COTE DELBE 009

TEXTE FONCTIONS ANALYTIQUES
CE QUI A GÊNÉ ....
FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE VARIABLE COMPLEXE

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 8

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 8

DELBE009

FONCTIONS ANALYTIQUES.

1) Sphère de Riemann, groupe homographique (sans aucun détail).

Classification (en vrac) : LOCAL / GLOBAL.

Deux principes de passage du local au global :

1° Borel-Lebesgue (principe de passage élémentaire).

2° Prolongement analytique (principe profond, provenant de la quasi-analyticité).

LOCAL. Dérivée. Développement asymptotique. Taylor. Cauchy ($\int f dz = 0$, $df.dz = 0$). Anneau ; unités ($f_0 \neq 0$). Corps (avec les méromorphes). Localement topologique pour $f'_0 \neq 0$. Zéros isolés. Module maximum. Fonction de fonction. Fonction inverse (points algèbriques pour $f'_0 = 0$). Weierstrass. Conservation des angles. Familles bornées. Quasi-analyticité. Notion de résidu.

(si on se donne une fonction dans une partie du cercle de convergence et qu'on prolonge, on a une fonct. qui coïncide avec la série Taylor du cercle)

GLOBAL. Taylor-Laurent (2 aspects, sans et avec prolongement). Cauchy, énoncé global général (théorème des résidus pour $\int f dg$ sur une surface de Riemann). Anneau, corps sur une surface donnée Critère des fonctions rationnelles (ou : algèbriques). Point singulier isolé, Liouville. Représentation conforme : a) on donne une surface de Riemann et une fonction sur la surface, chercher la surface de Riemann image ; b) 2 surfaces de Riemann simplement connexes, chercher la fonction. Principe du module maximum.

(de Possel) : fonctions analytiques comme variétés dans les espaces produits de deux surfaces de Riemann.

Ce qui a gêné de Possel :

1) D'où sort Cauchy (formule)

2) D'où sort tout ce qui sort de Cauchy

3) On voit trop tard la transformation localement topologique.

4) Séparation du réel et de l'imaginaire là où elle n'a que faire.

Ce qui a gêné Chevalley :

1) local / global non séparé, pourquoi log z régulière dans une couronne.

2) ce qu'il faut supposer sur les chemins d'intégration.

de Possel :

5) On ne sait pas dans quoi les fonctions sont définies.

6) Confusion entre les diverses détermina--tion de f(z) et de son intégrale.

7) Que veut dire une fonction définie sur u une sf. de R ; alors que la sf. de R. est définie par prolongt. analyt.

Mandelbrojt : Prolongement analytique mal fait.

Mirlès : La représentation conforme apparâit comme un petit truc.

de Possel : Produit canonique = 0 (ordre de Badaif)

BOURBAKI LES LACETS

de Possel Pas assez de figures, notamment e^x.

FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

DEFINITION d'une fonction holomorphe (dans un domaine ; point de vue local) : existence d'une dérivée (continue) par rapport à $z = x + iy$. Somme, produit, quotient de fonctions holomorphes ; superposition de f.holomorphes . ??

Condition équivalente : $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

ou encore : $df = f'dz$; ou encore : $[df\ dz] = 0$.

I. GENERALITES : double aspect des fonctions holomorphes

1°) Aspect topologique : $Z = f(z)$ définit une transformation loca--lement topologique (orientation conservée) en tous points où $f' \neq 0$, et $z = F(Z)$ est holomorphe (on verra plus tard que les points où $f' = 0$ sont isolés).

2°) Aspect analytique

f dz est localement une différentielle exacte (Cauchy) .

Formule de Cauchy, d'où existence des dérivées successives. Si f admet une primitive, elle est holomorphe.

Théorème de Weierstrass sur la convergence uniforme des suites de fonctions holomorphes (2 parties) ; application aux séries entières.

Développement en série de Taylor ; expression des coefficients

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta$$

Forme de f au voisinage d'un zéro .

Compléments : retour à la topologie. Etude de la transformation $Z = f(z)$ au voisinage d'un point où $f' = 0$; point critique algèbrique.

DELBE009
5

II. THEORIE ANALYTIQUE

Conséquence du développement de Taylor ; inégalités relatives aux coefficients, principe du module maximum.

Théorie sommaire des familles bornées (par les coefficients de Taylor). Familles univalentes.

Fonctions harmoniques ; conséquences de ce qui précède.

Fonctions holomorphes dans certains domaines particuliers (plan, couronne circulaire, cercle pointé) : Théorème de Liouville, développement de Laurent, point singulier isolé (pôle, point singulier essentiel). Première définition des fonctions méromorphes.

Fonction homographique ; point à l'infini, sphère de Riemann ; deuxième définition des fonctions méromorphes.

III. FONCTIONS ANALYTIQUES ET VARIETES A CONNEXION CONFORME.

Variété à connexion conforme (exemple : variété d'une courbe algébrique ?). Variétés équivalentes.

Fonction~~s~~ holomorphe~~s~~ ou méromorphe sur une variété à c. c. (existence ?). D'où : surface de Riemann étalée sur le plan ou la sphère. Intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'dz}{f-a}$; application à la convergence des fonctions. Plus généralement : surface de Riemann étalée sur une variété à c.c.

Prolongement analytique : problème, théorème fondamental ; remarque sur l'usage (théorique) de la série de Taylor, et, à ce propos , fonctions admettant le cercle comme coupure.

Problème de la représentation conforme. Théorème fondamental dans le cas simplement connexe ; transformations de la sphère, du plan, du cercle en eux-mêmes. Cas non simplement connexe : groupe de Poincaré.

FONCTIONS ANALYTIQUES.

On donnera d'abord le plus rapidement possible toutes les pro--priétés locales essentielles, en montrant leurs rapports réci--proques et en insistant sur les propriétés caractéristiques. On donnera de préférence des définitions et des démonstrations pouvant s'appliquer à plusieurs variables.

- Dérivée. Conservation des angles. Transformation localement topologique.
- Développement asymptotique ; Taylor. Zéros isolés. Quasi-analycité.
- Anneau, corps, fonction de fonction, fonction inverse.
- Module maximum (avec localement topologique ? avec dév. asymp.?)
- Cauchy : $df.dz = 0$. $\int f.dz = 0$.
- Weierstrass (fournit une définition, avec autre chose).
- Etude locale pour $f'_0 = 0$.
- (Pour mémoire, non inclus dans les propriétés locales essen--tielles familles bornées. Familles univalentes ????).

ENSUITE : définition géomètrique des variétés conformes. Exemples géomètriques et par l'inversion de fonctions élémen--taires. Extension (généralement par Borel-Lebesgue) des propriétés locales essentielles, pour une fonction préalablement donnée sur une variété conforme donnée. Cas de variétés parti--culières : cercle (Taylor), couronne (Laurent), plan (Liouville sphère de Riemann (critère des fonctions rationnelles), cercle pointé (point essentiel isolé). Existence de variétés closes.

.....

DELBE 009

ENSUITE : (ordre réservé) : 1). Prolongement analytique. 2). Théorie générale de la représentation conforme.

RESERVE : Fonctions de plusieurs variables.

FONCTIONS ANALYTIQUES SPECIALES (en vrac).

1. Familles bornées et applications (convexes, étoilées, etc.)
2. Série de Taylor définie par ses coefficients (Abel complexe ? Coefficients positifs ; ultraconvergence (Bourion), etc.)
3. Séries de polynomes et de fractions rationnelles (Runge, $\sum A_n / x-x_n$, Mittag-Leffler, etc. Pompeiu).
4. Applications des résidus (Lindelöf).
5. $a_2 < 2$ et fentes ?
6. Fonctions entières. Ahlfors.

DELBE 009
8

(de Possel) : fonctions analytiques comme variétés dans les espaces produits de deux surfaces de Riemann.

Remarques diverses.

A éclaircir : d'où sort la formule de Cauchy ?

A proscrire : la représentation conforme comme petit truc.

A ne pas introduire : les mots "point frontière d'une surface de Riemann" (c'est la projection qui a des points frontières).

Cauchy = décomposition en somme de fractions simples.

Transformation localement topologique le plus tôt possible.

Préciser toujours dans quoi une fonction est définie.

Jamais de fonctions multiforme ??? (Chevalley-de Possel).

Terminologie : le double sens du mot période ?

Tangentes aux variétés définies par les fonctions analytiques? (Géomètrie de l'espace (x,y) : on insiste sur les tangentes aux courbes algèbriques et dès que ce sont des fonctions analytiques on laisse tomber !!).