COTE DELES 013

TEXTE [RAPPORT SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES]
(MANUSCRIT DE JEAN COULOMB, PIÈCE UNIQUE)
IN LETTRE DE JEAN COULOMB À JEAN DELSARTE 21/XI/1936

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 11

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 11

Merci pour ton envoi sur le calcul linéaire.

Observatoire, Côte de Landais, 21 Oct. 36

Mon cher Delsarte,

Je t'envoie „Ince, Ordinary Diff. Eq" provenant de la Fac de Clermont. Je crois qu'il te sera très utile*, bien qu'il ne soit pas extrêmement bien rédigé, et que tu auras intérêt à le faire acheter par ta Fac. Si je ne te l'ai pas envoyé plus tôt, c'est que je voulais m'en servir pour examiner la partie que j'avais à examiner avant le 1er décembre. Si j'ai bien compris ce que vous m'avez dit à Paris il s'agissait, non pas d'une rédaction même sommaire (ce qui serait impossible en un temps si court) mais plutôt d'une délimitation assez précise de ce que tu aurais, toi, à rédiger à ton idée (la délimitation restant, bien entendu, à approuver). C'est dans cet esprit que je t'envoie les commentaires qui suivent. Si ce n'est pas ça que tu attendais, préviens moi - ~~[illegible]~~, J'ai tâché de t'éviter du travail en donnant des références. Tu les trouveras peut être superflues.

* par. ex pour ton « Painlevé Garnier ». J'espère d'ailleurs que tu concluras à la suppression de toute cette théorie. C'est beau, mais c'est bien rasoir et combien inutile !

J'avais à voir « Equations linéaires. Fuchs. Singularités confluentes (Garnier). Classification. Hypergéométrique ».

Cet énoncé correspond mal au programme établi jadis par la Commission des Eq. diff et paru par tes soins au Journal de Bourbaki. Ce programme comprenait 5 paragraphes relatifs aux Eq. linéaires. J'en recopie les titres (pour le texte, s'y reporter) :

1°) Etude algébrique générale

2°) Eq. à coeff^s et seconds membres périodiques

3°) Etude globale complexe

4°) Etude globale réelle

5°) Eq. aux variations, stabilité.

* ou dans le 3°) si on traite les ~~sol.~~ séries asymptotiques par le lemme de Poincaré

A signaler que le 4°) comprend : Eq. de Riccati, équivalence avec l'Eq. linéaire du 2e ordre, qui serait mieux à sa place dans le 1°).* C'est d'ailleurs peu de chose* (Exercice ?) et je n'en parlerai plus. Ce point mis à part, il me semble que ce qui m'est demandé correspond au nos 1°) et 3°). Je dirai cependant qq chose des „Eq. à coeffs consts." et de l'„Etude en fonction d'un paramètre" qui sont classés dans les Divers – Enfin voici qq mots en dehors ~~de~~ mon sujet :

A) Le 2°) serait mieux à sa place avant le 4°) car on aurait déjà vu Fuchs d'où s'inspire la théorie pour les coeffs périodiques (le contraire n'est vrai ni logiqt ni chronologiqt.) et on rapprocherait des pb de valeurs propres. Au sujet de l'Eq de Hill, outre Whittaker-Watson et Ince, voir „Lamésche, Mathieusche und verwandte Funkt. in Physik und Technik, par M.J.O. Strutt (un type de chez Philips à Eindhoven) dans Ergebnisse der Mathematik, I, 3 (Springer 1932) – (Il est à Clermont) ;

B) une suggestion pour un exemple pas trop ressassé d'éq. non linéaire : l'éq. d'Emden $y'' + \frac{2}{x} y' = - y^n$, qui sert aux astronomes s'occupant d'~~évolution stellaire~~ équilibre radiatif. Comme bibliographie, emploi fréquent par Eddington, Milne, etc ~~à~~ la Table des Monthly Notices of the Roy. Astr. Soc. (arrêtée à 1931) cite comme mémoires mathématiques

R. H. Fowler The solutions of Emden's and similar diff. equations vol 91, p. 63, 1931.

E. Hopf On Emden's differential eq, vol 91, 663, 1931

Il suffirait probablt que tu jettes un coup d'oeil sur ces 2 mémoires. (les pb intéressants st des pb aux limites singuliers pour $x=0$)

Je passe maintenant à mon propre sujet.

Commençons par I l'Étude algébrique générale.

Dans cette étude, on n'a besoin que des théorèmes d'existence déjà démontrés pour les équations non linéaires. Il n'est pas utile de supposer les coefficients analytiques. (Cependant il faut faire alors un peu d'attention à l'ordre des Th. relatifs au Wronskien. L'ordre suivant ne canule pas).

Je pense qu'on peut se borner au cas d'une seule équation et au cas d'un système ~~canonique~~ (résolu par rapport aux dérivées) de n éq. du 1er ordre à n inconnues. Peut être au moment de traiter les problèmes de valeurs propres conviendra t'il de traiter les systèmes différentiels linéaires (Inca Chap IX) c'est à dire l'ensemble d'éq. linéaires et de conditions aux limites linéaires*; encore serais je d'avis de se borner tout simplement à Sturm-Liouville (mais je me méfie de ma répulsion pour l'algèbre).

* envisagés toujours au pt de vue algébrique

La première chose à montrer est que l'équ. d'ordre n est équivalente à un système du 1er ordre ~~canonique~~; et récipqt qu'un système du 1er ordre ~~canonique~~ peut en général se ramener à des équations. Je n'insisterais pas sur les questions de possibilité des éliminations. Au fond c'est secondaire puisqu'il faut traiter les systèmes ~~canoniques~~ du 1er ordre.

Il faut même commencer par eux, contrairement à l'habitude*. A chaque étape, il suffit de dire ce que deviennent les résultats dans le cas d'un système déduit d'une éq d'ordre n. Tous les théorèmes sont bien plus naturels sur les systèmes du 1er ordre que sur les équations.

* Mis à part Schlesinger, Vorlesungen über lineare Diff gleich.

Notations : matricielle selon le vœu de Bourbaki, avec le correctif qu'il est bien commode parfois de se placer tout simplt ds l'espace à 3 dimens.

Alors on déroule taupinalement : Système à second membre, Solution particulière, Système homogène ; Formation d'une solution* par superposition. C'est la solution générale (c'est à dire qu'elle permet de se donner les valeurs initiales) pourvu que le Wronskien W soit $\neq 0$. Théorème : si $W \neq 0$ pour une valeur de t, $W \neq 0$ pour tte valeur de t qui ne canule pas les coeffs diagonaux (L'astuce de calculer W' est moins choquante sur les systèmes que sur les équations ; je ne vois pas le moyen de la rendre parfaitement naturelle ; ~~...~~ à moins de dire qu'on va chercher une équation diff en W, pour s'apercevoir aussitôt qu'elle est du 1er ordre, ce qui paraît assez ridicule). Si $W=0$ pour 1 valeur de t, $W \equiv 0$. On exprime alors une des solutions de l'éq. homog. en fonction linéaire des autres, les coeffs étant a priori des fonctions de t. Si on substitue dans le syst d'éq pour savoir ce que sont ces fonctions de t, on trouve que ce sont des constantes, pourvu qu'un des mineurs de W ne soit pas identiquement nul (attention, lui peut être nul sans l'être identiquement). D'où la condition que les solutions soient linéairement indépendantes pour que leur ensemble soit fondamental

* 1 solution = ensemble des n fonctions solutions des n équations

Passons aux Systèmes adjoints. Voici comment on peut les présenter ~~je les présenterais~~ ~~(les multiplicateurs)~~

On définit d'abord l'intégrale première $f(u, v, w, t) = C$ du système $\begin{cases} \frac{du}{dt} + X_1(u,v,w,t) = 0 \\ \frac{dv}{dt} + X_2 = 0 \\ \frac{dw}{dt} + X_3 = 0 \end{cases}$

(s'il en existe) – Pour une fonction quelconque $f(u, v, w, t)$ on peut écrire

$$df = \xi\,[du + X_1\,dt] + \eta\,[dv + X_2\,dt] + \zeta\,[dw + X_3\,dt] + \lambda\,dt$$

$\xi, \eta, \zeta, \lambda$ coeff^s convenables – Si f est une intégrale première $\lambda = 0$ et réciprog^t.* Passant au cas linéaire $X_i = a_i u + b_i v + c_i w$ on peut transformer df comme suit $df = \xi\,[du + (a_1 u + b_1 v + c_1 w)\,dt] + \dots \equiv d(\xi u + \eta v + \zeta w) - u\,[d\xi - (a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta)\,dt] - \dots$

(Identité fondamentale, Identité de Lagrange, etc)

* ξ, η, ζ sont les « multiplicateurs »

On en conclut que si $\xi\ \eta\ \zeta$ est sol du syst adjoint on a une intégrale première linéaire $\xi u + \eta v + \zeta w$ – Réciprocité des 2 systèmes – Equivalence de leur résolution –

Le passage aux équations adjointes n'est pas très satisfaisant, il faut l'avouer, mais me paraît encore préférable à la cascade d'intégrations par parties (dont on ne voit pas le but) généralement employée. Voici comment ça se présente : $L(u) \equiv u''' + pu'' + qu' + ru = 0$ équivaut à $\mathrm{I} \begin{cases} u' - v = 0 \\ v' - w = 0 \\ w' + ru + qv + pw = 0 \end{cases}$

Le syst adjoint de I est $\mathrm{II} \begin{cases} \xi' - r\zeta = 0 \\ \eta' + \xi - q\zeta = 0 \\ \zeta' + \eta - p\zeta = 0 \end{cases}$ ou $\mathrm{II}' \begin{cases} \eta = p\zeta - \zeta' \\ \xi = q\zeta - (p\zeta)' + \zeta'' \\ \Lambda(\zeta) \equiv -\zeta''' + (p\zeta)'' - (q\zeta)' + r\zeta = 0 \end{cases}$

$\Lambda(\zeta)$ est adjointe à $L(u)$

Si on suppose alors que u et ζ ne sont plus solutions de $L(u) = 0$ et $\Lambda(\zeta) = 0$, mais que v, w; ξ, η leur sont toujours liées par les deux premières équations de I et II', l'identité fondamentale $\frac{d}{dt}(\xi u + \eta v + \zeta w) = \xi(u' - v) + \eta(v' - w) + \zeta(w' + ru + qv + pw) + u(\xi' - r\zeta) + v(\eta' + \xi - q\zeta) + w(\zeta' + \eta - p\zeta)$

devient $\frac{d}{dt}P(u, \zeta) = \zeta L(u) - u\Lambda(\zeta)$ où P est bilinéaire en u, u', u'', u''' / $\zeta, \zeta', \zeta'', \zeta'''$.

Cette identité définit $\Lambda(\zeta)$ car si $\frac{dP_1}{dt} = \zeta L - u\Lambda_1$, $\frac{d(P - P_1)}{dt} = -u(\Lambda - \Lambda_1)$

[lin en u''', u'', u', u | fonct de ζ seul^t et de ses dér; on voit successiv^t que les divers coeff^s sont nuls

Corollaire : L'adjointe de Λ est L.

On peut appliquer le système adjoint à la résolution du syst. avec second membre. C'est même la meilleure façon d'introduire la méthode de variation des c^tes. Je fais le calcul pour 2 dimensions seul^t.

syst à 2^e mb. : $\begin{cases} u' + a_1 u + b_1 v = \varphi_1 \\ v' + a_2 u + b_2 v = \varphi_2 \end{cases}$ || syst homog : $\begin{cases} U' + a_1 U + b_1 V = 0 \\ V' + a_2 U + b_2 V = 0 \end{cases}$ syst adjoint $\begin{cases} \xi' - a_1\xi - a_2\eta = 0 \\ \eta' - b_1\xi - b_2\eta = 0 \end{cases}$

En vertu de l'ident fond on aura 2 intég premières de la forme $\xi u + \eta v = \int(\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2)\,dt$

autrement dit : on avait $\xi U + \eta V = f = c^{te}$; le changt de variable $\xi u + \eta v = f$ ramène l'intégration à 1 quadrature (méthode de var des c^tes)

Ici se placeraient classiquement les équations à coefficients constants. Le programme Bourbaki propose de les placer avant les équations différentielles, afin de pouvoir traiter en même temps le calcul opérationnel. Ça me semble un peu étrange. Si on ne veut pas séparer dans le calcul opérationnel (Heaviside, intégrale de Fourier, etc..) ce qui n'est pas spécifiqt équ. différentielles, il vaudrait peut être mieux placer le tout n'importe où après les équ. différentielles ? Ou alors, il faut admettre les th d'existence !

II

Nous en arrivons à l'Etude globale complexe. ~~[illegible]~~ La question capitale est de savoir si on se contente de traiter l'équation d'ordre n comme a l'air de l'indiquer le programme Bourbaki*, ou si on traite les systèmes du 1er ordre (n équations à n inconnues). Ne serait-ce que pour l'homogénéité des 2 parties (Algébrique et Complexe) je serais du second avis. Voici ce que cela entraîne dans chaque cas:

* Cependant il parle de notation matricielle. Que peut on en faire de mieux?

1°) On se borne à l'équation d'ordre n — Tout est parfaitement simple dans le cas régulier. ~~[illegible]~~ Dans le cas irrégulier, on doit traiter les séries asymptotiques par le „Lemme de Poincaré". C'est fait comme ça* dans Schlesinger, Vorlesungen über lineare Diffgleich. Je ne suis pas absolument sûr que ce soit rigoureux, c'est à voir de près. En tous cas c'est compliqué, surtout si on veut délimiter les secteurs de validité*. Par contre la même méthode s'applique à ce que Schlesinger appelle les «séries normales paramétriques», ~~et~~ qui est fort intéressant.

* Il emploie même le Lemme de Poincaré pour traiter le cas des systèmes

* Cf Horn, Math. Ann. T. 49 et 50. Ce n'est pas beau à voir, et il s'agit de cas particuliers.

2°) On traite les systèmes du 1er ordre. Le gros canular est qu'il n'y a pas pour les coefficients de condition nécessaire et suffisante analogue à celle de Fuchs, entraînant la régularité des solutions. Evidemment si ça complique (voir Schlesinger ici aussi) ça a cependant ~~aussi~~ son intérêt. ~~mais j'admets que ce soit [illegible]~~ Dans le cas irrégulier, on ~~peut~~ doit donner la très belle théorie de Birkhoff (Ince chapitre XIX) qui ramène le cas des systèmes quelconques aux systèmes à coefficients rationnels, auxquels on peut appliquer la transformation de Laplace. (La même ~~[illegible]~~

réduction n'existe pas pour les équations). Les séries asymptotiques s'ensuivent aisément. On en peut tirer aussi la solution du pb général de Riemann (~~mais~~ ce n'est pas fait dans Ince), mais je trouve qu'il y aura assez de problèmes abstraits dans le Bourbaki et je ne propose pas d'ajouter celui ci, si naturel soit il – En ce qui concerne les séries normales paramétriques (Hamburger) on pourrait se borner à un cas extrêmement utile, ~~mais très~~ quoique particulier, savoir l'étude asymptotique des solutions de $y'' - \lambda f(z) y = 0$ pour λ grand. Dans ce cas le raccord des solutions au voisinage d'une racine de $f(z)$ est fait complètement (à l'aide des fonctions de Bessel) par H Jeffreys, Proc. Lond. Math. Soc, T. 23, pp 428-436 (1923); c'est une chose que je tiendrais beaucoup à voir dans Bourbaki.

C'est là la grosse question à résoudre. Voici maintenant quelques points de détail:

1) Aussitôt qu'on a supposé les coeff^s analytiques, on a besoin du résultat : les seuls pts singuliers sont ceux des coefficients. Il me semble que c'est l'occasion d'employer les majorantes qui donnent ici le maximum (même et surtout si on ne les a pas employées pour les équations non linéaires). La recherche ~~substitution~~ de la série de Taylor pour obtenir la solution est naturelle et prépare la recherche ~~substitution~~ analogue au voisinage d'un point singulier.

2) Petite remarque : pour démontrer l'invariance de l'équation déterminante, il ne suffit pas de remarquer (comme Picard) que les

racines en sont définies (par la condition que les solutions correspondantes se reproduisent à un facteur près). Ça ne donne rien s'il y a des racines multiples. Il faut faire appel à un principe de continuité. Le calcul direct est d'ailleurs immédiat (C'est fait comme ça dans Ince) mais sans intérêt.

3) Je trouve assez intéressante ~~les~~ solution ~~de~~ certaines équations par ~~transformation~~ intégrale double ~~de forme~~ Laplace (Ince §.8.501, p 198, §18.31 p 448). Ça pourrait faire un exercice.

4) Pour les questions relatives au groupe de monodromie, je pense que ça rentre dans la partie „Mémoires de Poincaré" que Chevalley et de Possel ont à ~~voir~~ regarder.

5) Pourrait on demander à Ehresmann s'il faut parler des espaces à connexion projective à propos des éq. différentielles ?

III Continuant à examiner mon programme, j'en arrive à „Singularités confluentes (Garnier). Classification"

Un commentaire ~~de~~ verbal de Weil indiquait que (Garnier) représentait un mémoire dudit aux Annales ENS, relatif en principe au problème de Riemann, mais contenant des indications relatives aux singularités confluentes.

Me reportant aux Annales ENS j'ai trouvé

1°) La Thèse de Garnier : „Sur des Eq diff du 3e ordre etc..." T.29, 1912 C'est surtout du Painlevé, mais il y a aussi des trucs compliqués sur les équations linéaires, en rapport avec le pb de Riemann.

2°) „Solution du pb de Riemann pour les syst diff. lin. du 2e ordre", T. 43, 1926. C'est le développement des trucs compliqués précédents.

Les deux mémoires sont intéressants, mais je ne crois pas qu'il y ait rien à en tirer pour Bourbaki. En tous cas je n'y ai absolument rien vu sur les singularités confluentes, sauf le mot dégénérescence employé çà et là.

Comme je te l'avais déjà dit, cette histoire de confluence ne me paraît pas présenter un gros intérêt. Tout ce que je vois à en dire c'est ceci : Par confluence de 2 sing. dont la diff. des exposants est $\frac{1}{2}$ (sing. élém.) on a une sing. rég. qcq. Par confluence de plus de 2 sing élém ou d'une infinité à préciser on ~~p~~ a une sing. irrég. Réciproq^t tte sing. ~~...~~ des ég. à coeff^{ts} rationnels peut être ainsi obtenue. D'où une classification de ces ég. selon le nombre de sing. élém. confluentes. Il se trouve que pour obtenir des ég. qui se ramènent aux ég. diverses de la théorie du potentiel on n'a pas besoin d'aller plus loin que 5 sing. élém, mais il ne semble pas y avoir de raison bien profonde à ce chiffre 5. Il faut évidemm^t 6 sing élém pour obtenir l'ég. hypergéométrique générale.

IV Reste à parler de ~~cette~~ équation hypergéométrique. Placée ~~...~~ au sein des ég. diff, on ne peut guère en dire plus long que ce que fait Whittaker-Watson* (§. 10.7 à 10.72, p. 206). ~~...~~ ~~...~~ D'abord l'étude complète de la fonction hypergéométrique serait ici déplacée, car elle n'est pas une application directe des th sur les ég. diff. (Sauf à faire ~~...~~ d'abord, comme Ince, un jus

* En expliquant un peu plus pourquoi $p(z)$ et $q(z)$ sont rationnels, et en disant, si on veut, le mot de pb. de Riemann.

général sur la transformation d'Euler, et à présenter les intégrales hypergéométriques de Jordan Pochhammer comme application. Mais ce jus général sur une transformation qui sert à peu près exclusivement dans ce cas là, ça aurait l'air d'une fumisterie). Il faudra se résigner à mettre cette fonction hypergéométrique en petits morceaux: en particulier je verrais volontiers les intégrales hypergéométriques intervenir à propos de la représentation conforme des polygones (Schwarz); on pourrait poser la question à Dieudonné qui est chargé des fonctions analytiques spéciales, et lui suggérer de s'entendre avec Chevalley-de Possel, qui sont chargés des Mémoires de Poincaré, donc, je suppose, des fonctions fuchsiennes. En ce qui concerne les propriétés particulières de la fonction hypergéométrique [$F(\alpha,\beta,\gamma;1)$, détermination explicite des coefficients des substitutions autour d'1 pt. sing, fonctions contiguës] c'est à traiter à part à la suite de Γ et peut être de $\zeta(s)$. Ça formerait un premier groupe de fonctions spéciales, le 2e étant celui des fonct. de la théorie du potentiel. Il y a d'ailleurs une décision à prendre qui m'intéresserait en vue de la rédaction des fonct. de Legendre: c'est l'emploi des intégrales de Barnes (portant sur des produits ou quotients de fonctions Γ) Je les ai écartées de la rédaction des fonctions de Bessel, pour ne pas introduire une 3e sorte de représentation par des intégrales. Mais il faut avouer qu'elles sont bien commodes dans certains cas.

Je termine cette lettre le 4 novembre. Quand je l'ai commencée je croyais avoir suffisamment réfléchi à ce qu'elle devait contenir, et puis j'ai regratté à plusieurs reprises, d'où son aspect assez dégueulasse, je l'avoue.* Je suis un peu effrayé de la longueur du chapitre avec le programme que je propose (surtout si on y comprend, comme je l'espère, la théorie de Birkhoff) mais je ne le regrette pas : il ~~me~~ semble qu'il vaudrait mieux sacrifier d'autres points des équations différentielles (Painlevé-Garnier, à coup sûr, et peut être Bendixson-Dulac) et s'étendre sur les équations linéaires, qui sont tellement plus importantes.

*Je manque de temps pour la taper n'ayant pas de double, je te demanderai de la renvoyer si tu as des observations à faire –

J'ai laissé tomber consciemment la méthode de solution des éq. par séries de matrices (Peano-Baker, cf Ince § 16.5, p. 408). J'ai laissé tomber également les méthodes de développement en série de Laurent qui conduisent à des éq. lin. à une infinité d'inconnues pour les coefficients (cf Schlesinger, Handbuch* der Theorie der Linearen Diffgleich, tome I, Teubner 1895, Sechster Abschnitt, p 272 et suivantes), mais là je suis insuffisamment renseigné. Comme ça débouche sur les déterminants infinis, Hill, Von Koch etc.., je pense que tu dois être au courant des choses récentes, et voir si ça vaut la peine d'être ressuscité. J'ai l'impression que oui – Dans le même ordre d'idée (calcul effectif des intégrales irrégulières cf Picard III chap XI, § ~~[illegible]~~ p 303-307 et la note au bas de la page 307 ~~[illegible]~~

* ne pas confondre avec les Vorlesungen

Cette fois je crois que c'est tout. Ah si ! je renouvelle la déclaration déjà faite à Paris quand vous m'avez communiqué le programme Escorial. Il m'est impossible de faire cette année le programme équations intégrales (qui m'est demandé pour le 1er mars !) Comme cela figure dans le programme que tu m'as envoyé ces jours ci, j'aime mieux insister pour éviter toute méprise. Pour le reste, on tâchera de s'arranger.

Amitiés sincères

J Coulomb