DELBE 014

TEXTE **Desiderata [deux textes]**

FONDS **Jean Delsarte**

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES **10**

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE **10**

DESIDERATA.

Démontrer qu'une fonction continue de fonction continue est continue.

Dans la topologie, définir $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$

Donner 4 définitions de e^x : a^x

$$\int \frac{dx}{x}$$

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

surface de Riemann

~~Dans l'intégration, notions d'aire et d'arc.~~

Définir cos x et sin x à partir de $\varphi = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x$, puis formules démontrées à l'aide de ~~dxxxx~~ $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. (Dans la théorie des fonctions de variables réelles.

Limite d'une suite complexe au début des fonctions analytiques, comme application de la distance.

~~Dans les espaces distanciés~~, par les deux corps convexes (théorème de Minkowski) et des transformations orthogonales

Espaces euclidien dans la topologie, muni du groupe complet des dé--placements.

Jacobien dans les formes de Pfaff.

Théorème de Weirstrass (toute fonction continue passe par les valeurs intermédiaires) à propos de la ~~xxxxxxxx~~ connexion.

Maxima et minima dans la théorie des fonctions de variables réelles (condition <u>nécessaire</u> ~~xx~~ d'extremum; le reste dans le calcul des variations).

DELBE 014

3

~~Dans l'intégration~~ :

~~théorème de Fatou : si $f_n \geqslant 0$, $\lim f_n = f$, $\int f\, d\mu \leqslant \underline{\lim} \int f_n\, d\mu$.~~

Approximation des fonctions étagées par les fonctions continues, à propos des mesures de Radon.

~~Fonctions analytiques : théorème de Tauber et de Karamata.~~

Séries doubles non absolument convergentes (avec les intégrales doubles non absolument convergentes). Séries absolument convergentes avec les sommes de nombres réels positifs.

$$\overline{\text{Lim}} = \lim_{t \to \infty} \left[\overline{\text{borne}}_{E_t} \;(\quad)\right]$$

à bien préciser dans la topologie.

<u>Protrait de BOURBAKI en pied.</u>

On n'utilisera jamais un résultat donné en exercice et non démontré.

Aucune fonction H ne limite la croissance des solutions d'équations différentielles d'ordre >1 à coefficients algébriques.

Intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre : COULOMB, DIEUDONNE et tous autres devront examiner le maximum à donner dans cet ordre d'idées.

~~Reporter la théorie des développements asymptotiques dans la représentation rapprochée des fonctions.~~

En topologie faire si possible la convergence continue .

<u>Théorème de Hardy, Bourbaki.</u>

Fonction $\Phi(t,n)$ de signe quelconque avec les hypothèses
1) $|\Phi|<K$, 2) $\int_\alpha^\beta \Phi(t,n)\,dt$ quelque soit (α, β) intérieure à (a,b), pour $n \to \infty$.

Conséquence $\int_a^b f(t)\,\Phi(t,n)\,dt$ quelque soit $f \in L^1$
Quand on introduit une variable x dans $\Phi(t,x,n)$, il faut que (1) ~~xx x~~ ait lieu uniformément, (2) uniformément pour chaque intervalle partiel (α,β).

Procédé de sommabilité~~xx~~

Montrer que si les coefficients d'une série de Taylor sont positifs il y a un point singulier sur l'axe réel positif.

Inégalité de Jensen-Nevanlinna en exercices.

Chaque fois qu'on peut signaler une question de transcendance réso-lue, la signaler (avec renvoi et sans démonstration) Ex : fonctions de Bessel.

Sommation de Poisson-Mordell : place à trouver.

Etudier, à titre de méthode de générale pour l'obtention des déve-loppements en série, le développement de Fourier par rapport à un para-mètre disparaissant éventuellement à la fin des calculs (séries de Neumann et de Kapteyn).

Consulter Poncin et Thiry sur les fonctions ~~xxxxxxxxx~~ elliptiques

Tuyaux sur l'équation de Emden et toutes équations utilisées en astrophysique (WEIL, consultera Chandrasekhar). Consulter <u>Ince</u> , Ordinary Differential equations.

Travaux de Hamburger sur les expressions asymptotiques de y solution de $y'' + \lambda f(x) y = 0$ en fonction de λ (?).

Principe de Riemann - Schwarz (Hebbare Singularitäten) dans les fonc-
-tions analytiques.

Donner un nom au prolongement du genre analytique (avec le lemme de Borel-Lebesgue) au point de vue réel.

Schwarzien et invariants différentiels.

Ensembles au plus dénombrables.

Trouver un nom pour les fonctions étagées.

Dans un espace topologique, définir la droite complétée par $\pm\infty$

Dictionnaire des termes usagés (avec historique et références)

Donner avec la définition de borne , la propriété que si $i \in I$, $\underset{i \in I}{\text{borne}}\ \lambda_i$ croît quand on prend une partie de I.

Dans la théorie des limites démontrer qu'on ne peut pas passer à la limite dans une inégalité $a^{(\nu)} \leq \sum b_i^{(\nu)}$ et qu'on peut pour une suite croissante mais non pour une suite décroissante. Ex :

$$1 \leq 1+1+1+\cdots$$
$$1 \leq 0+1+1+\cdots$$
$$1 \leq 0+0+1+\cdots$$

~~Typ~~ Typographie : caractères grecs des éditions G. Budé.

Mettre à l'étude l'exposé du calcul formel des dérivées dans les cas réel et complexe (forme de Pfaff).

Egale continuité en topologie (?).

Arc et aire dans les formes de Pfaff avec

$$\text{arc} = \overline{\text{borne}} \int \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz \quad \text{avec} \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq 1$$

Voir aussi les définitions de CARTAN.

Donner un exemple de fonctions dérivées non continue qui prend toutes les valeurs entre f(a) et f(b).

En topologie, uniformité d'une approximation.

Enoncer l'inégalité de Minkowski pour les corps convexes généraux.

Mettre à l'étude la convergence des mesures (spécialement Stieltjes (voir Bochner)

DESIDERATA

Ensembles abstraits.-

-Ensembles ordonnés dans la théorie des ensembles abstraits.(?)

-Ensembles au plus dénombrables.

-Donner, avec la définition de borne, la propriété que si $i \in I$,

$$\underline{\text{borne}}_{i \in I}\ \lambda_i$$

croit quand on prend une partie de I.

Algèbre.-

Nombres réels et complexes.-

Topologie.-

-Démontrer qu'une fonction continue de fonction continue est continue.

-Définir $\underline{\lim}$. et $\overline{\lim}$.

--Espace euclidien muni des groupes de déplacements

-Insister sur

$$\overline{\lim}.(\quad) = \lim_{t=\infty}.\ \ \overline{\text{borne}}_{E_t}.(\quad)$$

-Théorème de Weierstrass,(toute fonction continue passe par les valeurs intermédiaires..) à propos de la connexion.

-Convergence continue.

-Dans un espace topologique, définir la droite, complétée par $\pm\infty$

-Egale continuité.

-Uniformité d'une approximation.

-Un mot sur les variétés à connexion infinie.

-Dans la théorie des limites, démontrer qu'on ne peut pas passer à la limite dans une inégalité, et qu'on le peut, quand il s'agit d'une suite croissante; exemple:

$$a^{(\nu)} \leq \sum_i b_i^{(\nu)}$$

Topologie des nombres complexes.-

Formes quadratiques et hermitiennes.-

Corps convexes.-

-Parler de corps convexes dans les espaces distanciés,(th.de Minkowski).

-Enoncer l'inégalité de Minkowski pour les corps convexes généraux.

Théorèmes d'existence topologiques.-

Intégration.-

-Approximation des fonctions étagées par les fonctions continues à propos des mesures de Radon.

-Trouver un nom pour les fonctions étagées.

-Mettre à l'étude la convergence des mesures.(spécialement Stieltjes) (voir Bochner)

Fonctions de variables réelles.-

-Maxima et minima dans la théorie des fonctions de variables réelles. (Conditions nécessaires d'extrémum,le reste dans le calcul des variations).

-Donner un exemple de fonction dérivée non continue qui prend toutes les valeurs entre f(a) et f(b).

-Définir sinus et cosinus à partir de

$$\varphi = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x$$

puis formules démontrées avec $x = \sin \varphi$; $y = \cos \varphi$.

Séries,produits infinis.-

-Séries doubles non absolument convergentes,(avec les intégrales doubles non absolument convergentes.)

-Séries absolument convergentes avec les sommes de nombres réels positifs.

-Procédés de sommabilité.

Inégalités, O et o.- 13

-Intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre; COULOMB et DIEUDONNE ainsi que tous autres devront examiner le maximum à donner dans cet ordre d'idées.

-Théorème de Hardy-Bourbaki: Noyau $\Phi(t;n)$ de signe quelconque; on suppose: 1) $|\Phi| < K$; 2) $\int_\alpha^\beta \Phi(t;n)\,dt \to 0$ quels que soient α et β dans (a,b), pour n infini; conséquences: $\int_a^b \Phi(t;n) f(t)\,dt \to 0$ quelle que soit f(t) dans L^1. Quand on introduit une variable paramétrique x dans $\Phi(t;n;x)$, il faut que 1) ait lieu uniformément, que 2) ait lieu uniformément quel que soit l'intervalle partiel $(\alpha;\beta)$.

Multiplication extérieure.-

Formes de Pfaff.-

-Jacobien dans les formes de Pfaff.

-Mettre à l'étude l'exposé formel du calcul des dérivées dans le cas réel ou complexe. (formes de Pfaff).

-Arc et aire dans les formes de Pfaff avec

$$\text{arc} = \overline{\text{borne}} \int \alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz \;; \qquad [\alpha^2 \beta^2 \gamma^2] \leq 1$$

(voir aussi H. CARTAN).

-Comme application de l'arc, arc sur le cercle, mesure des angles, sinus, cosinus, théorèmes d'addition et autres, sans les formules déduites d'intégrales.

-Exposer la théorie de l'intégrale des formes de Pfaff complexes, de manière que la séparation réel-imaginaire tienne le moins de place possible.

Déterminants.-

Tenseurs.-

Géométrie.-

Fonctions analytiques;partie générale.-

-Limite d'une suite complexe comme application de la distance.

-Principe de Riemann-Schwarz.(H.Singularitäten)

-Donner un nom au prolongement genre analytique (avec le lemme de Borel-Lebesgue) au point de vue réel.

-Renvoi aux équations elliptiques pour la représentation d'une surface sur un plan.(représentation conforme).

-Abondance de figures pour la représentation conforme;(en particulier e^z).

-Etudier

$$\int f(z).\, d.\log(z-a) \qquad \text{et} \qquad \int \frac{f(z)}{z-x}\, dz$$

le long d'un segment de droite.

-Passage du local au global par le lemme de Borel-Lebesgue.

-Spiegelungsprinzip dans la partie générale des fonctions analytiques.

Fonctions analytiques;partie spéciale.-

-Montrer que si les coefficients d'une série de Taylor sont réels et positifs,il y a un point singulier sur l'axe réel positif.

-Inégalité de Jensen-Nevanlinna en exercice.

-Donner quatre définitions de e^x:

$$a^x; \quad \int \frac{dx}{x}; \quad \left(1+\frac{x}{m}\right)^m; \qquad \text{surface de Riemann.}$$

-Suggestion(non-adoptée) pour la deuxième définition de e^x:utiliser le théorème de Borel-Lebesgue et le groupe multiplicatif pour l'existence de la dérivée,puis passer au problème inverse.

-Développement en séries de polynomes;(Faber,Tchebichef).

-Ultraconvergence,(Bourion),(?).

-Mettre à l'étude:fonctions univalentes et relations fonctionnelles de Hadamard pour la fonction de Green.

Séries de Fourier.-

-Etudier,à titre de méthode générale pour l'obtention des développements en série,le développement de Fourier par rapport à une variable paramétrique,qui disparait en fin de calcul,(Séries de Neumann et Kapteyn)

Représentation approchée des fonctions.-

Equations intégrales.-

Equations différentielles.-

-Schwarzien et ~~XXXXXXXX~~ invariants différentiels.

-Aucune fonction ne limite la croissance des solutions d'équations différentielles d'ordre plus grand que 1,à coefficients algébriques.

-Travaux de Hambourgerles expressions asymptotiques de y solution de

$$y'' + \lambda . f(x) . y = 0$$

en fonction de λ .(?).

-Tuyaux sur l'équation de Emden et toutes équations utilisées en astrophysique.(Ince;Ordinary differential equations;Chandrasekhar).

Equations aux dérivées partielles.-

Fonctions spéciales.-

-Consulter Poncin et Thiry sur les fonctions elliptiques.

-Dans les fonctions algébriques,donner l'étude des fonctions algébriques sur le corpsdes fonctions méromorphes,(problème local),et applications,(Vorbereitungssatz).

-Etudier au moyen des groupes fuchsiens les transformations birationnelles d'une courbe ~~XXXXXXXX~~ algébrique.

Questions diverses.-

-Sommation Poisson-Mordell.(Place à trouver)

Terminologie.-

-Dictionnaire des termes usités;(historique et références)

-Dimension,dimensionnalité.

Desiderata généraux.-

-On n'utilisera jamais un résultat donné en exercice et non démontré.

-Chaque fois qu'on peut signaler une question de transcendance résolue, le faire.(avec renvoi,sans démonstration);(ex.fonctions de Bessel).

-~~Typographie~~

-Typographie : caractères grecs . des éditions Budé