COTE DELES 012

TEXTE [PLANS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES]
(MANUSCRIT DE JEAN DIEUDONNÉ, PIÈCE UNIQUE)

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 7

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 4

I. Théorèmes d'existence des éq. diff^{les} (local et global, réel et complexe)
(I à III du rapport et divers sans rapport avec éq. linéaires)

II. Théorèmes d'existence des éq. aux dérivées partielles. Formes de Pfaff et calcul des ω. (Caractéristiques, Cauchy-Kowalewskaïa)

III. Calcul des variations. (Contenant les formes quadratiques et hermitiennes sur le corps des nbs réels, et les maxima et minima ordinaires)

IV. Calcul fonctionnel linéaire

A. Généralités. Conditions aux limites Cas homogène, cas non homogène. Question d'unicité, notion de valeur propre et fonct. propre; ~~spectre~~. Passage de l'homogène au non homogène : développt suivant les fonct. propres

B. Inversion d'un opérateur linéaire homogène complett continu. Existence de ~~la solut~~ l'opérateur inverse si λ n'est pas valeur propre (Leray). Théorie de Riesz. En particulier, équations de Fredholm et Volterra.

C. Inversion d'un opérateur hermitien dans $\mathfrak{L}^2$. Cas particulier : équations intégrales symétriques. Application du calcul des variations à la caractérisation des valeurs propres.

D. Théorie des opérateurs de translation (Théorie de Delsarte). Éq. linéaires à coeff^{ts} constants (et à plusieurs variables ? Symbolisme d'Heaviside ?)

E. Théorie générale des éq. diff^{les} linéaires (IV du rapport, sauf valeurs propres et 5°).

F. ~~La~~ distinction entre les divers types d'équations aux dérivées partielles linéaires du 2e ordre et d'ordre sup^r pour des conditions aux limites ~~non~~ différentes de celles de Cauchy. (local et global)

G. Valeurs propres et fonctions propres pour les équations diff^{les} et les équations aux dérivées part^{les} du type elliptique : application des équations intégrales et du calcul des variations.

H. Equations elliptiques, théorie du potentiel, problème de Dirichlet

I. Equations hyperboliques.

J. Equations paraboliques.

V. Applications du calcul fonctionnel linéaire. Equations aux variations. Stabilité ; équations voisines d'éq. linéaires. ~~Calcul des perturbations~~. Equations intégrales non linéaires (Schmidt, Leray). (Calcul des perturbations)
Equations non linéaires du type elliptique (Leray-Schauder)

Dr. A. Weil

Institute for Advanced Study

Fine Hall

Princeton, N.J.

(Etats-Unis)

Pour de Possel — Chevalley prend les papiers en charge

~~rédiger~~ : et en tire une rédaction provisoire | Mandelbrojt enverra Zoretti |

1)

IV G

1) Laius ourrile pour dire que les problèmes de valeurs propres se résolvent partic^t bien pour certaines équations diff^les et aux dérivées partielles ~~du 2^e ordre~~ (elliptiques), qu'on rencontre très fréqu^t en Physique math. Origine de ces problèmes : par exemples problèmes d'oscillations (corde, verge, membrane, plaque) ~~provenant obtenus p~~ les équations étant obtenues par le calcul des variations.

Cas des équations différentielles avec n conditions aux limites de la forme

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k u^{(k)}(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k u^{(k)}(b) = 0$$

Il en résulte que l'équation donnant les valeurs propres est identiq^t nulle ou de la forme $F(\lambda)=0$, F fonction entière. (à l'aide du th. sur les ~~caractère des~~ intégrales fonctions entières de λ). Exemples de tous les cas.

Rien d'analogue pour les éq. aux dérivées partielles ; en se limitant aux cas intéressants pour la physique math. (systèmes auto-adjoints) on a par le calcul des variations, une méthode g^le pour l'étude des valeurs propres.

2) <u>Problème g^l de calcul des variations fournissant les valeurs propres:</u>

si on pose (pour 2 var. par ex.)

G domaine de frontière Γ à tgte continue

$$D(\varphi) = \iint_G \left[p({\varphi'_x}^2 + {\varphi'_y}^2) + q\varphi^2\right] dx\,dy + \int_\Gamma p\sigma\varphi^2\,ds$$

$$H(\varphi) = \iint \rho\,\varphi^2\,dx\,dy \qquad \text{avec } \rho>0,\ p>0$$

$$H(\varphi,\psi) = \iint_G \rho\,\varphi\psi\,dx\,dy$$

la fonct. qui donne le ~~maximum~~ minimum de $D(\varphi)$ avec la condition $H(\varphi)=1$ ~~est~~ fonct. propre de l'équation

$$L(u) + \lambda\rho u = (pu'_x)'_x + (pu'_y)'_y - qu + \lambda\rho u = 0$$

avec la condition "naturelle" aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$. La valeur min. de D est la valeur propre λ_1. De là, on procède de proche en proche pour obtenir les autres valeurs propres et fonct. propres (conditions $H(\varphi, u_i) = 0$ en plus)

Pour la condition aux limites $u=0$, il faut ajouter la condition $\varphi=0$ au problème de calcul des variations.

Existence du minimum par les méthodes <u>directes du calcul des var.</u>

Analogue pour les éq. diff^{les} du 2^{e} ordre, ou les équations auto-adjointes d'ordre plus élevé provenant d'une forme quadratique pour laquelle le minimum existe.

Propriété maximinimale des valeurs propres.

Applications : relation entre les valeurs propres relatives à un domaine et à des domaines partiels. Variation des valeurs propres avec σ, ρ, p, q. Les valeurs propres $\lambda_n \to +\infty$, ~~Continuité~~ seul pt. d'accumulation. Les fonct. propres forment un système complet. Convergence simple des développ^{ts} dans le cas d'1 variable.

Variation continue des λ_n avec p, q, ρ, σ et G.

Expression asymptotique des λ_n pour les éq. de Sturm-Liouville, et les éq. à plusieurs variables du type g^{l} du 2^{e} ordre donné plus haut.

Propriétés des zéros des fonctions propres dans le cas g^{l} et leur développ^{t} asymptotique dans le cas Sturm-Liouville.

3. Fonction de Green. Nouvelle méthode pour l'étude des problèmes précédents. Caïus scurrile pour introduire la fonct. de Green; d'abord pour les éq. diff^{les}, puis pour les éq. aux dérivées partielles. Existence immédiate pour les éq. diff^{les}; par les méth. directes du calcul des variations pour les éq. aux dérivées part^{les}. Lien avec les équations intégrales; d'où la solution de l'équation non homogène. Exemples.

4. Equations ou conditions aux limites singulières. 1) Cas du spectre discontinu. Equations des polynomes orthogonaux. Etude par les 2 méthodes précédentes.

2) Cas du spectre continu et cas de Schrödinger.

~~5. Calcul des perturbations (étude au voisinage d'une valeur propre)~~

Point de vue semi-local dans la théorie des éq. diff^{les} : étude de toutes les courbes intégrales (ou d'une famille de ces courbes) au voisinage d'une variété, en g$^{\text{t}}$ $x = x_0$.
(à traiter dans chaque type d'équations)

A. Equations quelconques

I. Equations algébriques du 1$^{\text{r}}$ ordre

I a) Cas complexe : résultats de Petrovitch sur les intersections invariables avec une variété (en particulier zéros, pôles ou valeurs asymptotiques invariables)

I b) Cas réel. Croissance des intégrales continues au voisinage de $+\infty$ (il peut ne pas y en avoir, ex : $y' = 1 + y^2$). Théorèmes de Hardy

II. Equations algébriques d'ordre qcque.

Gegenbeispiel de Vijayaraghawan. Etudes de Fowler sur certaines équations du 2$^{\text{e}}$ ordre. Travaux de Polya sur la croissance des fonct. entières intégrales d'éq. algébriques et dont les coeff$^{\text{ts}}$ du développ$^{\text{t}}$ de Taylor sont des nbs algébriques.

III. Equations générales du 1$^{\text{r}}$ ordre du type $y' = f(x,y)$.

~~Non~~ Travaux de Biernacki sur les valeurs asymptotiques.
Th. de Poincaré pour l'équation de Riccati.

B. Equations ~~compl~~ linéaires.

I. Cas complexe.

Etude des points singuliers : Fuchs, Garnier (pour mémoire).
Travaux de von Koch et Perron sur la croissance au voisinage d'un pt. irrégulier.

II. Cas réel.

Exposants caractéristiques de Liapounoff. Développ$^{\text{ts}}$ asymptotiques (pour mémoire).
Cas du 2$^{\text{e}}$ ordre $y'' + A(x)\,y = 0$.
2 cas : a) $A < 0$. Rapports avec les fonctions convexes.
b) $A > 0$. Travaux de Kneser, Biernacki, Fatou, Milloux, Wiman, Matell, Butlewski, Sato.

Bibliographie.

A Ia) Petrovitch : Memorial fasc. 48 ; Thèse (Paris 1894) ;
Math. Ann. 1896.

A Ib) Hardy, Orders of infinity ; Proceed. London Math. Society (2), 10 (1912) p. 451-468.

A II). Vijayaraghawan ??

Fowler | Proceed. London Math. Soc. (2) 13 (1914) p. 341-371
Quart. Journ. of Maths. 45 (1914) p. 289-350.

Pólya | Vierteljahrsschrift. der Naturforsch. Gesellsch. Zürich, 61 (1916) p. 531-545.
C.R., 19 Août 1935, p. 444.

Valiron C.R., 180, 1925, p. 571-572

A III) Biernacki Ann. Soc. polonaise de Maths. 13 (1934) p. 93-99

Poincaré Amer. Journ. of Maths. t. 7, 1885 (ou Picard t. III, ch. 14)

B I) Perron Math. Zeitschrift t. 3, p. 161.

B II a) Voir Brelot, Bull. Sciences maths. t. 60 (avril 1936)

B II b) Fatou C.R. 2 décembre 1929

A. Kneser Math. Ann. t. 42 (1893)

Milloux. Prace matematyczno-Fiz. t. 41, (1933) p. 38-54

Biernacki id. t. 40 (1933) p. 163-171

Wiman. | Arkiv för Matematik t. 12 Stockholm 1917
Acta Math. t. 66 (1935)

Malmquist Asymptotische Eigenschaften gewisser lin. Differentialgleich. Uppsala 1924 (Appelbergs Boktrykeri Aktiebolag)

Burkowski Mathematica t. 12 (1936) p. 36-48

Sato. Jap. Journal of Maths. t. 10 (1934) p. 195-197