LA TRIBU NON NUMÉROTÉE

COTE DELT 002

TEXTE LA TRIBU
(BULLETIN ŒCUMÉNIQUE, APÉRIODIQUE ET BOURBACHIQUE)
COMPTE-RENDU DU CONGRÈS DE PARIS
8-11/XI/1947

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 19

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 19

LA TRIBU.

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique.)

Compte-rendu du Congrès de Paris

8-11 novembre 1947.

Présents:

Cartan, Chabauty, Delsarte, Ehresmann, Godement, Roger Pisot, Samuel, Schwartz.

Nos lecteurs ne seront pas étonnés d'apprendre que ce Congrès, dédié à l'étude du Livre Elémentaire, fut marqué de peu d'incidents De lourds souvenirs tôpinaux et goursatesques emplirent souvent les âmes des participants.

Le seul fait marquant fut l'expulsion des ensembles convexes.

Signalons enfin le manque d'assiduité de certains participants.

Plan général :

Introduction: Espaces vectoriels. Ensembles convexes.

Chapitre I) Dérivées.
1) Dérivée première.
2) Théorème des accroissements finis.
3) Dérivées d'ordre supérieur.
4) Fonctions convexes.

Chapitre II : Primitives et intégrales.
1) Primitives et intégrales.
2) Dérivées de fonctions dépendant d'un paramètre.

Chapitre III : Fonctions élémentaires.
1) Dérivées des fonctions exponentielles et circulaires
2) Développement des fonctions exponentielles et circulaires et des fonctions qui s'y rattachent.

Remarques générales

1) La définition des espaces vectoriels topologiques (dans l'introduction) permet d'énoncer les propositions des chapitres I et II dans le cas d'un espace des valeurs le plus général (cela ne coûtait pas plus cher). Ainsi seront évitées de fastidieuses redites

au Livre des espaces vectoriels topologiques). On ne parlera presque jamais des R^n .

2) Le principal changement a été la suppression du chapitre sur les ensembles et fonctions convexes. En effet, considérée <u>en soi</u>, l'actuelle rédaction du bloc convexe ne satisfait pas Cartan qui a mis au point une contre-rédaction. Ses raisons trop longues à détailler ici, seront résumées ci-dessous. Si le Congrès s'est finalement décidé à retirer du Livre Elémentaire le bloc convexe c'est:

1) Parce que les choses sont presques aussi compliquées pour les R^n que pour les espaces généraux;

2) parce que <u>rien</u> de tout cela ne sert au Livre Elémentaire (à part la <u>définition</u> de la convexité),- <u>sauf</u> pour l'étude des "cas limites" du théorème des accroissements finis relatif à un R^n. Et d'ailleurs, telle qu'elle est faite dans le texte actuel, cette étude des cas limites est incomplète et inutiliment compliquée.

En fait il faut introduire la notion de <u>point interne</u> d'un convexe K ($a \in K$ est interne si, pour toute droite D passant par a, $D \cap K$ se réduit à $\{a\}$ ou est un intervalle dont a n'est pas une extrémité) les points internes de K sont, dans la variété linéaire engendrée par K, les points intérieurs de K. Ceci dit, le théorème des accroissements finis affirme: si K est l'enveloppe convexe (fermée ou non) des valeurs de f'_d, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est point interne de K.

<u>Corollaire</u>: si H est un convexe contenant les f'_d, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est un point $A \in H$ et f'_d est toujours dans le <u>porteur</u> du point A. (le <u>porteur</u> d'un point A d'un H convexe est le plus grand sous ensemble convexe de H auquel A soit interne; c'est l'intersection de H et de la variété linéaire engendrée par A et les droites passant par A qui sont coupées par H suivant un intervalle auquel A est intérieur).

Il a donc été décidé de donner, dans l'introduction, la définition des ensembles convexes (dans un espace vectoriel sur R).

3) On a gardé l'étude des fonctions convexes, mais dans un esprit assez différent. Cette étude sert surtout d'illustration à la notion de dérivée, d'où sa place.

4) L'ancien chapître II (Dérivées, primitives, intégrales) jugé trop long a été scindé en deux.

5) Le Congrès n'a pris que des décisions de détail sur le paragraphe des développements des fonctions élémentaires. Des décisions d'ensemble ne pourront être prises qu'après étude du Chapitre IV. Le sort du dit paragraphe est donc laissé provisoirement en suspens.

<u>Remarques de Cartan sur la théorie des convexes.</u>

1) Le fait que deux ensembles convexes fermés bornés sont homéomorphes ne tient nullement à la compacité de la sphère unité. C'est une conséquence du théorème: dans un espace vectoriel normé, tout ensemble convexe, fermé, borné; d'intérieur non vide est homéomorphe à la boule unité fermée (conséquence de la condition d'équivalence des 2 normes.

2) La démonstration de Hahn-Banach pour $n = 2$ peut se faire ainsi : soit A ouvert convexe non vide, tel que $0 \notin A$, et tel que $x \in A$ entraine $x\lambda \in A$ pour tout $\lambda > 0$. Dans le plan pointé qui est connexe A possède au moins un point frontière $a \neq 0$ (sinon A = plan pointé, ce qui est absurde); alors $a \notin A$ et $-a \notin A$ (sinon $0 = \frac{(-a)+a}{2}$ serait intérieur à A d'après la prop. 7 de l'actuel par. 1). Donc la droite Oa ne rencontre pas A.

3) Le "th. de Minkovski" n'a rien à voir avec la compacité de l'espace des hyperplans passant par 0;
D'une manière générale, dans tout E V topologique (même non localement convexe) on a : si A fermé convexe a un intérieur non vide par tout point frontière de A passe au moins un hyperplan d'appui

(fermé)

4) A propos de la <u>dualité</u> : soit E un "espace de Fréchet" (espace vectoriel localement convexe, métrisable et complet); si K⊂E est <u>fermé</u> convexe et si E est le plus petit sous espace engendré par K, les points <u>intérieurs</u> de K ne sont autres que les points <u>internes</u>. Conséquence: la topologie faible <u>détermine</u> la topologie forte!!

5) Dans le chapitre sur les convexes (probablement ch.1 du Livre sur les E V topologiques) il y aurait intérêt à bloquer tout ce qui concerne les cônes convexes.

<u>Une proposition relative au Livre Elémentaire.</u>

Le Congrès a <u>vivement</u> approuvé une proposition de Cartan, tendant à mettre dans le Livre Elémentaire un chapitre relatif aux <u>équations différentielles</u> (dont la nature est très différente de celle des équations aux dérivées partielles). On y étudierait les équations de la forme $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ (x réel, y dans un Banach) où F est une fonction vectorielle, réglée en x pour chaque y, et où l'application $y \to F(\cdot, y)$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. On y traiterait du théorème d'existence, de la continuité et de la dérivabilité par rapport au paramètre, et des équations linéaires.

L'esprit du chapitre serait: "trouver une fonction y(x) qui soit une primitive de la fonction (réglée) F(x,y(x)). Le fait que F (x,y(x)) doit être réglée se déduit du facile théorème suivant: "si pour chaque y, F(x y) est une fonction réglée de x, et si cette fonction réglée dépend continûment de y (topologie de la convergence compacte alors, pour toute fonction <u>continue</u> $\varphi(x)$, $F(x, \varphi(x))$ est <u>réglée</u>."

Introduction: espaces vectoriels. Ensembles convexes.

Dire qu'on va traiter dans ce livre des fonctions définies sur R; valeurs numériques, et aussi, par extension, des valeurs vectorielles (laïus page 95 remanié).

Quelques notions sur les espaces vectoriels réels: définition, segments de droite, ensembles convexes (définition seulement), quelques exemples.

Définition d'un E V topologique ($x+y$ et $x\lambda$ continues). E V T complets.

Exemple de E V T normés .

Définition de E V T localement convexes. Exemple des E V normés.

Chapitre I : Dérivées.

I Dérivée première.

Laïus d'introduction (beaucoup de propriétés marchent avec C ou un corps topologique commutatif quelconque au lieu de R).

Remarque générale de rédaction: dire "numérique" au lieu de "scalaire"

n°1) Si f est définie dans un intervalle I, non réduit à un point, on dir qu'elle est dérivable en $x_0 \in I$ (même si x_0 n'est pas intérieur!) si $\lim_{x\to x_0,\, x\in I,\, x\neq x_0} \dots$; la dérivée à droite n'est alors autre que la dérivée de la restriction de f à un sous intervalle. ceci allège (ou modifie les énoncés suivants:

(p.28). Prop.1 : l'ensemble des fonctions vectorielles définies dans un intervalle I prenant.. et dérivables en un point $x_0 \in I$ ...

(p.28). Prop.2 et 3 : Inutile de supposer f définie dans un voisinage de x_0

(p.33). Prop.5 : Inutile de supposer g définie dans un voisinage de $f(x_0)$;il suffit de supposer que $g\circ f$ a un sens pour $x \in I$.

DELT002 7

(p.34) Prop.6 Homéomorphisme d'un intervalle I sur un intervalle J , x_0 point de I .

Corollaire: inutile de supposer A ouvert.

(p.35) Bas: la référence aux rectif. du fasc.III est devenue inutile.

(p.37) Les 7 premières lignes sont presque supprimées, ainsi que la propriété 7.

(p.55) Inutile de supposer I ouvert (x_0 peut être une borne de I). Ceci est essentiel (la formule de Taylor est encore valable en une borne d'un intervalle).

(p.57) 1ière ligne du n°2 idem.

(p.79) Déf.1 "si f(x) est la dérivée de g en tout point de I " C'est tout.

(p.92) Ligne 8 supprimer "ouvert".

par contre l'énoncé du th.2 (p.84) doit rester inchangé.

n°2) Titre: " linéarité de la dérivation " et non de la "dérivée" (p.28)

La prop.2 rentre dans ce numéro. Un autre exemple pour la prop.2 : produit par un nombre complexe constant. Dire dans l'énoncé de la prop.2 que u est une application linéaire continue (on ne se borne pas aux R^n). A ce propos mettre une remarque: l'application linéaire $f \to Df$ n'est pas continue pour la topologie de la convergence uniforme (exemple d'une sinusoïde aigüe tendant vers Ox). En corollaire forme linéaire continue.

n°3) Dérivée d'un produit (nouveau n° commençant au milieu de la page 29

Prop.3 : Application multilinéaire continue.

Page 30 : "considérons l'identité $[b_1 \cdots b_n] - [a_1 \cdots a_n] = \sum_i [b_1 \cdots b_{i-1} (b_i - a_i) a_{i+1} \cdots a_n]$

(ligne 1)..."en tenant compte de la continuité de..."

(ligne 4)

..."sont nuls" (ligne 10) . Ecrire la formule

$$[f, g]' = [f', g] + [f, g']$$

Exemple 1 : en faire une condition nécessaire et suffisante par un renvoi à l'exemple 1 page 28 (ceci pour les R^n seulement; contre exemple en exercice).

Exemple 3 : ajouter que la dérivée d'un vecteur de longueur euclidienne constante lui est perpendiculaire.

Exemple 5 : supposer que l'on a affaire à une algèbre topologique (dire ce que c'est).

n°4) Dérivée de l'inverse d'une fonction. (nouveau n° commençant au milieu de la page 32). Prop.4: algèbre normée complète.

n°5) Dérivée d'une fonction composée. (commence ligne 9, page 33) ajouter " et g " à la ligne 10 .

n°6) Dérivée d'une fonction réciproque. Dans la remarque 1 (ligne 4 du bas) dire " les espaces vectoriels (resp. algèbres) topologiques sur K pourvu que dans les prop.2 et 3..."

n°7) Dérivées à droite et dérivées à gauche.

Apartir de la page 37 (milieu ancien n°6), on demande un chambardement important. L'ordre suivant est proposé.

Les dérivées infinies (texte pages 37 et 38 jusqu'à la ligne 7. puis la seconde moitié de la page 39). Pour les dernières lignes de celle-ci , faire passer les f'_g et f'_d en resp. , et énoncer les choses pour f' .

Graphes- Demi tangentes- Tangente.

Signes de f'_g et f'_d en un maximum relatif. f' est nul en un tel point.

Théorème de Rolle (ancienne prop.2 ,page 46). Son corollaire. Interprétation géométrique. Attention: pour dette prop.2 la dérivée doit être supposée finie partout!. (sinon dire que $f'(c) = 0$ ou ∞). Ehresmann demande l'exercice suivant :toute fonction définie sur les quaternions, à valeurs dans un E V quaternionien, et qui est dérivable, est linéaire.

II Théorème des ~~exercices~~ accroissements finis.

Rolle dont la démonstration est très différente, a été mis au par.I (sur ce point le Congrès est très partagé; certains proposent de mettre Rolle au début du par.I afin de conserver au par.I son homogénéité "locale"). On pourrait donc commencer par un laïus du genre:"La plus grande partie du par.I a un caractère local... sauf Rolle... On va maintenant dire quelque chose de plus fort...)"

n°1 et2)Il y aura quatre fermes (et 4 seulement) du th. des accroissements finis :

1) Proposition: $f'_d \geq 0$ entraine que f est croissante (montrer que $f(a) \leq f(b)$ au moyen de l'inégalité $f(x) - f(a) \geq -(x-a)\varepsilon - \left(\sum_{a_n < x} \frac{1}{2^n}\right)\varepsilon$ (ξ)

Complément: si $f'_d > 0$ en un point, $f(b) > f(a)$.

2) Théorème: inégalité des accroissements finis avec une fonction g, et cas limite (prop.1 du texte). Application: $g(x) = x$, M et m

3) Théorème dans le cas vectoriel (sans cas limite) avec une fonction numérique g (convexe fermé K, $f'_d(x) \in g'_d(x) K$.
S'appuyer sur $f(x) - f(a) \in (g(x) - g(a)) K + (x-a) V + \left(\sum_{a_n < x} \frac{1}{2^n}\right) V$ (ξ)
V est ici un voisinage convexe de 0; opérer dans un E V localement convexe).

4) Le théorème de la norme (cor.2 de la page 48. Il est bien trop utilisé pour l'appeler corollaire!).

Ainsi le cor.1 (page 47, bas) saute. Comme conséquence de 4) faire immédiatement la prop.5 et le soi-disant corollaire (page 51) Puis reprendre à la ligne 9 page 49.

n°3) <u>Continuité des dérivées</u> . La prop.5 et le"corollaire" (page 51) passent au n°2 . Le n°3 ne contiendra qu'<u>une</u> proposition combinant 4 et 6 :

"Soit un intervalle I , $x_0 \in I$. Soit, dans I $\cap \complement\{x_0\}$, f définie , continue, dérivable à droite sauf aux points d'un intervalle dénombrable.

Pour que f'_d ait une limite quand $x \to x_0 \, (x \in I, x \neq x_0)$ il faut et il suffit que $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ ait une limite C quand $x \to x_0, y \to x_0, x \in I, y \in I, x \neq y, x \neq x_0, y \neq x_0$ dans ces conditions f se prolonge par continuité au point x_0 , C est la limite de f'_d quand $x \to x_0$ et le f prolongé a une dérivée égale à C en x_0 "

on demande un exercice sur les fonctions croissantes à droite (sont croissantes). L'exercice 3 (page 53) est canulé (si $\alpha < 3/2$, f_n tend uniformément vers zéro! Prendre $\alpha = 3/2$)

III <u>Dérivées d'ordre supérieur.</u>

n°1) Page 56 ligne 1: supprimer "aussitôt"- Ligne 3 "lorsque l'un des membres est défini " - Ligne 9 :"dans E" - Ligne 10 "on montre en effet les formules" - Ligne 8 du bas: A au lieu de I .- Page 57 : supprimer le laïus des lignes 6 à 11 ("On peut aussi... au lecteur").

n°3) <u>Formule de Taylor.</u>

3ème ligne mal rédigée; écrire "dire que f a une dérivée en un point signifie que l'on a...)"

Faire la formule de Taylor (th.1) avec valeurs dans un localement convexe. Remplacer les inégalités en norme par des " $\in V$ "

Les remarques pages 59 et 60 sont à supprimer.

IV Fonctions convexes d'une variable réelle.

Le n°1 de l'ancien par.4 saute: en effet la prop.1 se trouve au par.2, et la déf.1 et la prop.2 à la fin du par.1 - Le haut de la page 69 est une têpinade.

Le Congrès, après de longues discussions, a jugé que c'était ici la meilleure place pour un paragraphe sur les fonctions convexes. C'était impossible avant, à cause de la dérivée seconde. On ne pouvait pas couper les paragraphes sur les primitives et intégrales. Introduire les fonctions convexes au chapitreIII (fonctions élémentaires) aurait rompu la belle homogénéité (assez algébrique) de celui-ci. L'avantage de la place choisie ici est de donner un exemple assez concret des notions exposées antérieurement,- et aussi de reposer le lecteur des 3 paragraphes assez arides que précèdent. Quelques figures aideront à ce dernier but.

Le plan détaillé suivant, proposé par Cartan, a été adopté:

n°1) Définition (valable pour une fonction définie sur un ensemble quelconque de R) : le graphe est au dessous de la corde.

$$f(\lambda x+(1-\lambda)x') \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(x')$$

Equivalent à: ensemble au dessus du graphe est convexe (si f est définie dans un intervalle)

Exemples: linéaire, x^2, $|x|$

Remarquer que la restriction à un sous intervalle est convexe . Extérieurement au sous intervalle le graphe est au dessus de la corde. Cas limite. Figure.

Convexité stricte.

Formule " $f(\Sigma\lambda_i x_i)$ ..." (avec des resp. pour les strictement convexes.)

Fonctions concaves.

n°2) Familles de fonctions convexes. (somme, enveloppe supérieure, limite simple).

n°3) Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. (prendre les notations de l'état 3 : pentes)

Proposition $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante (dessin).

Conséquences: existence de f'_s, f'_d (~~est~~ en tout point intérieur); $f'_s \leq f'_d$; autre conséquence: si $b<a$, $f'_d(b) \leq f'_s(a)$

Croissance de f'_d et f'_s ; sont égales et continues sauf sur un dénombrable. Continuité de f.

n°4) Critères de la convexité.

a) Dérivée croissante (sauf sur un dénombrable).

b) Critère avec la dérivée seconde.

c) Semi-continue supérieurement telle que, en aucun point de la courbe, il n'y ait de droite qui soit localement au dessus du graphe sans être sur le graphe.

Applications: $f\left(\frac{x+x'}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(x')\right)$; toute fonction "localement convexe" est convexe.

Mettre en exercices les critères de l'ancien chapitre I .-

Chapitre II.

Primitives et intégrales .

Dire qu'à partir de maintenant les espaces vectoriels des valeurs seront supposés complets.

I.- Primitives et intégrales.

n°1) Page 79 ligne 10: supprimer "de dimension finie"; ligne 5 du bas "f doit être continue".
On propose de changer la terminologie: "Primitive propre" au lieu de "primitive", "primitive" au lieu de"primitive impropre" ; ceci pour éviter des confusions avec la terminologie "intégrales impropres

Page 80 : ligne 5 : "si g est continue et admet..." (supprimer "et continue" à la ligne 4). Remarquer qu'on peut changer la fonction donnée sur un dénombrable, et qu'on peut parler de primitive d'une fonction non définie sur un dénombrable. Les lignes 7,8,et9 du bas deviennent le texte de ma prop.1 . Remarquer, avant le th.1, que, pour que g soit primitive de f, il faut et il suffit que la restriction de g à tout intervalle compact soit primitive de f; ceci allègera la démonstration du th.1 .

n°2) <u>Existence des primitives</u>. On démontre le th.1 pour un intervalle compact.

n°3) <u>Fonctions réglées</u>. Le plan suivant est proposé:

définir les fonctions en escalier à valeurs dans un ensemble quelconque ("il existe une <u>partition</u> finie...")

Prop.1 : les fonctions en escalier à valeur dans un E V forment un E V (démonstration par la partition: $A_i \cap B_j$)

Remarquer qu'elles ont des primitives.

Fonctions réglées sous-espace vectoriel complet). Ont des primitives (premier théorème du n°3)

Remarquer que " réglée réglée sur tout compact".

Caractérisation des fonctions réglées (th.2 - p.84)

En corollaire: la fin du th.3 (p.86) (dérivée à droite de la primitive d'une fonction réglée). Dans l'énoncé supprimer "si ce point appartient à I."

Exemples: continues (préciser que c'est la <u>dérivée</u> de la primitive remarque 1 page 86); monotones (caractérisation des fonctions convexes comme primitives de fonctions croissantes).

La canularesque remarque 2 (p.87) saute.

n°4) <u>Intégrales</u>.

Commencer par la prop.2 (p.86 sommes de Riemann). Introduire alors le terme d'<u>intégrale</u>. Dire qu'on ne parlera ici d'intégrales que p... les fonctions réglées. Un laïus sur ces généralisations possibles de la notion d'intégrale (s'étendre à des fonctions qui n'ont pas de primitives, mais ne s'étendra pas à toutes les fonctions qui ont des primitives). Définir d'abord $\int_a^b f(t)\,dt$ par $g(b)-g(a)$ n'introduire qu'ensuite la notation $\int_a f(t)\,dt$ pour la primitive d'une réglée.
Supprimer la notation $\int_{x_0} f(t)$ (sans dt) (resp. $\int_{x_0}^{x} f(t)$)
Page 89 milieu: "dans lesquels f ne soit pas constante".

n°5) <u>Propriétés des intégrales</u>.

Page 90 : commencer par la formule $\int_x^x = O(1)$; en bas, supposer u continue. Page 91 (lignes 2 et 3) : "de dimension finie" à supprimer ; "bilinéaire continue"

Page 91 : mettre $\frac{1}{b-a}$ dans l'énoncé des corollaires (cas $b<a$)

Supprimer le laïus de 2 lignes (milieu) sur les limites à droite.

Supprimer la fin de la prop.4 ("il ne peut appartenir...")

Page 94 : le corollaire sans cas limite, et en <u>proposition</u> (Bourbaki ne réfère plus qu'à des corollaires!!).

n°6) <u>Forme intégrale du reste</u>. <u>Primitives d'ordre supérieur</u>.

Page ~~93~~ 94: $f'(a)\,\frac{x-a}{1!}$ (formule 15)

n°7) <u>Intégrales impropres.</u>

Remarquer que l'on peut donner un sens à la notion de primitive dans un intervalle I de R (définie, continue, admettant f(x) pour dérivée pour tout x <u>fini</u> de I, sauf ensemble dénombrable).

Condition d'existence de la <u>primitive</u> g de f <u>réglée par morceaux</u> déf.5, page96) : si elle existe g(b)-g(a) s'appelle <u>intégrale impropre</u> de f (expliquer qu'on a vu un procédé de calcul des intégrales de f réglée par les sommes de Riemann; en décomposant en intervalles partiels on va calculer une intégrale impropre).

On supposera dans ce n°, que $a < b$ (limites d'intégration).

Dire que les formules 4,5,6,7, sont valables. La prop.5 (p.97) est une trivialité.

Avant la prop.6, démontrer le lemme suivant (qui servira aussi plus tard; "lemme des intervalles"):

"Soient J_0 un intervalle. Pour que $\| \int_J - \int_{J'} \| \leq \varepsilon$ si $J \supset J_0$, $J' \supset J_0$ il faut que $\| \int_K \| \leq \varepsilon$, et il suffit que $\| \int_K \| \leq \varepsilon/2$ pour tout K tel que $K \cap J_0 = \emptyset$"

Page 99: lignes 5 et 8: mettre des η au lieu des ε . Supprimer les trivialités (la déf.5 montre...par parties d'ordre n ").

Pour l'énoncé des prop.6 (p.98) et 7 (p.100) dire "f réglée dans un intervalle I de bornes a et b; pour que $\int_a^b f(t)\,dt$ existe..."

Abréger le laïus du milieu de la p.100 afin de rapprocher les prop.6 et 7.

n°8) Intégrales impropres de fonctions positives.

Page 101 ligne 7 ; "par abus de langage" au lieu de "par extension"

Texte de la prop.8:" $0 \leq f(x) \leq g(x)$ sauf sur un ensemble dénombrable."

n°9) Intégrales absolument convergentes.

Supprimer "dans I" à la 3ème ligne de la définition 6.

Corollaire (p.102) "E V topologiques ...bilinéaires continue..."

Page 103 ligne 7: supprimer "bien entendu"

On demande un exercice montrant que toute fonction à variation bornée est réglée.

II. Dérivées et intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre.

n°1) Faire passer la remarque (p.111) au n°2 (la joindre au contre-exemple du bas de la page 113). E V topologiques dans la prop.2 page 112 n°2) Les 10 premières lignes sont prématurées; dire qu'il y a 2 canulars: intervalle non borné convergence non uniforme,- et que le fait que l'intégrale est propre ou impropre importait peu au n°2 Après ce chapeau on fera les 2 contre-exemples (pages111 et 113).

Page 114 ligne 10 du bas: supprimer :"aussi".

A partir de la ligne 3 du bas de la page 114, on peut clarifier notablement la démonstration. La convergence suivant le filtre produit est équivalente à:

1) Quelque soit ε, il existe J_0 compact et $M \in \mathfrak{F}$ tels que $\| \int_{J_0} f_\alpha - \int_J f_\beta \| \leq \varepsilon$ pour $J \supset J_0$ et $\alpha \in M$, $\beta \in M$.

2) Il faut $\| \int_{J_0} f_\alpha - \int_J f_\alpha \| < \varepsilon$ pour $J \supset J_0$ et $\alpha \in N$; cela suffit (car $\| \int_{J_0} f_\beta - \int_{J_0} f_\alpha \| \leq \varepsilon$ pour $\beta \in N'$; nous prendrons donc $M = N \cap N'$)

3) Transformation au moyen du "lemme des intervalles"; on obtient la condition du haut de la page 115.

4) Définition de la page 116. (dire que on prend V indépendant de Page 116, ligne 5 du bas ~~"aussi" au lieu de~~ "convergente pour tout α dans A".

Page 117, ligne 3 du bas "aussi" au lieu de aussitôt.

n°3) Page 118, espaces vectoriels normés.

Ligne 6 et suivantes: couper la phrase par un "dans A, en effet pou tout intervalle..."

n°4) Page 119: E espace vectoriel normé.

Page 120: ligne 3 du Bas:"généralisation" au lieu de "proposition analogue"

Page 121:prop.6: alléger le texte par un "dans les conditions de la prop.5"

Eclairer la lanterne dans la démonstration de la prop.6 (On va remplacer $f(t,\alpha)$ par $f(t,\alpha_0)$). Dire ,en haut de la page 122, que ça irait tout seul avec la dérivée d'une fonction composée

Delsarte demande de rédiger l'exercice 3 dans le texte.

Commencer alors (ligne 4, p.122) un nouveau n° (n°55) "dérivée d'une intégrale empropre dépendant d'un paramètre."

n°5) (Nouveau) : Commencer la démonstration de la prop.7 en disant que l'on va ~~ù~~utiliser le th.1, parl, et préciser le filtre útilosé.

Supprimer la remarque 2 page 123, ainsi que la remarque 3 qui est une tôpinade.

~~n°6) Interversion des intégrations~~

n°6) <u>Interversion des entégrations</u>.

Page 124 : E est un E V normé.

Page 125 : ajouter à la ligne 4:"toutefois on a le résultat suivant

<u>Chapitre III</u> .

<u>Fonctions élémentaires</u>.

I. <u>Dérivées des fonctions exponentielles et circulaires.</u>

n°1 et 2) Commencer par les 6 premières lignes du n°2 et dire :"on va voir que $f(x)=a^x$ a une dérivée ca^x ,où c est évidemment $f'(0)$ Cela résulte du th. suivant" . Le th.1 doit être fait pour E normée complète.

Sa réciproque est vraie ($f(0)=e$ et $f'(x)=cf(x)$ entrainent que f est une représentation); la mettre en exercice; la mentionner dans le texte (bas de la page 130), et dire que ça résulte aussi de la théorie des équations différentielles et linéaires.

n°3) Page 132: parler seulement de dérivée (àpropos de la dérivée logarithmique) et non de la dérivée à droite ou à gauche.

n°4) Page 133 prop.3: renvoyer à la page 31 (dérivée d'un vecteur unitaire lui est perpendiculaire) . Puis la question du signe

Page 134 : ne pas expliciter(13); le faire ensuite pour $a = 2\pi$ en commençant par la formule $D(\cos x + i\sin x) = \cos(x+\frac{\pi}{2}) + i\sin(x+\frac{\pi}{2})$ suivent les formules(14)

n°5) On demande des figures.

n°6) A remettre au point. Partir du point de vue des homéomorphismes. Si c'est dérivable à l'origine, ça l'est partout et $f'(z) = f'(0)f(z)$. quand on a un homéomorphisme dérivable on les a tous. ($(f/g)' = 0$ après changement convenable de la variable). On va étudier le plus simple de tous, c'est à dire l'homéomorphisme produit: $x+iy \to e^x e(\frac{y}{2\pi})$ Vérifier que c'est dérivable à l'origine au moyen de la formule de Taylor (sans forme trigonométrique: $(1+x+\varepsilon' x)(1+iy+\varepsilon'' y) =$ $= 1 + (x+iy) + \varepsilon|z|$); finir par 3 lignes suivant la formule 22 page 137 et terminer là le numéro.

n°7) Propriétés de e^z. Faire d'abord les identités $e^{z+z'}$, $e^x(\cos y + i\sin y)$, Euler) et le laïus de la périodicité. Puis les propriétés de dérivation avec les exemples de calcul de primitives.

Le Congrès mû par l'Esprit de Bourbaki, décide de flanquer en l'air le logarithme complexe ~~dit~~ et les primitives de fonctions rationnelles le premier à cause de sa désagréable odeur de coupures ("quiconque coupera une surface de Riemann la tuera"); la seconde parce qu'on en dit trop ou trop peu , et parce que la méthode indiquée n'est jamais employée étant trop longue que l'ordinaire (cf: concours de vitesse Cartan-Delsarte-Dieudonné; au Congrès de Liffré.)

n°10)(Ancien) On montrera directement les identités à partir du milieu de la page 143. On ne fera que signaler in remarque le principe de permanence des identités que sera mis en exercice (méthode des relations primordiales- cf: exercice 15)

Page 144: supprimer les lignes 6 à 10.

II. <u>Développements des fonctions exponentielles et circulaires et des fonctions qui s'y rattachent</u>.

n°1) Référence annulée à la page 153, ligne 10; il s'agit de l'ex.5, par.8, chap.IV.-

Ligne 11 et suivantes: mettre partout des ; aller jusqu'au terme en x^{n+1} inclus, à cause du e^x/x^n de la ligne 12 du bas.

n°2) Donner les développements de sh x et ch x à la fin du n° .

n°3) Faire le développement du binôme pour un exposant m <u>complexe</u> ; ne pas oublier le cas $R(m) = 0$ où le reste (formule (20)) a une forme un peu différente (logarithme); écrire en général le second membre sous la forme $\left| \binom{m-1}{n} x^n \frac{m}{R(m)} \left[(1+x)^{R(m)} - 1 \right] \right|$

Les autres limitations du reste (page 156, lignes 3 à 19) en exercices; les trucs en petits caractères (du milieu de la page 157 à la ligne 4 du bas de la page 158 également). Mentionner la série géométrique après la formule 29 (page 157 bas).

n°4) Terminer par une remarque: on verra (ch.4) que les fonctions étudiées n'admettent pas d'autres développements en série entière que ceux donnés ici.

Pisot promet de mettre au point en exercice sur l'irrationalité de π. Mettre en exercice le développement de tgx (Nombres de Bernouilli) .