COTE DELBE 007

TEXTE ESPACES TOPOLOGIQUES
INTÉGRATION

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 9

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 9

ESPACES TOPOLOGIQUES.

Ensembles ouverts.

Intérieurs. Frontière. Extérieur. Notion de fermeture (point de la fermeture de A = point voisin de A).
Sous-ensembles : topologie induite.

Voisinages ; - familles équivalentes.

Produits d'espaces topologiques.

Fonctions continues, 3 définitions en cercle : a) p voisin de A $\longrightarrow$ f(p) voisin de f(A) ; b) Si V ouvert $\supset f(p)$, il y a U ouvert $\supset p$ tel que $f(U) \subset V$; - c) Si V ouvert, $f^{-1}(V)$ ouvert.

Espaces séparables normaux = métrisables séparables.

Métrique $\longrightarrow$ topologique.

Espaces compacts, 3 définitions : a) par l'intersection d'ensembles fermés, b) par Borel-Lebesgue, c) par les limites de suites.

Ensembles compacts / compact fermé.

SUITE (EN VRAC).

Connexion.

Variétés. Triangulabilité : énoncé ; démonstration ??? pour deux dimensions ???

Dimension (méthode standard).

Topologie combinatoire abélienne. (Notation différentielle ???)

Intersection. Enlacement. Théorème de Jordan ??? Degré topologique ; convergence d'applications, etc. Indice de points fixes ?

Groupe de Poincaré. Surfaces de recouvrement.

Théorie de l'espace des fonctions continues. Convergence continue, famille normale. Approximation uniforme. $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$. Etc.

Théorie des espaces de Banach. Existence Leray.

INTÉGRATION

I. FAMILLES D'ENSEMBLES ET DE FONCTIONS.

Laïus introductif ? Ensemble fondamental.

I. Tribu d'ensembles.

Intersection et réunion dénombrables ; différence.

Tribu engendrée par une famille.

Ensembles de Borel dans les espaces topologiques. Tribu engendrée par les $f^{-1}(\alpha < y < \beta)$, f cont. Cas des espaces euclidiens.

Dans les espaces métrisables, c'est la tribu engendrée par les ens. ouverts et fermés.

II. Fonctions bourbachiques.

On considère deux espaces fondamentaux $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ dans lesquels sont définis deux tribus $\mathcal{C}$, $\mathcal{U}$. On appelle fonction bourbachique par rapport à ces tribus une fonction définie dans $\mathcal{E}$, dont la valeur est dans $\mathcal{F}$, et qui est telle que $f^{-1}(U)$ soit dans $\mathcal{C}$ pour tout ensemble U de $\mathcal{U}$. Remarque : il suffit que la propriété soit vraie pour les ensembles F d'une famille engendrant $\mathcal{U}$.

Théorème fondamental : <u>Une fonction bourbachique de fonction bourbachique est une fonction bourbachique.</u>

Démonstration triviale.

Exemple : fonction de Baire. ($\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ sont topologiques, les tribus sont celles des ensembles de Borel). Les fonctions continues sont de Baire. Cas des espaces euclidiens ; il suffit de définir par des intervalles.

III. Fonctions numériques réelles.

On considère des fonctions définies dans un espace fondamental $\mathcal{E}$ dans lequel est définie une tribu $\mathcal{E}$, et dont les valeurs sont dans la droite.

Fonctions bourbachiques : truc des a_i partout denses.

On a alors le théorème suivant : si $\varphi(u_1, u_2,\dots, u_n)$ est de Baire dans un ensemble ouvert de l'espace à n dimensions, et si $f_1, f_2,\dots, f_n$ sont des fonctions bourbachiques telles que le point $(f_1, f_2,\dots, f_n)$ soit dans l'ensemble ouvert, $\varphi(f_1, f_2,\dots,f_n)$ est encore bourbachique.

Application : si f, g sont bourbachiques, il en est de même de $\lambda f + \mu g$, de fg, de f/g.

Si Φ est la famille des fonctions bourbachiques, les $\overline{\text{borne}}$, $\underline{\text{borne}}$, $\overline{\text{lim}}$, $\underline{\text{lim}}$ de fonctions de Φ sont dans Φ.

IV. Fonctions non négatives.

On va considérer des fonctions dans Φ dont les valeurs sont des nombres $\geqslant 0$ ou $+\infty$.

Fonction caractéristique. Fonction étagées.

Théorème fondamental. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit bourbachique est que f puisse se mettre sous la forme $f = \sum_1^\infty c_i \varphi_{E_i}$.

II MESURE

Un ou plusieurs laïus scurriles.

Fonction d'ensemble complétement additive.

Définition de la mesure positive.

....

III INTÉGRALE ATTACHÉE A UNE MESURE.

On considère une tribu $\mathcal{C}$ et une mesure μ dont le champ de définition est $\mathcal{C}$.

On considère la famille ϕ des fonctions bourbachiques réelles $\geqslant 0$ (Fonctions mesurables). On appelle intégrale attachée à μ une fonctionnelle jouissant des propriétés suivantes : elles est définie pour les fonctions de ϕ et sa valeur est un nombre $\geqslant 0$ (event. $+\infty$) ;

elle se multiplie par c si on remplace f par cf ;

elle est complétement additive

sa valeur pour la fonction caractéristique d'un ensemble E de $\mathcal{C}$ est égale à μE.

Fonctions intégrables.

Conséquences : si $f \geqslant g$, on a $\int (f-g).d\mu = \int f d\mu - \int g d\mu$; en particulier, $\int g d\mu \leqslant \int f d\mu$.

b) si f est limite de la suite monotone non décroissante (f_i), $\int f \, d\mu$ est limite des intégrales $\int f_i \, d\mu$.

c) La condition nécessaire et suffisante pour que $\int f.d\mu = 0$ est que l'ensemble des points où $f > 0$ soit de mesure nulle. Fonctions égales en mesure. Signe (congruence module $d\mu$).

d) On a ~~lim~~ $\int f_n \leqslant \int \overline{\lim}\, f_n$. Théorème de Carathéodori si $f_n \leqslant g$, g sommable - d'où théorème de Lebesgue (si lim f_n existe) et théorème de Fatou.

Unicité de l'intégrale : triviale

Existence : a) pour les fonctions étagées

b) Lemme : si ψ est étagée, et si ψ est au plus égale à $\sum_1^\infty c_i \varphi_{E_i}$, l'intégrale de ψ est au plus égale à $\sum_1^\infty c_i \mu_{E_i}$.

Le lemme permet de définir l'intégrale ; les propriétés 1),2),3) sont évidentes.

Remarque : l'intégrale de f est la $\overline{\text{borne}}$ des intégrales des fonctions étagées au plus égales à f.

Réciproquement, tout fonctionnelle θ f, définie dans Φ, et jouissant de propriétés analogues à 1),2), est une intégrale relative à une certaine mesure ϑE, définie dans $\mathcal{C}$.

Changement de la mesure de base.

On considère une fonction ψ de Φ, et la fonctionnelle $\int f \psi d\mu$. Elle jouit des propriétés 1),2). La mesure qui lui correspond est

$$\vartheta E = \int \psi \varphi_E d\mu \ , \quad \text{et on a} \quad \int f \psi d\mu = \int f d\vartheta.$$

De plus, l'égalité $\vartheta E = 0$ entraîne $\mu E = 0$.

Définition des mesures de base μ et des fonctionnelles de base μ

Remarque : ψ est défini presque partout par ϑ.

Produit de mesures.

Prolongement d'une mesure aux parties des ensembles de mesure nulle.

Mesure produit : définition de Saks. D'où : interversion des intégrations, théorème de Fubini.

Extension aux fonctions dont les valeurs sont dans un espace vectoriel.

On introduit des coefficients k_i en nombre double du nombre des dimensions de l'espace. On se limite aux fonctions intégrables (cf. Terminologie).

Limitation du module de l'intégrale, au moyen de l'égalité qui donne la distance dans un espace vectoriel comme $\overline{\text{borne}}$.

Cas particulier des fonctions réelles.

Généralisation des théorèmes de Lebesgue, Caratheodory.

......

(suite de III). Théorèmes de Cara, §§548 - 556 (faire un choix).

IV. MESURES DÉFINIES PAR DES PROCÉDÉS PARTICULIERS.

1) Fonction de Cara (passage à la limite pour les suites croissantes?)

Obtention $\left\{\begin{matrix}\text{d'une mesure}\\ \text{d'une tribu}\end{matrix}\right.$ à partir d'une fonction de Cara : propriété de Cara. Fonction mesurable (χ) = fonction bourbachique.

Dans un ensemble mesurable de χ fini : condition de mesurabilité de Lebesgue. Définition d'une fonction de Cara, à partir d'une fonction α A : unicité si $\alpha = \chi$. Extension (de l'unicité) à une réunion dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie. Tout E mesurable (pour χ définie à partir de α A) est un $A_{\sigma\delta} \pm$ mesure nulle.

Théorème de Caraweil.

2) Mesures de Radon (sur Borel !!) : deux conditions (les fonctions continues sont mesurables / les fonctions continues, nulles en dehors d'un ensemble compact sont intégrables). Dans un espace métrisable, les ensembles ouverts (fermés) sont mesurables. Tout E mesurable $F_{\sigma\delta} \pm$ mesure nulle (F fermé) ; toute fonc-tion mesurable ≡ fonc. de 1è classe (ou 2è ??).(mod. $d\mu$)

Condition suffisante pour que la 1è condition soit vérifiée (par Caraweil).

Sommes de mesures de Radon (finies, ou : convergentes sur tout ensemble compact).

Mesure de Radon prolongée (aux ensembles de mesure nulle).

Théorème de Riesz ??? (On demande d'améliorer les conditions).

......

DELBE007

8

3) Espaces euclidiens. Mesures sur la droite : a) Lebesgue = Haar ; b) Stieltjes = monotone.- Mesure des angles (= Haar, par le groupe des rotations).(*)- Espaces E^n : a) Lebesgue = Haar (pour les translations) ; b) Radon (exemples : mesures discrètes, produits, etc.).

V. MESURES OSCILLANTES.

Théorème $\mu = \mu^+ - \mu^-$ (par la démonstration de Chevalley). Théorème de Nikodym (cf. Saks).

Cas de la droite, fonctions à variation bornée, absolue continuité, intégration par parties.

Dérivée d'une fonction d'ensembles par rapport à une autre, par les systèmes dérivants, provisoirement dans les E^n avec Lebesgue comme mesure de base (Application : densité d'un ensemble = 1 ou 0 presque partout ; impossibilité d'un ensemble gleichverteilt en mesure). D'où changement de variables.

(*) $\int \frac{dx}{x}$ = Haar du groupe multiplicatif des nombres réels.-

TERMINOLOGIE (1)

<u>SÉRIES</u>	<u>INTÉGRALES</u>.
A termes pos. { convergente (S fini) / larg^t convergente ($S \leqslant +\infty$)	Fc. pos. mesurables { intégrable / larg^t intégrable
Osc. : larg^t convergente (S^+ ou S^- fini)	Osc. : larg^t intégrable
Absolument convergente	Absol^t intégrable
Improprement convergente (Ordre fixé !!)	Impr. intégrable (ordre fixé!)
(<u>T. positifs</u> : divergent=non convergent)	(<u>Fonc. positives mesurables</u> : divergent = non intégrable).

Au moment d'introduire cette terminologie, on définira mesure et intégrale sur un espace discret.

TERMINOLOGIE (2)

Séries Convergent .... S^+ et S^- finis } = conv. au sens large
Convergent vers ∞..... S^+ ou S^- fini }
Divergent .... S^+ et S^- infinis
Pseudoconvergent .... Divergent, S_n tend vers une limite.

Intégrales Id. avec "intégrable" au lieu de convergent.
