COTE DELBE 008

TEXTE Inégalités
0 et 0

FONDS Jean Delsarte

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 9

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 9

Rapport Inégalités.

1. Laïus préliminaire sur les inégalités. Exemple: inégalité de Schwarz démontrée a) par la forme quadratique, b) par l'égalité de Lagrange.

2. Fonctions convexes. Définition par l'arc au dessous de la corde; conséquence: la pente de la corde est croissante. Condition nécessaire et suffisante de convexité: dérivée première croissante. Droite d'appui. Croissance d'une fonction convexe à l'infini.

3. Inégalité fondamentale: si $d\mu$ est une mesure positive et $\int d\mu = 1$, si F est convexe dans le plus petit intervalle contenant les valeurs de f (éventuellement $= \pm\infty$ aux extrémités), alors $F(\int f d\mu) \leqslant \int F(f) d\mu$. Si F est strictement convexe et f non constante, inégalité stricte. - Exemples: cas des sommes et des séries.

4. Applications: a) $F(t) = t^k$, $k > 1$, $0 \leqslant t \leqslant$ ~~xxx~~ ∞, $d\mu = \dfrac{g\,d\theta}{\int g\,d\theta}$: <u>inégalité de Hölder</u>. Id. pour $k < 1$ (renversé). Cas d'égalité. b) $F(t) = \log 1/t$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$: inégalité de la moyenne géométrique. Cas des suites finies*. Inégalité de Hölder retrouvée ~~par~~ (avec un nombre quelconque de fonctions) par une vieille astuce.

* interprétation géométrique Notion de produit scalaire de 2 fonctions.

5. Moyennes. Moyenne d'ordre r: $f \geqslant 0$, $r > 0$, $\mathfrak{M}_r f = (\int f^r d\mu / \int d\mu)^{1/r}$. ~~Sixx$\mathfrak{M}_{r_0}$xxestxfini~~ Si $\mathfrak{M}_{r_0}$ est fini: 1) $\mathfrak{M}_r$ est continu dans $(0, r_0)$ 2) $\mathfrak{M}_r$ est indéfiniment dérivable, 3) $r \log \mathfrak{M}_r$ est strictement convexe; 4) $\mathfrak{M}_0$ existe et = moyenne géométrique; 5) $\mathfrak{M}_r$ est croissante; 6) $\mathfrak{M}_{+\infty}$ = borne supérieure (en mesure).

6. Inégalité (triviale) «compagnon de Minkowski».

Inégalité de Minkowski, $k > 1$ (et inégalité renversée pour $k < 1$); cas d'égalité; démonstration par Hölder (pour les fonctions non ~~bor~~ bornées, emploi des fonctions tronquées, avec la réprobation du comité; on met au concours une démonstration sans fonctions tronquées). Inégalité de Minkowski pour la moyenne géométrique. Cas des ~~suites~~ sommes finies; interprétation géométrique.

Adopté

PROGRAMME O et o.

I. <u>Généralités.</u>

A. Fonctions d'une variable.
Notations de Hardy et Landau.
Propriétés élémentaires.
Intégration.
Théorèmes taubériens.

B. <u>Fonctions de plusieurs variables.</u>

II. <u>Types de croissance.</u>

Théorème de du Bois-Reymond.
Fonctions E.- Propriétés.
Différentiation.

III. <u>Applications.</u>

Développements limités.
Convergence des intégrales.
Evaluation des intégrales divergentes.
Convergences des séries.
Evaluation des sommes divergentes.
Fonctions implicites.
Etude des intégrales dépendant d'un paramètre.

O et o: suite.

IV. Séries de Taylor: cercle de convergence. Calcul du rayon. Série de Dirichlet; intégrale de Laplace (avec $d\mu$); abscisses de convergence (ordinaire et absolue).

Comportement sur la limite de convergence. Série de Taylor: on va étudier principalement le cas "coefficients et variables positifs". a) Th. directs: Abel divergent, Cesaro divergent, réciproque de Karamata, Abel à coefficients quelconques, Cesaro convergent-divergent. b) Th. taubériens: th. de Hardy Littlewood (conséquence du 3e Th.taubérien de I). Théorème de Karamata, énoncé pour Taylor, énoncé pour l'intégrale de Laplace, démonstration.

V. Fonctions oscillantes. Notations de Hardy (et de Landau). Règle de l'Hospital (fonctions continues)(pour les séries, Gegenbeispiel $u_n = (-1)^n + 1/n$, $v_n = (-1)^n$).

Sommations: au minimum, procédé par la moyenne arithmétique (cas des séries, cas continu, cas général par l'intégrale de Stieltjes). 2e théorème taubérien. Autres procédés de sommation ? Question à l'étude.

Intégrales divergentes de la forme $\int f.e^{ig}dx$: th. de Hardy.

Théorème de Hardy-Bourbaki. Application au comportement à l'infini de l'intégrale de Fourier d'une fonction de L^1; cas particulier: coefficients de la série de Fourier. Comportement de l'intégrale ou des coefficients dans des cas plus restrictifs (variation bornée, fonction n fois dérivable, ...?).

Intégrale oscillante de Dirichlet (??? cf. Hardy; signalé avec toutes réserves au rédacteur).

Méthode des cols, 1st instalment, et autres. (?)

¡Adopté!

RAPPORT INEGALITÉS.

1. Laïus préliminaire sur les inégalités. Exemple : inégalité de Schwarz démontrée a) par la forme quadratique, b) par l'égalité de Lagrange.
2. Fonctions convexes. Définition par l'arc au dessous de la corde ; conséquence : la pente de la corde est croissante. Condition nécessaire et suffisante de convexité : dérivée première croissante. Droite d'appui. Croissance d'une fonction convexe à l'infini.
3. Inégalité fondamentale : si $d\mu$ est une mesure positive et $\int d\mu = 1$, si F est convexe dans le plus petit intervalle contenant les valeurs de f (éventuellement $= \pm\infty$ aux extrêmités), alors $F(\int f d\mu) \leqslant \int F(f) d\mu$. Si F est strictement convexe et f non cons-tante, inégalité stricte ;- Exemples : cas des sommes et des séries.
4. Applications : a) $F(t) = t^k$, $k > 1$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$, $d\mu = \dfrac{g\, d\theta}{\int g\, d\theta}$: <u>inégalité de Hölder</u>. Id. pour $k < 1$ (renversé). Cas d'égalité. b) $F(t)$ $\log 1/t$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$: inégalité de la moyenne géomètrique. Cas des suites finies ; interprétation géomètrique.(*) Inégalité de Hölder retrouvée (avec un nombre quelconque de fonctions !) par une vieille astuce.
5. Moyennes. Moyenne d'ordre r : $f \geqslant 0$, $r > 0$, $\mathfrak{M}_r f = \left(\int f^r d\mu / \int d\mu\right)^{1/r}$. Si $\mathfrak{M}_{r_0}$ est fini : 1) $\mathfrak{M}_r$ est continu dans $(0, r_0)$. 2) $\mathfrak{M}_r$ est indéfiniment dérivable, 3) $r \log \mathfrak{M}_r$ est strictement convexe ; 4) $\mathfrak{M}_0$ existe et = moyenne géomètrique ; 5) $\mathfrak{M}_r$ est croissante ; 6) $\mathfrak{M}_{+\infty}$ = borne supérieure (en mesure).

(*) Notion de produit scalaire de 2 fonctions.

DELBE008

- Suite -

6. Inégalité (triviale) "compagnon de Minkowski".
Inégalité de Minkowski, $k > 1$ (et inégalité renversée pour $k < 1$): cas d'égalité : démonstration de Weil par Hölder. Inégalités de Minkowski pour la moyenne géomètrique.

Cas des sommes finies : interprétation géomètrique.

RAPPORT O et o.

I. Généralités. Notations de Hardy $\preccurlyeq$, $\prec$, $\sim$, définis pour des fonctions d'un point $P \to P_0$ dans un espace topologique, à l'aide des notions de $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$. On précisera P_0 dans la notation quand c'est nécessaire. Les fonctions envisagées gardent un signe constant dans un voisinage assez petit de P_0.

Notations (indicielle) de Landau ; on signale l'usage des notations sans indices.

Toutes les fonctions ne sont pas comparables. Exemples.

Propriétés élémentaires. Changement de variable. Intégration pour les fonctions d'une variable : théorème de l'Hospital (avec une mesure positive quelconque) ; application aux séries.

Différentiation (pour les fonctions d'une variable) ; impossibilité en général. Exemples. Théorèmes taubériens, 1[er] et 3[e] théorème comme exemples (mesure continue ou dénombrable) : pour le 1[er], trois démonstrations (intégration ordinaire, sommation partielle, int. de Stieltjes pour les autres, intégration ordinaire.

II. Types de croissance. Théorème de Du-Bois-Reymond. Fonctions (H) définies par récurrence. Exemples. Démonstration du théorème de Hardy que 2 fonctions (H) sont comparables ; elles forment un corps ordonné non archimédien. Ordre d'infinitude d'une fonction (H) par rapport à une autre. Limites de la croissance des fonctions (H) ; construction d'une fonction croissant plus vite que toute fonction (H).

Différentiation des relations de croissance entre fonctions (H). Exemples.

III. Sommations positives. Fonctions (H) comme fonctions de comparaison fonctions à croissance (H). Plus généralement, étude de $\phi(f)-\phi(g)$; plus ou moins bonne approximation suivant la croissance de ϕ .

....

O et o : suite

IV. Séries de Taylor : cercle de convergence. Calcul du rayon. Série de Dirichlet : intégrale de Laplace (avec $d\mu$) ; abscisses de convergence (ordinaire et absolue).

Comportement sur la limite de convergence. Série de Taylor : on va étudier principalement le cas "coefficients et variables positifs".
a) Th. directs : Abel divergent, Cesaro divergent, réciproque de Karamata, Abel à coefficients quelconques, Cesaro convergent-diver-gent, b) Th. taubériens : th. de Hardy Littlewood (conséquence du 3è Th. taubérien de I). Théorème de Karamata, énoncé pour Taylor, énoncé pour l'intégrale de Laplace, démonstration.

V. Fonctions oscillantes. Notations de Hardy (et de Landau). Règle de l'Hospital (fonctions continues) (pour les séries, Gegenbeispiel $u_n\ (-1)^n\ 1/n$, $v_n\ (-1)^n$. Développements asymptotiques, avec un facteur ascillant.

Sommations : au minimum, procédé par la moyenne arithmétique (cas des séries, cas continu, cas général par l'intégrale de Stieltjes).
2è théorème taubérien. Autres procédés de sommation ? Question à l'étude.

Intégrale divergente de la forme $\int f.e^{ig}dx$: th. de Hardy.

Théorème de Hardy-Bourbaki. Application au comportement à l'infini de l'intégrale de Fourier d'une fonction de L^1 ; cas particulier : coefficients de la série de Fourier. Comportement de l'intégrale ou des coefficients dans des cas plus restrictifs (variation bornée, fonction n fois dérivable, ... ?).

Intégrale oscillante de Dirichlet (??? cf. Hardy ; signalé avec toutes réserves au rédacteur).

Méthode des cols, instalment, et autres. (?).

.....

- Suite -

Développements asymptotiques généralisés. Exemple : inversion de $x = y - \varphi(y)$ par approximations successives. Développements ordinaires ; intégration, opérations algèbriques. Formule de Taylor.

Convergence des intégrales. Critères logarithmiques.

Evaluation asymptotique des intégrales divergentes (ou restes d'intégrales convergentes) de fonctions à croissance (H).

Convergence des séries. Partir de la série géomètrique et aller dans les deux sens. Exemples numériques de Hardy.

Evaluation asymptotique des sommes divergentes de termes à croissance (H). Application à l'étude de $\sum u_n$ connaissant la croissance (H) de $\dfrac{u_n + 1}{u_n}$. Exemples.
