RÉDACTION N°200

COTE : NBR 101

AUTEUR : non identifié

TITRE : LIVRE VII. TOPOLOGIE ÉLÉMENTAIRE

FONDS :
ASSOCIATION DES COLLABRATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

Nombre de pages 035
Nombre de feuilles 035

LIVRE VII. TOPOLOGIE ELEMENTAIRE.

CHAPITRE II. Etat 1.

Titre ?

------

§ 1. Espaces triangulables.

1. Simplexes euclidiens.- (N-B : Ce n° ne pourra être mis au point que lorsqu'on aura pris des décisions sur les espaces affines).

Soit E un espace vectoriel topologique réel séparé. Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une suite finie de points de E . La variété linéaire affine V engendrée par les x_i est l'ensemble des barycentres des x_i affectés des masses λ_i , pour tous les systèmes $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Si, pour tout point x de V , les λ_i sont uniquement déterminés, les x_i sont affinement indépendants ; il revient au même de dire qu'aucun des x_i n'appartient à la variété linéaire affine engendrée par les autres. Lorsqu'il en est ainsi, les nombres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ s'appellent les coordonnées barycentriques de x relativement à $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. La dimension affine de V est n , et l'application $x \rightarrow (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ est une application linéaire affine de V sur R^n .

Définition 1.- On appelle simplexe euclidien de dimension n l'enveloppe convexe d'une famille finie $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $(n+1)$ points de E affinement indépendants.

Un tel simplexe euclidien S est l'ensemble des points dont les coordonnées barycentriques relativement à $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sont $\geqslant 0$ (EVT, chap.II, § 1, prop.8).

Un simplexe euclidien est un espace compact (EVT, chap.II, § 4, prop.1). Un simplexe euclidien de dimension 0 est un point. Un simplexe euclidien de dimension 1 est un segment fermé d'extrémités distinctes.

Soit $x = \lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_n x_n$ un point de S ($\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$). Si deux des λ_i sont > 0, x n'est pas point extrémal de S . Donc les points extrémaux de S sont les x_i . La seule donnée de l'ensemble S définit donc l'ensemble des x_i (mais non la <u>suite</u> $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$). Les x_i sont appelés les <u>sommets</u> de S . L'enveloppe convexe de (p+1) sommets distincts de S est un simplexe euclidien de dimension p , appelé <u>face de dimension</u> p de S ; en particulier, les sommets de S sont les faces de dimension 0. Soit toujours V la variété linéaire affine engendrée par les x_i . La réunion des faces de dimension (n-1) est la frontière de S relativement à V ; on dit que c'est la <u>coque</u> de S . Les points de S n'appartenant pas à la coque, c'est-à-dire les points dont toutes les coordonnées barycentriques relativement aux x_i sont > 0, sont dits <u>points internes</u> de S . Le point de S dont toutes les coordonnées barycentriques relativement aux x_i sont égales est appelé <u>centre</u> de S .

Soient S et S' deux simplexes euclidiens dans des espaces vectoriels E et E', $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ les sommets de S , $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ des points de S'. Toutes les applications linéaires affines φ de E dans E' telles que $u(x_0)=y_0, \ldots, u(x_n)=y_n$, ont même restriction v à S , et appliquent S dans S', v(S) étant l'enveloppe convexe des y_i . On dit que v est une <u>application linéaire affine de</u> S <u>dans</u> S'. Si les y_i sont les sommets de S', v est un homéomorphisme de S sur S'.

Prenons notamment $E' = R^{n+1}$, et soit y_i le point de R^{n+1} dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la $i^{ème}$ qui est égale à 1. Le barycentre des y_i affectés des masses λ_i est le point de coordonnées $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Le simplexe euclidien S' de sommets y_i est dont l'ensemble des points (λ_i) de R^{n+1} tels que $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. Tout simplexe euclidien de dimension n est homéomorphe à S'.

Soit S un simplexe euclidien de dimension n dans E . Ordonnons ses sommets en une suite $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Soit S_i la face de S qui a pour sommets $(x_0, x_1, \ldots, x_i)$. Soit y_i le centre de S_i . On a :

$$y_0 = x_0 \qquad y_1 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \ldots \quad y_n = \frac{1}{n+1}(x_0 + x_1 + \ldots + x_n) .$$

Les y_i sont affinement indépendants. En effet, on peut supposer $x_0 = 0$, auquel cas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants ; il est clair qu'alors $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont linéairement indépendants ; comme $y_0 = 0$, notre assertion est démontrée.

Ceci posé, soit S un simplexe euclidien. Pour toute suite strictement croissante $\Sigma = (S_0, S_1, \ldots, S_p)$ de faces de S , les centres $y_0, y_1, \ldots, y_p$ de $S_0, S_1, \ldots, S_p$ sont, d'après ce qui précède, affinement indépendants. Ce sont donc les sommets d'un simplexe euclidien T_Σ . Les T_Σ sont appelés <u>les simplexes euclidiens déduits de</u> S <u>par subdivision barycentrique</u>.

<u>Proposition 1.- Soient</u> S <u>un simplexe euclidien</u>, $\mathfrak{S}$ <u>l'ensemble des suites strictement croissantes de faces de</u> S . <u>Pour</u> $\Sigma \in \mathfrak{S}$, <u>soit</u> T'_Σ <u>l'ensemble des points internes de</u> T_Σ . <u>Alors, la famille</u> $(T'_\Sigma)_{\Sigma \in \mathfrak{S}}$ <u>est une partition de</u> S .

En effet, soit $x \in S$. Ordonnons les sommets de S en une suite $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de façon que les coordonnées barycentriques $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de x par rapport à $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ soient croissantes. Définissons les indices strictement croissants $i_1, i_2, \ldots, i_p$ par les conditions :

NBR 101 5

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda_i = 0 \text{ pour } 0 \leqslant i < i_1, \quad \lambda_{i_1} > 0\ ; \\ \lambda_i = \lambda_{i_1} \text{ pour } i_1 \leqslant i < i_2, \quad \lambda_{i_2} > \lambda_{i_1}\ ; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_i = \lambda_{i_p} \text{ pour } i_p \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Soient S_i la face de S de sommets $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, et y_i le centre de S_i. Alors, x est barycentre des points $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_p}$ affectés des masses $\mu_1 = \lambda_{i_1}(n-i_1)$, $\mu_2 = (\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1})(n-i_2), \dots, \mu_p = (\lambda_{i_p} - \lambda_{i_{p-1}})(n-i_p+1)$, masses qui sont >0 ; donc x est point interne du simplexe euclidien de sommets $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_p}$. Réciproquement, tout point interne de ce simplexe euclidien est de la forme $\mu_1 y_{i_1} + \mu_2 y_{i_2} + \dots + \mu_p y_{i_p}$, avec des $\mu_i > 0$ de somme 1, donc de la forme $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, les λ_i étant liés aux μ_j par les formules précédentes, donc vérifiant les conditions (1) ; ceci prouve que les faces $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_p}$ sont bien déterminées par x, de sorte que x ne peut être point interne que d'un seul simplexe T_Σ.

Lemme 1.- Supposons E normé. Soient S un simplexe euclidien dans E, $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ses sommets. Alors, le diamètre de l'ensemble S est égal au diamètre de l'ensemble des x_i.

En effet, soient $x \in S$, $y \in S$. Posons $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$ $(\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1)$. Alors

$$(2)\quad \|y-x\| = \Big\|\sum_{i=0}^{n}(\lambda_i y - \lambda_i x_i)\Big\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \|y - x_i\| \leqslant (\max \|y-x_i\|) \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = \max \|y - x_i\|.$$

En particulier, $\|y-x_i\| \leqslant \max \|x_j - x_i\|$. Donc $\|y-x\| \leqslant \max \|x_j - x_i\|$, ce qui prouve le lemme.

NBR 101 6

Proposition 2.- Supposons E normé. Soient S un simplexe euclidien de dimension n dans E , T un simplexe euclidien déduit de S par subdivision barycentrique, d et d' les diamètres de S et T . On a $d' \leqslant \frac{n}{n+1} d$.

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ les sommets de S . Soient $y = \frac{1}{i+1}(x_0+x_1+\dots+x_i)$, (resp. $y' = \frac{1}{j+1}(x_0+x_1+\dots+x_j)$) les centres des simplexes euclidiens de sommets $x_0, x_1, \dots, x_i$ (resp. $x_0, x_1, \dots, x_j$). On va montrer que $\| y-y' \| \leqslant \frac{n}{n+1} d$, ce qui, avec le lemme 1, prouvera la proposition. Supposons par exemple $i \quad j$. Appliquant l'inégalité (1), on a $\| y'-y \| \leqslant \| y'-x_k \|$ pour un $k \leqslant j$, et d'autre part

$$\| y'-x_k \| = \left\| \frac{1}{j+1}(x_0+x_1+\dots+x_j)-x_k \right\| = \frac{1}{j+1} \left\| \sum_{\ell=0}^{j} (x_\ell - x_k) \right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{j+1} \sum_{\ell=0}^{j} \| x_\ell - x_k \| \leqslant \frac{j}{j+1} d \leqslant \frac{n}{n+1} d .$$

2. *Complexes simpliciaux.- Définition 2.- Soit K un ensemble. Un ensemble* Φ *de parties finies de K définit sur K une structure de complexe simplicial s'il possède les propriétés suivantes :*

(CS_I) *Toute partie de K réduite à un point appartient à* Φ .

(CS_{II}) *Si* $L \in \Phi$, *toute partie de K contenue dans L appartient à* Φ .

(CS_{III}) *Tout élément de K appartient seulement à un nombre fini de parties de* Φ .

L'ensemble K , muni de cette structure, est appelé complexe simplicial ; ses éléments sont alors appelés sommets ; les ensembles de Φ *sont appelés les simplexes de K .*

(N-B. Eilenberg-Steenrod relèguent en exercice les complexes infinis)

On appelle dimension d'un simplexe de K le nombre de ses éléments diminué d'une unité. On appelle dimension de K la borne supérieure, finie ou infinie, des dimensions des simplexes de K .

L'axiome (CS_{II}) entraîne que la partie vide de K est un simplexe (de dimension -1).

Exemple.- On dit que K est un complexe simple si K est fini et si les simplexes de K sont toutes les parties finies de K .

Définition 3.- Soient K et K' deux complexes simpliciaux. Une application φ de K dans K' est dite simpliciale si l'image de tout~~e~~ simplexe de K est un simplexe de K'.

L'application identique de K est simpliciale. La composée de deux applications simpliciales est simpliciale.

Soient K un complexe simplicial, K' une partie de K , munie d'une structure de complexe simplicial. Si tout simplexe de K' est un simplexe de K , on dit que K' est un sous-complexe simplicial de K . Il revient au même de dire que l'application identique de K dans K' est simpliciale. Un sous-complexe simplicial de K' est un sous-complexe simplicial de K.

Un simplexe de K contenu dans K' n'est pas nécessairement un simplexe de K' ; l'ensemble K' peut donc, en général, être muni de différentes structures de complexe simplicial pour lesquelles il est un sous-complexe simplicial de K . Si tout simplexe de K contenu dans K' est un simplexe de K', on dit que K' est un sous-complexe simplicial complet de K .

Exemples.- 1. Tout complexe simplicial fini K est sous-complexe simplicial du complexe simple unique porté par l'ensemble K .

2. Soit K un complexe simplicial. Pour tout entier $n \geqslant 0$, l'ensemble des simplexes de dimension $\leqslant n$ de K définit sur l'ensemble K une structure de complexe simplicial K_n de dimension $\leqslant n$; K_n est un sous-complexe simplicial de K . On dit que K_n est le squelette d'ordre n de K .

 8

3. Soient K un complexe simplicial, H_1 et H_2 deux sous-complexes simpliciaux de K . Dans l'ensemble $H_1 \cup H_2$, considérons les parties qui sont ou bien des simplexes de H_1, ou bien des simplexes de H_2 . L'ensemble $H_1 \cup H_2$ est ainsi muni d'une structure de complexe simplicial qui en fait un sous-complexe simplicial de K .

4. Soient K un complexe simplicial, H un simplexe de K . Pour l'unique structure de complexe simple portée par H , H est un sous-complexe simplicial de K . On identifie en général le simplexe H et le complexe simple qu'il définit.

3. Espace topologique associé à un complexe simplicial.- Définition 4.- Soit K un complexe simplicial. Dans l'espace R^K , considérons le sous-espace formé des points $(\lambda_k)_{k \in K}$ possédant la propriété suivante :

L'ensemble des $k \in K$ tels que $\lambda_k \neq 0$ est un simplexe de K , les λ_k sont $\geqslant 0$, et $\sum \lambda_k = 1$.

Ce sous-espace est dit associé à K et est noté $|K|$.

L'espace $|K|$ est séparé.

Soit H un sous-complexe simplicial de K . Identifions R^H au sous-espace de R^K formé des familles $(\lambda_k)_{k \in K}$ telles que $\lambda_k = 0$ pour $k \notin H$. Alors, $|H|$ s'identifie à un sous-espace de $|K|$. Ce sous-espace est fermé dans $|K|$; en effet, si $x = (\lambda_k) \in |K|$ n'est pas dans $|H|$, l'ensemble K_1 des $k \in K$ tels que $\lambda_k > 0$ n'est pas un simplexe de H ; alors, pour tout point y de $|K|$ assez voisin de x , on a $y \notin |H|$.

Exemples. 1. Soit K un complexe simple de dimension n (n fini). Alors, $|K|$ est l'ensemble des systèmes $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, donc est un simplexe euclidien de dimension n. Si K' est un simplexe de K de dimension p , $|K'|$ est une face de dimension p de $|K|$. Si K" est le squelette d'ordre n-1 de K , $|K"|$ est la coque de $|K|$.

2. Soient K un complexe simplicial, n un entier $\geqslant 0$. Si K_n est le squelette d'ordre n de K , $|K_n|$ s'appelle le <u>squelette d'ordre n</u> de $|K|$.

3. Soient K un complexe simplicial, H_1 et H_2 deux sous-complexes simpliciaux de K . Soit H le sous-complexe simplicial de K défini sur l'ensemble $H_1 \cup H_2$ dans l'exemple 3 du n°1. Alors, on a

$|H| = |H_1| \cup |H_2|$.

4. Soit K un complexe simplicial. Tout simplexe L de K de dimension n définit un sous-espace $|L|$ de $|K|$, qui est un simplexe euclidien de dimension n. En particulier, chaque sommet k de K définit un point, noté $|k|$,

Soient K et K' deux complexes simpliciaux, φ une application simpliciale de K dans K'. Pour tout simplexe L de K, de sommets $k_0, k_1, \ldots, k_n$, les éléments $\varphi(k_0), \varphi(k_1), \ldots, \varphi(k_n)$ sont les sommets (non nécessairement distincts) d'un simplexe L' de K'. Soit ψ_L l'application linéaire affine de $|L|$ dans $|L'|$ qui transforme $|k_i|$ en $|\varphi(k_i)|$ $(i=0,1,\ldots,n)$. Si L_1 et L_2 sont deux simplexes de K, ψ_{L_1} et ψ_{L_2} coïncident sur $|L_1| \cap |L_2|$. Donc il existe une application et une seule ψ de $|K|$ dans $|K'|$ qui prolonge les ψ_L ; cette application est continue en vertu du lemme suivant :

Lemme 2.- Soient X et Y des espaces topologiques, $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement fermé localement fini de X, ω_i une application continue de X_i dans Y. Quels que soient $i \in I$ et $j \in I$, on suppose que ω_i et ω_j coïncident sur $X_i \cap X_j$. Alors l'application unique ω de X dans Y qui, pour tout $i \in I$, prolonge ω_i, est continue.

Soient $x \in X$, et W un voisinage de $\omega(x)$ dans Y. Soient J une partie finie de I, et V un voisinage de x dans X, tels que $V \cap X_i = \emptyset$ pour $i \notin J$. Pour tout $j \in J$, soit V_j un voisinage de x dans X tel que $\omega_j(x') \in W$ pour $x' \in V_j \cap X_j$. L'intersection de V et des V_j est un voisinage V' de x dans X, et on a $\omega(x') \in W$ pour $x' \in V'$. D'où le lemme.

Revenant aux notations antérieures, l'application continue ψ de $|K|$ dans $|K'|$ est dite associée à φ. L'image par ψ du squelette d'ordre n de $|K|$ est contenu dans le squelette d'ordre n de $|K'|$.

En particulier, si H est un sous-complexe simplicial de K, et si φ est l'injection canonique de H dans K, ψ n'est autre que l'injection de $|H|$ dans $|K|$ par laquelle nous avons déjà identifié $|H|$ à un sous-espace de $|K|$.

Soient K_1, K_2, K_3 des complexes simpliciaux, φ_1 (resp. φ_2) une application simpliciale de K_1 dans K_2 (resp. de K_2 dans K_3), ψ_1 (resp. ψ_2)

l'application associée de $|K_1|$ dans $|K_2|$ (resp. de $|K_2|$ dans $|K_3|$). Alors, $\psi_2 \circ \psi_1$ est l'application associée à $\varphi_2 \circ \varphi_1$. En particulier, soient K_1 et K_2 des complexes simpliciaux, L_1 un sous-complexe simplicial de K_1, φ une application simpliciale de K_1 dans K_2, ψ l'application associée de $|K_1|$ dans $|K_2|$; alors, la restriction de ψ à $|L_1|$ n'est autre que l'application associée à la restriction de φ à L_1.

4. Espaces triangulés.- Définition 5.- Soient X un espace topologique, K un complexe simplicial de dimension n. On appelle triangulation de X de nerf K un homéomorphisme de $|K|$ sur X. L'espace X, muni de cette triangulation, est appelé espace triangulé de dimension n.

Un espace topologique Y est dit triangulable (resp. triangulable de type fini) s'il possède une triangulation (resp. une triangulation de nerf fini).

Un espace triangulable est localement compact ; un espace triangulable de type fini est compact métrisable (prop.3).

Soient X un espace triangulé, t la triangulation K son nerf. L'image par t du squelette d'ordre n de $|K|$ s'appelle le squelette d'ordre n de X. De manière analogue, on définit les sommets de X, les simplexes de dimension p de X, les faces de dimension q et les points internes d'un simplexe de X, l'étoile st(x) d'un sommet x de X. Tout point de X est point interne d'un simplexe bien déterminé de X. Etant donné un recouvrement $\mathcal{K}$ de X, on dit que t est plus fine que $\mathcal{K}$ si, pour tout sommet x de X, st(x) est contenue dans un ensemble de $\mathcal{K}$. Si X est un espace métrique, on appelle diamètre de t la borne supérieure des diamètres des simplexes de X.

Soient X et X' deux espaces triangulés, t et t' leurs triangulations, de nerfs K, K'. Soit φ une application de X dans X'. On dit que φ est simpliciale s'il existe une application simpliciale ω de K dans K' telle que $\varphi = t' \circ \psi \circ t^{-1}$, ψ désignant l'application de $|K|$ dans $|K'|$ associée à ω. Une application simpliciale de X dans X' est donc continue.

Définition 6.- Soient X un espace topologique, Y un sous-espace, H un complexe simplicial, K un sous-complexe simplicial. On appelle triangulation de (X,Y), de nerf (H,K), un homéomorphisme de $|H|$ sur X qui transforme $|K|$ en Y. Le couple (X,Y), muni de cette triangulation, est appelé couple triangulé.

On dit qu'un espace topologique X et un sous-espace Y forment un couple triangulable (resp. triangulable de type fini) si le couple (X,Y) possède une triangulation (resp. une triangulation de nerf fini).

(Faut-il parler des dimensions d'un couple triangulé ? des "triples" triangulés ? etc.).

Si (X,Y) est un couple triangulable, Y est un sous-espace fermé de X .

Proposition 4.- Dans l'espace numérique R^n, soient X un corps convexe compact Y sa frontière. Soient H un complexe simple de dimension n , K son squelette d'ordre n-1. Il existe une triangulation de (X,Y) de nerf (H,K).

L'espace $|H|$ est un corps convexe compact dans R^n, et $|K|$ est sa frontière. La proposition sera donc démontrée si nous établissons que, pour tout corps convexe compact X dans R^n, de frontière Y , il existe un homéomorphisme de X sur la boule B_n qui transforme Y en S_n. Par translation, on peut supposer que 0 est intérieur à X . Soit x un point de S_n La demi-droite fermée D d'origine 0 définie par x coupe Y en un seul point $y = \varphi(x)$, et $D \cap X$ est le segment fermé d'extrémités 0, y ;

en effet, l'ensemble des nombres $\lambda \geqslant 0$ tels que $\lambda x \in X$ a une borne supérieure $\mu > 0$, et μx, qui appartient à X, n'est pas intérieur à X ; donc $\mu x \in Y$; d'autre part, si $\lambda x \in X$ et $\lambda' x \in X$ ($\lambda \geqslant 0$, $\lambda' \geqslant 0$), avec par exemple $\lambda < \lambda'$, λx est intérieur à X (EVT, chap.II, §1,prop.15). Il est clair que φ est une application bijective de S_n sur Y, l'application réciproque ψ n'étant autre que l'application $y \to \frac{y}{\|y\|}$; on voit en outre que ψ est continue ; comme Y et S_n sont compacts, φ est un homéomorphisme de S_n sur Y. D'autre part, ce qui précède montre que X est réunion des ensembles disjoints λY $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$; alors, l'application ω de R^n dans R^n qui transforme 0 en 0 et tout point $x \neq 0$ en $\|x\| \ \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ définit une application bijective de B_n sur X qui prolonge φ. Il est clair que ω est continue en tout point $x \neq 0$; d'autre part, si $x \to 0$, $\omega(x)$ tend vers 0 parce que $\|\omega(x)\| \leqslant M\|x\|$, M désignant le maximum de la norme sur X. Donc ω est un homéomorphisme de l'espace compact B_n sur l'espace compact X.

<u>Proposition 5</u> (exercice ?).- <u>Soient</u> X <u>un espace topologique séparé</u>, K <u>un complexe simplicial</u>, f <u>une application de l'ensemble</u> Φ <u>des simplexes de</u> K <u>dans l'ensemble des parties de</u> X, <u>satisfaisant aux conditions suivantes</u> :

a) <u>Les</u> f(L), <u>pour</u> $L \in \Phi$, <u>forment un recouvrement localement fini de</u> X.

b) <u>Pour</u> $L \in \Phi$, $L' \in \Phi$, <u>on a</u> $f(L \cap L') = f(L) \cap f(L')$.

c) <u>Si</u> $L \in \Phi$, <u>il existe un homéomorphisme</u> φ_L <u>de</u> $|L|$ <u>sur</u> f(L) <u>qui, pour tout simplexe</u> $H \subset L$, <u>transforme</u> $|H|$ <u>en</u> f(H).

<u>Alors, il existe une triangulation de</u> X <u>de nerf</u> K <u>qui, pour tout</u> $L \in \Phi$, <u>transforme</u> $|L|$ <u>en</u> f(L).

Pour tout $L \in \Phi$, soient ψ_L un homéomorphisme de $|L|$ sur $/L|$, et $\varphi'_L = \varphi_L \circ \psi_L$. Nous allons choisir les ψ_L de façon que, pour $L \in \Phi$, $L' \in \Phi$, $L \subset L'$, $\varphi'_{L'}$ soit un prolongement de φ'_L . Supposons les ψ_L choisis pour tous les simplexes de dimension $< n$, et satisfaisant à cette condition. Soit L_1 un simplexe de dimension n de K ; les φ'_L , pour tous les simplexes L de dimension $< n$ contenus dans L_1 , définissent, en vertu de l'hypothèse de récurrence et du lemme 2, un homéomorphisme ω de la coque de $|L_1|$ sur un sous-espace de X ; ψ_{L_1} doit être choisi de façon que $\varphi_{L_1} \circ \psi_{L_1}$ prolonge ω ; en vertu de la condition c, ceci signifie que ψ_{L_1} doit prolonger un homéomorphisme donné de la coque de $|L_1|$ sur elle-même. Utilisant la prop.4, nous sommes ramenés à prouver ceci : soit θ un homéomorphisme de S_n sur S_n ; alors il existe un homéomorphisme θ' de B_n sur B_n prolongeant θ ; pour établir ce point, il suffit de poser $\theta'(x) = \|x\| \, \theta\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ pour $x \in B_n$, $x \neq 0$, et $\theta'(0)=0$. L'existence des ψ_L est ainsi démontrée par récurrence.

Ceci posé, pour $L \in \Phi$ et $L' \in \Phi$, φ'_L et $\varphi'_{L'}$ coïncident sur $|L| \cap |L'| = |L \cap L'|$ avec $\varphi'_{L \cap L'}$. En vertu du lemme 2, il existe une application continue φ de $|K|$ dans X qui prolonge les φ'_L . D'autre part, pour $L \in \Phi$ et $L' \in \Phi$, $\overset{-1}{\varphi'_L}$ et $\overset{-1}{\varphi'_{L'}}$ coïncident sur $f(L) \cap f(L') = f(L \cap L')$ avec $\overset{-1}{\varphi'_{L \cap L'}}$; or, les f(L) constituent un recouvrement <u>fermé</u> localement fini de X (car, X étant séparé, les $f(L) = \varphi_L(L)$ sont compacts) ; donc (lemme 2) l'application η de X dans $|K|$ qui prolonge les $\overset{-1}{\varphi'_L}$ est continue. Il est clair que $\varphi \circ \eta$ et $\eta \circ \varphi$ sont les applications identiques de X et $|K|$ respectivement. Ceci achève la démonstration.

5. <u>Subdivision barycentrique</u>.- A tout complexe simplicial K , nous allons associer un nouveau complexe simplicial K' :

1) Les éléments de K' sont les simplexes non vides de K .

2) Un ensemble fini de simplexes non vides de K est un simplexe de K' si et seulement si cet ensemble est totalement ordonné par inclusion.

Il est clair que l'ensemble K' est ainsi muni d'une structure de complexe simplicial de même dimension que K . On dit que K' est le complexe simplicial <u>déduit de</u> K <u>par subdivision barycentrique</u>.

Soit H un sous-complexe simplicial de K . Soit H' le complexe simplicial déduit de K par subdivision barycentrique. Il est clair que H' est un sous-complexe simplicial de K'. Ce sous-complexe simplicial est <u>complet</u>. En effet, considérons un simplexe de K', c'est-à-dire un ensemble fini $\{L_o, L_1, \ldots, L_n\}$ de simplexes distincts de K tels que $L_o \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n$; supposons que ses sommets, c'est-à-dire $L_o, L_1, \ldots, L_n$, soient des sommets de H', c'est-à-dire des simplexes de H ; alors, $\{L_o, L_1, \ldots, L_n\}$ est un simplexe de H', d'où notre assertion.

Soient K un complexe simplicial, K' le complexe simplicial déduit de K par subdivision barycentrique. Nous allons définir une application continue φ de $|K'|$ dans $|K|$. Considérons un simplexe $L' = \{L_o, L_1, \ldots, L_n\}$ de K', où les L_i sont des simplexes de K tels que $L_o \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n$. Les centres x_i des simplexes $|L_i|$ de $|K|$ sont tous contenus dans le simplexe $|L_n|$; soit alors $\varphi_{L'}$ l'application linéaire affine du simplexe $|L'|$ de $|K'|$ dans le simplexe $|L_n|$ de $|K|$ qui, pour tout i , transforme le sommet y_i de $|L'|$ associé à L_i en x_i . Soit φ l'application continue (lemme 1) de $|K'|$ dans $|K|$ qui prolonge les $\varphi_{L'}$. Cette application est appelée <u>l'application canonique de</u> $|K'|$ <u>dans</u> $|K|$. Si H est un sous-complexe simplicial de K , et si H' est le sous-complexe simplicial de K' déduit de H par subdivision barycentrique, la restriction de φ à $|L'|$ est l'application canonique de $|L'|$ dans $|L|$.

<u>Proposition 6.- L'application canonique</u> φ <u>de</u> $|K'|$ <u>dans</u> $|K|$ <u>est un homéomorphisme de</u> $|K'|$ <u>sur</u> $|K|$. <u>Si</u> H <u>est un sous-complexe simplicial de</u> K, <u>et si</u> H' <u>est le sous-complexe simplicial de</u> K' <u>déduit de</u> H <u>par subdivision barycentrique, on a</u> $\varphi(|H'|) = |H|$.

Montrons que φ est surjective, et pour cela que, pour tout simplexe L de K, on a $\varphi(|K'|) \supset |L|$. Soit $(L_o, L_1, \ldots, L_n)$ une suite strictement croissante de simplexes de K contenus dans L ; cette suite est un simplexe L' de K', et $\varphi(|L'|)$ est le simplexe euclidien qui admet pour sommets les centres des simplexes euclidiens $|L_o|, |L_1|, \ldots, |L_n|$. Donc $\varphi(|K'|)$ contient tous les simplexes euclidiens déduits de $|L|$ par subdivision barycentrique, et par suite $|L|$ (prop.1).

Montrons que φ est injective. Soient x_1, x_2 deux points distincts de $|K'|$, et montrons que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Soit L_1' (resp. L_2') le simplexe de K' tel que x_1' (resp. x_2') soit point interne de $|L_1'|$ (resp. $|L_2'|$). Nous distinguerons trois cas : a) Si $L_1' = L_2'$, la restriction de φ à $|L_1'|$ est injective puisqu'elle applique les sommets de $|L_1'|$ sur des points affinement indépendants (n°1) ; donc $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.
b) Si $L_1' \neq L_2'$, et si les éléments de L_1', L_2' sont des simplexes de K contenus dans un même simplexe L de K, $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$ sont points internes de deux simplexes euclidiens distincts déduits de $|L|$ par subdivision barycentrique, donc $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ d'après la prop.1.
c) Si les éléments de L_1' et de L_2' sont des simplexes de K qui ne sont pas contenus dans un même simplexe de K, il existe un élément $k \in K$ qui n'est sommet d'aucun des simplexes éléments de L_1', et qui est sommet d'un des simplexes éléments de L_2' (par exemple) ; alors, la coordonnée λ_k de $\varphi(x_1)$ (resp. $\varphi(x_2)$) est nulle (resp. > 0), donc $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Maintenant, si H est un sous-complexe simplicial de K , et si H' est le sous-complexe simplicial de K' déduit de H par subdivision barycentrique, la restriction de φ à $|H'|$ n'est autre que l'application canonique de $|H'|$ dans $|H|$, donc $\varphi(|H'|) = |H|$ d'après ce qui précède. En particulier, si M est un simplexe de K , et si M' se déduit de M par subdivision barycentrique, la restriction de φ à $|M'|$ est un homéomorphisme de l'espace compact $|M'|$ sur l'espace compact $|M|$. Donc la restriction de $\overset{-1}{\varphi}$ à $|M|$ est continue ; comme les simplexes $|M|$ forment un recouvrement fermé localement fini de $|K|$, on voit que $\overset{-1}{\varphi}$ est continue (lemme 2), ce qui achève la démonstration.

Définition 7.- *Soient X un espace topologique, t une triangulation de X de nerf K . Soient K' le complexe simplicial déduit de K par subdivision barycentrique,* φ *l'homéomorphisme canonique de* $|K'|$ *sur* $|K|$*. Alors,* $t\circ\varphi$ *est une triangulation de X , de nerf K ; on dit que* $t\circ\varphi$ *est déduite de t par subdivision barycentrique.*

Proposition 7.- *Soient X un espace métrique, t une triangulation de X de nerf fini K . Soit* t_i *la triangulation de X déduite de t par i subdivisions barycentriques successives. Alors, le diamètre de* t_i *tend vers 0 quand* $i \longrightarrow +\infty$.

Soient $K_1, K_2, \dots$ les complexes simpliciaux déduits de $K_o = K$ par subdivisions barycentriques successives. Soit φ_i l'homéomorphisme canonique de $|K_i|$ sur $|K_{i-1}|$ $(i=1,2,\dots)$. Alors $\varphi_1\circ\varphi_2\circ\dots\circ\varphi_i$ n'est autre que la triangulation t_i de $|K|$ déduite de la triangulation identique par i subdivisions barycentriques successives. Soient δ_i le diamètre de t_i (on munit $|K|$ de la distance euclidienne induite par celle de R^K), et n la dimension commune de tous les K_i . Par récurrence sur i , on obtient aussitôt les résultats suivants : 1) pour tout simplexe L de K_i , 18

t_i induit une application linéaire affine de L sur un simplexe euclidien de R^K ; 2) il existe un simplexe M de K_{i-1} tel que $t_i(L)$ soit l'un des simplexes euclidiens déduits de $t_{i-1}(M)$ par subdivision barycentrique. Alors, la prop.2 prouve que $\delta_i \leqslant \frac{n}{n+1}\,\delta_{i-1}$. Donc, $\delta_i \to 0$ quand $i \to +\infty$, d'où la proposition, puisque t est uniformément continue.

6. Approximation simpliciale.- Définition 8.- Soient X et X' des espaces triangulés, φ une application de X dans X'. On dit qu'une application ψ de X dans X' est une approximation simpliciale de φ si ψ est simpliciale, et si, pour tout $x \in X$, $\psi(x)$ appartient au simplexe unique de X' dont $\varphi(x)$ est point interne.

Théorème 1 (approximation simpliciale).- Soient X un espace triangulable, X' un espace triangulé, φ une application continue de X dans X'. Il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{K}$ de X possèdant la propriété suivante : pour toute triangulation de X plus fine que $\mathcal{K}$, φ possède une approximation simpliciale.

En effet, soient t' la triangulation de X', K' son nerf. Les ensembles $st(|k'|)$, $k' \in K'$, forment un recouvrement ouvert de X', donc les ensembles $\overset{-1}{\varphi}(st(|k'|))$ forment un recouvrement ouvert $\mathcal{K}$ de X . Soient t une triangulation de X plus fine que $\mathcal{K}$, K son nerf. Pour tout $k \in K$, choisissons un élément $k' = \psi(k)$ dans K' tel que $st(|k|) \subset \overset{-1}{\varphi}(st(|k'|))$. L'application ψ de K dans K' est simpliciale ; car, si $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont sommets d'un simplexe de K , les $st(|k_i|)$ ont une intersection non vide, donc les $st(|\psi(k_i)|)$ ont une intersection non vide, donc les $\psi(k_i)$ appartiennent à un même simplexe de K' .

Soit ω l'application simpliciale de $|K|$ dans $|K'|$ associée à ψ , et soit φ' l'application simpliciale correspondante de X dans X'. Montrons que φ' est une approximation simpliciale de φ . Soit $x \in X$. Soit S (resp. S') le simplexe de X (resp. X') dont x (resp. $\varphi(x)$) est point interne. Pour tout sommet y de S , on a $x \in st(y)$, donc $\varphi(x) \in \varphi(st(y)) \subset st(\varphi'(y))$, donc $\varphi'(y)$ est un sommet de S'. Ainsi, $\varphi'(x) \in \varphi'(S) \subset S'$, ce qui prouve notre assertion.

Corollaire.- Soient X, X' des espaces triangulés, φ une application continue de X dans X'. On suppose que le nerf de la triangulation de X est fini. Soit X_n l'espace triangulé déduit de X par n subdivisions barycentriques successives. Alors, pour n assez grand, l'application φ de X_n dans X' possède une approximation simpliciale.

En effet, soit $\mathcal{R}$ le recouvrement ouvert de X dont le th.1 assure l'existence. Munissons X d'une métrique compatible avec sa structure uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. Le diamètre de la triangulation de X_n est $\leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$ (prop.7). Alors, pour tout sommet y de X_n , le diamètre de st(y) est $\leqslant 2\varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Le corollaire résultera donc du lemme suivant :

Lemme 3.- Soient E un espace compact, $\mathcal{R}$ un recouvrement ouvert de E . Il existe un entourage V de E tel que, pour tout $x \in E$, V(x) soit contenu dans un ensemble appartenant à $\mathcal{R}$. (Top.gén., chap.II, § 4, exerc. 1 !).

En effet, pour tout $x \in E$, il existe un entourage W_x de E tel que $W_x(x)$ soit contenu dans un ensemble de $\mathcal{R}$. Soit U_x un entourage de E tel que $\overset{2}{U}_x \subset W_x$. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des points de E tels que $U_{x_1}(x_1), \dots, U_{x_n}(x_n)$ forment un recouvrement de E . Soit $V = U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_n}$, qui est un entourage de E . Pour tout $x \in E$, choisissons x_i de façon que $x \in U_{x_i}(x_i)$. Alors, $V(x) \subset U_{x_i}(x) \subset \overset{2}{U}_{x_i}(x_i) \subset W_{x_i}(x_i)$, donc V(x) est contenu dans un ensemble de $\mathcal{R}$.

7. <u>Produit d'espaces triangulés</u>.- Soient K_1 et K_2 deux complexes simpliciaux. Dans l'ensemble $K_1 \times K_2$, considérons les parties contenues dans une partie de la forme $L_1 \times L_2$, où L_1 est un simplexe de K_1 et L_2 un simplexe de K_2. Il est clair que ces parties vérifient les axiomes (CS_I), (CS_{II}), (CS_{III}) du n°1. On a donc défini sur $K_1 \times K_2$ une structure de complexe simplicial, appelé <u>produit simplicial</u> de K_1 et K_2, et noté $K_1 \Delta K_2$. Si K_1 est de dimension n_1 et K_2 de dimension n_2, $K_1 \Delta K_2$ est de dimension $(n_1+1)(n_2+1)-1$.

Des points (x_1,x_2), $(y_1,y_2),\dots,(z_1,z_2)$ de $K_1 \times K_2$ sont donc sommets d'un simplexe de $K_1 \Delta K_2$ si et seulement si $(x_1,y_1,\dots,z_1)$ sont sommets d'un simplexe de K_1 et $(x_2,y_2,\dots,z_2)$ sommets d'un simplexe de K_2.

Si L_1 et L_2 sont des sous-complexes simpliciaux de K_1 et K_2 respectivement, $L_1 \Delta L_2$ est un sous-complexe simplicial de $K_1 \Delta K_2$. Si φ_1 (resp. φ_2) est une application simpliciale de K_1 (resp. K_2) dans un complexe simplicial K_1' (resp. K_2'), alors l'application $(x_1,x_2) \rightarrow (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ est une application simpliciale de $K_1 \Delta K_2$ dans $K_1' \Delta K_2'$. Les projections π_1, π_2 de $K_1 \Delta K_2$ sur les ensembles facteurs sont simpliciales.

Soit ρ_1 (resp. ρ_2) l'application de $|K_1 \Delta K_2|$ dans $|K_1|$ (resp. $|K_2|$) associée à π_1 (resp. π_2). Alors, ρ_1 et ρ_2 définissent une application continue ρ, dite <u>canonique</u>, de $|K_1 \Delta K_2|$ dans $|K_1| \times |K_2|$. Si L_1, L_2 sont des sous-complexes simpliciaux de K_1, K_2, les restrictions de ρ_1 et ρ_2 à $|L_1 \Delta L_2|$ sont associées aux projections de l'ensemble $L_1 \Delta L_2$ sur L_1 et L_2 ; donc la restriction de ρ à $|L_1 \Delta L_2|$ n'est autre que l'application canonique de $|L_1 \Delta L_2|$ dans $|L_1| \times |L_2|$.

Supposons les ensembles K_1, K_2 totalement ordonnés, et munissons l'ensemble $K_1 \times K_2$ de l'ordre produit. Cet ordre induit un ordre sur tout simplexe de $K_1 \Delta K_2$. Considérons les simplexes <u>totalement ordonnés</u> de $K_1 \Delta K_2$. Ils définissent sur l'ensemble $K_1 \times K_2$ une nouvelle structure de complexe simplicial. Ce complexe simplicial est noté $K_1 \times K_2$ et appelé <u>produit</u> des complexes simpliciaux K_1, K_2. (Cet abus de langage est en général sans inconvénient, car les ordres totaux de K_1 et K_2 sont fixés une fois pour toutes dans les théories où on fait usage de ce produit). On voit aisément que la dimension de $K_1 \times K_2$ est la somme des dimensions de K_1 et K_2 (utilité pour Bourbaki ?). Il est clair que $K_1 \times K_2$ est un sous-complexe simplicial de $K_1 \Delta K_2$. Si L_1 et L_2 sont des sous-complexes simpliciaux de K_1 et K_2 respectivement (munis des ordres induits par les ordres de K_1 et K_2), $L_1 \times L_2$ est un sous-complexe simplicial de $K_1 \times K_2$.

L'espace $|K_1 \times K_2|$ est un sous-espace de $|K_1 \Delta K_2|$. L'application canonique de $|K_1 \Delta K_2|$ sur $|K_1| \times |K_2|$ définit par restriction une application continue η, dite encore <u>canonique</u>, de $|K_1 \times K_2|$ dans $|K_1| \times |K_2|$. D'autre part, $|L_1 \times L_2|$ est un sous-espace de $|K_1 \times K_2|$, et la restriction de η à $|L_1 \times L_2|$ est l'application canonique de $|L_1 \times L_2|$ dans $|L_1| \times |L_2|$.

<u>Proposition 8.- L'application canonique de</u> $|K_1 \times K_2|$ <u>dans</u> $|K_1| \times |K_2|$ <u>est un homéomorphisme de</u> $|K_1 \times K_2|$ <u>sur</u> $|K_1| \times |K_2|$ <u>qui transforme</u> $|L_1 \times L_2|$ <u>en</u> $|L_1| \times |L_2|$.

Nous allons procéder en plusieurs étapes.

1) Définition d'une application $\bar{\eta}$ de $|K_1| \times |K_2|$ dans $|K_1 \times K_2|$: soient $x \in |K_1|$, $y \in |K_2|$; x et y se mettent de manière unique sous les formes

$$x = \lambda_0 |x_0| + \lambda_1 |x_1| + \dots + \lambda_p |x_p| \qquad y = \mu_0 |y_0| + \mu_1 |y_1| + \dots + \mu_q |y_q|$$

où les λ_i (resp. μ_j) sont > 0 et de somme 1, avec $x_0 < x_1 < \dots < x_p$, $y_0 < y_1 , < \dots < y_q$. Pour $0 \leq m \leq p$ et $0 \leq n \leq q$, posons

$$\rho_m = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \qquad \sigma_n = \sum_{j=0}^{n} \mu_j .$$

Soit $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{p+q+1})$ la suite des nombres ρ_m et σ_n rangés de telle sorte que $\tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_{p+q+1}$. (Remarquons que $\tau_{p+q} = \tau_{p+q+1} = 1$). Pour tout entier $r = 0, 1, \dots, p+q$, soit z_r le sommet (x_i, y_j), où i (resp. j) est le nombre de scalaires ρ_m (resp. σ_n) figurant dans la suite $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{r-1})$; on a donc $i+j = r$, et z_{r+1} est (x_{i+1}, y_j) ou (x_i, y_{j+1}) suivant que τ_r est ρ_i ou σ_j. Il s'ensuit que $z_0 < z_1 < \dots < z_{p+q}$, de sorte que $z_0, z_1, \dots, z_{p+q}$ sont les sommets d'un simplexe de $K_1 \times K_2$. Posons alors $z = \sum_{i=0}^{p+q} (\tau_i - \tau_{i-1}) |z_i|$ (on convient que $\tau_{-1} = 0$) ; comme $\sum_{i=0}^{p+q} (\tau_i - \tau_{i-1}) = \tau_{p+q} - \tau_{-1} = 1$, z est un point de $|K_1 \times K_2|$. Ce point ne dépend que de x et y. Car, dans la définition précédente de z à partir de x et y, la seule ambiguïté possible est celle-ci : lorsque $\rho_i = \sigma_j$, on a $\tau_{i+j} = \tau_{i+j+1} = \rho_i = \sigma_j$, et z_{i+j+1} peut être (x_i, y_{j+1}) ou (x_{i+1}, y_j) ; mais comme alors $\tau_{i+j+1} - \tau_{i+j} = 0$, ceci n'influe pas sur la définition de z. On a donc bien défini une application $\bar{\eta}$ de $|K_1| \times |K_2|$ dans $|K_1 \times K_2|$.

2) Montrons que $\eta \circ \bar{\eta}$ est l'application identique de $|K_1| \times |K_2|$. Conservons les notations précédentes, et soit ρ_1 (resp. ρ_2) l'application de $|K_1 \times K_2|$ dans $|K_1|$ (resp. $|K_2|$) associée à la projection de $K_1 \times K_2$ sur K_1. Nous allons montrer que $\rho_1(z) = x$. La démonstration de $\rho_2(z) = y$ étant analogue, notre assertion sera établie. Or, soient x_i un sommet de K_1, et $z_r, z_{r+1}, \dots, z_{r+k}$ les z qui admettent x_i comme première projection ; on a, pour $0 \leq \ell \leq k$, $z_{r+\ell} = (x_i, y_{j+\ell})$, où $i+j = r$; d'autre part, $z_{r-1} = (x_{r-1}, y_j)$ et $z_{r+k+1} = (x_{r+1}, y_{j+k})$. Alors, la coordonnée de $\rho_1(z)$ relative au sommet x_i est

$$\sum_{i=r}^{r+k} (\tau_i - \tau_{i-1}) = \tau_{r+k} - \tau_{r-1} = \rho_i - \rho_{i-1} = \lambda_i .$$

Ceci étant vrai pour tout i, on a bien $\rho_1(z) = x$.

3) Montrons que $\bar{\eta}$ est surjective. Tout point z de $|K_1 \times K_2|$ est de la forme $\sum_{r=0}^{s} \xi_r |z_r|$, avec $z_0 < z_1 < \dots < z_s$. Soient $(x_0, x_1, \dots, x_p)$ (resp. $y_0, y_1, \dots, y_q$) les premières (resp. secondes) projections distinctes de $z_0, z_1, \dots, z_s$. En adjoignant des z_i pour lesquels $\xi_i = 0$, on peut supposer que, si $z_r = (x_i, y_j)$, alors $z_{r+1} = (x_i, y_{j+1})$ ou $z_{r+1} = (x_{i+1}, y_j)$. Posant $\tau_r = \sum_{i=0}^{r} \xi_i$, soit $\rho_i = \tau_r$ dans le second cas, $\sigma_j = \tau_r$ dans le premier cas. Ceci définit $\rho_0 \leqslant \rho_1 \leqslant \dots \leqslant \rho_p = 1$, et $\sigma_0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \dots \leqslant \sigma_q = 1$.
Enfin, soient $x = \sum_{i=0}^{p} (\rho_i - \rho_{i-1}) |x_i|$, $y = \sum_{j=0}^{q} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) |y_j|$. On vérifie aisément que $\bar{\eta}(x,y) = z$.

4) Ce qui précède montre que η et $\bar{\eta}$ sont des applications bijectives réciproques. La restriction de η à $|L_1 \times L_2|$ est l'application canonique de $|L_1 \times L_2|$ dans $|L_1| \times |L_2|$, donc applique $|L_1 \times L_2|$ sur $|L_1| \times |L_2|$ d'après ce qui précède. En particulier, si L_1 et L_2 sont des simplexes de K_1 et K_2, η est un homéomorphisme de l'espace compact $|L_1 \times L_2|$ sur l'espace compact $|L_1| \times |L_2|$. Ainsi, la restriction de $\bar{\eta}$ à $|L_1| \times |L_2|$ est continue ; comme les ensembles $|L_1| \times |L_2|$ forment un recouvrement fermé localement fini de $|K_1| \times |K_2|$, on voit que $\bar{\eta}$ est continue, ce qui achève la démonstration.

§ 2. <u>Homotopie</u>.

Dans ce §, on désigne par I l'intervalle $[0,1]$ de la droite numérique

<u>1. Applications homotopes</u>.- <u>Définition 1</u>.- <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces topologiques</u>, φ <u>et</u> ψ <u>deux applications continues de</u> X <u>dans</u> Y. <u>On dit que</u> φ <u>et</u> ψ <u>sont homotopes s'il existe une application continue</u> Φ <u>de</u> $X \times I$ <u>dans</u> Y <u>telle que</u> $\Phi(x,0) = \varphi(x)$ <u>et</u> $\Phi(x,1) = \psi(x)$ <u>pour tout</u> $x \in X$.

Désignons par $\mathscr{C}(X,Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y .

<u>Proposition 1</u>.- <u>Dans l'ensemble</u> $\mathscr{C}(X,Y)$, <u>la relation</u> "φ <u>et</u> ψ <u>sont homotopes</u>" <u>est une relation d'équivalence</u> :

Il est clair que cette relation est réflexive dans $\mathscr{C}(X,Y)$. D'autre part, soit Φ une application continue de $X\times I$ dans Y telle que $\Phi(x,0) = \varphi(x)$, $\Phi(x,1) = \psi(x)$ pour tout $x \in X$; soit Ψ l'application continue $(x,t) \to \Phi(x,1-t)$ de $X \times I$ dans Y ; on a $\Psi(x,0) = \psi(x)$, $\Psi(x,1) = \varphi(x)$ pour tout $x \in X$; ceci prouve que la relation d'homotopie est symétrique. Enfin, soient φ, ψ, ω trois applications continues de X dans Y , et supposons que φ et ψ d'une part, ψ et ω d'autre part, soient homotopes. Il existe une application continue Φ_1 de $X \times [0, \frac{1}{2}]$ dans Y telle que $\Phi_1(x,0) = \varphi(x)$, $\Phi_1(x, \frac{1}{2}) = \psi(x)$, et une application continue Φ_2 de $X\times[\frac{1}{2},1]$ dans Y telle que $\Phi_1(x, \frac{1}{2}) = \psi(x)$, $\Phi_1(x,1)=\omega(x)$ L'application unique Φ de $X\times I$ dans Y qui prolonge Φ_1 et Φ_2 est continue (lemme 2, §1), donc φ et ω sont homotopes, ce qui achève la démonstration.

<u>Proposition 2</u>.- <u>Soient</u> X, Y, Z <u>des espaces topologiques</u>, φ_1 <u>et</u> ψ_1 <u>des applications continues de</u> X <u>dans</u> Y , φ_2 <u>et</u> ψ_2 <u>des applications continues de</u> Y <u>dans</u> Z . <u>Si</u> φ_1 <u>et</u> ψ_1 <u>d'une part</u>, φ_2 <u>et</u> ψ_2 <u>d'autre part</u>, <u>sont homotopes</u>, $\varphi_2 \circ \varphi_1$ <u>et</u> $\psi_2 \circ \psi_1$ <u>sont homotopes</u>.

En effet, soit Φ_1 (resp. Φ_2) une application continue de $X\times I$ dans Y (resp. de $Y\times I$ dans Z) telle que $\Phi_1(x,0) = \varphi_1(x)$, $\Phi_1(x,1)=\psi_1(x)$, pour $x \in X$, $\Phi_2(y,0) = \varphi_2(y)$, $\Phi_2(y,1)= \psi_2(y)$ pour $y \in Y$. Soit Φ l'application continue de $X\times I$ dans Z définie par $F(x,t) = \Phi_2(\Phi_1(x,t),t)$. On a $\Phi(x,0) = \varphi_2(\varphi_1(x))$, $\Phi(x,1) = \psi_2(\psi_1(x))$, ce qui démontre la proposition.

[N-B. Si φ_1 et φ_2 sont bijectives, est-ce que $\overset{-1}{\varphi_2}$ et $\overset{-1}{\varphi_1}$ sont homotopes ? Sinon, cà mérite un Z].

D'une manière imagée, dire que deux applications φ et ψ sont homotopes signifie que φ est continument déformable en ψ. Cette idée peut se mettre sous forme précise :

Proposition 3.- Soient X un espace localement compact, Y un espace topologique séparé, φ et ψ deux éléments de $\mathscr{C}(X,Y)$. Pour que φ et ψ soient homotopes, il faut et il suffit qu'il existe une application continue $t \to \varphi_t$ de I dans $\mathscr{C}(X,Y)$, muni de la topologie de la convergence compacte, telle que $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$.

En effet, ceci n'est autre que la prop.9 de Top.gén., chap.X, §2, appliquée au cas où (avec les notations de cette proposition) $E = X$, $F = Y$, $E' = I$.

Proposition 4.- Soient X et X' des espaces triangulés, φ une application continue de X dans X', ψ une approximation simpliciale de φ. Alors, φ et ψ sont homotopes.

En effet, on peut supposer que X et X' sont les espaces $|K|$ et $|K'|$ associés à des complexes simpliciaux K, K'. Posons, pour $x \in |K|$ et $t \in I$, $\Phi(x,t) = (1-t)\,\varphi(x) + t\,\psi(x) \in R^{K'}$. Alors, Φ est une application continue de $X \times I$ dans $R^{K'}$ telle que $\Phi(x,0) = \varphi(x)$, $\Phi(x,1) = \psi(x)$. En outre, comme $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ appartiennent à un même simplexe de $|K'|$, on a $\Phi(x,t) \in |K'|$, d'où la proposition.

2. Applications inessentielles.- Définition 2.- Soit X un espace topologique. Soit R la relation d'équivalence définie dans $X \times I$ obtenue en identifiant entre eux les points de $X \times \{0\}$. L'espace quotient $(X \times I)/R$ est appelé cône de base X.

(On pourrait peut-être donner la définition, plus générale, du mapping cylinder - Chacun sait que les cônes sont des cas particuliers des cylindres).

Si π désigne la surjection canonique de $X \times I$ sur $(X \times I)/R$, la restriction de π à $X \times \{1\}$ est un homéomorphisme de $X \times \{1\}$ sur une partie de $(X \times I)/R$ (Top.gén., I, 2è éd., § 9, cor.1 de la prop.4). D'autre part, l'application $x \rightarrow (x,1)$ de X dans $X \times I$ est un homéomorphisme de X sur $X \times \{1\}$. En composant ces deux applications, on obtient un homéomorphisme de X sur une partie X' du cône de base X, par lequel on identifie X à X'.

Exemples. 1.- Soient E un espace vectoriel topologique réel séparé, a un point de E, X une partie compacte de E ne contenant pas a et rencontrée en un point au plus par toute demi-droite issue de a. Soit φ l'application continue $(x,t) \rightarrow a+t(x-a)$ de $X \times I$ dans E, et soit R la relation d'équivalence définie par φ dans $X \times I$. L'espace $(X \times I)/R$ s'obtient en identifiant les points de $X \times \{0\}$, et φ définit un homéomorphisme de $(X \times I)/R$ sur $\varphi(X \times I)$ (Top.gén., I, § 10, cor.1 de la prop.8). Donc on peut identifier le cône X' de base X à l'ensemble X'' des éléments $a+t(x-a)$ de $E (x \in X)$ $0 \leqslant t \leqslant 1$ (ensemble qui n'est pas un cône au sens du Livre V), l'application canonique de X dans X' s'identifiant à l'application identique de X dans X''.

En particulier, pour tout entier $n \geqslant 0$, le cône de base S_n peut ainsi s'identifier à B_n.

2. Soient K un complexe simplicial fini de dimension n, et $x \notin K$. Définissons un complexe simplicial fini K' de dimension $n+1$: l'ensemble K' est $K \cup \{x\}$; les simplexes de K' sont les ensembles L et $L \cup \{x\}$, où L parcourt l'ensemble des simplexes de K. Alors, K est un sous-complexe

simplicial de K'. Ceci posé, le cône Y de base $|K|$ s'identifie à $|K'|$, l'homéomorphisme canonique de $|K|$ dans Y s'identifiant à l'application identique de $|K|$ dans $|K'|$. En effet, dans l'espace $R^{K'}$, $|K'|$ est l'ensemble des éléments $x + t(z-|x|)$ $(z \in |K|,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$, de sorte qu'il suffit d'appliquer ce qu'on a vu dans l'exemple 1 .

Définition 3.- Soient X et Y deux espaces topologiques, φ une application continue de X dans Y . On dit que φ est inessentielle si φ est homotope à une application constante de X dans Y .

Proposition 5.- Pour qu'une application continue φ de X dans Y soit inessentielle, il faut et il suffit qu'elle se prolonge en une application continue du cône de base X dans Y .

En effet, soit X' le cône de base X . Pour qu'il existe une application continue de X' dans Y prolongeant φ , il faut et il suffit qu'il existe une application continue Φ de $X \times I$ dans Y constante sur $X \times \{0\}$, et telle que $\Phi(x,1) = \varphi(x)$ pour $x \in X$, c'est-à-dire que φ soit homotope à une application constante.

3. Type d'homotopie d'un espace.- Définition 4.- On dit que deux espaces X et Y ont même type d'homotopie (pourquoi pas "sont homotopes" ?) s'il existe une application continue φ de X dans Y , et une application continue ψ de Y dans X , telles que : 1) $\varphi\circ\psi$ soit homotope à l'application identique de Y ; 2) $\psi\circ\varphi$ soit homotope à l'application identique de X .

Par exemple, deux espaces homéomorphes, ont même type d'homotopie.

Proposition 6.- La relation "X et Y ont même type d'homotopie" est une relation d'équivalence.

En effet, il est clair que cette relation est symétrique. D'autre part, soient X, Y, Z trois espaces topologiques, et soient φ_1, ψ_1, φ_2 et ψ_2 des applications continues de X dans Y , de Y dans X , de Y dans Z et de Z dans Y respectivement, telles que $\varphi_1\circ\psi_1$ et $\psi_2\circ\varphi_2$ soient homotopes

NBR 101 28

à l'application identique de Y , $\psi_1\circ\varphi_1$ homotope à l'application identique de X et $\varphi_2\circ\psi_2$ homotope à l'application identique de Z . Posons $\varphi = \psi_2\circ\varphi_1$, $\psi = \psi_1\circ\psi_2$. Alors, $\varphi\circ\psi = \varphi_2\circ(\varphi_1\circ\psi_1)\circ\psi_2$ est homotope à $\varphi_2\circ\psi_2$ (prop.2), donc à l'application identique de Z (prop.1). De même, $\psi\circ\varphi$ est homotope à l'application identique de X . Donc X et Z ont même type d'homotopie.

<u>Définition 5</u>.- <u>On dit qu'un espace topologique est contractile s'il a même type d'homotopie qu'un point</u>.

Il revient au même de dire que l'application identique de cet espace est inessentielle. Donc, toute application continue d'un espace contractile dans un espace topologique est inessentielle, et toute application continue d'un espace topologique dans un espace contractile est inessentielle.

<u>Exemples</u>.- 1. Soient E un espace vectoriel topologique, X une partie convexe non vide de E . Alors, X est un espace contractile. En effet, on peut supposer que $0\in X$; soit Φ l'application continue de $X\times I$ dans X définie par $\Phi(x,t) = tx$; alors, $x \rightarrow \Phi(x,1)$ est l'application identique de X , et $x \rightarrow \Phi(x,0)$ est une application constante.

2. En particulier, l'espace numérique R^n est contractile. Donc le complémentaire d'un point dans S_n , qui est homéomorphe à R^n (Top.gén., VI, § 2, prop.4), est contractile.

<u>4. Espaces k-asphériques</u>.- <u>Proposition 7</u>.- <u>Soient</u> X <u>un espace topologique</u> k <u>un entier</u> $\geqslant 0$. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

a) <u>Toute application continue de</u> S_n <u>dans</u> X $(0\leqslant n\leqslant k)$ <u>est inessentielle</u>

b) <u>Toute application continue de</u> S_n <u>dans</u> X $(0\leqslant n\leqslant k)$ <u>est prolongeable en une application continue de</u> B_n <u>dans</u> X .

c) <u>Pour tout complexe simplicial fini</u> K <u>de dimension</u> $\leqslant k$, <u>toute application continue de</u> $|K|$ <u>dans</u> X <u>est inessentielle</u>.

d) <u>Pour tout complexe simplicial</u> K <u>de dimension</u> $\leqslant k+1$ <u>et tout sous-complexe simplicial</u> H <u>de</u> K , <u>toute application continue de</u> $|H|$ <u>dans</u> X <u>est prolongeable en une application continue de</u> $|K|$ <u>dans</u> X .

L'équivalence de a et b résulte de la prop.5 . La condition c entraîne la condition a d'après la prop.4 du § 1. Montrons que la condition d entraîne la condition c . Soit K un complexe simplicial fini de dimension $\leqslant k$; soit K' le complexe simplicial construit à partir de K comme dans l'exemple 2 du n°2 ; si la condition d est remplie, toute application continue de $|K|$ dans X se prolonge en une application continue de $|K'|$ dans X ; or, on a vu que $|K'|$ s'identifie au cône de base $|K|$; donc la condition c est remplie (prop.5).

Enfin, supposons vérifiée la condition b , et montrons que la condition d est vérifiée. Soient donc K un complexe simplicial de dimension $\leqslant k+1$, H un sous-complexe simplicial de K , φ une application continue de $|H|$ dans X . Soit K_n le squelette d'ordre n de K . Supposons démontré que φ est prolongeable en une application continue φ_n de $|H| \cup |K_n|$ dans X , pour tout entier $n < p$, et montrons que φ est prolongeable en une application continue φ_p de $|H| \cup |K_p|$ dans X . Soit L un simplexe de K de dimension p qui ne soit pas simplexe de H . On a $p \leqslant k+1$. D'après la condition b et la prop.4 du § 1, la restriction de φ_{p-1} à la coque de $|L|$ se prolonge en une application continue φ_L de $|L|$ dans X . Il suffit alors de prendre pour φ_p l'application de $|H| \cup |K_p|$ dans X qui prolonge φ_{p-1} et les φ_S ; cette application est continue en vertu du lemme 2 du § 1.

<u>Définition 6</u>.- <u>Un espace topologique vérifiant les conditions équivalentes de la prop.7 est dit</u> k-<u>asphérique</u>. <u>Un espace</u> 0-<u>asphérique est aussi dit connexe par arcs</u>.

Dire qu'un espace X est connexe par arcs revient à dire (condition b de la prop.7) que, étant donnés deux points x, x' de X , il existe une application continue φ de I dans X telle que $\varphi(0)=x$, $\varphi(1)=x'$. Comme I est connexe, la composante connexe de x dans X contient x'. On voit donc qu'un espace connexe par arcs est connexe. La réciproque est inexacte (exerc.).

Il est clair qu'un espace k-asphérique est k'-asphérique pour tout entier $k'\leqslant k$. Un espace contractile est k-asphérique pour tout k .

Soient X et Y deux espaces ayant même type d'homotopie. Si X est k-asphérique, Y l'est aussi. Car, soit Φ une application continue de S_n dans Y $(0\leqslant n\leqslant k)$. Soient φ et ψ deux applications possédant les propriétés de la déf.4 . Alors, Φ est homotope à $(\varphi\circ\psi)\circ\Phi = \varphi\circ(\psi\circ\Phi)$, et, puisque X est k-asphérique, $\psi\circ\Phi$ est homotope à une application constante Φ' de S_n dans X ; alors, Φ est homotope à $\varphi\circ\Phi'$, c'est-à-dire à une application constante.

<u>Proposition 8</u>.- <u>La sphère</u> S_{k+1} <u>est</u> k-<u>asphérique</u>.

En effet, soit n un entier $\leqslant k$, et soit φ une application continue de S_n dans S_{k+1} . Soient t et t' des triangulations de S_n et S_{k+1} , de nerfs finis, de dimensions n et k+1 (§ 1,prop.4). Soit t_p la triangulation déduite de t par p subdivisions barycentriques successives ; le nerf de t_p est encore de dimension n . Pour p assez grand, il existe une application simpliciale ψ de S_n (munie de t_p) dans S_{k+1} (munie de t') homotope à φ (§ 1, cor. du th.1, et § 2, prop.4). Or, $\psi(S_n)$ est contenu dans le squelette de dimension n de S_{k+1} , de sorte que ψ n'est pas surjective. Donc ψ applique S_n dans un espace contractile (n°3, exemple 2) et par suite est inessentielle. Donc φ est inessentielle.

5. Rétractes.- Définition 7.- Soient X un espace topologique, A un sous-espace de X . On dit que A est un rétracte de X si l'application identique de A peut se prolonger en une application continue de X dans A , autrement dit s'il existe une rétraction continue de X sur A (langage qui n'est pas défini dans Ens.II !).

Remarque.- Si A est un rétracte de X , et si φ est une application continue de A dans un espace topologique Y , φ se prolonge en une application continue ψ de X dans Y : il suffit de poser $\psi = \varphi\circ\rho$, ρ étant une rétraction continue de X sur A .

Proposition 9.- Soit (X,Y) un couple triangulable. Il existe un voisinage U de Y dans X et une rétraction continue de U sur Y homotope à l'application identique de U . En particulier, Y est rétracte d'un de ses voisinages dans X .

Considérons une triangulation de (X,Y) de nerf (K,H). Par subdivision barycentrique, on peut supposer que H est un sous-complexe simplicial complet de L . En outre, on peut supposer que $X = |K|$, $Y = |H|$. Soit U la réunion des étoiles des sommets de $|H|$. Alors, U est un voisinage de $|H|$ dans $|K|$ qui, on va le voir, possède les propriétés de la proposition. Pour tout $x \in |K|$, soit L_x le simplexe de K tel que x soit point interne de $|L_x|$, et soit $(\lambda_k(x))$ la famille des coordonnées de x . Si $x \in U$, on a $|L_x| \subset U$, et $\lambda_k(x) > 0$ pour au moins un $k \in H$, donc $\tau(x) = \sum_{k\in H} \lambda_k(x) > 0$. Posons $\varphi(x) = \sum_{k\in H} \frac{1}{\tau(x)} \lambda_k(x)\,|k|$. Les $k \in H$ tels que $\lambda_k(x) > 0$ sont des sommets de H appartenant à un même simplexe de K ; comme H est complet, on voit que $\varphi(x) \in |H| \cap |L_x|$. L'application φ est une rétraction de U sur $|H|$, dont les restrictions aux $|L_x| \cap U$ sont continues, donc qui est continue (§ 1, lemme 2).

Le segment ouvert joignant x à $\varphi(x)$ est formé de points internes de $|L_x|$, donc le segment fermé joignant x à $\varphi(x)$ est contenu dans U. Alors, si nous posons $\Phi(x,t) = (1-t)x + t\varphi(x)$ pour $x \in U$ et $t \in I$, Φ est une application continue de $X \times I$ dans U telle que $\Phi(x,0)=x$, $\Phi(x,1) = \varphi(x)$. D'où la proposition.

6. Rétractes absolus.- Définition 8.- Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que Y est un rétracte absolu de voisinage pour X si, étant donnés une partie fermée A de X, et une application continue φ de A dans Y, il existe un voisinage U de A dans X et une application continue de U dans Y qui prolonge φ. Si Y est un rétracte absolu de voisinage pour tout espace normal, on dit simplement que Y est un rétracte absolu de voisinage.

Remarque.- Soient E un espace topologique, F une partie fermée de E qui soit un rétracte absolu de voisinage pour E. Faisant dans la définition $Y = F$, $X = E$, $A = F$, et prenant pour φ l'application identique de F, on voit qu'il existe un voisinage U de F dans E dont E est un rétracte. Ceci justifie dans une certaine mesure la terminologie.

Lemme 1.- Soient Z un cube, Y un sous-espace de Z, rétracte d'un de ses voisinages dans Z. Alors, Y est rétracte absolu de voisinage.

En effet, soient X un espace normal, A une partie fermée de X, φ une application continue de A dans Y. Il existe une application continue ψ de X dans Z qui prolonge φ (Top. gén., IX, § 4, n°2, Remarque). Soient V un voisinage de Y dans Z et ω une rétraction continue de V dans Y. Soient $U = \psi^{-1}(V)$, qui est un voisinage de A dans X, et ψ_1 la restriction de ψ à U. Alors, $\omega \circ \psi_1$ est une application continue de U dans Y qui prolonge φ.

Proposition 10.- Un espace triangulable de type fini est un rétracte absolu de voisinage.

En effet, on peut supposer que l'espace considéré est l'espace $|K|$ associé à un complexe simplicial fini K . Soit K' le complexe simple unique défini par l'ensemble K . Alors, K est un sous-complexe simplicial de K', donc (prop.9) $|K|$ est rétracte d'un de ses voisinages dans $|K'|$. Or, $|K'|$ est un simplexe euclidien, donc est homéomorphe à un cube (§ 1, prop.4). La proposition résulte alors du lemme 1.

7. Prolongement des homotopies.- Lemme 2.- Soient X un espace normal A une partie fermée de X , U un voisinage de A dans X , et φ une application continue de $(U \times I) \cup (X \times \{0\})$ dans un espace topologique Y . Alors, il existe une application continue ψ de $X \times I$ dans Y qui coïncide avec φ sur $A \times I$ et sur $X \times \{0\}$.

En effet, comme X est normal, il existe une application continue ω de X dans I telle que $\omega(x)=1$ pour $x \in A$, $\omega(x)=0$ pour $x \notin U$. On a alors $(x, t\omega(x)) \in (U \times I) \cup (X \times \{0\})$ quels que soient $x \in X$, $t \in I$, de sorte qu'on peut poser $\psi(x,t) = \varphi(x, t\omega(x))$. Il est clair que ψ possède les propriétés requises.

Théorème 1.- Soient X un espace normal, A une partie fermée de X , Y un espace topologique, φ une application continue de $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$ dans Y . Il existe une application continue ψ de $X \times I$ dans Y qui prolonge φ , si l'une des conditions suivantes est remplie :

1) Y est rétracte absolu de voisinage pour $X \times I$.

2) $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$ est rétracte absolu de voisinage pour $X \times I$.

En effet, il existe un voisinage V de $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$ dans $X \times I$, et une application continue φ_1 de V dans Y qui prolonge φ : ceci résulte, dans l'hypothèse 1, de la définition même des rétractes absolus de voisinage; et, dans l'hypothèse 2, des remarques des n^os^ 5 et 6. On pourra appliquer le lemme 2, et la démonstration sera achevée, si on montre qu'il existe un voisinage U de A dans X tel que $U \times I \subset V$. Or, soit $x \in A$; pour tout $t \in I$, il existe un voisinage W_t de x dans X et un voisinage W'_t de t dans I tels que $W_t \times W'_t \subset V$; recouvrant I par un nombre fini de voisinages $W'_{t_1}, W'_{t_2}, \ldots, W'_{t_n}$, et désignant par U_x l'intersection de $W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n}$, on voit que $U_x \times I \subset V$; alors, si U est la réunion des U_x pour $x \in A$, U est un voisinage de A dans X tel que $U \times I \subset V$.

<u>Corollaire</u>.- <u>Soient</u> ρ , σ <u>deux applications continues homotopes de</u> A <u>dans</u> Y . <u>Si</u> ρ <u>est prolongeable en une application continue de</u> X <u>dans</u> Y , <u>il en est de même de</u> σ .

En effet, soient ρ_1 un prolongement continu de ρ à X , φ_1 l'application $(x,0) \to \rho_1(x)$ de $X \times \{0\}$ dans Y , φ_2 une application continue de $A \times I$ dans Y telle que $\varphi_2(x,0) = \rho(x)$, $\varphi_2(x,1) = \sigma(x)$ pour $x \in A$. D'après le lemme 2 du § 1, l'application φ de $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$ qui prolonge φ_1 et φ_2 est continue. Alors, l'application $x \to \psi(x,1)$ que permet de construire le th.1 est un prolongement continu de σ à X .

La condition 2 du th.1 est remplie lorsque le couple (X,A) est triangulable de type fini. En effet, $X \times I$ est alors compact, donc normal. D'autre part, supposons le couple (X,A) triangulé, le nerf de la triangulation étant fini. D'après la prop.8 du § 1, il existe une triangulation de $X \times I$, de nerf fini K , telle que $A \times I$ et $X \times \{0\}$ soient les espaces associés à des sous-complexes simpliciaux de K . Ceci montre que l'espace $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$ est triangulable de type fini, donc est un rétracte absolu de voisinage (prop. 10).

à énoncer

La condition 1 du th.1 est remplie dans ~~les~~ l'hypothèse suivante : 1) Y est un espace triangulable de type fini ; 2) X est soit métrisable, soit paracompact. En effet, Y est alors rétracte absolu de voisinage (prop. 10), et $X \times I$ est normal : c'est évident si X est métrisable (car alors $X \times I$ est métrisable) ; si X est paracompact, il suffit d'utiliser les résultats suivants d'une rédaction ultérieure de Top. gén. IX : le produit d'un paracompact et d'un compact est paracompact ; un paracompact est normal.

(N-B : Sauf erreur, un métrisable est paracompact, de sorte qu'on n'a pas l'air fin en énonçant les conditions ci-dessus. Mais qu'est-ce qui sera démontré dans Bourbaki ?) .
