle ensuite de problèmes se rattachant à la théorie des équations aux dérivées partielles - ces questions sont renvoyées à une étude ultérieure.

Il parle aussi de questions se rattachant à la théorie des équations aux différences finies. Une majorité semble se dégager pour qu'on ne s'occupe pas de ces questions. Il parle enfin du calcul opéra--tionnel d'Heavaside ; aucune décision n'est prise.

Incidemment, dans le cours de la discussion précédente, on a décidé qu'on ne parlerait pas des travaux de Painlevé sur les points singuliers des équations différentielles non linéaires. On se bornera aux théorèmes dès maintenant classiques de Briot et Bouquet et du même Painlevé, dans le cas du premier ordre.

La parole est ensuite donnée à LERAY qui revient sur les théorèmes d'existence. On lui pose à nouveau la question d'analycité. Il comprend d'abord mal et croit qu'il s'agit de l'analycité par rapport à des paramètres. Sur ce point il est affirmatif ; les théorèmes d'existence topologiques permettent de déduire l'analycité des solutions par rap--port aux paramètres, en introduisant des hypothèses convenables. Sa religion semble moins éclairée en ce qui concerne l'analycité par rapport aux variables indépendantes. (théorèmes de Cauchy et analogue). Quoiqu'il en soit il est désormais admis que la théorie des équations fonctionnelles commencera par un exposé des théorèmes d'existence topologiques, quitte à revenir dans chaque cas spécial sur les théorèmes d'unicité et les méthodes de calcul. En ce qui concerne l'analycité, on attend la réponse définitive de LERAY. De toute manière, on parlera de la majorante de Cauchy dans la théorie des fonctions analytiques et il y aura sans doute lieu de l'appliquer au moins à certaines questions particulières - (théorie de Fuchs par exemple) - ceci d'après CHEVALLEY et DELSARTE - DIEUDONNÉ pense différemment.

La prochaine séance sera consacrée aux équations intégrales.

A titre documentaire : Projet d'exposé des théorèmes d'existence topologiques, par **LERAY**.

Théorie des systèmes de n équations à n inconnues.

Notions utilisées

Différentielle d'une fonction de n variables (définie comme étant la fonction linéaire qui l'approche le mieux au voisinage d'un point).

Degré topologique d'une transformation continue.

Théorème d'existence globale.

Soit x un point d'un domaine $\mathcal{D}$ à n dimensions ; soit $\Phi(x)$ une transformation définie sur $\mathcal{D}$ et sur sa frontière $\mathcal{D}'$ et qui associe à tout point de $\mathcal{D}$ un point du même espace. L'équation $\Phi(x) = b$ <u>possède une solution au moins</u> si le degré de Φ en b diffère de o. Or on pourra affirmer que ce degré diffère de o chaque fois qu'on pourra réduire continûment la transformation $\Phi(x)$ à une transformation assez simple pour qu'on puisse déterminer son degré ; la transformée de $\mathcal{D}'$ ne devra pas, au cours de cette ré--duction, franchir le point b.

Exemple : Une transformation continue de la surface d'un cercle en elle-même possède au moins un point double.

Compléments :

Nommons indice d'une solution isolée a de l'équation $\Phi(a) = b$ le degré en b de Φ envisagée sur la sphère $\|x - a\| < \varepsilon$. Si toutes les solutions sont isolées, la somme de leurs indices est le degré en b de Φ envisagée sur $\mathcal{D}$.

On peut déterminer effectivement l'indice d'une solution isolée <u>a</u> par le procédé suivant : soit $\Phi_1(x)$ une transformation simple approchant $\Phi(x)$ suffisamment pour que l'on ait sur une sphère $\|x - a\| = h$ l'inégalité
$\|\Phi(x) - \Phi_1(x)\| < \|\Phi_1(x) - b\|$; alors les degrés en b de Φ et Φ_1 envisagés sur cette sphère sont égaux.

Exemples : Si $n = 2$ et si $\Phi(x)$ est une transformation conforme tous ces indices sont positifs et portent le nom d'ordres de multiplicité. Si $\Phi(x)$ possède pour $x = a$ un déterminant fonctionnel positif ou négatif, l'indice de a est $+1$ ou -1.

Théorème d'existence local.

Soit une équation $\Phi(x) = b$; soit une solution a ; supposons que le déterminant fonctionnel de $\Phi(x)$ diffère de o pour $|x-a| \leqslant h$. Le degré de Φ sur cette sphère est ± 1.

Soit une seconde équation $\Psi(x) = b$; supposons qu'elle soit "voisine" de la précédente au sens suivant : son déterminant fonction-nel diffère de o dans la sphère $\|x-a\| \leqslant h$; on a :

$$\|\Phi(x) - \Psi(x)\| < \|\Phi(x) - b\| \quad \text{pour } \|x-a\| = h.$$

Alors, d'auprès ce qui précède, la sphère $\|x-a\| \leqslant h$ contient une solution et une seule de l'équation $\Psi(x) = b$.

Cette unicité de la solution a pour conséquence qu'elle varie continûment avec $\Psi(x)$.

Exemple : Une transformation $y = \Phi(x)$ possède une inverse au voi-sinage d'un point où son déterminant fonctionnel diffère de o.

Résolution effective.

On utilise à chaque approximation la méthode la plus simple: le flair, le calcul des approximations successives ou la méthode de Newton. On ne cherche pas à procéder suivant une méthode théorique-ment convergente. On discutera seulement la question de savoir si la dernière approximation ($x = \alpha$) approche une solution : on cher-chera une transformation linéaire $\Phi_1(x)$ s'annulant pour $x = \alpha$, de déterminant non nul et approchant $\Phi(x)$. S'il existe un nombre h tel que

$$\|\Phi(x) - \Phi_1(x)\| < \|\Phi_1(x) - b\| \quad \text{pour } \|x-\alpha\| < h,$$

alors α est distant de moins de h d'une solution de l'équation

$\Phi(x) = b$.

Théorie des équations fonctionnelles.

Notion utilisée.

Compacité.

Théorème d'existence global.

Enoncé. Soit l'équation non linéaire $x + \mathcal{F}(x) = o$, x apparte--nant à un espace abstrait linéaire, complet, normé. $\mathcal{F}(x)$ étant com--plétement continue ("vollstetif") et dépendant d'un paramètre k. Supposons que pour $k = o$, $\mathcal{F}(x) = o$; supposons que l'ensemble des solutions soit borné : $\|x\| < M$. Alors l'équation possède au moins une solution quel que soit k.

Démonstration. On a pour $\|x\| = M$: $\|x + \mathcal{F}(x)\| > h > o$. Soit $\mathcal{F}_h(x)$ une fonctionnelle approchant $\mathcal{F}(x)$ à h près. L'équation $x + \mathcal{F}_h(x) = o$ ne possède aucune solution sur l'hypersphère $\|x\| = M$. Or on peut faire en sorte que $\mathcal{F}_h(x)$ ait pour champ de valeurs un sous-ensemble linéaire à nombre fini de dimensions n de l'espace abstrait envisagé. D'après la théorie des systèmes de n équations à n inconnues l'équation $x + \mathcal{F}_h(x) = o$ possède au moins une solution quel que soit k. Le théorème énoncé s'obtient en faisant tendre h vers o.

Résolution effective. (cf. systèmes de n équations).

Equations linéaires de Fredholm.

Soit l'équation linéaire

$$(1) \quad x + k\,\mathcal{L}(x) = b$$

Si $x + k\,\mathcal{L}(x) = o$ possède une solution aucune majoration de l'ensemble des solutions n'est possible.

On commence donc par discuter les valeurs singulières de k : F. Riesz (Acta math, 1918, T.41) démontre simplement (th. 12 ou 13) qu'elles sont isolées.

On démontre alors par l'absurde que la solution de

$$(1) \qquad x + k\mathcal{L}(x) = b$$

reste bornée quand k suit un chemin du plan complexe qui évite ces valeurs singulières.

Le théorème d'existence global permet d'en déduire que l'équation (1) possède une solution chaque fois que k n'est pas une valeur singulière.

Equations différentielles :

Ecrivons le système : $\dfrac{dx}{P(x,y,..)} = \dfrac{dy}{Q(x,y,...)} = ...$

sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = P(x,y...) \;; \quad \dfrac{dY}{dt} = Q(x,y...) \\ x = X \;; \quad y = Y \end{cases}$$

($X(t), Y(t)$.. sont des fonc-tionnelles complétement continues de $x(t)$, $y(t)$..)

Le théorème d'existence globale montre que la solution du système existe tant qu'on peut la majorer ; on suppose seulement P, Q, ... continus. Continuité et dérivabilité par rapport à des paramètres s'obtiennent en considérant x,... X,... comme étant des fonctions continues, dérivables de t et de ces paramètres.

DELTA 006

A titre documentaire : Desiderata des physiciens : (par ROCARD)

-:-:-:-:-:-:-

Equations linéaires, théorie aussi complète que possible
Equations linéaires à coefficients constants
Systèmes d'équations
Conditions pour que toutes les racines soient à partie réelle < 0.

$$y'' - \varepsilon(1-\alpha y^2)\, y' + \omega^2 y = 0$$

$$y'' - \varepsilon(1-\alpha y^2)\, y' + \omega^2 y = A \sin \omega' t$$

démultiplication de fréquence, etc...
cycles limites etc...

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \times (1 + \varepsilon \sin \omega t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Effet Luxembourg
diffraction d'ultra-sons

Equations

$$\left(a \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + c\right) F(t) = \left(a' \frac{d^2}{dt^2} + b' \frac{d}{dt} + c'\right) F\left(t - \frac{2l}{c}\right)$$

mêmes équations avec courbures de caractéristiques.