COTE DELES 015

TEXTE ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
CAS LOCAL. BENDIXON. DULAC

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 5

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 5

Equations différentielles

Cas local. Bendixson. Dulac.

1

Problème

Point singulier du système point $x_i = 0$ $(i=1 \ldots n)$ tel que $X_1(x_1, \ldots x_n) = X_2 = \ldots = X_n = 0$.

$$(1) \quad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots \frac{dx_n}{X_n}.$$

Les X sont holomorphes. Existence. Unicité. Représentation analytique.

Cas complexe. La solution est algébroïde (nulle) si $x_i = f_i(t)$, $x_i(0)=0$. f_i holomorphes et solutions de (1). Si l'on peut poser $t = x_i$ — la solution est dite holomorphe nulle. Si les f_i ne sont pas holomorphes la solution est dite simplement nulle.

I. $X_i = L_i + [x_1, \ldots x_n]_2$ ($[x_1 x_2 \ldots x_n]_k$ expression ne contenant pas de termes de degré inférieur à k). L_i - forme linéaire homogène.

On écrit

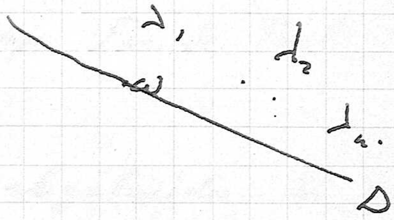
(2) $\frac{dx_1}{L_1} = \ldots \frac{dx_n}{L_n} = dt$. et on cherche une solution $x_i = C_i e^{\lambda t}$ $(i=1 \ldots n)$

les C_i n'étant pas tous nuls. On a l'équation caract. $\Delta(\lambda) = 0$.

(si $L_i = \sum \alpha_i^{(j)} x_j$; $\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} - \lambda & \alpha_2^{(1)} & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} - \lambda & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \end{vmatrix}$.

Les conditions suivantes jouent un rôle important:

a) :



Il existe une droite D ~~telle~~ (passant par l'origine et telle que tous les λ_i soient du même côté de D.

b) cette condition a lieu pour les variables z_i pour lesquelles après une transformation (3) $z_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n$. (2) devient:

$$dz_i = \lambda_i z_i \, dt.$$

(elle a, en particulier, lieu lorsque λ_i est racine simple, mais elle peut aussi lieu dans d'autres cas).

c) cette condition a lieu pour λ_k si λ_k n'est égal à aucune combinaison $q_1 \lambda_1 + \ldots q_n \lambda_n$ ($q_i \geq 0$ $\sum q_i > 1$, $(\lambda_i \neq \lambda_k)$).
(q_i entier)

„On a les conditions b) et c)" si b) et c) sont vérifiées pour tous les z_i et λ_i.

(Poincaré Thèse 1879, Picard, Traité d'Analyse t. III. Horn Journal für Math. t. 116. t 117.)

2 DELES 015

Si a), b) et c) ont lieu: (1) devient (après la transformation (3)) (4) $dz_i = Z_i(z_1, z_2 \dots z_n)dt$ — Système intermédiaire. 3

Les équations

$$Z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + Z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} \dots + Z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} - \lambda_i f = 0 \quad (i = 1 \dots n)$$

admettent une solution $f = f_i(z_1, \dots z_n) = z_i + [z_1 + z_2 \dots + z_n]_2$ (cas a), b), c) Poincaré, Picard, cas non a) Dulac (École Pol. 1904), f_i existent alors formellement mais peuvent diverger).

En posant $y_i = f_i(z_1, z_2 \dots z_n)$, (4) devient

$$(5) \quad dy_i = \lambda_i y_i \, dt$$

~~On a $f_i(y_1, y_2 \dots y_n) = F_i(z_1, z_2 \dots z_n) = [z_1, z_2 \dots z_n]_1$ (voir (3))~~

et ceci permet d'avoir l'intégrale générale du syst. (1)

Le passage de (1) est dû à Dulac (Bull. Soc. math. t. 40, 1912).

La forme de l'intégrale à Poincaré (Thèse).

Le cas où seule la condition (a) a lieu a été étudié par Horn (Journal für Math. t.t. 116, 117)

Des études semblables ont été faites par Koenigsberger si a) et b) ont lieu: (Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen, Leipzig, Teubner 1889), Bendixson si a) et c) ont lieu: (Öfversigt Vetensk. Akad. förhand. t. 51, 1894) Lindelöf et Liapounoff si a) et b) ont lieu: (Liap. Fac. Sc. Toul. t. 9. 1907, Lind. Ann. École Norm. t. 20 1903).

Solutions algébroïdes. Si a), b), c) ont lieu il y a n solutions holomorphes. ~~obtenu~~ Il peut y avoir d'autres solutions algébroïdes, si le rapport de deux des λ_i est un nombre rationnel positif. Il y a même dans ce cas une infinité de solutions algébroïdes nulles.

Si a) et non b) et non c), il reste au moins une solution holomorphe. Il peut y avoir d'autres solutions algébroïdes. D'ailleurs si aucun λ_i n'est nul, il y a n solutions holomorphes nulles, que l'on ait ou non c). (voir Dulac cité Bull. Soc. Math.)

Application au cas

$$(6) \qquad (\alpha x + \beta y + [x,y]_2)dy - (ax + by + [x,y]_2)dx = 0$$

$$\Delta(\lambda) = (\alpha - \lambda)(b - \lambda) - a\beta = 0.$$

Classification des singularités (valable dans le cas général)

1) aucun $\lambda_i = 0$ — point singulier simple. 2) Au moins un $\lambda_i = 0$, au moins un $\lambda_j \neq 0$ — point singulier essentiel. 3) Tous les $\lambda_i = 0$. Point singulier multiple.

Dans le cas (6) les tangentes à l'origine aux sol. nulles vérifient

$$(\alpha x + \beta y)y - (ax + by)x = 0.$$

Pour qu'elles soient confondues il faut et il suffit qu'il y ait une racine double de $\Delta(\lambda)$.

Pour que les deux droites $\alpha x + \beta y = 0$, $ax + by = 0$ soient conf. il faut et il suffit qu'il y ait une racine mult.

On a, par exemple un point singulier multiple lorsque Les droites de ~~et deux~~ chaque couple ~~droites~~ envisagé sont respectivement confondues.

Une transformation linéaire donne:

$$(Y + [X,Y]_2)dY = [X,Y]_2 dY.$$

Dulac a étudié le cas (surtout d'un point singulier simple dans a))

Solutions quelconques nulles.

Solutions nulles holomorphes seulement dans un angle D.

Horn, chazy ‡ ~~Bendixson Picard~~. (page 34 du Mémorial Dulac).

Bendixson, Horn ont étudié les ~~[illegible]~~ solutions réelles nulles pour n=0 (et ont donné une représentation de ces solutions) de l'équation:

$$x^m y' = x(a + [x,y]_1) + y^{n+1}(c + [y]_1) \qquad (c \neq 0,\ n > 0).$$

Enfin ~~la partie~~ une partie importante de ces recherches est consacrée aux points singuliers multiples. (page 12, Dulac) A, B étant des polynomes homogènes de degré n en x et y; considérons:

$$H(x,y)dy + K(x,y)dx = 0.$$

$$H = A(x,y) + [x,y]_{n+1}, \quad K = B(x,y) + [x,y]_{n+1}.$$

(Briot et Bouquet, Dulac .. Méthode de Bendixson : recherche des solutions tangentées, c'est à dire telles que lorsque x et $y \to \infty$, $y:x$ tend vers une limite). Il y a une infinité de solutions algébroïdes