RÉDACTION N° 195

COTE : NBR 097

TITRE : PETITS BOUTS DE TOPOLOGIE
NE POUVANT SERVIR À RIEN (ÉTAT 1)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 43

NOMBRE DE FEUILLES : 43

M. Serre
Mars 1954

NBR 097 195

PETITS BOUTS DE TOPOLOGIE
ne pouvant servir à rien (Etat 1)

SOMMAIRE

Commentaires.

La rédaction étant un chapitre n $(n\geqslant 2)$ le rédacteur a rappelé dans le § 0 quelques-uns des définitions et résultats qu'il a utilisés.

Le § 2 contient les théorèmes essentiels : existence de sections lorsque le couple (base, fibre) est "adapté" au sens du § 1. Cette notion de couple adapté semble assez commode dans les applications, notamment parce qu'elle est locale par rapport au 1er espace ce qui permet d'utiliser le fait qu'une variété est localement un polyèdre (Il va sans dire que, tout au long de la rédaction, on a soigneusement évité d'utiliser le th. de triangulation des variétés différentiables.

Grâce justement à la notion de couple adapté, les contorsions inévitables ont été réduites au minimum. Le rédacteur ne pense pas que les épidermes puissent faire mieux).

Pour le th. de relèvement des homotopies, on a suivi la méthode du rapport SEAW (cité Sioux, par euphonie, dans ce qui suit) qui a l'inconvénient d'exiger un groupe structural. De façon générale la question des espaces fibrés avec ou sans groupe structural est horriblement embêtante, comme on s'en rendra compte au § 4 ! En gros, la situation est la suivante:

1) La grande majorité des fibrés "usuels" ont un groupe structural.
2) Un certain nombre de démonstrations valent sans changement s'il n'y a pas de groupe structural (§ 2, Annexe III).
3) Certains théorèmes vrais pour les fibrés à groupe structural avec une démonstration rupinante, sont encore vrais sans groupe structural avec une démonstration moche (§ § 3, 4, 5).

C'est tout de même vexant ! .

Les § § 1 à 6 sont élémentaires : ils ne nécessitent que quelques notions sur les fibrés et les polyèdres (fort peu), et rien sur les var. différentiables. Par contre, les § § 7,8 sont épouvantables : si l'on veut pouvoir traiter un groupe de Lie connexe arbitraire, il faut à la fois Peter-Weyl et le fait que $G/K = R^n$ si K s/groupe compact maximal de G . Si l'on se borne aux groupes compacts, Peter-Weyl suffit. Si enfin on se borne aux groupes compacts orthogonaux, unitaires ou symplectiques ou à leurs sous-groupes "visibles" (par exemple les groupes compacts de centre réduit à $\{e\}$), les démonstrations redeviennent élémentaires (mais il faut les variétés différentiables). Le rédacteur laisse à son illustre Maître le soin de choisir ce que l'on doit garder.

Les Annexes contiennent quelques résultats plus ou moins liés aux questions traitées précédemment. L'Annexe I est surtout destinée aux gens qui veulent regarder l'homologie des fibrés. L'Annexe II est orientée vers l'homotopie : la Prop.5 notamment est la clé de l'application des espaces de lacets au calcul des groupes d'homotopie. L'Annexe III justifie le point de vue "continu" : dès que l'on a une section continue d'un fibré on en a une section différentiable (démonstration tirée du bouquin de Steenrod) .

---

§ 0. Rappel.

N'ayant à parler que d'applications continues, nous dirons <u>application</u> là où l'usage est de dire application continue. Même chose pour le mot <u>section</u>.

Le symbole I désigne le segment $[0,1]$.

Deux applications f et g d'un même espace X dans un même espace Y sont dites <u>homotopes</u> s'il existe une application $F : X \times I \to Y$ telle que $F(x,0) = f(x)$ et $F(x,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. La relation " f et g sont homotopes" est une relation d'équivalence.

On dit que deux espaces X et Y ont <u>même type d'homotopie</u> s'il existe deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes aux applications identiques de Y et de X , respectivement. Un espace X qui a même type d'homotopie qu'un point est dit <u>contractile</u> ; il revient au même de dire que l'application identique $X \to X$ est homotope à une application constante (et, de ce fait, à <u>toute</u> application constante).

Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces topologiques (par exemple, tous les espaces normaux, ou tous les espaces métrisables de type dénombrable, ou tous les espaces compacts). On dit qu'un espace Y <u>est un</u> ANR <u>pour la classe</u> $\mathcal{C}$, ou un $\mathcal{C}$-ANR, si étant donnée une application f dans Y d'une partie fermée A d'un espace X appartenant à la classe $\mathcal{C}$, il existe un voisinage U de A dans X et une application $g : U \to Y$ qui coïncide avec f sur A . Un complexe simplicial fini est un ANR pour la classe des espaces normaux ; il en est de même d'une variété différentiable compacte (cf. Var.Dif., Chap. global - où ceci est démontré en supposant seulement la variété dénombrable à l'infini ; mais dans la suite (§ 8) nous n'aurons besoin que du cas compact, sensiblement plus facile).

Je signale le th. <u>de prolongement des homotopies</u>, utile si l'on veut démontrer directement le th. de relèvement des homotopies (cf. § 4, possibilité c) : Soit A fermé dans X normal, et U voisinage de A dans X. Si f est une application de $U \times I \cup X \times \{0\}$ dans un espace Y, il existe $g : X \times I \to Y$ qui coïncide avec f sur $A \times I \cup X \times \{0\}$.

(Démonstration : soit $u : X \to I$ telle que $u(x) = 1$ si $x \in A$ et $u(x)=0$ si $x \in \complement U$; on pose $g(x,t) = f(x,t.u(x))$).

Bien entendu, si Y est un ANR pour une classe contenant $X \times I$ on tire de là un énoncé plus sympathique : toute application de $A \times I \cup X \times \{0\}$ dans Y peut se prolonger en une application de $X \times I$ dans Y.

Notons B_{n+1} la boule de dimension n+1, dont le bord est la sphère S_n. Alors, étant donné un espace X, les propriétés suivantes sont équivalentes (k étant un entier donné) :

(i) <u>Toute</u> application $f : S_n \to X$ est homotope à une application constante si $n \leqslant k$.

(ii) Toute application $f : S_n \to X$ est prolongeable à B_{n+1} si $n \leqslant k$.

(iii) Toute application $f : P \to X$ est homotope à une application constante, si P est un complexe simplicial fini de dimension $\leqslant k$.

(iv) Si P est un sous-complexe d'un complexe simplicial Q de dimension $\leqslant k+1$, toute application de P dans X peut être prolongée à Q.

Il est clair que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii), et que (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii). Tout revient à montrer que (ii) $\Rightarrow$ (iv) : on part de $f : P \to X$, et on prolonge à $P \cup Q_n$ par récurrence sur n (Q_n étant le squelette de dimension n de Q, $n \leqslant k+1$). Pour effectuer le prolongement de $P \cup Q_n$ à $P \cup Q_{n+1}$ on doit prolonger à tout n+1-simplexe une application donnée sur son bord, ce qui est justement possible d'après (ii).

 7

Un espace vérifiant les conditions équivalentes (i), (ii),(iii) et (iv) est dit k-asphérique. Un espace 0-asphérique est un espace connexe par arcs, un espace 1-asphérique est un espace connexe et simplement connexe par arcs, etc.

La sphère S_{k+1} est k-asphérique. Car, si $f : S_n \to S_{k+1}$ est une application quelconque ($n \leqslant k$), on sait que f est homotope à une application simpliciale (th. d'approximation simpliciale) ou encore à une application différentiable (th. d'approximation différentiable), donc qui laisse échapper au moins un point. Il s'ensuit que f est bien homotope à une application constante.

Rappelons enfin les définitions relatives aux espaces fibrés dont nous ferons usage par la suite :

Si G est un groupe topologique, on dit qu'un espace P sur lequel G opère continûment et à droite est un espace principal si pour tout couple (x,y) d'éléments de P il existe au plus un élément $g \in G$ tel que $y = g.x$, et si cet élément g est fonction continue du couple (x,y) (là où il existe, bien entendu). C'est l'axiome (FP). La base de P est l'espace quotient P/G. L'espace P est trivial s'il est isomorphe à $B \times G$, il faut et il suffit, pour cela, qu'il possède une section. Déf. évidente pour localement trivial.

Si P est complètement régulier et si G est un groupe de Lie, P est localement trivial (th. de Gleason - Nous ne l'utiliserons qu'au § 8, où l'on pourrait d'ailleurs s'en passer).

Si F est un espace où G opère à gauche, on définit l'espace fibré associé à P de fibre F comme l'espace $E = P \times_G F$, espace quotient de $P \times F$ par la relation d'équivalence $(x,g.f) \equiv (x.g,f)$. Un tel espace sera dit espace fibré à groupe structural.

Enfin, nous rencontrerons des espaces fibrés sans groupe structural : c'est la donnée de trois espaces E, B, F et d'une application $p : E \longrightarrow B$ tels que pour tout point $x \in B$ il y ait un voisinage ouvert U de x et un homéomorphisme $\pi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tel que p soit transformé, par cet homéomorphisme, en la projection canonique de $U \times F$ sur son premier facteur.

Si F est localement compact, un tel espace peut toujours être associé à un espace fibré principal (prendre pour G le groupe des automorphismes de F muni de la topologie de la convergence compacte pour g et $g^{-1} \in G$).

§ 1. *Couples adaptés et bien adaptés.*

DÉFINITION 1. *Un couple* (X,F) *d'espaces topologiques est dit adapté s'il possède la propriété suivante* :

(AD) - *Pour toute partie fermée* A *de* X *et toute application* f *d'un voisinage de* A *dans* F , *il existe une application* $g : X \to F$ *qui coincide avec* f *sur* A .

On notera que, si X est *normal*, on peut exiger que g coïncide avec f sur un voisinage de A (appliquer (AD) en remplaçant A par un voisinage fermé convenable).

Exemple 1. Si X *est normal et* F *contractile*, (X,F) est adapté.

En effet, soient A fermé dans X , U ouvert contenant A , f une application de U dans F ; soit V un ensemble ouvert de X tel que $A \subset V$ et $\overline{V} \subset U$, et soit φ une application de X dans le segment $[0,1] = I$ telle que $\varphi(x) = 1$ si $x \in A$ et $\varphi(x) = 0$ si $x \in X-V$.

Puisque F est contractile, il existe une application $G : F \times I \to F$ et un point $f_0 \in F$ tels que $G(y,0) = f_0$ et $G(y,1)=y$ pour tout $y \in F$. Considérons alors l'application $h : U \to F$ définie par la formule : $h(x) = G(f(x),\varphi(x))$. On a $h(x) = f(x)$ si $x \in A$, et $h(x)=f_0$ si $x \in U-V$. Soit $g : X \to F$ l'application qui coïncide avec h sur U et est constante et égale à f_0 sur $X-U$; cette application a bien toutes les propriétés voulues.

(Noter que l'on pourrait éviter cette démonstration en invoquant le théorème de prolongement des homotopies : puisque F est contractile l'application f est homotope sur U à une application constante, et puisqu'une application constante se prolonge, f se prolonge).

Exemple 2. Si X *est un complexe simplicial fini de dimension* $\leqslant n$, *et* F *un espace* $(n-1)$*-asphérique*, (X,F) est adapté.

En effet, soient A fermé dans X , U ouvert contenant A , f une application de U dans F . Il existe une subdivision simpliciale de X assez fine pour que tout simplexe de cette subdivision qui rencontre A soit contenu dans U ; soit A' la réunion de ces simplexes ; A' est un sous-complexe de X et l'application f est définie sur A'. D'après la propriété des espaces (n-1)-asphériques, il existe donc $g : X \to F$ qui coïncide avec f sur A', donc sur A .

DÉFINITION 2. Un couple (X,F) d'espaces topologiques est dit bien adapté s'il possède la propriété suivante :

(BAD) - Pour toute partie fermée A de X et toute application $f : A \to F$, il existe une application $g : X \to F$ qui coïncide avec f sur A .

Si (X,F) est bien adapté, (X,F) est a fortiori adapté ; si X' est un sous-espace fermé de X , (X',F) est bien adapté.

Exemple 1. Si X est normal, (X,R^n) est bien adapté.

C'est le théorème d'Urysohn.

Exemple 2. Si (X,F) est adapté et si F est un ANR (vis-à-vis d'une classe d'espaces dont fait partie X), (X,F) est bien adapté .

L'hypothèse signifie que F est un ANR signifie que toute application $f : A \to F$ est prolongeable à un voisinage de A ; en appliquant (AD) on prolonge donc f .

(Malgré sa trivialité, ce deuxième exemple est important ; il montre notamment que chacun des exemples de couples adaptés donnés ci-dessus fournit, lorsque F est un ANR , un exemple de couple bien adapté).

*Exemple 3. Si X est localement compact (hypothèse sans doute superflue), paracompact, et de dimension $\leqslant n$, et si F est un complexe simplicial localement fini et (n-1)-asphérique, alors (X,F) est bien adapté.

On utilise l'approximation du couple (X,A) par des complexes simpliciaux. Pour plus de détails, voir Sém. Cartan, 1949-50, IV-7. *

§ 2. Existence de sections dans certains espaces fibrés.

THÉORÈME 1. Soit E un espace fibré localement trivial, de base B et de fibre F (il n'est pas nécessaire que E admette un groupe structural). Faisons les hypothèses suivantes :

(I_1) - B est un espace normal et pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de B il existe un recouvrement ouvert dénombrable $\mathcal{U}$ de B, plus fin que $\mathcal{V}$.

(II_1) - Tout élément x de B possède un voisinage V_x tel que (V_x, F) soit adapté.

Soit A une partie fermée de B et soit s une section de E au-dessus d'un voisinage de A. Il existe alors une section t de E au-dessus de B tout entier qu'il coïncide avec s sur un voisinage de A.

Puisque B est normal, il suffit de démontrer l'existence d'une section t coïncidant avec s sur A.

En appliquant (I_1) et (II_1) on obtient immédiatement l'éxistence d'ensembles U_i, W_i, V_i, $i = 1,2,\ldots$ vérifiant les propriétés suivantes : $\overline{U}_i \subset W_i$, $W_i \subset V_i$, les U_i sont ouverts et recouvrent B, les W_i sont ouverts et E est trivial au-dessus de chaque W_i, (V_i, F) est adapté.

Posons $A_n = A \cup \bigcup_{i \leq n} \overline{U}_i$; nous allons montrer qu'il existe pour tout entier $n = 0,1,\ldots$, un ouvert $B_n \supset A_n$ et une section s_n de E au-dessus de B_n de telle sorte que :

a) s_0 soit la section s donnée,

b) s_n coïncide avec s_{n-1} sur un voisinage de A_{n-1}.

Il est clair qu'en posant $t(x) = s_n(x)$ si $x \in A_n$, on aura ainsi construit une section t de E sur B tout entier coïncidant avec s sur A.

Puisque s_0 est donnée par la condition a), tout revient à construire B_n et s_n à partir de B_{n-1} et s_{n-1}. Posons $X_n = A_{n-1} \cap \overline{U}_n$ et $Y_n = B_{n-1} \cap W_n$.

L'ensemble X_n est fermé et Y_n est ouvert ; de plus, la section s_{n-1} est définie sur Y_n , donc, puisque E est trivial au-dessus de W_n , correspond à une application f_{n-1} de Y_n dans la fibre F . Soit X'_n un voisinage fermé de X_n contenu dans Y_n , voisinage qui existe puisque X_n est fermé et que B est normal. A fortiori, X'_n est fermé dans V_n ; comme le couple (V_n,F) est adapté, il existe une application $g_{n-1} : V_n \to F$ qui coïncide avec f_{n-1} sur X'_n ; par restriction à W_n , l'application g_{n-1} définit une section t_n de E au-dessus de W_n , qui coïncide avec s_{n-1} sur X'_n , donc sur l'intérieur X''_n de X'_n . On a évidemment $X''_n \supset X_n$.

Considérons alors les deux ensembles $A_{n-1} \cap \complement X''_n$ et $\overline{U}_n \cap \complement X''_n$; ce sont deux parties fermées de B , sans point commun ; puisque B est normal ils sont respectivement contenus dans des ouverts disjoints M_n et N_n , que l'on peut supposer contenus dans B_{n-1} et W_n respectivement. Posons : $B_n = M_n \cup X''_n \cup N_n$.

L'ensemble B_n est ouvert dans B , et contient A_{n-1} et $\overline{U}_n$ donc A_n ; définissons une section $s_n(x)$ sur B_n en posant :

$$s_n(x) = s_{n-1}(x) \quad \text{si} \quad x \in M_n ,$$
$$s_n(x) = s_{n-1}(x) = t_n(x) \quad \text{si} \quad x \in X''_n ,$$
$$s_n(x) = t_n(x) \quad \text{si} \quad x \in N_n .$$

Il est clair que cette section est continue, car elle l'est sur chacun des trois ouverts M_n, X''_n et N_n , et elle coïncide avec s_{n-1} sur $M_n \cup X''_n$ qui est ouvert et contient A_{n-1}. C.Q.F.D. , OUF .

COROLLAIRE 1. <u>L'espace fibré</u> E <u>possède au moins une section</u>.

On applique le théorème avec $A = \emptyset$ et s l'application vide.

COROLLAIRE 2. <u>Soit</u> B <u>un espace topologique vérifiant</u> (I_1) ; <u>soit</u> F <u>un espace topologique tel que le couple</u> (B,F) <u>vérifie</u> (II_1) ; <u>alors</u> (B,F) <u>est adapté</u>.

(Autrement dit, la relation "(B,F) est adapté" est locale par rapport à B , pourvu que B vérifie la condition (I_1)).

On applique le théorème au cas où $E = B \times F$!

(Surtout ne pas remonter ce résultat au § 1 ! Car la démonstration directe en est à peine plus simple que celle du théorème 1, et il n'y a pas intérêt à la refaire).

COROLLAIRE 3. Soit H un groupe topologique séparé, G un sous-groupe fermé de H , tel que l'espace homogène H/G soit contractile. Tout espace fibré principal P localement trivial de base B vérifiant (I_1) et de groupe H est extension d'un espace fibré principal Q de groupe G .

On sait en effet que la recherche de l'espace Q équivaut à la recherche d'une section dans l'espace fibré associé à P dont la fibre type est H/G ; comme H/G est contractile et B normal, (B,H/G) est adapté et on applique le théorème 1 .

Rappelons que, dans les hypothèses du Cor.3, l'espace Q est localement trivial si H possède une section locale par rapport à G .

Remarque : Sous les hypothèses précédentes, l'espace Q est déterminé à un isomorphisme près par P . De façon précise, soient Q_0 et Q_1 deux espaces fibrés principaux de groupe G , base B telle que $B \times I$ vérifie (I_1) et localement triviaux, tels que les espaces P_0 et P_1 obtenus en étendant le groupe structural de G à H soient isomorphes. Alors Q_0 et Q_1 sont isomorphes. Démonstration : Il existe évidemment un espace P localement trivial, de base $B \times I$, qui, sur $B \times \{0\}$, est isomorphe à P_0 et sur $B \times \{1\}$ à P_1 ; comme P_0 et P_1 se déduisent de Q_0 et Q_1 par extension du groupe structural, les espaces fibrés associés de fibre H/G possèdent une section privilégiée. Si donc E désigne l'espace associé à P de fibre H/G et base $B \times I$, E possède une section sur $B \times \{0\} \cup B \times \{1\}$, et et cette section est évidemment prolongeable à un voisinage. Il en résulte, d'après le th.1 que cette section est prolongeable partout, ce qui signifie que P s'obtient par extension du groupe structural à partir d'un espace Q et que la restriction de Q à $B \times \{0\}$ est Q_0 et la restriction de Q à $B \times \{1\}$ est Q_1. Appliquant le th.3 (y a pas de cercle vicieux, rassurez-vous !) on en conclut que Q_0 est isomorphe à Q_1. C.Q.F.D.

(Le rédacteur avoue ne pas comprendre grand'chose à cette démonstration, qu'il a trouvée dans le bouquin de Steenrod. Il aimerait bien savoir si le rôle joué par I est essentiel ou non. Au concours !).

THÉORÈME 2. <u>Soit</u> E <u>un espace fibré localement trivial</u>, <u>de base</u> B <u>et de fibre</u> F (il n'est pas nécessaire que E admette un groupe structural).
<u>Faisons les hypothèses suivantes</u> :

(I_2) - B <u>est paracompact</u>.

(II_2) - <u>Tout élément</u> x <u>de</u> B <u>possède un voisinage</u> V_x <u>tel que</u> (V_x,F) <u>soit bien adapté</u>.

<u>Soit</u> A <u>une partie fermée de</u> B <u>et soit</u> s <u>une section de</u> E <u>au-dessus de</u> A. <u>Il existe alors une section</u> t <u>de</u> E <u>au-dessus de</u> B <u>tout entier qui coïncide avec</u> s <u>sur</u> A.

Il existe un recouvrement ouvert localement fini $(U_i)_{i \in I}$ de B tel que E soit trivial au-dessus de chaque $\overline{U}_i$ et que $\overline{U}_i$ soit contenu dans un ensemble V_i, (V_i, F) étant bien adapté.

Pour toute partie J de I, posons $A_J = A \cup \bigcup_{i \in J} \overline{U}_i$; puisque la famille des U_i est localement finie, il en est de même de la famille des $\overline{U}_i$ et A_J est fermé quel que soit $J \subset I$.

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des couples (J, s_J) où $J \subset I$ et où s_J est une section de E au-dessus de A_J ; nous dirons que $(K, s_K) \geqslant (J, s_J)$ si $K \supset J$ et si s_K prolonge s_J. L'ensemble $\mathfrak{S}$, muni de cette structure d'ordre est inductif (du fait que les $\overline{U}_i$ forment une famille localement finie). D'après le théorème de Zorn, il existe donc un élément maximal (J,s_J) de $\mathfrak{S}$, supérieur à l'élément $(\emptyset,s) \in \mathfrak{S}$. Tout revient à montrer que $J = I$. Sinon, il existerait $i \notin J$; posons $K = J \cup \{i\}$. Soit $X_J = A_J \cap \overline{U}_i$; puisque E est trivial au-dessus de $\overline{U}_i$, la restriction de s_J à X_J correspond à une application $f_J : X_J \to F$. Mais $\overline{U}_i$ est fermé dans B, donc dans V_i, donc le couple $(\overline{U}_i,F)$ est bien adapté ; l'application f_J peut donc être prolongé en $g_J : \overline{U}_i \to F$, et g_j correspond à une section t_J de E au-dessus de $\overline{U}_i$ qui coïncide avec s_J sur X_J. En posant $s_K(x) = s_J(x)$ si $x \in A_J$, et $s_K(x) = t_J(x)$ si $x \in \overline{U}_i$, on définit une section s_K de E sur A_K, qui prolonge s_J, contrairement au caractère maximal de (J,s_J).

COROLLAIRE 1. L'espace fibré E possède au moins une section.

COROLLAIRE 2. Soient B un espace paracompact et F un espace topologique tels que le couple (B,F) vérifie (II_2) ; (B,F) est bien adapté.

(Autrement dit, la relation "(B,F) est bien adapté" est locale par rapport à B, pourvu que B soit paracompact).

COROLLAIRE 3. Soit H un groupe topologique séparé, G un sous-groupe fermé de H, tel que $H/G \approx R^n$. Tout espace fibré principal P localement trivial, de base paracompacte et de groupe H est extension d'un espace fibré principal Q de groupe G.

Mêmes démonstrations et observations que pour les Corollaires du théorème 1.

(Il est évidemment regrettable d'avoir 2 théorèmes d'énoncés et de démonstrations aussi voisins, bien que distincts. Mais le rédacteur ne pense pas qu'on puisse les fondre en un seul. D'ailleurs, il y en a 4 dans le rapport Sioux et s'il n'y en a qu'un dans le bouquin de Steenrod et le Sém. Cartan c'est simplement que ces illustres géomètres ont laissé tomber les autres !).

§ 3. Espaces fibrés de base $B \times I$ admettant un groupe structural.

(Dans ce § , tous les espaces fibrés considérés ont un groupe structural, c'est-à-dire sont associés à des espaces fibrés principaux, l'isomorphisme de deux tels espaces fibrés étant par définition l'isomorphisme des espaces principaux auxquels ils sont associés).

LEMME 1. Soit E_1 un espace fibré de base $V \times I$, V étant un espace topologique quelconque. Supposons qu'il existe $a \in I$ tel que E_1 soit trivial au-dessus de $V_1 = V \times [0,a]$ et de $V_2 = V \times [a,1]$. Alors E_1 est trivial.

Nous pouvons supposer E_1 principal, de groupe structural G ; l'hypothèse signifie alors qu'il existe une section s_1 de E_1 au-dessus de V_1 et une section s_2 de E_1 au-dessus de V_2 ; en tout point (v,a) de $V_1 \cap V_2 = V \times \{a\}$, il existe donc $g(v) \in G$ tel que $s_2(v,a) = s_1(v,a).g(v)$, et l'application $v \rightarrow g(v)$ est une application continue de V dans G d'après (FP). En posant alors $s(v,t) = s_1(v,t).g(v)$ si $t \leqslant a$, et $s(v,t) = s_2(v,t)$ si $t \geqslant a$, on définit une section de E_1 au-dessus de $V \times I$ tout entier, donc E_1 est trivial.

LEMME 2. Soit E_1 un espace fibré localement trivial de base $B \times I$. Il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de B tel que E_1 soit trivial au-dessus de $V \times I$ pour tout $V \in \mathcal{V}$.

Par hypothèse, pour tout couple $(x,t) \in B \times I$ il existe un ouvert $V_{x,t}$ de B contenant x et un voisinage $I_{x,t}$ de t tel que E_1 soit trivial au-dessus de $V_{x,t} \times I_{x,t}$. Lorsque x est fixe et t varie, les $I_{x,t}$ recouvrent I. Puisque I est compact, on en conclut qu'il existe un ouvert V de B contenant x, et une suite finie croissante $(t_0,\dots,t_h)$ d'éléments de I, avec $t_0=0$ et $t_h=1$, tels que E_1 soit trivial au-dessus des $V \times [t_i,t_{i+1}]$, $0 \leqslant i < h$. Appliquant le Lemme 1 $h-1$ fois on voit que E_1 est trivial au-dessus de $V \times I$.

THEOREME 3. <u>Soit</u> B <u>un espace topologique vérifiant la condition</u> (I_1) <u>du théorème 1</u>. <u>Tout espace fibré localement trivial</u> E_1 <u>de base</u> $B \times I$ <u>est isomorphe à</u> $E \times I$, <u>où</u> E <u>est un espace fibré localement trivial de base</u> B <u>et de même groupe structural que</u> E_1 .

(En d'autres termes, E_1 est $B \times I$-isomorphe à l'image réciproque de E par la projection $B \times I \to B$).

Nous pouvons supposer que E_1 est un espace principal de groupe structural le groupe topologique G . D'après le Lemme 2, il existe un recouvrement ouvert (V_α) de B tel que E_1 soit trivial sur $V \times I$. L'espace E_1 peut donc être défini par des changements de cartes

$g_{\alpha\beta}(x,t) : (V_\alpha \cap V_\beta) \times I \to G$ qui sont des applications continues.

Soit $\mathcal{G}$ le groupe des applications continues de I dans G, muni de la topologie de la convergence compacte (ceci bien que G ne soit pas supposé séparé) ; les $g_{\alpha\beta}$ correspondent à des applications continues $\hat{g}_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \to \mathcal{G}$, définies par la formule :

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(x)(t) = g_{\alpha\beta}(x,t) .$$

Les $\hat{g}_{\alpha\beta}$ vérifient les identités des changements de cartes, donc définissent un espace fibré principal $\mathcal{E}$, de base B et de groupe $\mathcal{G}$.

Or, on peut identifier G (avec sa topologie) au sous-groupe de $\mathcal{G}$ formé des applications constantes ; si $\mathcal{G}_e$ désigne le sous-groupe de $\mathcal{G}$ formé des applications $f : I \to G$ telles que $f(0) = e$ (chemins d'origine e), tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit d'une façon et d'une seule comme produit $g.f$, où $f \in \mathcal{G}_e$, $g \in G$ et $\mathcal{G}$ est homéomorphe à $G \times \mathcal{G}_e$ (en fait, $\mathcal{G}$ est isomorphe au produit semi-direct du sous-groupe invariant $\mathcal{G}_e$ par le sous-groupe G - peu importe !). Donc l'espace homogène $\mathcal{G}/G$ est canoniquement homéomorphe à $\mathcal{G}_e$, qui est <u>contractile</u> (un petit salut au gagne-pain du rédacteur !).

D'après le Corollaire 3 du théorème 1, il existe un espace fibré principal E de base B et de groupe G tel que $\mathcal{E}$ se déduise de E par extension du groupe structural de G à $\mathcal{G}$.

Du fait que $\mathcal{G}$, fibré par G, admet une section, il s'ensuit que E est trivial au-dessus des V_α, donc définissable par des changements de cartes $g'_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \to G$. Le fait que $\mathcal{E}$ s'obtient à partir de E par extension du groupe structural de G à $\mathcal{G}$ se traduit alors par l'existence d'applications $h_\alpha : V_\alpha \times I \to G$ telles que :

$$g'_{\alpha\beta}(x) = \hat{h}_\alpha(x)^{-1}.\hat{g}_{\alpha\beta}(x).\hat{h}_\beta(x) \qquad \text{si } x \in V_\alpha \cap V_\beta ,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$g'_{\alpha\beta}(x) = h_\alpha(x,t)^{-1}.g_{\alpha\beta}(x,t).h_\beta(x,t) \qquad \text{si } (x,t) \in (V_\alpha \cap V_\beta) \times I ,$$

formule qui montre bien que E_1 est image réciproque de E par l'application $B \times I \to B$.

Remarques. 1) On trouvera dans le rapport Sioux une démonstration du théorème 3 plus "intrinsèque" que la précédente, c'est-à-dire débarrassée des V_α ; l'espace $\mathcal{E}$ y est défini comme l'espace des chemins de E_1 qui ont pour projection un chemin $t \to (x,t)$ où $x \in B$.

2) Si G est un groupe de Lie, disons compact, on peut montrer que l'espace $\mathcal{G}_e$ est un ANR (l'espace des chemins sur un ANR est un ANR), donc $(B, \mathcal{G}_e)$ est bien adapté si B est normal, et par suite le théorème 3 vaut en remplaçant l'hypothèse (I_1) par l'hypothèse (I_2). (Cette modification infinitésimale ne me semble même pas mériter un exercice !).

COROLLAIRE 1 - Soient f_0 et f_1 deux applications homotopes d'un espace B vérifiant (I_1) dans la base B' d'un espace fibré localement trivial E'. Les espaces fibrés images réciproques $f_0^{-1}(E')$ et $f_1^{-1}(E')$ sont alors B-isomorphes.

Soit $f : B\times I \longrightarrow B'$ une application telle que $f(x,0) = f_0(x)$ et $f(x,1) = f_1(x)$ pour tout $x \in B$. Soit $E_1 = f^{-1}(E')$ l'image réciproque de E' par f. D'après le théorème 3, E_1 est de la forme $E\times I$; or, d'après le théorème de transitivité des images réciproques, $f_0^{-1}(E')$ est isomorphe à l'image réciproque de E_1 par l'application $x \longrightarrow (x,0)$, c'est-à-dire à E ; de même $f_1^{-1}(E')$ est isomorphe à E, C.Q.F.D.

COROLLAIRE 2 - <u>Soient</u> B <u>et</u> B' <u>deux espaces vérifiant</u> (I_1), <u>et soit</u> G <u>un groupe topologique</u>. <u>Si</u> B <u>et</u> B' <u>ont même type d'homotopie</u>, <u>les classes d'espaces fibrés principaux localement triviaux de groupe</u> G, <u>et de bases</u> B <u>et</u> B' <u>se correspondent biunivoquement</u>.

De façon plus précise, soient $f : B \longrightarrow B'$ et $g : B' \longrightarrow B$ deux applications telles que $f\circ g$ et $g\circ f$ soient homotopes à l'identité. Soient $\mathcal{H}(B,G)$ (resp. $\mathcal{H}(B',G)$) l'ensemble des classes d'espaces fibrés principaux localement triviaux de groupe G et base B (resp. base B') ; $E' \longrightarrow f^{-1}(E')$ définit une application $\mathcal{H} f$ de $\mathcal{H}(B',G)$ dans $\mathcal{H}(B,G)$; on définit de même $\mathcal{H} g$. On a $\mathcal{H} f \circ \mathcal{H} g = \mathcal{H}(g\circ f)$ qui est l'identité d'après le corollaire 1. De même $\mathcal{H} g \circ \mathcal{H} f$ est l'identité, ce qui démontre le corollaire 2.

COROLLAIRE 3 - <u>Tout espace fibré à groupe structural et localement trivial dont la base est contractile et vérifie</u> (I_1) <u>est trivial</u>.

En effet, un espace contractile a même type d'homotopie qu'un point, et on applique le corollaire 2 (compte-tenu du fait qu'un espace réduit à un point vérifie (I_1) !).

Le corollaire 2 s'applique également à un espace B possédant un épiderme (par exemple une variété), l'espace B' étant le <u>nerf</u> de cet épiderme, donc un polyèdre.

§ 4. Espaces fibrés de base $B \times I$ sans groupe structural.

THEOREME 4. Soit B un espace topologique vérifiant (I_1), et soit E_1 un espace fibré localement trivial de base $B \times I$. L'espace E_1 est alors isomorphe à $E \times I$, où E est fibré localement trivial de base B .

(Autrement dit, le théorème 3 est encore valable pour des espaces fibrés dépourvus de groupe structural, i.e. non associés à des espaces principaux).

On trouvera la démonstration dans le Sém. Cartan, 1949-50, exp. VIIIbis En gros, on peut procéder ainsi :

Soit F la fibre de E , G le groupe des automorphismes de F. On dit qu'une application $f : Y \longrightarrow G$ est continue (Y étant un espace topologique arbitraire) si les applications :

$$(x,y) \longrightarrow f(y)(x)$$
$$(x,y) \longrightarrow f(y)^{-1}(x)$$

de F Y dans F sont toutes deux continues. (Ravissant exemple de "morphismes" !). Ainsi, tout Y-automorphisme de l'espace fibré trivial $Y \times F$ est de la forme $(y,x) \longrightarrow (y,f(y)(x))$ où f est une application "continue" de Y dans G , et réciproquement.

Sur l'espace $\mathcal{G}$ des chemins "continus" dans G , on définit une structure analogue à celle de G : une application $Y \longrightarrow \mathcal{G}$ sera dite continue si l'application associée de $Y \times I$ dans G est continue.

Ceci étant on reprend la démonstration du théorème 3 donnée plus haut ; on prouve sans difficulté les Lemmes 1 et 2, on définit les $g_{\alpha\beta}$ qui sont "continus", et tout revient encore une fois, à restreindre le groupe structural de $\mathcal{G}$ à G, c'est-à-dire à trouver une section de "l'espace fibré" qui est associé à $\mathcal{E}$ et admet pour fibre $\mathcal{G}_e$. Ici $\mathcal{G}_e$

n'est pas un espace topologique, c'est seulement un espace muni d'une structure analogue à celle de G . Il faut enfin vérifier que la démonstration du théorème 1 s'applique à l'espace fibré ainsi obtenu.

Tout çà est loin d'être drôle, et le rédacteur avoue même n'avoir pas fait la vérification complètement. On peut évidemment laisser tomber tous ces morphismes et faire une démonstration brutale, mais on perd ainsi tout l'avantage de la jolie démonstration du rapport Sioux, qui était de s'appuyer sur les ths. d'existence de sections du § 2, et de ne pas recommencer à se propager péniblement sur des $\overline{U_i}$! Bref, le rédacteur est tout à fait perplexe ; il voit plusieurs solutions, dont aucune ne l'enchante :

a) Essayer de fondre les ths. 3 et 4 dans une "hyperpédérastie" convenable, en introduisant des fibrés à fibre "pseudo-topologique", et des principaux itou. Brrr !

b) Ne pas parler d'hyperpédérastie et démontrer le th.4 comme dans le Sém. Cartan, loc. cit.

c) Laisser tomber le th.4, et donner une démonstration directe du th. de relèvement des homotopies (dans le cas d'un fibré sans groupe structural).

d) Laisser tomber à la fois le th.4 et le relèvement des homotopies dans le cas sans groupe structural.

Evidemment c) et d) sont un peu vexants : on ne saura plus démontrer le th. de Feldbau (base contractile et $(I_1) \Longrightarrow E$ trivial) quand il n'y aura plus de groupe structural. Mais je ne crois pas que çà canule pour la suite, même dans le cas d). Les seuls espaces sans groupe structural que je connaisse (mais à part les espaces de lacets, qui sont de toute façon hors de question) sont les fibrés "étagés", pour lesquels le th. de relèvement des homotopies est bien clair.

§ 5. Le théorème de relèvement des homotopies.

THÉORÈME 5 - Soit E' un espace fibré localement trivial de base B' et de projection $p' : E' \to B'$. Soient B un espace vérifiant (I_1), F une application de $B \times I$ dans B', g une application de B dans E' telle que $p' \circ g(x) = F(x,0)$ pour tout $x \in B$. Il existe alors une application $G : B \times I \to E'$, telle que $p' \circ G = F$ et que $G(x,0) = g(x)$ pour tout $x \in B$.

Soit $E_1 = F^{-1}(E')$; l'application g définit une section s de E_1 au-dessus de $B \times \{0\}$ par la formule :

$s(x) = ((x,0),g(x))$ (Rappelons que $F^{-1}(E') \subset B \times I \times E'$).

Chercher une application G répondant aux conditions de l'énoncé revient donc à prolonger s par une section S définie sur $B \times I$ tout entier.

Or E_1 est isomorphe à $E \times I$ d'après le th.3 (resp. le th.4 si l'on ne suppose pas que E' ait un groupe structural), ce qui montre évidemment que s peut être prolongée (par exemple, par la section $S(x,t)=(s(x),t)$

COROLLAIRE - Soit E' un espace fibré localement trivial de base B' et de projection $p' : E' \to B'$. Identifions le cube I^{n-1} à la face $I^{n-1} \times \{0\}$ de I^n. Soit $F : I^n \to B'$ et $g : I^{n-1} \to E'$ tels que $p' \circ g(x) = F(x)$ pour $x \in I^{n-1}$. Il existe $G : I^n \to E'$ tel que $p' \circ G = F$ et $G(x) = g(x)$ pour $x \in I^{n-1}$.

Ce n'est que la transcription du théorème 5 dans le cas où $B = I^{n-1}$.

(On verra dans l'Annexe 1 que ce Corollaire entraîne à lui seul un certain nombre de propriétés).

§ 6. Espaces universels et espaces classifiants.

Soit G un groupe topologique, et soient E et E' deux espaces fibrés principaux localement triviaux, de groupe G, de bases respectives B et B' et de projections p et p'. Rappelons qu'on appelle représentation (le terme classique est "homomorphisme", mais il me semble que représentation est mieux adapté) de E dans E' une application de E dans E' qui commute aux opérations de G.

LEMME 3. Soit A une partie fermée de B et soit f une représentation dans E' d'un voisinage saturé de $p^{-1}(A)$. Si B vérifie (I_1) et si (B,E') est adapté, il existe une représentation g de E dans E' qui coïncide avec f sur $p^{-1}(A)$.

LEMME 4. Soit A une partie fermée de B et soit f une représentation dans E' de $p^{-1}(A)$. Si B vérifie (I_2) et si (B,E') est bien adapté, il existe une représentation g de E dans E' qui coïncide avec f sur $p^{-1}(A)$.

Donnons la démonstration du Lemme 3, celle du Lemme 4 étant tout à fait semblable. Soit E_1 l'espace fibré associé à E, de fibre type E'. On sait qu'il y a correspondance biunivoque et canonique entre sections de E_1 et représentations de E dans E' ; la représentation f correspond ainsi à une section s de E_1 au-dessus d'un voisinage de A, et il nous faut trouver une section de E_1 au-dessus de B tout entier qui coïncide avec s sur A. Une telle section existe d'après le théorème 1.

Si X est un espace topologique arbitraire, nous noterons $\mathcal{H}(X,G)$ l'ensemble des classes d'espaces fibrés principaux localement triviaux de groupe G et de base X ; si X et Y sont deux espaces, nous noterons $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de X dans Y. Ces notations étant posées, on a :

THÉORÈME 6. Soit E' un espace fibré principal localement trivial de base B'. Soit B un espace vérifiant les conditions suivantes :

(1) B et $B \times I$ vérifient (I_1).

(2) (B,E') et $(B \times I,E')$ sont adaptés.

Alors l'application $\varphi \to \varphi^{-1}(E')$ (φ étant une application : $B \to B'$) définit par passage au quotient une bijection de $\mathscr{C}(B,B')$ sur $\mathscr{H}(B,G)$.

Montrons d'abord que cette application est une surjection, i.e. que tout espace fibré principal localement trivial E, de base B, est isomorphe à $\varphi^{-1}(E')$, où φ est une application de B dans B'. On sait que cela revient à trouver une représentation $f : E \to E'$, φ se déduisant alors de f par passage au quotient. Or une telle représentation f existe d'après le Lemme 3 où l'on fait $A = \emptyset$.

Montrons maintenant que l'application est injective, autrement dit que, si $\varphi_0^{-1}(E')$ est isomorphe à $\varphi_1^{-1}(E')$, les applications φ_0 et φ_1 sont homotopes. Soit E l'espace fibré de base B I isomorphe à $\varphi_0^{-1}(E') \times I$ et soit p la projection de E sur $B \times I$. Vu l'hypothèse, il existe une représentation de $p^{-1}(B \times \{0\})$ dans E' qui, par passage au quotient, définit φ_0 ; de même il existe une représentation de $p^{-1}(B \times \{1\})$ dans E' qui, par passage au quotient, définit φ_1, et ces représentations sont chacunes prolongeables à tout E. Appliquons alors le Lemme 3 avec $B \times I$ à la place de B et $B \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ à la place de A, ce qui est possible, vu les hypothèses (1) et (2). On en conclut qu'il existe une représentation de E dans E' prolongeant les représentations données sur $p^{-1}(B \times \{0\})$ et $p^{-1}(B \times \{1\})$; par passage au quotient, cette représentation définit une application $\Phi : B \times I \to B'$, telle que $\Phi(x,0) = \varphi_0(x)$ et $\Phi(x,1) = \varphi_1(x)$, C.Q.F.D.

Le théorème précédent conduit évidemment à chercher des espaces fibrés principaux E' qui soient adaptés à une catégorie aussi large que possible d'espaces. On les appellera alors "espaces universels". En fait, il est traditionnel de réserver cette terminologie au cas particulier suivant :

DÉFINITION 3. Soient G un groupe topologique, n un entier $\geqslant 0$. Un espace fibré principal de groupe G est dit universel pour G en dimension $\leqslant n$ (en abrégé "n-universel") si :

a) il est localement trivial,

b) l'espace topologique sous-jacent est n-asphérique.

DÉFINITION 4. La base d'un espace universel pour G en dimension $\leqslant n$ est dite espace classifiant pour G en dimension $\leqslant n$ (en abrégé "n-classifiant").

On a alors :

THÉORÈME 7. Soit E' un espace n-universel, de base B', et soit B un espace vérifiant les conditions suivantes :

(1) B et $B \times I$ vérifient (I_1).

(2_n) Tout point x de B possède un voisinage homéomorphe à un complexe simplicial fini de dimension $\leqslant n$.

Alors l'application $\varphi \to \varphi^{-1}(E')$ définit par passage au quotient une bijection de $\mathcal{C}(B,B')$ sur $\mathcal{H}(B,G)$.

On applique le théorème 6. Tout revient à voir que les conditions (1) et (2_n) entraînent que (B,E') et $(B\times I,E')$ sont adaptés, ce qui résulte du corollaire 2 au théorème 1.

Remarques. 1. Les hypothèses (1) et (2_n) sont vérifiées dans les deux cas particuliers suivants : B est une variété dénombrable à l'infini de dimension $\leqslant n$, et B est un complexe localement fini et dénombrable à l'infini, de dimension $\leqslant n$. Ce sont évidemment les deux cas les plus importants pour les applications.

2. Le lemme 3 apporte une précision au théorème 7 : si l'on a un espace fibré principal localement trivial E de base B , et une représentation d'un voisinage saturé de $p^{-1}(A)$, A fermé dans B , dans E', on peut trouver une représentation de E dans E' qui coincide avec la précédente sur A . Si B est un complexe et A un sous-complexe, il n'est plus nécessaire que la représentation donnée soit définie sur un voisinage de $p^{-1}(A)$: $p^{-1}(A)$ suffit. Etc.

3. Les définitions 3 et 4 et le théorème 7 sont relatifs au couple adapté suivant : (espace localement polyédral, espace n-asphérique). Il est clair (à cause du théorème 6) que l'on peut choisir d'autres couples adaptés. Par exemple, dans le Sém. Cartan, on a choisi le couple (espace localement compact et paracompact de dimension $\leqslant$ n, polyèdre n-asphérique), qui est même un couple bien adapté. Malheureusement, ce dernier couple n'est utilisable que si l'on a démontré l'existence d'espaces universels polyèdraux, ce qui revient à trianguler des variétés de Stiefel (cf. § 7). Evidemment, il y a des théorèmes généraux qui affirment que c'est possible, mais il est douteux que Bourbaki s'enfonce là-dedans ! Peut-être, pour une variété de Stiefel, y a-t-il un moyen explicite et élémentaire de s'en tirer ? Au concours !

4. Dans les applications, il sera facile de choisir pour E' un ANR (par exemple une variété différentiable compacte) ; à ce moment, le couple (B,E') sera bien adapté et on pourra appliquer le Lemme 4 au lieu du Lemme 3 .

§ 7. Constructions d'espaces universels.

LEMME 5. *Soient* G *un groupe topologique,* H *un sous-groupe fermé de* G *, tel que* G *, fibré par* H *, admette une section locale. Soit* E *un espace n-universel pour* G *; par restriction des opérateurs à* H *,* E *devient un espace n-universel pour* H .

La condition a) de la définition 3 (E localement trivial) est réalisée puisque G, fibré par H , a une section locale ; la condition b) l'est trivialement, puisque l'espace sous-jacent à E n'a pas changé.

LEMME 6. *Soient* G *un groupe topologique,* H *un sous-groupe fermé de* G *tel que* G *, fibré par* K *, admette une section, et que* G/K *soit homéomorphe à un espace euclidien* R^m. *Soit* E *un espace n-universel pour* H *; l'espace* $E' = E \times_H G$ *obtenu en étendant le groupe structural de* E *par l'injection* $H \to G$ *, est n-universel pour* H .

Il est clair que E' est localement trivial, puisque E l'est. Pour montrer que E' est n-asphérique, nous allons montrer que E' est homéomorphe à $E \times R^m$; or, on sait que $E' = E \times_H G$ peut être fibré, de base G/H , de groupe structural H , et de fibre E ; or la base de cette fibration est $G/H \approx R^m$, qui est contractile et vérifie (I_1). D'après le théorème de Feldbau (cor.3 du th.3), cette fibration est triviale, d'où $E' \approx E \times R^m$, C.Q.F.D.

(En fait, on pourrait expliciter un isomorphisme de E' sur $E \times R^m$, en utilisant le fait que l'espace principal associé est G , fibré par H. Peu importe).

Soit maintenant G un groupe de Lie connexe. On sait (ou l'on saura) que, si K est un sous-groupe compact maximal de G , l'espace homogène G/K est homéomorphe à R^m , et la fibration de G par K est donc triviale.

Le lemme 6 montre donc que, si l'on connaît un espace n-universel pour K, on en connaît un pour G (et les espaces n-classifiants sont les mêmes). Or, tout groupe de Lie compact (connexe ou non) peut être plongé dans un groupe orthogonal (ou unitaire). Le lemme 5 ramène donc la question au cas du groupe orthogonal (ou unitaire), que nous allons maintenant traiter :

Soit N et n deux entiers $\geqslant 1$. Soit $(\vec{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+N}$ la base canonique de C^{N+n} (muni de la structure hermitienne usuelle), et identifions $U(N)$ au sous-groupe de $U(N+n)$ qui laisse fixe chaque vecteur $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$; l'espace homogène $U(N+n)/U(N) = V_{N,n}$ n'est donc pas autre chose que la variété (dite de Stiefel) des systèmes de n vecteurs orthonormaux de C^{N+n} ; si nous identifions maintenant $U(n)$ au sous-groupe de $U(N+n)$ qui laisse fixe $(\vec{e}_{n+1}, \ldots, \vec{e}_N)$, le groupe $U(n)$ opère (à droite) sur $V_{N,n}$; on peut expliciter ces opérations de façon évidente : $(\vec{x}_i)(a^i_j) = (\sum_i a^i_j \vec{x}_i)$ si $(\vec{x}_i)$ est un système de n vecteurs orthonormaux, et (a^i_j) une matrice unitaire. On a alors :

THEOREME 8. *La variété de Stiefel* $V_{N,n}$, *muni des opérateurs précédents, est un espace universel pour* $U(n)$ *en dimension* $\leqslant 2N$.

COROLLAIRE. *La base* $G_{N,n}$ *de* $V_{N,n}$ (grassmannienne des n-plans dans *est un espace 2N-classifiant pour* $U(n)$.

Démontrons le théorème 8. Il faut d'abord voir que $V_{N,n}$ est un espace principal pour $U(n)$. Cela résulte, soit de $U(n) \cap U(N) = \{e\}$, soit de l'expression donnée plus haut des opérations de $U(n)$ sur $V_{N,n}$. Ensuite, $V_{N,n}$ est localement trivial : au choix, démonstration directe (dans tout n-plan assez voisin d'un n-plan donné, on peut choisir une base orthonormale variant analytiquement : projeter orthogonalement une base du n-plan fixe et orthonormaliser par Schmidt, par exemple), ou bien résulte du fait que l'on a des opérations différentiables, ou bien encore résulte du théorème de Gleason !

Il reste à voir que $V_{N,n}$ est 2N-asphérique. Cela se fait par récurrence sur n : si n = 1 , $V_{N,n} = S_{2N+1}$, qui est 2N-asphérique (§ 0) ; si n > 1, la suite : $U(N) \subset U(N+n-1) \subset U(N+n)$ montre que $V_{N,n}$ est fibrée de base $U(N+n)/U(N+n-1) = S_{2N+2n-1}$ et de fibre $U(N+n-1)/U(N) = V_{N,n-1}$, ce qui permet, compte-tenu de l'hypothèse de récurrence, d'appliquer le corollaire 2 de la prop.1, Annexe II .

D'après ce qui a été vu plus haut, le théorème 8 entraîne :

THÉORÈME 9. Soit G un groupe de Lie, connexe ou compact, et soit n un entier. Il existe un espace n-universel pour G qui soit une variété analytique réelle sur laquelle G opère analytiquement, la base étant une variété compacte. Si G est compact on peut supposer en outre que cet espace universel est une variété de Stiefel unitaire.

(Les conditions d'analyticité résultent de ce que $V_{N,n}$ est une variété analytique sur laquelle U(n) opère analytiquement).

Remarques. 1. Bien entendu, on aurait pu aussi bien remplacer les variétés de Stiefel unitaires par les variétés de Stiefel orthogonales ou symplectiques. Le rédacteur a préféré $\underline{C}$ à $\underline{R}$ ou $\underline{K}$ simplement par sympathie.

2. Le rédacteur n'est pas très fier des démonstrations de ce § : il lui a fallu utiliser l'énorme marteau pilon du sous-groupe compact maximal et le petit marteau pilon de Peter-Weyl pour ne même pas réussir à écraser tous les groupes de Lie ! En fait, il ignore si tout groupe de Lie possède des espaces universels ; c'est vrai dans le cas discret (par des constructions horribles de complexes cellulaires qui ont l'homotopie qu'il faut), et dans le cas connexe (th.9), mais il ne voit pas comment passer au cas général. La question n'a pas l'air si facile.

3. J. W. Milnor a proposé un autre moyen pour démontrer l'existence des espaces universels : on prend le "joint" du groupe G n+2 fois avec lui-même, et on montre que c'est un espace n-universel. Malheureusement, on n'obtient pas ainsi une variété topologique, et en outre il est loin d'être immédiat que l'espace est bien n-universel : il semble (si le rédacteur a bien compris) qu'il faille utiliser au moins le th. d'Hurewicz et peut-être des groupes d'homotopie de triades. Au concours !

§ 8. Le foncteur B_G .

Il est souvent commode dans les applications de considérer des espaces universels et classifiants pour un groupe donné G en dimension $\leqslant n$, n arbitrairement grand. Pour éviter d'avoir à préciser chaque fois l'entier n , il est commode de "passer à la limite" .

Pour cela rappelons qu'étant donnée une suite d'espaces topologiques $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots$, tels que la topologie induite par Y_n sur Y_{n-1} coïncide avec la topologie de Y_{n-1} , on définit sur $Y = \bigcup_i Y_i$ la topologie limite inductive des topologies des Y_i comme la moins fine rendant continues les injections $Y_i \to Y$. Pour qu'une partie O de Y soit ouverte, il faut et il suffit que les $O \cap Y_i$ soient ouverts dans Y_i pour tout i . Il s'ensuit que la topologie de Y induit sur chaque Y_i la topologie de Y_i . On démontre facilement les propriétés suivantes :

a) Pour qu'une application $f : Y \to Z$ (Z , autre espace topologique) soit continue, il faut et il suffit que les restrictions de f aux Y_i soient continues. (C'est presque la définition !)

b) Si Y_i est fermé dans Y_{i+1} pour tout i , Y_i est fermé dans Y .

c) Si les Y_i sont fermés dans Y et sont normaux, Y est normal. (Prolonger une fonction continue sur une partie fermée de Y).

d) Si K est un compact, et si les Y_i sont fermés dans Y, l'espace $K \times Y$, muni de la topologie produit, est limite inductive des $K \times Y_i$. (Démonstration analogue à celle du Lemme 2).

e) Si R est une relation d'équivalence sur Y telle que les Y_i soient saturés pour R et fermés dans Y, l'espace Y/R, muni de la topologie quotient, est limite inductive des Y_i/R. (C'est immédiat).

f) Si L est un compact contenu dans Y, L est contenu dans l'un des Y_i. (Sinon, il y aurait une suite de points $x_n \in L$ n'ayant qu'un nombre fini d'éléments dans tout Y_i, donc fermée, ce qui est impossible, L étant compact).

Soit maintenant G un groupe de Lie compact.

PROPOSITION 1. <u>Soient</u> E_i $(i = 1,2,\ldots)$ <u>une suite d'espaces fibrés principaux localement triviaux, de groupe</u> G, <u>et vérifiant les propriétés suivantes</u> :

a) E_i <u>est une variété différentiable compacte, différentiablement plongée dans</u> E_{i+1}, <u>les opérations de</u> G <u>sur</u> E_i <u>étant induites par celles de</u> G <u>sur</u> E_{i+1}.

b) E_i <u>est universel pour</u> G <u>en dimension</u> $\leqslant i$.

<u>Soit</u> E <u>la limite inductive des</u> E_i, <u>sur laquelle</u> G <u>opère de facon évidente</u>. <u>L'espace</u> E <u>est contractile, et c'est un espace fibré principal localement trivial de groupe</u> G <u>et de base la limite inductive des bases des</u> E_i.

Démontrons d'abord que E est contractile. Pour cela, soit n_i la dimension de E_i ; nous allons définir une suite d'applications $F_i : E_i \times I \to E_{n_i}$ telles que :

(α) $F_i(x,0) = x$, $F_i(x,1) = x_0 \in E_1$,

(β) F_i prolonge F_{i-1} .

En prenant pour F l'application de $E \times I$ dans E qui coïncide sur chaque E_i avec F_i , on trouvera évidemment une homotopie de l'application identique dans l'application constante qui sera continue d'après les propriétés a) et d) ci-dessus.

On construit F_i par récurrence sur i . C'est un problème de prolongement, qui est possible parce que $(E_i \times I, E_{n_i})$ est adapté, donc bien adapté puisque E_{n_i} est un ANR .

Il faut ensuite vérifier que l'application $G \times E \to E$ est continue, ce qui résulte encore de a) et d). Il est clair que $x.g = x$, $x \in E$, $g \in G$ entraîne $g=e$, donc l'axiome (FP) est rempli vu que G est compact. Comme E est normal (c), donc complètement régulier, le théorème de Gleason montre que E est localement trivial (une démonstration directe semble embêtante). Enfin l'assertion sur la base de E résulte de e).

DÉFINITION 5. <u>Un espace fibré principal E est dit universel s'il peut être obtenu par la construction de la Prop.1. Sa base B est dite espace classifiant.</u>

Lorsque l'on veut préciser le groupe G , on écrit E_G et B_G à la place de E et G ; on a donc $B_G = E_G/G$. On remarquera que tous les espaces E_G possibles ont même type d'homotopie puisqu'ils sont contractiles ; on verra plus loin qu'il en est de même des classifiants B_G , ce qui justifiera la notation B_G .

PROPOSITION 2. <u>Il existe un espace universel pour tout groupe de Lie compact</u> G .

En effet, on plonge G dans $U(n)$, et on prend pour E_i les variétés de Stiefel $V_{i,n}$, $V_{i,n}$ étant plongée dans $V_{i+1,n}$ grâce à un plongement de l'espace C^{i+n} dans l'espace C^{i+1+n}. Toutes les propriétés de la Prop.1 sont évidemment vérifiées.

(Dans ce cas, E est l'espace des systèmes de n vecteurs orthonormaux de $C^{(N)}$, muni de la topologie de la convergence simple des coefficients).

PROPOSITION 3. <u>Soit</u> E <u>un espace fibré principal localement trivial de groupe structural</u> G <u>et de base</u> B , <u>limite inductive de variétés compactes</u> B_i . <u>Il existe une application</u> $f : B \to B_G$, <u>et une seule à une homotopie près, telle que</u> E <u>soit isomorphe à</u> $f^{-1}(E_G)$.

Soit n_i la dimension de B_i ; comme ci-dessus, on construit $f : B_i \to (B_G)_{n_i}$ par récurrence sur i , en utilisant le fait que $(B_i,(E_G)_{n_i})$ est adapté, donc bien adapté puisque $(E_G)_{n_i}$ est un ANR . De même, si l'on a deux applications f et g , on construit une homotopie entre f et g par le même procédé (On utilise donc, dans les deux cas, le Lemme 4 du § 6).

COROLLAIRE. <u>Deux espaces classifiants</u> B_G <u>et</u> B'_G <u>pour le même groupe</u> G <u>ont même type d'homotopie</u>.

Soient E_G et E'_G les espaces universels associés. D'après la proposition, il existe $f : B_G \to B'_G$ et $g : B'_G \to B_G$ telles que $f^{-1}(E'_G) \approx E_G$ et $g^{-1}(E_G) \approx E'_G$. On en conclut que, si $h = f\circ g$ et $k = g\circ f$, on a $h^{-1}(E') \approx E'$ et $k^{-1}(E) \approx E$, donc d'après la proposition h et k sont homotopes à l'identité, C.Q.F.D.

On va généraliser le Corollaire précédent :

Soient H et G deux groupes de Lie compacts, ψ un homomorphisme de H dans G . Soient E_H , B_H (resp. E_G , B_G) un espace universel et l'espace classifiant associé pour H (resp. pour G). Soit E'_H l'espace fibré principal obtenu à partir de E_H par extension du groupe structural au moyen de ψ ; la base de E'_H étant B_H , la proposition 3 montre qu'il existe une classe d'applications homotopes $\rho(\psi) : B_H \to B_G$ telles que E'_H soit isomorphe à $f^{-1}(E_G)$ pour $f \in \rho(\psi)$.

Si ψ est l'identité, $\rho(\psi)$ est l'identité, et l'on a la formule de transitivité $\rho(\varphi \circ \psi) = \rho(\varphi) \circ \rho(\psi)$. En d'autres termes :

Les B_G et les $\rho(\psi)$ forment un <u>foncteur covariant</u> de G .

Signalons une interprétation de $\rho(\psi)$: Soit E un espace fibré de groupe structural H , défini par une classe d'applications homotopes $\zeta : X \to B_H$ (X étant la base de E , supposée par exemple, vérifier (I_1)) ; en composant avec $\rho(\psi) : B_H \to B_G$ on obtient une classe d'applications homotopes : $X \to B_G$, donc un espace fibré de base X et groupe G ; c'est celui que l'on obtient à partir de E <u>en étendant le groupe structural de</u> H <u>à</u> G <u>au moyen de</u> ψ .

[Les $\rho(\psi)$ jouent un rôle de premier plan dans la théorie homologique des espaces fibrés, notamment chez Wu-Wen-Tsün et Borel. Ils permettent de relier la cohomologie de B_G à celle des B_H , H sous-groupe de G (notamment H = tore maximal). Voir la thèse de Borel (et articles ultérieurs ...) pour plus de détails .]

ANNEXE I. Un mirificque tableau.

	FIBRE	ESPACE	BASE
1) Espace fibré quelconque, de fibre F , espace E , base B .	F	E	B
2) Espace fibré principal (F étant un groupe de Lie)	E	B	B_F
3) Espace homogène (E étant un groupe de Lie et F un sous-groupe fermé de E)	B	B_F	B_E
4) Groupe quotient (E étant un groupe de Lie et F un sous-groupe invariant fermé de E)	B_F	B_E	B_B

Explications :

La ligne 1) n'en nécessite pas beaucoup : si E est fibré, de fibre F et base B , alors E est fibré de fibre F et base B (Ensembles, Chap.I, passim).

Lorsque E est un espace principal de groupe structural un groupe de Lie F , on peut former le produit $E \times_F E_F$, E_F désignant comme au § 8 un espace universel pour F . On peut fibrer le produit $E \times_F E_F$ de deux façons ; d'abord avec B pour base et E_F pour fibre (et espace principal E) ; comme la fibre E_F de cette première fibration est contractile, la projection : $E \times_F E_F \to B$ définit une bijection des groupes d'homotopie, d'homologie, etc. du premier espace sur ceux du second ce qui fait que, au point de vue homotopique, on peut confondre $E \times_F E_F$ et B . On a une autre fibration de $E \times_F E_F$, avec base B_F et fibre E : compte-tenu de l'identification $E \times_F E_F = B$, c'est celle de la ligne 2) du tableau.

Si E est un groupe de Lie et F un sous-groupe fermé de E , considérons un espace universel pour E , soit E_E ; le groupe F opère sur E_E , et il est clair que E_E , muni des opérateurs de F , est aussi un espace universel pour F . Autrement dit, on peut prendre $E_F = E_E$. D'où $B_F = E_E/F$ et $B_E = E_E/E$, et l'on obtient une fibration de B_F dont la base est B_E et la fibre $E/F = B$, c'est la ligne 3) du tableau. (Noter que la projection $B_F \to B_E$ n'est autre que $\rho(\psi)$, où ψ est l'injection de F dans E).

Enfin, si en outre F est invariant dans E , de telle sorte que $B = E/F$ soit un groupe de Lie, la fibration précédente : $B_F \to B_E$ devient un espace principal de groupe structural B , donc justiciable de la ligne 2) du tableau : on obtient ainsi la ligne 4).

[La ligne 3) est l'outil principal de l'étude homologique de $\rho(\psi)$, où ψ est l'injection de F dans E . Cf. Borel.

La ligne 4) n'a évidemment aucun intérêt pour des groupes <u>connexes</u> ; mais elle fournit des résultats non triviaux pour les groupes finis (résultats d'ailleurs généralisables à toutes les extensions de groupes discrets).]

ANNEXE II. Espaces pseudo-fibrés.

DÉFINITION. Soient E et B deux espaces topologiques, p une application continue de E sur B. Le triple (E,p,B) est appelé une pseudo-fibration (et E est dit pseudo-fibré) s'il vérifie le corollaire du théorème 5. Autrement dit :

Pour tout couple d'applications $F : I^n \to B$ et $g : I^{n-1} \to E$ tels que $p \circ g$ et F coïncident sur I^{n-1}, il doit exister $G : I^n \to E$, prolongeant g, et telle que $p \circ G = F$ et ceci, quel que soit $n > 0$).

Les ensembles $p^{-1}(b)$, $b \in B$, sont appelés les fibres de la pseudo-fibration. Il résulte du cor. au th.5 que tout espace fibré localement trivial est pseudo-fibré ; nous verrons plus loin d'autres exemples.

PROPOSITION 1. Soit (E,p,B) une pseudo-fibration. Soient P un complexe simplicial fini, Q un sous-complexe de P, $\varphi : P \times I \to B$ et $\psi : Q \times I \cup P \times \{0\} \to E$ deux applications telles que $p \circ \psi$ coïncide avec φ sur $Q \times I \cup P \times \{0\}$. Il existe alors une application $\vartheta : P \times I \to E$, prolongeant ψ, et telle que $p \circ \vartheta = \varphi$.

Soit P_k le squelette de dimension k du complexe P. Soit $A_k = Q \times I \cup P_k \times I \cup P \times \{0\}$; on définit ϑ sur A_k, par récurrence sur k (si $k=-1$, $A_{-1} = Q \times I \cup P \times \{0\}$, et on prend $\vartheta = \psi$). Pour passer de A_{k-1} à A_k, on doit définir ϑ sur $\sigma_k \times I$ (σ_k étant un k-simplexe de P, non contenu dans Q), ϑ étant déjà connu sur $\dot{\sigma}_k \times I \cup \sigma_k \times \{0\}$, en désignant par $\dot{\sigma}_k$ le bord de σ_k. Comme le couple d'espaces $(\sigma_k \times I, \dot{\sigma}_k \times I \cup \sigma_k \times \{0\})$ est homéomorphe au couple (I^{k+1}, I^k), la possibilité de prolonger ϑ résulte de la définition d'une pseudo-fibration.

COROLLAIRE 1. Toute pseudo-fibration vérifie le théorème de relèvement des homotopies pour les complexes simpliciaux finis.

C'est le cas particulier où $Q = \emptyset$.

(Bien entendu, ce corollaire, ainsi que la Prop.1, est équivalent à la propriété prise comme définition des pseudo-fibrations).

COROLLAIRE 2. *Soit* (E,p,B) *une pseudo-fibration telle que* B *et toutes les fibres* $p^{-1}(x)$, $x \in B$, *soient* m*-asphériques*. *Alors* E *est* m*-asphérique*.

Soit φ une application de la sphère S_n, $n \leqslant m$, dans E ; puisque B est m-asphérique, $p \circ \varphi$ est homotope à une application constante. En relevant cette homotopie (ce qui est possible d'après le cor.1), on voit que φ est homotope à une application de S_n dans une fibre, application elle-même homotope à une application constante, puisque toutes les fibres sont m-asphériques.

Exercice : Montrer que, si B est connexe par arcs, il suffit qu'une fibre soit m-asphérique pour que toutes les autres le soient.

Bien entendu, le cor.2 est un cas particulier de la suite exacte d'homotopie, qui est valable pour les pseudo-fibrations.

PROPOSITION 2. *Soient* (E,p,B) *une pseudo-fibration*, f *une application d'un espace* B' *dans* B, $E' = f^{-1}(E)$ *la partie de* $B' \times E$ *formée des couples* (b',e) *avec* $f(b') = p(e)$, p' *la restriction à* E' *de la projection canonique de* $B' \times E$ *sur* B'. *Le triple* (E',p',B') *est une pseudo-fibration*.

(Autrement dit, *l'image réciproque* d'un pseudo-fibré est un pseudo-fibré).

C'est immédiat à partir des définitions, compte-tenu de ce qu'une application d'un espace Z dans E' correspond à un couple d'applications $Z \to B'$ et $Z \to E$ telles que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} ,$$

soit commutatif.

PROPOSITION 3. Soient (X,π,E) et (E,p,B) deux pseudo-fibrations. Le triple $(X,p\circ\pi,B)$ est une pseudo-fibration.

(Autrement dit, le composé de deux pseudo-fibrations est une pseudo-fibration).

C'est immédiat à partir des définitions.

Exemples de pseudo-fibrés : les espaces de chemins.

PROPOSITION 4. Soient V un espace connexe par arcs, $\Gamma(V)$ l'espace des applications continues de I dans V, muni de la topologie de la convergence compacte, et $p : \Gamma(V) \longrightarrow V\times V$ l'application qui à tout $f\in\Gamma(V)$ fait correspondre le couple $(f(0),f(1))\in V\times V$. Le triple $(\Gamma(V),p,V\times V)$ vérifie le théorème de relèvement des homotopies pour un espace arbitraire, et, en particulier, est une pseudo-fibration.

Toute application d'un espace Z dans $\Gamma(V)$ équivaut à une application de $Z\times I$ dans V (ceci bien que V ne soit pas supposé séparé - la condition de séparation imposée dans le Chap.X est à peu près partout inutile !). La proposition 4 résulte immédiatement de là, et du fait que $\{0\}\times I \cup I\times\{0\} \cup I\times\{1\}$ est un rétracte de $I\times I$.

En combinant les propositions 2,3,4 on obtient de nombreux exemples de pseudo-fibrés ; par exemple, si A et B sont deux parties de V, désignons par $\Gamma_{A,B}(V)$ la partie de $\Gamma(V)$ formée des chemins d'origine dans A et extrêmité dans B (c'est $p^{-1}(A\times B)$). Le triple

$$(\Gamma_{A,B}(V),p,A\times B)$$

est un pseudo-fibré de base $A\times B$. On peut faire en particulier $A=\{x\}$, où $x\in V$, etc.

Donnons une application des espaces de chemins :

PROPOSITION 5.- <u>Soit</u> $q : X \to V$ <u>une application d'un espace</u> X <u>dans un espace</u> V <u>connexe par arcs. Il existe un espace</u> E , <u>une application</u> $r : X \to E$ <u>et une application</u> $\pi : E \to V$ <u>telles que</u> :

a) (E,π,V) <u>soit une pseudo-fibration, et</u> $\pi \circ r = q$,

b) <u>Il existe</u> $s : E \to X$ <u>telle que</u> $r \circ s$ <u>et</u> $s \circ r$ <u>soient homotopes à l'identité</u>.

Soit $i : V \to V$ l'application identique, et $f = q \times i : X \times V \to V \times V$. Posons $E = f^{-1}(\Gamma(V))$, qui est fibré de base $X \times V$, et par projection sur V on obtient une pseudo-fibration (E,π,V) (c'est une pseudo-fibration d'après les propos. 2,3,4). Un élément de E est un couple (x,ω), $x \in X$, $\omega \in \Gamma(V)$, avec $q(x) = \omega(0)$. Tout élément $x \in X$ définit un élément (x,ω_x) de E en posant $\omega_x(t) = q(x)$ pour $t \in I$ (chemin constant) ; on obtient ainsi une application r de X dans E qui est même un homéomorphisme. Il est clair que $\pi \circ r = q$, puisque $\pi(x,\omega) = \omega(1)$.

Soit $s : E \to X$ l'application $(x,\omega) \to x$. On a $s \circ r = 1$, et $r \circ s$ est l'application $h : (x,\omega) \to (x,\omega_x)$. On montre que h est l'homotope à l'identité en considérant l'application $F : E \times I \to E$ définie de la façon suivante :

$F(x,\omega,t') = (x,\omega_{t'})$ en désignant par $\omega_{t'}$ le chemin $t \to \omega(t't)$.
Il est clair que $F(x,\omega,0) = (x,\omega_x)$ et $F(x,\omega,1) = (x,\omega)$, C.Q.F.D.

La Proposition précédente montre donc que <u>toute</u> application $q : X \to V$ est équivalente à une pseudo-fibration, à condition de remplacer X par un espace E de même type d'homotopie. Rappelons que, de façon "duale", toute application $q : X \to V$ est équivalente à une injection (bicontinue), à condition de remplacer V par un espace de même type d'homotopie (mapping-cylinder). Ces deux procédés sont très commodes en homologie et en homotopie.

ANNEXE III. Sections dans les espaces fibrés différentiables.

Notation : Si U et V sont deux ouverts d'un espace X, nous noterons $U \Subset V$ la relation $\bar{U} \subset V$.

LEMME. Dans un espace euclidien considérons cinq ouverts W, W', W'' et T, T', relativement compacts, et tels que $W'' \Subset W' \Subset W$ et $T' \Subset T$. Soit f une fonction numérique continue sur W, qui soit différentiable sur $T \cap W$. La fonction f est alors limite uniforme sur W de fonctions g vérifiant les propriétés suivantes :

a) $g = f$ sur $\complement W'$ et sur $T' \cap W$,

b) g est différentiable sur W''.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Il existe une fonction différentiable h sur W telle que $|h(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in W'$ (un polynôme, par exemple). Posons $A = W'' \cap \complement T$ et $B = \complement W' \cup (T' \cap W)$; on vérifie tout de suite que $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, donc qu'il existe une fonction k différentiable sur l'espace W, $0 \leqslant k(x) \leqslant 1$ pour $x \in W$, égale à 0 sur B et à 1 sur un voisinage de $\bar{A}$. En posant $g = k.h + (1-k).f$, on obtient une fonction g sur W vérifiant a) et b) et telle que

$$|f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad x \in W .$$

THÉORÈME. Soit E un espace fibré différentiable, localement trivial (n'admettant pas nécessairement un groupe structural), de base B paracompacte, et de fibre F. Soient A une partie fermée de B, L un voisinage ouvert de A, et s une section de E au-dessus de B qui soit différentiable au-dessus de L. Pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de $s(B)$ dans E il existe une section t de E au-dessus de B, différentiable au-dessus de B tout entier, coïncidant avec s sur A, et telle que $t(B) \subset \mathcal{U}$.

(Autrement dit, si une section différentiable peut être prolongée en une section continue elle peut l'être par une section différentiable arbitrairement voisine).

On peut évidemment supposer B connexe (car on opère indépendamment sur chaque composante connexe), et puisque B est paracompact, B est donc dénombrable à l'infini. On en conclut qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_1, U_2, \dots, U_n, \dots)$ de B, de type fini, tel que E soit trivial au-desus de $p^{-1}(\overline{U}_i)$ (p étant la projection $E \to B$) et que, si π_i désigne la projection de $p^{-1}(\overline{U}_i)$ sur F associée à un isomorphisme de $p^{-1}(\overline{U}_i)$ sur $\overline{U}_i \times F$, l'on ait $\pi_i(s(\overline{U}_i)) \subset D_i$ où D_i est un pavé ouvert de F (i.e. un ouvert de F isomorphe à un pavé ouvert). Enfin, on peut supposer que les $\overline{U}_i$ sont compacts et chacun contenu dans une carte locale de B.

Puisque B est normal,,il existe un recouvrement ouvert V_i de B et des ouverts U_i^j $(j = 0, 1, \dots)$ tels que :

$$V_i \Subset \dots \Subset U_i^j \Subset U_i^{j-1} \Subset \dots \Subset U_i^0 \Subset U_i \quad .$$

De même, il existe des ouverts L^j tels que :

$$A \subset \dots \Subset L^j \Subset L^{j-1} \Subset \dots \Subset L^0 \Subset L \quad .$$

Nous allons maintenant montrer qu'il existe une suite $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$ de sections de E au-dessus de B, avec $s_0 = s$, et vérifiant les conditions suivantes :

(i) $s_n(B) \subset \mathcal{U}$.

(ii) $\pi_m(s_n(\overline{U}_m)) \subset D_m$ pour tout couple n,m.

(iii$_n$) s_n est différentiable sur U_n^1.

(iv$_n$) s_n coincide avec s_{n-1} sur $L^{n-1} \cup \bigcup_{i<n} U_i^{n+1-i} \cup \complement U_n^0$.

Remarquons que, d'après (iv$_n$), les sections s_n coincident sur V_i dès que $n > i$. Si donc l'on pose $t(x) = s_n(x)$ pour $x \in V_i$, $n > i$, on aura défini une section t de E, qui sera différentiable sur chaque V_n d'après (iii$_n$), coïncidera avec s sur A d'après (iv$_n$), et l'on aura $t(B) \subset \mathcal{U}$, d'après (i).

Tout revient donc à construire les sections s_n , ce qui se fait par récurrence sur n . Supposons donc s_i construit pour $i < n$, et construisons s_n :

Puisque s_n coïncide avec s_{n-1} sur $\complement U_n^o$, il suffit de déterminer s_n sur U_n . En outre, puisque s_{n-1} vérifie (i) et (ii), s_n les vérifiera aussi, pourvu qu'il soit assez voisin de s_{n-1} sur U_n (c'est ici qu'intervient le fait que le recouvrement U_i est de type fini). Tout revient donc, en définitive, à prouver que s_{n-1} est limite uniforme sur U_n de sections s_n vérifiant (iii_n) et (iv_n). Comme E est trivial au-dessus de U_n , la section s_n correspond (par composition avec $\pi_n : p^{-1}(U_n) \to F$) à une application $f_n^n : U_n \to F$, et de même s_{n-1} correspond à une application $f_{n-1}^n : U_n \to F$, qui applique d'ailleurs $\overline{U}_n$ dans D_n , puisque s_{n-1} vérifie (ii). Puisque D_n est un pavé ouvert, f_{n-1}^n est défini par un nombre fini de fonctions numériques sur U_n , à valeurs dans un intervalle ouvert. On est ainsi ramené à un problème portant sur des fonctions numériques, problèmes qui est résoluble grâce au Lemme où l'on fait :

$$W = U_n \quad , \quad W' = U_n^o \quad , \quad W'' = U_n^1 \quad ,$$

$$T = (L^{n-2} \cup \bigcup_{i<n-1} U_i^{n-i} \cup U_{n-1}^1) \cap U_n$$

$$T' = (L^{n-1} \cup \bigcup_{i<n} U_i^{n+1-i}) \cap U_n^o \; .$$

On vérifie en effet trivialement que $W'' \Subset W' \Subset W$ et $T' \Subset T$; la fonction f_{n-1}^n est bien différentiable sur $T \cap W = T$ d'après (iii_{n-1}) et (iv_{n-1}). C.Q.F.D.
