COTE DELBE 006

TEXTES RAPPORT[S] ENSEMBLES ET ALGÈBRE
[PLAN] ENSEMBLES ET ALGÈBRE
ALGÈBRE ET THÉORIE DES ENSEMBLES

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 23

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 23

Rapport Ensembles

Introduction sur la méthode axiomatique.

Il est décidé de commencer par là; on y donnera (à titre d'exemple) les axiomes des nombres ~~réels~~. naturels.

On y expliquera que la méthode axiomatique possède une utilité logique (dont on ne se préoccupera pas) et une utilité ~~logique~~ mathématique. Du point de vue mathématique, chaque fois qu'on introduit des axiomes nouveaux, on ne s'interdit pas d'utiliser des théories (même non axiomatisées) supposées préalablement connues.

En particulier on n'axiomatisera pas la théorie des ensembles (mais renvoi au fascicule logique). Mais on avertit le lecteur une fois pour toutes que les opérations qui vont être faites sur les ensembles peuvent être axiomatisées et justifiées à condition qu'elles ne soient jamais effectuées que sur ~~des~~ certains ensembles ~~en nombre fini~~ qu'on prend comme objet d'étude dans chaque théorie mathématique.

Adopté

~~Discussion de la commission d'algèbre.~~

Théorie des ensembles

~~Il est décidé de commencer par une introduction sur la méthode axiomatique, où seront donnés (à titre d'exemple) l'axiomatique des nombres ~~XXXXXX~~ naturels.~~

~~Théorie des~~ (v. papier spécial).

Laïus général (notations { }, $\in$, famille, ensemble vide O, ensembles d'un seul élément)

Fonction:

correspondance biunivoque; isomorphie ~~(laïus)~~ ~~(v. Algèbre)~~ (renvoi à Algèbre). Fonctions inverses. Ensemble dénombrable (on dém. plus loin l'existence d'ens. non dénombrables).

Notation de la fonction par f(x) (notation fonctionnelle) ou par f_x (notations indicielles). Exemples: suites.

Partie $E \subset F$. Une propriété définit une partie, et réciproquement.* Ensemble complémentaire (notation A, $\mathcal{C}$ A). Partie $\longleftrightarrow$ fonction à * 2 valeurs (l'une définit la ~~fonction~~ partie, l'autre le complémentaire).

* Axiome: on admet l'ensemble des parties.

Généralisation: une fonction quelconque définit un partage en parties. Relation d'équivalence (axiomes) et partage en classes $\longleftrightarrow$ fonction (fonction qui à tout élément fait corr. sa classe).

Réunion et intersection: $\mathcal{S}_i A_i$ et $\mathcal{D}_i A_i$ (définir d'abord pour un nombre fini, av. notation $\dotplus, \cap$; ensuite pour un ensemble quelconque d'indices). $\mathcal{C}(\mathcal{S}_i A_i) = \mathcal{D}_i(\mathcal{C} A_i)$, $\mathcal{C}(\mathcal{D}_i A_i) = \mathcal{S}_i(\mathcal{C} A_i)$.

[$\cap$ se lit inter] $A \cap (\mathcal{S}_i B_i) = \mathcal{S}_i (A \cap B_i)$, $A \dotplus (\mathcal{D}_i B_i) = \mathcal{D}_i (A \dotplus B_i)$ (dualité);

$A - B$ = p. définition $A \cap \mathcal{C} B$ si $B \subset A$. $A - (B \cap C) = (A - B) \dotplus (A - C)$

Ensembles étrangers $A \cap B = O$. Application: lemme de décomposition.

Formation d'ensembles. Somme d'ensembles qui ne sont pas ~~XXXXXXX~~ nécessairement partie d'un même ensemble** ~~(? Il suffira en tout cas de le faire pour deux ensembles)~~. Application: remplacement (d'une partie d'un ensemble par un autre ensemble isomorphe à cette partie) – Produit ~~XXX~~ de 2 ensembles.

** on admet l'existence par axiome.

DELBE 3

Définition ("constructive") par les couples; ~~définition (on énonce comme axiome l'existence de l'ensemble des couples)~~; définition Chevalley, sous forme de théorème: pour que A soit isomorphe au produit de B par C ($B \times C$), il faut et il suffit qu'on puisse y définir des projections... Noter que $A \times B \neq B \times A$ (mais isomorphes; identiques si $A = B$).

(définition et théorème à intervertir éventuellement à la lumière des applications).

Carré d'un ensemble; exemple: plan.

Applications: correspondances entre deux ensembles = partie du produit; fonction (multiforme) et fonction ~~inverse~~ réciproque. Exemples; fonctions définies sur une partie. Si $E = fG$, on a $G \subset \overset{-1}{f}E$; et $G = \overset{-1}{f}E$ si $\overset{-1}{f}$ est univoque. $f(\complement E_i) = \complement fE_i$, d'où $f(E-G) = f(E) - f(G)$. Si $\overset{-1}{f}$ est univoque, $f(E \cap G) = f(E) \cap f(G)$.

Produit $\prod A_i$ d'ensembles A_i (comme ensemble des groupements).
Produit d'ensembles dénombrables en nombre fini.
Exponentiation: tous les A_i égaux. Espaces à n et ∞ dimensions; fonctions de variable réelle. Cas où A est à 2 éléments: 2^I (observer qu'ici, exceptionnellement, c'est l'ensemble des indices qui joue le rôle principal): isomorphe à l'ensemble des parties. Théorème: $i \neq 2^i$ (et $i < 2^i$). (Renvoyer à la partie logique pour l'axiome de Zermelo).

Adopté

i signifie puissance de I

Algèbre. Chapitre I.

Lois de composition. Isomorphie. Corps.

Loi de composition: $a \top b = c$. Isomorphie par rapport à des lois de composition. Fonction conservant une loi de composition(homomorphie <u>dans</u> et <u>sur</u>).

Associativité; commutativité. Pour une loi associative et commutative, ~~définition de~~ existence de $\mathop{\top}\limits_i (a_i) = a_1 \top a_2 \top$ ... $\top a_n$, ~~théorème~~ telle que $\mathop{\top}\limits_i (a_i) = \mathop{\top}\limits_j (a_j) \top \mathop{\top}\limits_{j'} (a_{j'})$. (démonstration par récurrence). ~~Noter que~~ ~~Corps. Laïus et exemples. Double loi de composition. — assoc. et commutativité subsistent pour un sous-ensemble.~~ Sous-systèmes: l'associativité et commutativité subsistent.

Introduction de l'axiome de la possibilité et unicité de l'opération inverse de $\top$: démonstration de l'existence de l'unité et de l'inverse, faite sur deux colonnes pour l'addition (+, -, 0) et la multiplication (., /, 1).

Corps: axiomes. ~~Non existence de diviseurs de zéro.~~ Pour +, il satisfait à la théorie ci-dessus: existence de 0, non-existence de diviseurs de 0. Le corps moins 0, pour ., satisfait à la théorie ci-dessus; existence de 1.

Isomorphie. Sous-corps. Caractéristique ~~(0, 1)~~; exemples: restes modulo p. Un corps de carac. 0 contient un corps isomorphe aux rationnels.

Ex. de $\top$: max (a, b).

Adopté!

6

Programme d'algèbre. Polynomes.

I. Polynomes dans un corps. Décomposition en facteurs.

1. Anneau. 2. Expressions polynomes. 3. Eléments algébriques, transc., transc. indép. ($\sqrt{2}$, π, ($\pi\sqrt{2}$, π)). 4 Anneau $k[x_1, x_2, \ldots x_n]$: a) Définition axiomatique; b) construction de $k[x]$. Identités algébriques. - 5. Corps quotient: fonctions rationnelles. 6. Décomposition en facteurs irréductibles (théorie pour une variable, avec l'analogie avec l'arithmétique ordinaire; ensuite, récurrence sur le nombre de variables et lemme de Gauss, ou bien ~~astuc~~ astuce de Kronecker). 7. Décomposition d'une fraction en éléments simples.

II. Polynomes comme fonctions. Zéros. Dérivée.

Théorème: dans un corps ~~xx~~ non fini, tout polynome partout nul est identiquement nul. Cas d'une variable: multiplicité d'un zéro. Dérivées comme coefficients du développement de Taylor; application ~~axx~~ au calcul de la multiplicité. Règles de dérivation (par addition, multiplication, etc. des développements de Taylor). Zéros dans un surcorps; exemples. Corps algébriquement fermé (pour l'existence, renvoi à v.d.W.).

Adopté

~~Algèbrex~~ Algèbre linéaire.

I. Algèbre linéaire.

Espace vectoriel par rapport à k. Sous-espace. Exemples: k lui-même et $k \times k \times \ldots \times k$.

Fonction linéaire sur un espace vectoriel $\mathfrak{M}$ à valeurs dans un espace vectoriel $\mathfrak{M}'$. Structure des classes pour $f: \mathfrak{M} / \mathfrak{N}$.

Sous-espace engendré par r vecteurs $X_1, X_2, \ldots X_r$: notion de base. Unicité de la représentation par une base, éléments indépendants, base minima. Lemme: de toute base on peut extraire une base minima. Deux espaces ayant des bases minima à r éléments sont isomorphes. Dimension d'un espace vectoriel = nombre maximum d'éléments indépendants. 2e Lemme: pour que la dimension soit = n, il faut et il suffit qu'il y ait une base minima de n éléments. Th.: $\dim \mathfrak{M} = \dim \mathfrak{N} + \dim \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ (et (3e lemme) obtention d'une base min. de $\mathfrak{M}$ par une base de $\mathfrak{N}$ et des éléments tirés d'une base donnée de $\mathfrak{M}$)

Application: équations linéaires. Formules de résolution d'un système d'équations linéaires: par le 2e et 3e lemme. Espace duel; théorème fondamental: réciprocité entre un sous-espace et l'espace des formes qui s'annulent sur lui.

II. Matrices.

Matrice = fonction linéaire (d'un esp. dans un esp.)+ 2 bases. Addition. Dimension de l'espace des matrices (et unités matricielles).

Multiplication: associativité. <u>Lois de composition non commutatives</u>: associativité; produit de n éléments ordonnés (au début, on aura bien séparés la commut. de l'assoc. et insisté sur l'intérêt des lois non commutatives).

Notation des vecteurs comme matrices. Notation $Y = AX$ p. une transform. linéaire; etc.

Matrices carrées. Unité; aE (permutables avec tout); matrices diagonales (permutables entre elles).

Exemples de diviseurs de zéro. - Théorème fondamental: ou AB = 0, ou

AA' = E. Matrice régulière : isomorphie de $\mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M}$. Changement de base pour une matrice carrée: $B^{-1}AB$.

III. Tenseurs.

Une transformation dans $\mathfrak{M}$ induit des transformations linéaires dans d'autres espaces vectoriels: exemple, polynomes homogènes à 2 variables. Autre exemple plus important: une transf. dans $\mathfrak{M}$ induit, au moyen de la forme bilinéaire fondamentale, une transf. (dite contravariante) dans $\mathfrak{M}^*$.

Transformation des formes multilinéaires à plusieurs séries de variables les unes dans $\mathfrak{M}$, les autres dans $\mathfrak{M}^*$: tenseurs. Espace des tenseurs (p,q); exemple: tenseurs à 2 indices; sous-espaces des tenseurs symétriques et antisymmétriques. Opérations: addition, multiplication, rajeunissement.

Permutation d'indice sur un tenseur. Permutations considérées comme opérant sur une fonction de n variables: permutations paires et impaires (au moyen du produit des différences). Tenseurs symétriques et antisymmétriques.

Adopté

I. Ensembles.

II. Algèbre générale.

1) Lois de composition. Isomorphie. Corps.

2) Polynomes dans un corps. Décomposition en facteurs. Corps quotient.

3) Polynomes comme fonctions. Zéros. Dérivées.

4) Algèbre linéaire. Equations linéaires.

5) Matrices.

6) Systèmes hypercomplexes. Quaternions. Extensions algèbri-ques finies : cas particulier des nombres complexes.

7) Groupes. Permutations.

III. Nombres réels. Axiomes, limite, topologie. Corps des nombres complexes.

ADOPTÉ

On décide ultérieurement de remettre dans 6) les formes à multiplication extérieure et les déterminants, qui restent néanmoins confiées à Cartan comme rédacteur.

DELBE006

10

ALGEBRE. CHAPITRE I.

Lois de composition. Isomorphie. Corps.

Loi de compsàtion : $a \top b = c$. Isomorphie par rapport à des lois de composition. Fonction conservant une loi de composition (homomorphie dans et sur).

Associativité ; commutativité. Pour une loi associative et commutative, existence de $\top_i (a_i) = a_1 \top a_2 \top \ldots \top a_n$ telle que $\top_i (a_i) = \top_j (a_j) \top \top_{j'} (a_{j'})$ (démonstration par récurrence). Sous-systèmes : l'associativité et commutativité subsistent.

Introduction de l'axiome de la possibilité et unicité de l'opération inverse de $\top$: démonstration de l'existence de l'unité et de l'inverse, faite sur deux colonnes pour l'addition ($+$, $-$, 0) et la multiplication (., /, 1).

Corps : axiomes. Pour $+$, il satisfait à la théorie ci-dessus : exis-tence de 0, non existence de diviseurs de 0. Le corps moins 0, pour ., satisfait à la théorie ci-dessus ; existence de 1.

Isomorphie. Sous-corps. Caractéristique ~~(0, 1)~~ ; exemples ; restes modulo p. Un corps de carac. 0 contient un corps isomorphe aux rationnels.

ADOPTE

Ex. pour $\top$: max (a, b)

PROGRAMME D'ALGEBRE. POLYNOMES.

I. Polynomes dans un corps. Décomposition en facteurs.

1. Anneau. 2. Expressions polynomes. 3. Eléments algèbriques, trans., transc. ind. ($\sqrt{2}$, π, ($\pi\sqrt{2}$, π). 4 Anneau $k[x_1, x_2, \dots x_n]$: a) Définition axiomatique ; b) construction de $k[x]$. Identités algébriques.- 6. Corps quotient : fonctions rationnelles. Décompo--sition en facteurs irréductibles (théorie pour une variable, avec l'analogie avec l'arithmétique ordinaire ; ensuite, récurrence sur le nombre de variables et lemme de Gauss, ou bien astuce de Krone--cker). 7. Décomposition d'une fraction en éléments simples.

II. Polynomes comme fonctions. Zéros. Dérivée.

Théorème : dans un corps non fini, tout polynome partout nul est identiquement nul. Cas d'une variable : multiplicité d'un zéro. Dérivées comme coefficients du développement de Taylor ; applica--tions au calcul de la multiplicité. Règles de dérivation (par addition, multiplication, etc. des développements de Taylor). Zéros dans un surcorps ; exemples. Corps algébriquement fermé (pour l'ex--istence, renvoi à v.d.W.).

ALGÈBRE LINÉAIRE.

I. Algèbre linéaire.

Espace vectoriel par rapport à k. Sous-espace. Exemples : k lui-même et $k \times k \times \ldots \times k$.

Fonction linéaire sur un espace vectoriel $\mathfrak{M}$ à valeurs dans un espace vectoriel $\mathfrak{M}'$. Structure des classes pour f : $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$.

Sous-espace engendré par r vecteurs $X_1, X_2, \ldots X_r$: notion de base. Unicité de la représentation par une base, éléments indépendants, base minima. Lemme : de toute base on peut extraire une base minima. Deux espaces ayant des bases minima à r éléments sont isomorphes. Dimension d'un espace vectoriel = nombre maximum d'éléments indépendants. 2° Lemme : pour que la dimension soit = n, il faut et il suffit qu'il y ait une base minima de n éléments. Th. : dim $\mathfrak{M}$ = dim $\mathfrak{N}$ + dim $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ (et (3° lemme) obtention d'une base min. de $\mathfrak{M}$ par une base de $\mathfrak{N}$ et des éléments tirés d'une base donnée de $\mathfrak{M}$)

Application : équations linéaires. Formules de résolution d'un système d'équations linéaires : par le 2è et 3è lemme. Espace duel ; théorème fondamental : réciprocité entre un sous-espace et l'espace des formes qui s'annulent sur lui.

II. Matrices.

Matrice = fonction linéaire (d'un esp. dans un esp.) + 2 bases. Addition.

Dimension de l'espace des matrices (et unités matricielles).

Multiplication : associativité. Lois de composition non commutatives : associativité : produit de n éléments ordonnés (au début, on aura bien séparés la commut. de l'assoc. et insisté sur l'intérêt des lois non commutatives).

Notation des vecteurs comme matrices. Notation $V = AX$ p. une transformation linéaire ; etc.

Matrices ca-rrées. Unité ; aE (permutables avec tout) ; matrices diagonales (permutables entre elles).

Exemples de diviseurs de zéro. - Théorème fondamental : ou $AB = 0$, ou $AA' = E$. Matrice régulière : isomorphie de $\mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M}$. Changement de base pour une matrice carrée : $B^{-1} AB$.

<u>III Tenseurs</u>.

Une transformation dans $\mathfrak{M}$ induit des transformations linéaires dans d'autres espaces vectoriels : exemple, polynomes homogènes à 2 variables. Autre exemple plus important : une transf. dans $\mathfrak{M}$ induit, au moyen de la forme bilinéaire fondamentale, une transf. (dite contravariante) dans $\mathfrak{M}^*$.

Transformation des formes multilinéaires à plusieurs séries de variables les unes dans $\mathfrak{M}$, les autres da-ns $\mathfrak{M}^*$: tenseurs. Espace des tenseurs (p,q) ; exemple : tenseurs à 2 indices ; sous-espaces des tenseurs symétriques et antisymétriques. Opérations : addition, multiplication, rajeunissement.

Permutation d'indice sur un tenseur. Permutations considérées comme opérant sur une fonction de n variables : permutations paires et impaires (au moyen du produit des différences). Tenseurs symétriques et antisymétriques.

ADOPTÉ

THÉORIE DES NOMBRES RÉELS.

Axiomes des nombres réels : 1) corps 2) ordonné 3) archimé-
-dien 4) complet.

Limite. Critère de Cauchy et intervalles emboîtés.

Démonstration d'unicité par Cantor ("existence" au sens ancien).

Borne et borne. Bolzano-Weierstrass. Ensemble dérivé. Topologie : ensembles ouverts et ensembles fermés.

Corps des nombres complexes. Equation réelle à laquelle satisfait un nombre complexe : imaginaire conjugué, norme, règles de calcul. Les nombres complexes forment un espace vectoriel.

ADOPTÉ

-=- ALGÈBRE ET THÉORIE DES ENSEMBLES -=-

-=-=-=-=-=-=-

-- PROGRAMME GÉNÉRAL --

I. Ensembles.

II. Algèbre générale.

1) Lois de composition. Isomorphie. Corps.
2) Polynomes dans un corps. Décomposition en facteurs. Corps quotient.
3) Polynomes comme fonctions. Zéros. Dérivées.
4) Algèbre linéaire. Equations linéaires.
5) Matrices.
6) Systèmes hypercomplexes. Quaternions. Extensions algèbriques finies : cas particulier des nombres complexes.
7) Groupes. Permutations.

III. Nombres réels. Axiomes, limite, topologie. Corps des nombres complexes.

On décide ultérieurement de remettre dans 6) les formes à multiplication extérieure et les déterminants, qui restent néanmoins confiées à Cartan comme rédacteur.

RAPPORT ENSEMBLES.

Introduction sur la méthode axiomatique.

Il est décidé de commencer par là ; on y donnera (à titre d'exemple) les axiomes des nombres naturels.

On y expliquera que la méthode axiomatique possède une utilité logique (dont on ne se préoccupera pas) et une utilité mathématique. Du point de vue mathématique, chaque fois qu'on introduit des axiomes nouveaux, on ne s'interdit pas d'utiliser des théories (même non axiomatisées) supposées préalablement connues.

En particulier on n'axiomatisera pas la théorie des ensembles (mais renvoi au fascicule logique). Mais on avertit le lecteur une fois pour toutes que les opérations qui vont être faites sur les ensembles peuvent être axiomatisées et justifiées à condition qu'elles ne soient jamais effectuées que sur certains ensembles qu'on prend comme objet d'études dans chaque théorie mathématique.

THÉORIE DES ENSEMBLES.

Laïus général (notations $\{\ \}$, ε, famille, ensemble vide 0, ensembles d'un seul élément).

Fonction :

Correspondance biunivoque isomorphie (renvoi à Algèbre).

Fonctions inverses. Ensemble dénombrable (en dém. plus loin l'existence d'ens. non dénombrables).

Notation de la fonction par $f(x)$ (notation fonctionnelle) ou par f_x (notation indicielle). Exemples : suites.

Partie $E \subset F$. Une propriété définit une partie, et réciproquement.

Axiome : on admet l'ensemble des parties. Ensemble complémentaire (notation A, $\mathcal{C} A$). Partie $\longleftrightarrow$ fonction à 2 valeurs (l'une définit la partie, l'autre le complémentaire).

Généralisation : une fonction quelconque définit un partage en parties. Relation d'équivalence (axiomes) et partage en classes $\longleftrightarrow$ fonction (fonction qui a tout élément fait corr. sa classe).

Réunion et intersection : $\mathcal{S}_i A_i$ et $\mathcal{D}_i A_i$ (définir d'abord pour un nombre fini, av. notation $\dotplus$, $\cap$; ensuite pour un ensemble quelconque d'indices). $\mathcal{C}(\mathcal{S}_i A_i) = \mathcal{D}(\mathcal{C}A_i)$, $\mathcal{C}(\mathcal{D}_i A_i) = \mathcal{S}_i(\mathcal{C}A_i)$.

[$\cap$ se lit inter] $A \cap (\mathcal{S}_i B_i) = \mathcal{S}_i (A \cap B_i)$, $A \dotplus (\mathcal{D}_i B_i) = \mathcal{D}_i (A \dotplus B_i)$

$A - B$ = p. définition $A \cap \mathcal{C}B$ si $B \subset A$ $A-(B \cap C)$ $(A-B) \dotplus (A-C)$ (dualité) ;

Ensembles étrangers $A \cap B = 0$. Application : lemme de décomposition.

Formation d'ensembles. Somme d'ensembles qui ne sont pas nécessairement partie d'un même ensemble, on admet l'existence par axiome. Application : remplacement d'une partie d'un ensemble par un autre ensemble isomorphe à cette partie.- Produit de 2 ensembles

DELBE 006

18

Définition ("constructive") par les couples ; définition Chevalley, sous forme de théorème : pour que A soit isomorphe au produit de B par C ($B \times C$), il faut et il suffit qu'on puisse y définir des projections ... Noter que $A \times B \neq B \times A$ (mais isomor-phes ; identiques si $A = B$).

(définition et théorème à intervenir éventuellement à la lumière des applications).

Carré d'un ensemble ; exemple : plan.

Applications : correspondances entre deux ensembles = parti du produit ; fonction (multiforme) et fonction réciproque. Exemples ; fonctions définies sur une partie. Si $E = fG$, on a $G \subset \overset{-1}{f} E$; et $G = \overset{-1}{f} E$ si $\overset{-1}{f}$ est univoque. $f(\bigvee E_i) = \bigvee f E_i$, d'où $f(E-G)=f(E)-f(G)$. Si $\overset{-1}{f}$ est univoque, $f(E \cap G) = f(E) \cap f(G)$.

Produit $\prod A_i$ d'ensembles A_i (comme ensemble des groupements).
Produit d'ensembles dénombrables en nombre fini.
Exponentiation : tous les A_i égaux. Espace à n et ∞ dimensions ; fonctions de variable réelle. Cas où A est à 2 éléments : 2^I (obser-ver qu'ici, exceptionnellement, c'est l'ensemble des indices qui joue le rôle principal) : isomorphe à l'ensemble des parties.
Théorème : $\iota \neq 2^{\iota}$ (et $< 2^{\iota}$). (Renvoyer à la partie logique pour l'axiome de Zermelo).

(ι signifie puissance de I).

DELBE006

19

ALGÈBRE. CHAPITRE I.

Lois de composition. Isomorphie. Corps.

Loi de composition : $a \top b = c$. Isomorphie par rapport à des lois de composition. Fonction conservant une loi de composition (homomorphie <u>dans</u> et <u>sur</u>). (1)

Associativité ; commutativité. Pour une loi associative et commutative existence de $T_i(a_i) = a_1 \top a_2 \top \ldots \top a_n$ telle que $T_i(a_i) = T_j(a_j) . \top . T_j(a_j)$ (démonstration par récurrence).

Sous-systèmes : l'associativité et commutativité subsistent.

Introduction de l'axiome de la possibilité et unicité de l'opération inverse de $\top$: démonstration de l'existence de l'unité et de l'inverse, faite sur deux colonnes pour l'addition (+, -, 0) et la multiplication (., /, 1).

Corps : axiomes. Pour +, il satisfait à la théorie ci-dessus : existence de 0, non existence de diviseurs de 0. Le corps moins 0, pour ., satisfait à la théorie ci-dessus ; existence de 1.

Isomorphie. Sous-corps. Caractéristique ; exemples ; restes modulo p. Un corps de carac. 0 contient un corps isomorphe aux rationnels.

---

(1) Ex. de Dieudonné pour $\top$: max (a, b).

PROGRAMME D'ALGÈBRE. POLYNOMES.

I. Polynomes dans un corps. Décomposition en facteurs.

1. Anneau. 2. Expressions polynomes. 3. Eléments algèbriques, transc., transc. ind. ($\sqrt{2}, \pi$, $(\pi\sqrt{2}, \pi)$. 4. Anneau $k[x_1, x_2, \ldots x_n]$; a) Définition axiomatique ; b) construction de $k[x]$ Identités algèbriques.- 5. Corps quotient : fonctions rationnelles. Décomposition en facteurs irréductibles (théorie pour une variable, avec l'analogie avec l'arithmétique ordinaire ; ensuite, récurrence sur le nombre de variables et lemme de Gauss, ou bien astuce de Kronecker). 7. Décomposition d'une fraction en éléments simples.

II. Polynomes comme fonctions. Zéros. Dérivée.

Théorème : dans un corps non fini, tout polynome partout nul est identiquement nul. Cas d'une variable : multiplicité d'un zéro. Dérivées comme coefficients du développement de Taylor ; appli- -cations au calcul de la multiplicité. Règles de dérivation (par addition, multiplication, etc. des développements de Taylor). Zéros dans un surcorps ; exemples. Corps algèbriquement fermé (pour l'existence, renvoi à v.d.W.).

DELBE006
21

ALGÈBRE LINÉAIRE.

I. Algèbre linéaire.

Espace vectoriel par rapport à k. Sous-espace. Exemples : k lui-même et $k \times k \times \dots \times k$.

Fonction linéaire sur un espace vectoriel $\mathfrak{M}$ à valeurs dans un espace vectoriel $\mathfrak{M}'$. Structure des classes pour f : $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$.

Sous-espace engendré par r vecteurs $X_1, X_2, \dots X_r$: notion de base. Unicité de la représentation par une base, éléments indépendants, base minima. Lemme : de toute base on peut extraire une base minima. Deux espaces ayant des bases minima à r éléments sont isomorphes. Dimension d'un espace vectoriel = nombre maximum d'éléments indépendants. 2° Lemme : pour que la dimension soit = n, il faut et il suffit qu'il y ait une base minima de n éléments.

Th. : dim $\mathfrak{M}$ = dim $\mathfrak{N}$ + dim $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ (et 3° Lemme) obtention d'une base min. de $\mathfrak{M}$ par une base de $\mathfrak{N}$ et des éléments tirés d'une base donnée de $\mathfrak{M}$).

Application : équations linéaires. Formules de résolution d'un système d'équations linéaires : par le 2è et 3è lemme. Espace duel ; théorème fondamental : réciprocité entre un sous-espace et l'espace des formes qui s'annulent sur lui.

II. Matrices.

Matrice = fonction linéaire (d'un esp. dans un esp.) + 2 bases.

Addition.

Dimension de l'espace des matrices (et unités matricielles).

......

DELBE 006

22

Multiplication : associativité. <u>Lois de composition non commutatives</u> : associativité : produit de n éléments ordonnés (au début, on aura bien séparé la commut. de l'assoc. et insisté sur l'intérêt des lois non commutatives).

Notation des vecteurs comme matrices. Notation V = AX p. une transformation linéaire ; etc.

Matrices carrées. Unité : aE (permutables avec tout) ; matrices diagonales (permutables entre elles).

Exemples de diviseurs de zéro.- Théorème fondamental : ou AB = 0, ou AA' = E. Matrice régulière : isomorphie de $\mathcal{M}$ avec $\mathcal{M}$. Changement de base pour une matrice carrée : $B^{-1}AB$.

III <u>Tenseurs</u>.

Une transformation dans $\mathcal{M}$ induit des transformations linéaires dans d'autres espaces vectoriels : exemple, polynomes homogènes à 2 variables. Autre exemple plus important : une transf. dans $\mathcal{M}$ induit, au moyen de la forme bilinéaire fondamentale, une transf. (dite contravariante) dans $\mathcal{M}^*$.

Transformation des formes multilinéaires à plusieurs séries de varia- -bles les unes dans $\mathcal{M}$, les autres dans $\mathcal{M}^*$: tenseurs. Espace des tenseurs (p,q) ; exemple : tenseurs à 2 indices ; sous-espaces des tenseurs symétriques et antisymétriques. Opérations : addi- -tion, multiplication, rajeunissement.

Permutation d'indice sur un tenseur. Permutations considérées comme opérant sur une fonction de n variables : permutations paires et impaires (au moyen du produit des différences). Tenseurs symétriques et antisymétriques.

DELBE 006

23

Théorie des nombres réels.

Axiomes des nombres réels : 1) corps 2) ordonné 3) archimédien 4) complet.

Limite. Critère de Cauchy et intervalles emboîtés.

Démonstration d'unicité par Cantor ("existence" au sens ancien).

Borne et borne. Bolzano-Weierstrass. Ensemble dérivé.

Topologie : ensembles ouverts et ensembles fermés.

Corps des nombres complexes. Equation réelle à laquelle satisfait un nombre complexe : imaginaire conjugué, norme, règles de calcul. Les nombres complexes forment un espace vectoriel.
