COTE DELES 014

TEXTE PAINLEVÉ-GARNIER. RAPPORT SOMMAIRE
(MANUSCRIT DE JEAN DELSARTE, PIÈCE UNIQUE)

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 5

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 5

Painlevé - Garnier.

Rapport sommaire.

Le problème examiné est un problème de nature algébrique : C'est l'étude des singularités des équations des formes suivantes :

a/ $y' = R(x, y)$ — R rationnel en y, à coefficients analytiques en x

b/ $F(x, y, y') = 0$ — F étant un polynome en y et y' à coefficient analytiques en x

c/ $y'' = F(x, y, y')$ — F étant rationnel en y', algébrique en y, analytique en x

Cette étude peut se faire à deux points de vue :

1°/ Nature des singularités mobiles de l'intégrale

2°/ Nature de l'intégrale regardée comme fonction des constantes d'intégration.

Des exemples simples, (Painlevé, leçons de Stockholm, 1ère leçon) montrent que (a) et (b) peuvent présenter des point critiques mobiles ; que (c) peut présenter des point trancendant mobiles. [critiques-trancendant ; essentiels, ou les deux à la fois]

Première partie. Equations du 1er ordre :

Il y a deux résultats essentiels :

1/ Une équation du type a, ou b, ne peut admettre, comme points singuliers non algébriques que des points fixes, déterminables à priori

2/ L'intégrale générale $y = \varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$, telle que $y_0 = \varphi(\bar{x}_0, y_0, \bar{x}_0)$, quand $\bar{x}$ et $\bar{x}_0$ sont distinct des points singulier fixes, ne présente dans ~~le plan~~ tout le plan y_0, que des singularités algébriques.

Viennent ensuite un certain nombre d'applications.

Je propose le plan suivant

I/ Equation du type a/

- Démonstration du th. 1, dit théorème de Painlevé.
- Classification des points singuliers fixes: [Painlevé, 2ème leçon. pp. 26-27]
- Equations à points critiques fixes: Equation de Riccati
- Equations sans singularités mobiles: Equation linéaire.
- De l'intégrale comme fonction de la constante. Démonstration du th. 2, et corollaires. [Painlevé; 3ème leçon. pp. 33-37]
- Equations du type a dont l'intégrale est fonction rationnelle de la constante: Eq. de Riccati.
- Equation du type a " " algébrique de la constante: ce sont les équations dont l'intégrale ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles; elles sont réductibles à Riccati

II/ Equation du type b/

- Etude des points singuliers fixes des intégrales.
- Démonstration du théorème 1. [comparer Painlevé, 4ème leçon et Ince Chap XIII]
- Classification des points singuliers fixes.
- Equations à points critiques fixes.
  Application: Eq. du second degré en y' à points critiques fixes.
  : Eq à points critiques fixes de genre, (en y et y') inférieur à 3; réduction à Riccati.
  : Eq à points critiques fixes et hyperelliptique.
- De l'intégrale considérée comme fonction de la constante. Démonstration du th. 2. [Painlevé. 5ème leçon. pp 70]
- Retour sur les équations à point critiques fixes. Permutation de $\bar{x}_0$ et $\bar{x}$. correspondance birationnelle entre les courbes:

$$F(\bar{x}_0; y_0; y'_0) = 0 \quad \text{et} \quad F(\bar{x}; y; y') = 0$$

Application à la formule d'addition des fonctions elliptiques.

- Historique de la question ~~//~~ des équations du 1^er^ ordre à points critiques fixes. [Fuchs ; Poincaré]. (Voir Painlevé ; 7^ème^ leçon).

Cela me paraît suffisant pour le 1^er^ ordre. - La question des équations du type 8 dont l'intégrale ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles exige d'assez longs développements de nature trop spéciale. [Intégrales abéliennes ; transformations birationnelles]. De même pour le problème de l'intégration algébrique.

~~[illegible]~~.

Deuxième partie

Résultat essentiel : Soit l'équation

$$y'' = F(y, y', x) \qquad \text{ou même plus généralement} \qquad F(x, y, y', y'') = 0$$

F étant algébrique en y, y', y'' ; analytique en x. Des exemples très simples semblent prouver qu'en général l'intégrale a des singularités essentielles mobiles. En réalité, c'est le contraire qui est vrai. Si on prend au hasard la fonction F, ~~algébrique en y, y'~~ analytique en x, algébrique en y, rationnelle en y', l'équation

$$y'' = F(y, y', x)$$

ne possède, pas de singularités essentielles mobiles. ~~aucun point singulier non algébrique que les points fixes / déterminables à~~ ~~priori.~~ De manière plus précise :

Th. 3 Considérons l'équation (c) et l'ensemble de ses transformées algébriques ; si aucune de ces équations ne possède les propriétés suivantes :

α/ y''/y'^2 est fini pour y' infini

β/ y'' a un pôle $y = G(x)$ indépendant de y'

alors (c) n'a pas de singularités essentielles mobiles. Dans le cas contraire, elle peut en avoir.

Il existe une seconde proposition relative à l'intégrale générale considérée comme fonction des constantes :

Supposons que l'intégrale générale ne puisse prendre que n valeurs autour de ses points critiques mobiles ; nous dirons, avec Painlevé, que l'équation est de classe singulière si elle satisfait aux conditions α et β, et qu'elle est de classe générale si elle n'y satisfait pas. Alors :

Th. 4 - L'intégrale générale renferme les constantes sous forme algébrique ou transcendante, suivant qu'elle est de classe générale ou de classe singulière.

- Les équations dites "de Painlevé" sont, parmi les équations (E) de la classe singulière, celles dont ~~toutes les singularités non polaires sont~~ l'intégrale générale est uniforme et ne possède que des pôles comme singularités mobiles.

Il semble qu'il soit plus important de démontrer le th. 3 et 4 que d'exposer la longue discussion qui conduit aux équations de Painlevé ; je propose donc le plan suivant, en se bornant aux équations $y'' = \dfrac{P(y, y', x)}{Q(y, y', x)}$, (P et Q polynomes en y et y').

1°/ - Discussion complète des conditions initiales.

- Démonstration du théorème 3

- ~~L'intégrale considérée comme fonction des constantes ; démonstration du théorème 4.~~

[Painlevé, 18ème leçon ; pp. 394 - 414]

2°/ - Etude particulière des équations dont l'intégrale générale prend n valeurs autour des points critiques mobiles :

- Propositions relatives aux points singuliers des fonctions analytiques.

- Etude des équations ayant la propriété indiquée ; démonstration du théorème 4. [Painlevé, 19ème leçon : pp. 433 - 462].