RÉDACTION N° 192

COTE : NBR 094

TITRE : ALGÈBRE DE LIE
CHAPITRE I (ÉTAT 3)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 122

NOMBRE DE FEUILLES : 122

Dieudonné
Janv. 1954

NBR 094 2

192

AW

ALGÈBRES de LIE (Chapitre I. Etat 3).

Sommaire

Commentaires.

Il y a pas mal d'additions par rapport à l'Etat 1, mais le plan et les méthodes essentielles sont les mêmes. Les additions concernant les algèbres de Lie algèbriques sont tirées du mémoire de Chevalley : Algebraic Lie algebras. Mais, dans son bouquin, Chevalley déduit les propriétés des algèbres de Lie algèbriques de celles des groupes algèbriques. Il y a peut-être lieu, en conséquence, de revenir à la rédaction Koszul. Chevalley est prié de donner son avis.

Je propose de vider en exercices (sauf peut-être au § 1) les algèbres de Lie sur un anneau. Elles obligent à insérer de temps à autre des hypothèses momentanées supplémentaires, ce qui est fort pénible. Et à quoi servent-elles ?

Prière aux spécialistes de vérifier si les démonstrations (et, éventuellement les énoncés) des exercices ne sont pas trop canulés. Certains exercices, qu'on peut envisager de faire passer dans le texte, sont marqués d'une astérisque.

Dans les §§ 1,2 et 3, A désigne un anneau commutatif ayant un élément unité.

§ 1. Définition des Algèbres de Lie.

1. Algèbres.- Soit M un module unitaire sur A, muni d'une application bilinéaire $(x,y) \to xy$ de $M \times M$ dans M. Tous les axiomes des algèbres sont vérifiés par M à l'exception de l'associativité de la multiplication dans M. Par abus de langage, on dit que M est une algèbre non nécessairement associative sur A, ou parfois, quand aucune confusion ne peut en résulter, une algèbre sur A. Dans le présent n°, nous emploierons cette dernière terminologie.

Si on munit le A-module M de la multiplication $(x,y) \to yx$, on obtient encore une algèbre qui est dite opposée à l'algèbre précédente.

Un sous-A-module N de M stable pour la multiplication est muni de manière évidente d'une structure d'algèbre sur A. On dit que N est une sous-algèbre de M. On dit que N est un idéal à gauche (resp. à droite) de M si les conditions $x \in N$, $y \in M$ entraînent $yx \in N$ (resp. $xy \in N$). Si N est à la fois idéal à gauche et idéal à droite, on dit que N est un idéal bilatère de M. Dans ce cas, la multiplication dans M permet de définir, par passage au quotient, une multiplication bilinéaire dans le module quotient M/N, de sorte que M/N est muni d'une structure d'algèbre On dit que M/N est une algèbre quotient de M.

Soient M_1 et M_2 deux algèbres sur A, φ une application de M_1 dans M_2. On dit que φ est un homomorphisme si φ est A-linéaire, et si $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pour $x \in M_1$, $y \in M_1$. L'ensemble N des $x \in M_1$ tels que $\varphi(x)=0$, appelé noyau de φ, est un idéal bilatère de M_1. L'ensemble $\varphi(M_1)$, appelé image de φ, est une sous-algèbre de M_2. Par passage au quotient, φ définit un isomorphisme de l'algèbre M_1/N sur l'algèbre $\varphi(M_1)$.

NBR 094 6

Soit M une algèbre sur A. Une application D de M dans M est appelée une <u>dérivation</u> de M si elle est A-linéaire et si $D(xy) = (Dx)y + x(Dy)$ quels que soient $x \in M$ et $y \in M$. Si D_1 et D_2 sont des dérivations de M, $D_1D_2-D_2D_1$ est une dérivation de M (cf. Alg., chap. IV ; la démonstration de cette proposition n'utilise pas l'associativité de l'algèbre).

Soient M_1 et M_2 deux algèbres sur A. Sur le A-module produit M, définissons une multiplication en posant : $(x_1,x_2)(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_2)$ quels que soient $x_1,x_2 \in M_1$, $y_1,y_2 \in M_2$. L'algèbre ainsi définie s'appelle <u>l'algèbre produit</u> de M_1 et M_2. L'application $x_1 \to (x_1,0)$ (resp. $x_2 \to (0,x_2)$) est un isomorphisme de M_1 (resp. M_2) sur un idéal bilatère de M. Par ces isomorphismes, on identifie M_1 et M_2 à des idéaux bilatères de M. Le A-module M est alors somme directe de M_1 et M_2, et $M_1M_2=0$. Réciproquement, soient M une algèbre sur A, et M_1, M_2 deux idéaux bilatères de M tels que M soit la somme directe de M_1, M_2, et tels que $M_1M_2=0$. Alors, si $x_1,y_1 \in M_1$, et $x_2,y_2 \in M_2$, on a $(x_1+x_2)(y_1+y_2)=x_1y_1+x_2y_2$, de sorte que M s'identifie à l'algèbre produit $M_1 \times M_2$. Nous laissons au lecteur le soin de formuler les résultats analogues dans le cas d'une famille finie quelconque d'algèbres.

Soient M une algèbre sur A, B un sous-anneau de A contenant 1. Alors, la multiplication dans M, et la structure de B-module unitaire sous-jacente de M, font de M une algèbre sur B. Cette structure d'algèbre sur B est dite <u>sous-jacente</u> à la structure d'algèbre sur A.

Soient C un anneau commutatif à élément unité, A un sous-anneau de C contenant 1, et M une algèbre sur A. Soit $N = M_{(C)}$ le C-module obtenu par extension à C de l'anneau des scalaires du A-module M. La multiplication dans M définit canoniquement une application C-bilinéaire de $N \times N$ dans N, de sorte que N se trouve muni d'une structure d'algèbre.

L'algèbre N s'appelle l'algèbre déduite de M par extension à C de l'anneau des scalaires.

2. Algèbres de Lie.- Définition 1.- Une algèbre non nécessairement associative $\mathfrak{g}$ sur A est appelée une algèbre de Lie sur A si sa multiplication, notée $(xy) \to [x,y]$, vérifie les identités

(1) $[x,x] = 0$

(2) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$

quels que soient $x,y,z \in \mathfrak{g}$.

Le produit $[x,y]$ est appelé le crochet de x et y. L'identité (2) est appelée l'identité de Jacobi.

Le crochet $[x,y]$ est une fonction bilinéaire alternée de ses facteurs. On a donc l'identité

(3) $[x,y] = -[y,x]$

de sorte que l'identité de Jacobi peut s'écrire

(4) $[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$.

Toute sous-algèbre, toute algèbre quotient d'une algèbre de Lie sont des algèbres de Lie. Tout produit d'algèbres de Lie est une algèbre de Lie. Toute algèbre déduite d'une algèbre de Lie par extension ou restriction de l'anneau des scalaires est une algèbre de Lie. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, l'algèbre opposée $\mathfrak{g}^o$ est une algèbre de Lie, et l'application $x \to -x$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^o$, en vertu de l'identité (3).

Exemple 1.- Soit L une algèbre associative sur A. Le crochet $[x,y] = xy-yx$ est une fonction bilinéaire de x et y. On vérifie facilement que la loi de composition $(x,y) \to [x,y]$ dans le A-module L fait de L une algèbre de Lie sur A.

7

Exemple 2.- Dans l'exemple 1, choisissons pour L l'algèbre associative des endomorphismes d'un A-module M . On obtient *l'algèbre de Lie des endomorphismes de* M , noté $\mathfrak{gl}(M)$.

Toute sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(M)$ est une algèbre de Lie sur A . En particulier :

1° si M est muni d'une structure d'algèbre (non nécessairement associative), les dérivations de M forment une algèbre de Lie sur A .

2° si A est un corps, et si M est un espace vectoriel de dimension finie sur A , les endomorphismes de M de trace nulle forment une algèbre de Lie sur A , qu'on désigne par $\mathfrak{sl}(M)$.

Exemple 3.- Algèbre de Lie d'un groupe de Lie.

Définition 2.- *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie*, x *un élément de* $\mathfrak{g}$. *L'application* $y \to [x,y]$ *de* $\mathfrak{g}$ *dans* $\mathfrak{g}$ *s'appelle l'endomorphisme adjoint de* x , *et se désigne par* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$, *ou par* ad x .

Proposition 1.- *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie*. *Pour tout* $x \in \mathfrak{g}$, ad x *est une dérivation de* $\mathfrak{g}$. *L'application* $x \to \mathrm{ad}\, x$ *est un homomorphisme de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *dans l'algèbre de Lie* d *des dérivations de* $\mathfrak{g}$. *Si* $D \in d$ *et* $x \in \mathfrak{g}$, *on a* $[D, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}(Dx)$.

En effet, l'identité (4) peut s'écrire

$$(\mathrm{ad}\, x).[y,z] = [(\mathrm{ad}\, x)y, z] + [y, (\mathrm{ad}\, x)z]$$

ou : $(\mathrm{ad}\, x, y).z = (\mathrm{ad}\, x).(\mathrm{ad}\, y).z - (\mathrm{ad}\, y)(\mathrm{ad}\, x)z$

d'où les deux premières assertions. D'autre part, si $D \in d$, $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$, on a $[D, \mathrm{ad}\, x]y = D([x,y]) - [x, Dy] = [Dx, y] = (\mathrm{ad}\, Dx).y$, d'où la dernière assertion.

L'endomorphisme ad x s'appelle aussi la *dérivation intérieure* définie par x .

3. Algèbres de Lie abéliennes.- Définition 3.- Deux éléments x,y d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sont dits permutables lorsque $[x,y]=0$. On dit que $\mathfrak{g}$ est abélienne si deux quelconques de ses éléments sont permutables.

Exemple 1.- Soient L une algèbre associative, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie qu'elle définit (n°2, ex.1). Deux éléments x,y sont permutables dans $\mathfrak{g}$ si et seulement si ils sont permutables dans L .

Exemple 2.- Un groupe de Lie connexe est abélien si et seulement si son algèbre de Lie est abélienne.

Tout A-module peut évidemment être muni d'une manière unique d'une structure d'algèbre de Lie abélienne sur A. Tout sous-module monogène d'une algèbre de Lie quelconque $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{g}$.

4. Idéaux.- Il résulte de l'identité (3) que, dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il n'y a pas à distinguer entre les idéaux à droite et les idéaux à gauche tout idéal étant bilatère. On parlera donc simplement d'idéal. Un idéal de $\mathfrak{g}$ est un sous-module de $\mathfrak{g}$ stable pour les dérivations intérieures de $\mathfrak{g}$. Un sous-module de $\mathfrak{g}$ stable pour toute dérivation de $\mathfrak{g}$ est appelé un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$.

Exemple 1.- Groupes de Lie, sous-groupes distingués, sous-groupes caractéristiques.

Exemple 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, d l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$. L'image ad $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ dans d par l'application $x \to \text{ad}\, x$ est un idéal de d d'après la prop.1 .

Proposition 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ un idéal (resp. un idéal caractéristique) de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ un idéal caractéristique de $\mathfrak{a}$. Alors, $\mathfrak{b}$ est un idéal (resp. un idéal caractéristique) de $\mathfrak{g}$.

En effet, toute dérivation intérieure (resp. toute dérivation) de $\mathfrak{g}$ laisse stable $\mathfrak{a}$ et induit dans $\mathfrak{a}$ une dérivation, donc laisse stable $\mathfrak{b}$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$.

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux sous-modules de $\mathfrak{g}$. L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de la forme $[x,y]$ ($x\in\mathfrak{a}$, $y\in\mathfrak{b}$) sera, par abus de notation, désigné par $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$. On a $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]=[\mathfrak{b},\mathfrak{a}]$ d'après l'identité (3).

<u>Proposition 3.- Si</u> $\mathfrak{a}$ <u>et</u> $\mathfrak{b}$ <u>sont des idéaux</u> (<u>resp. des idéaux caractéristiques</u>) <u>de</u> $\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ <u>est un idéal</u> (<u>resp. un idéal caractéristique</u>) <u>de</u> $\mathfrak{g}$.

En effet, soit D une dérivation intérieure (resp. une dérivation quelconque) de $\mathfrak{g}$. Si $x\in\mathfrak{a}$ et $y\in\mathfrak{b}$, on a $D([x,y])=[Dx,y]+[x,Dy]\in[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$. D'où la proposition.

5. <u>Série dérivée</u>, <u>série centrale descendante</u>.- On appelle <u>idéal dérivé</u> d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et on note $D\mathfrak{g}$, l'idéal caractéristique $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

Tout sous-module de $\mathfrak{g}$ contenant $D\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

On appelle <u>série dérivée</u> de $\mathfrak{g}$ la suite décroissante $D^0\mathfrak{g}$, $D^1\mathfrak{g}$,... d'idéaux caractéristiques de $\mathfrak{g}$ définis par récurrence de la manière suivante : 1° $D^0\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$, 2° $D^{p+1}\mathfrak{g}=D(D^p\mathfrak{g})=[D^p\mathfrak{g},D^p\mathfrak{g}]$.

On appelle <u>série centrale descendante</u> de $\mathfrak{g}$ la suite décroissante $C^0\mathfrak{g}$, $C^1\mathfrak{g}$,... d'idéaux caractéristiques de $\mathfrak{g}$ définis par récurrence de la manière suivante : 1° $C^0\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$. 2° $C^{p+1}\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},C^p\mathfrak{g}]$.

On a $C^1\mathfrak{g}=D\mathfrak{g}$, et $C^p\mathfrak{g}\supset D^p\mathfrak{g}$ pour tout p.

<u>Proposition 4.- Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>et</u> $\mathfrak{h}$ <u>deux algèbres de Lie sur</u> A, f <u>un homomorphisme de</u> $\mathfrak{g}$ <u>sur</u> $\mathfrak{h}$. <u>On a</u> $f(D^p\mathfrak{g})=D^p\mathfrak{h}$, $f(C^p\mathfrak{g})=C^p\mathfrak{h}$.

La proposition, évidente pour p=0, se démontre aussitôt par récurrence sur p.

<u>Corollaire.- Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie</u>, $\mathfrak{a}$ <u>un idéal de</u> $\mathfrak{g}$. <u>L'algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ <u>est abélienne si et seulement si</u> $\mathfrak{a}\supset D\mathfrak{g}$.

NBR 094

En effet, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est abélienne si et seulement si $D(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})=0$, et $D(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ est l'image de $D\mathfrak{g}$ par l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

Supposons que A soit un corps, et soit B un surcorps commutatif de A. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux sous-espaces de $\mathfrak{g}$; on identifie $\mathfrak{a}_{(B)}$ et $\mathfrak{b}_{(B)}$ à des sous-espaces de $\mathfrak{g}_{(B)}$. Alors, $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]_{(B)}$ s'identifie à $[\mathfrak{a}_{(B)}, \mathfrak{b}_{(B)}]$. Il en résulte que $D^p(\mathfrak{g}_{(B)}) = (D^p\mathfrak{g})_{(B)}$, $C^p(\mathfrak{g}_{(B)}) = (C^p\mathfrak{g})_{(B)}$.

6. __Série centrale ascendante__.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur l'anneau A, et P une partie de $\mathfrak{g}$. On appelle __annulateur__ ou __centralisateur__ de P dans $\mathfrak{g}$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$, tels que $[x,y] = 0$ pour tout $y \in P$.

__Proposition 5.- Soient__ $\mathfrak{g}$ __une algèbre de Lie__, $\mathfrak{a}$ __un idéal__ (resp. __un idéal caractéristique__) __de__ $\mathfrak{g}$. __L'annulateur__ $\mathfrak{a}'$ __de__ $\mathfrak{a}$ __dans__ $\mathfrak{g}$ __est un idéal__ (resp. __un idéal caractéristique__) __de__ $\mathfrak{g}$.

En effet, soit D une dérivation intérieure (resp. une dérivation quelconque) de $\mathfrak{g}$. Si $x \in \mathfrak{a}'$ et $y \in \mathfrak{a}$, on a $[Dx,y] = D([x,y]) - [x,Dy] = 0$; donc $Dx \in \mathfrak{a}'$. D'où la proposition.

Supposons que A soit un corps, et soit B un surcorps commutatif de A. Alors l'annulateur c de $\mathfrak{a}_{(B)}$ dans $\mathfrak{g}_{(B)}$ est égal à $\mathfrak{a}'_{(B)}$. En effet, il est clair que $\mathfrak{a}'_{(B)} \subset c$. Réciproquement, tout élément y de $\mathfrak{g}_{(B)}$ peut s'écrire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes x_i$, où les x_i sont dans $\mathfrak{g}$, et où les λ_i sont des éléments de B qu'on peut supposer linéairement indépendants sur A. Si $y \in c$, on a, pour tout $x \in \mathfrak{a}$, $0 = [x,y] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes [x,x_i]$, donc $[x, x_i]=0$; donc $x_i \in \mathfrak{a}'$ et par suite $y \in \mathfrak{a}'_{(B)}$. Ceci prouve que $c \subset \mathfrak{a}'_{(B)}$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un anneau A. On appelle __centre__ de $\mathfrak{g}$ l'annulateur de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire l'idéal caractéristique des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[x,y]=0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$. Le centre de $\mathfrak{g}$ est le noyau de l'homomorphisme $x \to \mathrm{ad}\, x$.

On appelle <u>série centrale ascendante</u> de $\mathfrak{g}$ la suite croissante $C_0\mathfrak{g}$, $C_1\mathfrak{g}$, ... d'idéaux caractéristiques de $\mathfrak{g}$ définis par récurrence de la manière suivante : 1° $C_0\mathfrak{g} = 0$. 2° $C_{p+1}\mathfrak{g}$ est l'image réciproque, pour l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/C_p\mathfrak{g}$, du centre de $\mathfrak{g}/C_p\mathfrak{g}$. L'idéal $C_1\mathfrak{g}$ est le centre de $\mathfrak{g}$.

Si A est un corps, et si B est un surcorps commutatif de A, on a $C_p(\mathfrak{g}_{(B)}) = (C_p\mathfrak{g})_{(B)}$.

<u>7. Extensions</u>.- <u>Définition 4</u>.- <u>Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$ trois algèbres de Lie sur un anneau</u> A, λ <u>un homomorphisme de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$</u>, μ <u>un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{b}$</u>. <u>Supposons vérifiées les conditions suivantes</u> : 1) λ <u>est injectif</u> ; 2) μ <u>est surjectif</u> ; 3) <u>Le noyau de μ est égal à l'image de λ</u>. <u>Alors, on dit que $\mathfrak{g}$ est une extension de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$</u>, <u>que λ est l'injection et μ la surjection de cette extension</u>.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a} \arrow[d, "\lambda"] \\ \mathfrak{g} \arrow[d, "\mu"] \\ \mathfrak{b} \end{tikzcd}$$

Ainsi, λ est un isomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur le noyau $\mathfrak{n}$ de μ, et μ définit, par passage au quotient, un isomorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ sur $\mathfrak{b}$. On dit que $\mathfrak{n}$ est le <u>noyau</u> de l'extension.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{a} \arrow[dl, "\lambda"'] \arrow[dr, "\lambda'"] & \\ \mathfrak{g} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mu"'] & & \mathfrak{g}' \arrow[dl, "\mu'"] \\ & \mathfrak{b} & \end{tikzcd}$$

Soit $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) une extension de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$, λ (resp. λ') son injection, μ (resp. μ') sa surjection. On dit que ces deux extensions sont <u>équivalentes</u> s'il existe un isomorphisme f de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$ tel que $\lambda' = f \circ \lambda$, $\mu' = \mu \circ f^{-1}$. Ceci revient à dire que le diagramme ci-contre est commutatif.

Il est clair qu'on vient de définir une relation d'équivalence entre extensions de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$.

Définition 5.- Soient $\mathfrak{g}$ une extension de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ son noyau. On dit que cette extension est triviale (resp. inessentielle) s'il existe un idéal (resp. une sous-algèbre) de $\mathfrak{g}$ qui soit un sous-module supplémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$. On dit que cette extension est centrale si $\mathfrak{n}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$.

Si l'extension est inessentielle, soit $\mathfrak{m}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ supplémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{m}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, donc à $\mathfrak{b}$. Si de plus l'extension est centrale, on a $[\mathfrak{g},\mathfrak{n}] = 0$, donc $[\mathfrak{m},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]+[\mathfrak{m},\mathfrak{n}] \subset \mathfrak{m}$, de sorte que $\mathfrak{m}$ est un idéal: l'extension est alors triviale.

Si l'extension est triviale, soit $\mathfrak{m}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ supplémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors (cf. n°1), $\mathfrak{g}$ s'identifie canoniquement à l'algèbre de Lie $\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$. Réciproquement, soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ deux algèbres de Lie ; alors, $\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$ est extension triviale de $\mathfrak{m}$ par $\mathfrak{n}$.

Proposition 6.- Pour qu'une extension $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$, de surjection μ, soit inessentielle, il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme ν de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ tel que $\mu \circ \nu$ soit l'automorphisme identique de $\mathfrak{b}$.

En effet, supposons que $\mathfrak{g}$ soit une extension inessentielle de $\mathfrak{a}$; soient $\mathfrak{n}$ son noyau, $\mathfrak{m}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ supplémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$. La restriction de μ à $\mathfrak{m}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{m}$ sur $\mathfrak{b}$, et l'isomorphisme réciproque ν possède la propriété de l'énoncé. Réciproquement, s'il existe un homomorphisme ν de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ tel que $\mu \circ \nu$ soit l'automorphisme identique de $\mathfrak{b}$, $\nu(\mathfrak{b})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ supplémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$, ce qui achève la démonstration.

Produit croisé.- Conservant les notations précédentes, identifions $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{m}$ par ν, $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{n}$ par l'injection de l'extension, et le module $\mathfrak{g}$ au module $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Pour $b \in \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, l'application $a \to [b,a]$, où a

où a parcourt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, est une dérivation φ_b de $\mathfrak{a}$, et l'application $b \to \varphi_b$ est un homomorphisme de $\mathfrak{b}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{a}$. (Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, on a $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = 0$, donc $\varphi = 0$).
D'autre part, pour $a, a' \in \mathfrak{a}$, $b, b' \in \mathfrak{b}$, on a :

$$(5) \quad [(a,b),(a',b)] = [a+b, a'+b'] = [a,a'] + [a,b'] + [b,a'] + [b,b'] = \\ = ([a,a'] + \varphi_b a' - \varphi_{b'} a \, , [b,b']) .$$

Réciproquement, soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des algèbres de Lie sur A. Soit $b \to \varphi_b$ un homomorphisme de $\mathfrak{b}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{a}$. Dans le produit $\mathfrak{g}$ des A-modules $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, définissons le crochet de deux éléments en posant

$$[(a,b),(a',b')] = ([a,a'] + \varphi_b a' - \varphi_{b'} a \, , [b,b'])$$

quels que soient $a, a' \in \mathfrak{a}$, $b, b' \in \mathfrak{b}$. On vérifie aisément (!) que l'on définit ainsi une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$. L'application $(a,b) \to b$ de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{b}$ est un homomorphisme μ, dont le noyau $\mathfrak{n}$ est l'idéal des éléments de $\mathfrak{g}$ de la forme $(a,0)$. L'application $a \to (a,0)$ est un isomorphisme λ de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{n}$. Donc $\mathfrak{g}$ est une extension de $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{b}$, d'injection λ et de surjection μ. L'ensemble des éléments de la forme $(0,b)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ supplémentaire de $\mathfrak{n}$ sur $\mathfrak{g}$, de sorte que l'extension est inessentielle.

Lorsque $\varphi_b = 0$ pour tout $b \in \mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie produit de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. Dans le cas général, l'extension qu'on vient de définir s'appelle le <u>produit croisé</u> de $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{b}$ (correspondant à l'homomorphisme $b \to \varphi_b$ de $\mathfrak{b}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{a}$). Nous avons donc établi la proposition suivante :

<u>Proposition 7.- Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux algèbres de Lie sur A. Toute extension inessentielle $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$ est équivalente à un produit croisé de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$.</u>

Exemple de produit croisé.- Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{b}$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{a}$. Prenons pour φ l'application identique de $\mathfrak{b}$. Le produit croisé correspondant h de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$ s'appelle l'holomorphe de $\mathfrak{a}$. Ainsi, $\mathfrak{a}$ s'identifie à un idéal de h, $\mathfrak{b}$ s'identifie à une sous-algèbre de h, et, pour $x \in \mathfrak{a}$ et $D \in \mathfrak{b}$, on a $Dx = [D,x]$.

Exercices.

* 1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. L'annulateur d'une partie quelconque de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

* 2. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. L'ensemble $\mathfrak{b}$ des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{a}$ soit stable pour $\operatorname{ad} x$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ (normalisateur de $\mathfrak{a}$), et $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{b}$.

* 3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des idéaux (resp. des idéaux caractéristiques) de $\mathfrak{g}$. Alors, l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[x,\mathfrak{b}] \subset \mathfrak{a}$ est un idéal (resp. un idéal caractéristique) de $\mathfrak{g}$.

4. Soient L une algèbre associative, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie associée. Toute dérivation de L est une dérivation de $\mathfrak{g}$, mais la réciproque n'est pas vraie (considérer l'application identique d'une algèbre associative commutative).

* 5. Soient M une algèbre non nécessairement associative sur un corps commutatif A de caractéristique 0, $(e_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel M. Posons $[e_i, e_j] = \sum_{k \in I} c_{ijk}\, e_k$, où les c_{ijk} sont des éléments de A (constantes de structure de M relativement à la base (e_i)). Pour que M soit une algèbre de Lie, il faut et il suffit que les c_{ijk} vérifient les conditions suivantes : a) $c_{ijk} = -c_{jik}$ quels que soient $i,j,k \in I$; b) $\sum_{r \in I} (c_{ijr}\, c_{rk\ell} + c_{jkr}\, c_{ri\ell} + c_{kir}\, c_{rj\ell}) = 0$ quels que soient $i,j,k,\ell \in I$.

6. a. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension 2 sur un corps commutatif A. Si $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne, $D\mathfrak{g}$ est de dimension 1. En choisissant une base convenable (e_1, e_2) de l'espace $\mathfrak{g}$, on a $[e_1, e_2] = e_1$.

b. Sur un espace vectoriel de dimension 2 sur A et de base (e_1, e_2), il existe une et une seule structure d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telle que $[e_1, e_2] = e_1$.

c. Déduire de b et c qu'il existe des algèbres de Lie non abéliennes de dimension 2 sur A ; toutes isomorphes entre elles.

d. Conservant les notations de b, montrer que le centre de $\mathfrak{g}$ est nul, que les dérivations de $\mathfrak{g}$ sont les endomorphismes u de l'espace $\mathfrak{g}$ tels que $u(\mathfrak{g}) \subset Ae_1$, et que toute dérivation de $\mathfrak{g}$ est intérieure.

7. Soient W et V des espaces de dimension n et n+1 sur un corps commutatif A. Montrer que $\mathfrak{gl}(W)$ est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(V)$. (On peut supposer que W est un hyperplan de V. Soit e un élément de V non contenu dans W. Pour $x \in \mathfrak{gl}(W)$, soit y l'élément de $\mathfrak{gl}(V)$ qui prolonge x et qui est tel que $ye = Tr(x).e$. Montrer que l'application $x \longrightarrow y$ est un isomorphisme de $\mathfrak{gl}(W)$ sur une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(V)$.

8. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, D une dérivation de $\mathfrak{g}$. Pour que D permute avec toutes les dérivations intérieures de $\mathfrak{g}$, il faut et il suffit que D applique $\mathfrak{g}$ dans son centre (utiliser la prop. 1). Si donc $\mathfrak{g}$ est de centre nul, auquel cas $\mathfrak{g}$ s'identifie à un idéal de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ de ses dérivations, le centralisateur de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ est nul ; en particulier, le centre de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ est nul.

9. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, D une dérivation de $\mathfrak{g}$. L'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $D^k x = 0$ pour k assez grand est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

NBL 094 17

AW

. 112

10. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux sous-modules de $\mathfrak{g}$. On définit pour tout entier $i \geqslant 0$ les sous-modules $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_i(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ et $\mathfrak{u}_i = \mathfrak{u}_i(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de $\mathfrak{g}$ de la manière suivante : $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{m}_{i+1} = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{b}]$, $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{u}_{i+1} = [\mathfrak{u}_i, \mathfrak{b}]$. Montrer que $[\mathfrak{a}, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{u}_{i+1}$ pour $i=1,2,\ldots$ (Raisonner par récurrence sur i, en observant que $\mathfrak{m}_i([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], \mathfrak{b}) = \mathfrak{m}_i(\mathfrak{b})$ et $\mathfrak{u}_i([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], \mathfrak{b}) = \mathfrak{u}_{i+1}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$).

11. Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{a}$. On appelle suite de composition joignant $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{b}$ une suite décroissante $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de sous-algèbres de $\mathfrak{a}$ telles que $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_{i+1}$ étant un idéal de $\mathfrak{a}_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. On dit que $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre sous-invariante de $\mathfrak{a}$ s'il existe une suite de composition joignant $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{b}$.

a. Soient $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre sous-invariante de $\mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une suite de composition joignant $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{b}$. Déduire de l'exerc.10 que $[C^{n+p}\mathfrak{b}, \mathfrak{a}] \subset C^p\mathfrak{b}$.

b. Déduire de a que l'intersection des $C^p\mathfrak{b}$, $p=0,1,2,\ldots$, est un idéal de $\mathfrak{a}$.

c. Déduire de b qu'une sous-algèbre sous-invariante $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{c} = D\mathfrak{c}$ est un idéal de $\mathfrak{a}$.

d. Lorsque $\mathfrak{a}$ est un corps et que $\mathfrak{a}$ est de dimension finie sur A, montrer que l'intersection des $D^p\mathfrak{b}$, $p=0,1,2,\ldots$, est un idéal de $\mathfrak{a}$ (montrer que cette intersection est une sous-algèbre sous-invariante de $\mathfrak{a}$, et appliquer c).

12. a. Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ un idéal de $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{z}$ le centralisateur de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{a}$. On a $[\mathfrak{z}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{z}$. En déduire que $\mathfrak{b} + \mathfrak{z}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ dans laquelle $\mathfrak{z}$ est un idéal.

b. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre sous-invariante de $\mathfrak{g}$ (exerc.11), $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{a}$. Si le centralisateur de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$ et le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ sont nuls, le centralisateur $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ est nul. (Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{z}$, qui est une sous-algèbre d'après a ; $\mathfrak{a}$ est sous-invariante dans $\mathfrak{h}$; si $\mathfrak{z} \neq 0$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{h}$, donc $\mathfrak{a}$ est un idéal dans $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{h}$; soit $a' \in \mathfrak{a}'$, $a' \notin \mathfrak{a}$, et $a' = a + z$, $a \in \mathfrak{a}$, $z \in \mathfrak{z}$, $z \neq 0$; montrer que $[z, \mathfrak{a}] = 0$, d'où contradiction).

c. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de centre nul, $\mathcal{D}_1$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{D}_2$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathcal{D}_1$,.... On identifie $\mathfrak{g}$ à un idéal de $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_1$ à un idéal de $\mathcal{D}_2$... (cf. exerc. 8). Utilisant c et l'exerc.8, montrer que le centralisateur de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{D}_i$ est nul pour tout i.

13. Soient $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien complexe, Y et Z deux opérateurs hermitiens bornés sur $\mathfrak{H}$, $B = [Z,Y]$. On suppose Y et B permutables.

a. Montrer que $[Z,Y^n] = nBY^{n-1}$ (raisonner par récurrence sur n).

b. Soit f une fonction réelle d'une variable, dérivable. Déduire de a que $[Z,f(Y)] = Bf'(Y)$.

c. Déduire de b que $B=0$. (Montrer que, si $B \neq 0$, f peut être choisie de telle sorte que $\|f(Y)\| \leq 1$ et que $\|Bf'(Y)\|$ soit arbitrairement grand).

d. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie des opérateurs bornés T sur $\mathfrak{H}$ tels que $T^* = -T$. Déduire de c que les conditions $Y \in \mathfrak{g}$, $Z \in \mathfrak{g}$, $[[Z,Y], Y] = 0$ entraînent $[Z,Y] = 0$.

§ 2. Algèbres enveloppante universelle d'une algèbre de Lie.

1. Linéarisations.- Définition 1.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A, L une algèbre associative à élément unité sur A. On appelle linéarisation de dans L une application A-linéaire ρ de $\mathfrak{g}$ dans L telle que $\rho([x,y]) = \rho(x)\rho(y)-\rho(y)\rho(x)$ quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$.

Autrement dit, une linéarisation de $\mathfrak{g}$ dans L est un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie associée à L (§1, n°2, ex.1).

Le composé d'une linéarisation de $\mathfrak{g}$ dans L et d'un homomorphisme de l'algèbre associative L dans une autre algèbre associative à élément unité est une linéarisation de $\mathfrak{g}$. Nous sommes donc dans les conditions requises pour poser un problème d'application universelle (Ens., chap. IV, § 4).

Définition 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A, $T = T(\mathfrak{g})$ l'algèbre tensorielle du A-module $\mathfrak{g}$, $J = J(\mathfrak{g})$ l'idéal bilatère de T engendré par les tenseurs $x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$ $(x,y \in \mathfrak{g})$, $U = U(\mathfrak{g})$ l'algèbre associative T/J. On dit que U est l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$, ou, plus brièvement, l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Le module $\mathfrak{g}$ étant identifié à un sous-module de T, la restriction à $\mathfrak{g}$ de l'application canonique de T sur U s'appelle l'application canonique de $\mathfrak{g}$ dans U.

Soit T' l'idéal bilatère de T formé des tenseurs dont la composante scalaire est nulle. Soit T_0 l'ensemble des éléments scalaires de T. Soient U' et U_0 les images canoniques de T' et T_0 dans U. Comme $J \subset T'$, la décomposition en somme directe $T = T_0 + T'$ entraîne une décomposition en somme directe $U = U_0 + U'$. L'algèbre U, non réduite à 0, a un élément unité, qui engendre U_0. La forme linéaire f sur U qui s'annule sur U' et qui est telle que $f(1)=1$ s'appelle l'augmentation de U.

L'algèbre associative U est engendrée par 1 et l'image canonique de $\mathfrak{g}$ dans U.

Proposition 1.- 1°- Soit ρ une linéarisation de $\mathfrak{g}$ dans L. Il existe un homomorphisme unitaire σ et un seul de T dans L qui prolonge ρ, et σ s'annule sur J. Réciproquement, tout homomorphisme unitaire σ de T dans L qui s'annule sur J définit, par restriction à $\mathfrak{g}$, une linéarisation de $\mathfrak{g}$.

2°- Soit ρ une linéarisation de $\mathfrak{g}$ dans L. Il existe un homomorphisme unitaire σ' et un seul de U dans L tel que $\rho = \sigma' \circ \rho_o$, ρ_o désignant l'application canonique de $\mathfrak{g}$ dans U. Réciproquement, tout homomorphisme unitaire σ' de U dans L définit, par la formule $\rho = \sigma' \circ \rho_o$, une linéarisation de $\mathfrak{g}$.

En effet, soient ρ une application A-linéaire de $\mathfrak{g}$ dans L, et σ l'homomorphisme unitaire unique de T dans L qui prolonge ρ. On a, pour $x, y \in \mathfrak{g}$, $\sigma(x \otimes y - y \otimes x - [x,y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) - \rho([x,y])$. Donc σ s'annule sur J si et seulement si ρ est une linéarisation de $\mathfrak{g}$. D'où le 1° de la proposition.

D'autre part, soit φ l'homomorphisme canonique de T sur U. La formule $\sigma = \sigma' \circ \varphi$ définit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des homomorphismes unitaires σ' de U dans L et l'ensemble des homomorphismes unitaires σ de T dans L qui s'annulent sur J. Donc le 2° de la proposition se déduit du 1er.

Ainsi, ρ_o est une linéarisation universelle de $\mathfrak{g}$.

Supposons que A soit un corps, et soit B un surcorps commutatif de A. Alors, l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}_{(B)}$ s'identifie canoniquement à $T_{(B)}$; et l'idéal de $T_{(B)}$ engendré par les $xy-yx-[x,y]$ $(x \in \mathfrak{g}_{(B)}, y \in \mathfrak{g}_{(B)})$ est l'idéal engendré par J dans $T_{(B)}$. Il en résulte que l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{(B)}$ s'identifie canoniquement à $U_{(B)}$.

2. Représentations.- Définition 3.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur l'anneau A, et M un A-module. Une linéarisation de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre des endomorphismes de M s'appelle une représentation de $\mathfrak{g}$ dans le module M. Si A est un corps, la dimension (finie ou infinie) de M sur A s'appelle la dimension de la représentation. La représentation $x \to \mathrm{ad}\, x$ de $\mathfrak{g}$ dans le A-module $\mathfrak{g}$ s'appelle la représentation adjoint[e] de $\mathfrak{g}$.

Une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M est donc une application A-linéaire $x \to x_M$ de $\mathfrak{g}$ dans le module des endomorphismes de M telle que $x_M y_M - y_M x_M = [x,y]_M$ quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$.

Une représentation injective est dite fidèle.

Si $x_M = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, la représentation est appelée représentation nulle de $\mathfrak{g}$ dans M.

La prop. 1 définit des correspondances biunivoques entre : 1°) l'ensemble des représentations de $\mathfrak{g}$ dans M ; 2°) l'ensemble des représentations de $T_{(\mathfrak{g})}$ dans M qui s'annulent sur $J_{(\mathfrak{g})}$; 3°) l'ensemble des représentations de $U_{(\mathfrak{g})}$ dans M. Si $x \to x_M$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M, on désignera encore par $t \to t_M$ la représentation correspondante de $T_{(\mathfrak{g})}$ ou de $U_{(\mathfrak{g})}$.

On sait d'autre part (Alg. VIII) qu'il y a équivalence entre la notion de représentation de l'algèbre associative $U_{(\mathfrak{g})}$ et celle de $U_{(\mathfrak{g})}$-module unitaire à gauche (il faudra avoir fait le sorite pour les algèbres sur un anneau, ce qui n'est pas le cas dans l'état actuel). Par ailleurs, un $U_{(\mathfrak{g})}$-module peut être identifié à un $T_{(\mathfrak{g})}$-module dont l'annulateur contient $J_{(\mathfrak{g})}$. Posons la définition suivante :

<u>Définition 4.- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A. Un module unitaire à gauche sur U($\mathfrak{g}$) est appelé un module de représentation de $\mathfrak{g}$, ou brièvement un $\mathfrak{g}$-module.</u>

(Est-il utile de parler de $\mathfrak{g}$-modules à droite, et du passage de la gauche à la droite ?).

La prop.1 permet de passer du point de vue représentation au point de vue module de représentation et inversement. On peut donc traduire en langage de représentations les notions et résultats de la théorie des modules :

1°- Pour tout $\iota \in I$, soient M_ι un A-module, et $x \rightarrow x_{M_\iota}$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M_ι. Soit M le $\mathfrak{g}$-module somme directe des $\mathfrak{g}$-modules M_ι. Il lui correspond une représentation $x \rightarrow x_M$ de $\mathfrak{g}$ dans M, appelée <u>somme directe</u> des représentations $x \rightarrow x_{M_\iota}$. Si $m=(m_\iota)_{\iota \in I}$ est un élément de M, et si $x \in \mathfrak{g}$, on a $x_M.m = (x_{M_\iota}.m_\iota)$.

2°- Deux représentations $x \rightarrow x_M$, $x \rightarrow x_{M'}$ de $\mathfrak{g}$ dans M et M' sont dites <u>semblables</u>, ou encore <u>de même classe</u>, si les $\mathfrak{g}$-modules associés sont isomorphes, autrement dit s'il existe un isomorphisme du A-module M sur le A-module M' qui transforme x_M en $x_{M'}$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

3°- Une représentation $x \rightarrow x_M$ de $\mathfrak{g}$ dans M est dite <u>irréductible</u> si le $\mathfrak{g}$-module associé est simple, autrement dit si les représentations associées de T et U sont irréductibles. Il revient au même de dire qu'il n'existe pas de sous-A-modules de M (autres que 0 et M) stables pour tous les x_M.

4°- Une représentation $x \rightarrow x_M$ de $\mathfrak{g}$ dans M est dite <u>complètement réductible</u> si le $\mathfrak{g}$-module associé est semi-simple, autrement dit si les représentations associées de T et U sont complètement réductibles.

Il revient au même de dire que la représentation est semblable à une somme directe de représentations irréductibles, ou que tout sous-A-module de M stable pour les x_M possède un supplémentaire stable pour les x_M, ou que M est somme de sous-A-modules stables pour les x_M et dans lesquels les x_M induisent une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$.

5°- Soit $\mathcal{D}$ une classe de représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$, correspondant à une classe δ de $\mathfrak{g}$-modules simples. Soit $x \to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M. Le composant homogène M_δ d'espèce δ du $\mathfrak{g}$-module M s'appelle aussi <u>le composant homogène d'espèce $\mathcal{D}$ de</u> M. Ce composant est la somme des sous-A-modules de M stables pour les x_M et dans lesquels les x_M induisent une représentation de classe $\mathcal{D}$; il est somme directe de certains de ces sous-modules. La somme des différents M_δ est directe. On a $M = \sum M_\delta$ si et seulement si la représentation est complètement réductible.

Supposons que A soit un corps, et soit B un surcorps commutatif de A. On voit facilement que $\mathfrak{gl}(M_{(B)})$ s'identifie canoniquement à $(\mathfrak{gl}(M))_{(B)}$. Une représentation ρ de $\mathfrak{g}$ dans M se prolonge donc de manière unique en une représentation $\rho_{(B)}$ de $\mathfrak{g}_{(B)}$ dans $M_{(B)}$. La représentation correspondante de $U_{(B)}$ s'obtient par extension à B du corps des scalaires à partir de la représentation de U qui correspond à ρ. On a donc (Alg.VIII) les résultats suivants : 1) si $x \to x_M$ est somme directe des représentations $x \to x_{M_i}$, alors $x \to x_{M_{(B)}}$ est somme directe des représentations $x \to x_{(M_i)_{(B)}}$; 2) si les représentations $x \to x_M$ et $x \to x_N$ sont semblables, les représentations $x \to x_{M_{(B)}}$ et $x \to x_{N_{(B)}}$ sont semblables ; 3) si la représentation $x \to x_M$ est complètement réductible, la représentation $x \to x_{M_{(B)}}$ est complètement réductible.

3. Filtration de l'algèbre enveloppante.- Conservons les notations du n°1. Soit T_n le sous-module de T formé des tenseurs d'ordre $\leqslant n$. Le sous-module T_0 est formé des éléments scalaires de T. On a $T_n \subset T_{n+1}$, et $T_n T_p \subset T_{n+p}$. Soit U_n l'image canonique de T_n dans U. Le sous-module U_0 est formé des éléments scalaires de U. On a $U_n \subset U_{n+1}$, et $U_n U_p \subset U_{n+p}$, de sorte que U est, comme T, une algèbre filtrée. Soit $G(U)$ l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée U (cf. Algèbre locale) : on forme les A-modules $G^n(U) = U_n/U_{n-1}$; soit $G(U)$ le A-module somme directe des $G^n(U)$; la multiplication sur U définit, par passage au quotient, une application bilinéaire de $G^n(U) \times G^m(U)$ dans $G^{n+m}(U)$, donc une multiplication sur $G(U)$, qui est associative. Ainsi, $G(U)$ est muni d'une structure d'algèbre sur A. On gradue $G(U)$ en considérant les éléments de $G^n(U)$ comme de degré n, ce qui est légitime puisque $G^n(U)G^m(U) \subset G^{n+m}(U)$.

L'application canonique ψ de T sur U applique T_n sur U_n donc définit, par passages aux quotients, un homomorphisme de degré 0 de l'algèbre graduée associée à T sur l'algèbre $G(U)$. Or, soit T^n l'ensemble des tenseurs homogènes d'ordre n dans T. L'algèbre T est graduée par les T^n, et la filtration de T est canoniquement associée à cette graduation, puisque $T_n = \sum_{p=0}^{n} T^p$. Donc l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée T s'identifie canoniquement à T. On a donc défini un homomorphisme canonique φ de T sur $G(U)$. Si $t \in T^n$, $\varphi(t)$ est l'image de $\psi(t) \in U_n$ par l'application canonique de U_n sur $G^n(U)$.

Proposition 2.- Soit I l'idéal bilatère de T engendré par les tenseurs $x \otimes y - y \otimes x$, $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$. Alors, φ s'annule sur I.

En effet, $x\otimes y - y\otimes x \in T^2$, et $\psi(x\otimes y - y\otimes x) = \psi([x,y]) \in U_1$, donc l'image canonique dans U_2/U_1 de $\psi(x\otimes y - y\otimes x)$ est nulle, ce qui prouve la proposition.

$$\begin{tikzcd} G^n(U) & U_n \arrow[l] & T^n \arrow[l, "\psi"'] \arrow[d, "\sigma"] \\ & & S^n \arrow[ull, "\omega"] \end{tikzcd}$$

Soit alors σ l'homomorphisme canonique de T sur l'algèbre symétrique $S = T/I$ du A-module $\mathfrak{g}$, algèbre qui est graduée par les $S^n = \sigma(T^n)$.

D'après la prop. 1, il existe un homomorphisme unique ω de S sur $G(U)$ tel que $\psi = \omega\circ\sigma$. Cet homomorphisme s'appelle l'homomorphisme canonique de S sur $G(U)$. Il est de degré 0.

4\. Le théorème de Poincaré.- Théorème 1.- *Si $\mathfrak{g}$ est un A-module libre, l'homomorphisme canonique de S sur $G(U)$ est un isomorphisme.*

En effet, soit $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ une base du A-module $\mathfrak{g}$, et munissons L d'une structure d'ordre total. Soit Π l'algèbre de polynômes $A[z_\lambda]$ par rapport à des lettres z_λ en correspondance biunivoque avec les x_λ. Pour toute suite $M = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ d'éléments de L, on désignera par z_M le monôme $z_{\lambda_1} z_{\lambda_2} \ldots z_{\lambda_n}$, par x_M le tenseur $x_{\lambda_1} \otimes x_{\lambda_2} \otimes \ldots \otimes x_{\lambda_n}$. Les z_M, M croissante, forment une base du A-module Π (on convient que $\emptyset$ est une suite croissante, et que $z_\emptyset = 1$). Soit Π_p le sous-module des polynômes de degré $\leq p$. Nous démontrerons d'abord plusieurs lemmes (pour abréger, on écrit $\lambda \leq M$ si $\lambda \leq \mu$ pour tout indice μ de la suite M).

Lemme 1.- *Pour tout entier $p \geq 0$, il existe un homomorphisme unique f_p du A-module $\mathfrak{g}\otimes\Pi_p$ dans le A-module Π vérifiant les conditions suivantes :*

(A_p) $f_p(x_\lambda \otimes z_M) = z_\lambda z_M$ pour $\lambda \leq M$, $z_M \in \Pi_p$;

(B_p) $f_p(x_\lambda \otimes z_M) - z_\lambda z_M \in \Pi_q$ pour $z_M \in \Pi_q$, $q \leq p$;

(C_p) $f_p(x_\lambda \otimes f_p(x_\mu \otimes z_N)) = f_p(x_\mu \otimes f_p(x_\lambda \otimes z_N)) + f_p([x_\lambda , x_\mu] \otimes z_N)$

pour $z_N \in \Pi_{p-1}$.

En outre, la restriction de f_p à $\mathfrak{g} \otimes \Pi_{p-1}$ coïncide avec f_{p-1}.

(Les termes intervenant dans (C_p) ont un sens grâce à la condition (B_p)).

La dernière assertion résulte des précédentes puisque la restriction de f_p à $\mathfrak{g} \otimes \Pi_{p-1}$ vérifie les conditions (A_{p-1}), (B_{p-1}), (C_{p-1}). Nous allons prouver l'existence et l'unicité de f_p par récurrence sur p. Pour $p=0$, la condition (A_o) impose $f_o(x_\lambda \otimes 1) = z_\lambda$, et les conditions (B_o), (C_o) sont alors évidemment satisfaites. Supposons maintenant prouvées l'existence et l'unicité de f_{p-1}. Montrons que f_{p-1} admet une extension unique f_p à $\mathfrak{g} \otimes \Pi_p$ satisfaisant aux conditions (A_p), (B_p), (C_p).

Nous devons définir $f_p(x_\lambda \otimes z_M)$ pour une suite croissante M de p éléments.

Si $\lambda \leq M$, le choix est imposé par la condition (A_p). Dans le cas contraire, M s'écrit de manière unique sous la forme (μ, N), où $\mu < \lambda$, $\mu \leq N$. Alors, $z_M = z_\mu z_N = f_{p-1}(x_\mu \otimes z_N)$, de sorte que le 1er membre de (C_p) est $f_p(x_\lambda \otimes z_M)$. Or, le 2ème membre de (C_p) est déjà défini ; en effet, (B_{p-1}) permet d'écrire

$$f_{p-1}(x_\lambda \otimes z_N) = z_\lambda z_N + w$$

avec $w \in \Pi_{p-1}$; donc le 2ème membre de (C_p) devient :

$$z_\mu z_\lambda z_N + f_{p-1}(x_\lambda \otimes w) + f_{p-1}([x_\lambda , x_\mu] \otimes z_N) .$$

Ainsi, f_p est définie, et satisfait évidemment aux conditions (A_p) et (B_p). La condition (3) est satisfaite si $\mu < \lambda$, $\mu \leqslant N$. L'antisymétrie du crochet dans $\mathfrak{g}$ prouve que la condition (C_p) est aussi satisfaite pour $\lambda < \mu$, $\lambda \leqslant N$. Comme (C_p) est trivialement satisfaite pour $\lambda = \mu$, (C_p) est donc satisfaite si l'on a $\lambda \leqslant N$ ou $\mu \leqslant N$. Si aucune de ces inégalités n'est vérifiée, on a $N = (\nu, Q)$, où $\nu \leqslant Q$, $\nu < \lambda$, $\nu < \mu$. Posant désormais pour abréger $f_p(x_\lambda \otimes z_N) = x_\lambda z_N$, on a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$x_\mu z_N = x_\mu (x_\nu z_Q) = x_\nu (x_\mu z_Q) + [x_\mu, x_\nu] z_Q .$$

Or, $x_\mu z_Q$ est de la forme $z_\mu z_Q + w$, où $w \in \Pi_{p-2}$. On peut appliquer (C_p) à $x_\lambda (x_\nu (z_\mu z_Q))$ parce que $\nu \leqslant Q$ et $\nu < \mu$, et à $x_\lambda (x_\nu w)$ en vertu de l'hypothèse de récurrence ; on peut donc appliquer (C_p) à $x_\lambda (x_\nu (x_\mu z_Q))$, ce qui donne :

$$x_\lambda (x_\mu z_N) = x_\nu (x_\lambda (x_\mu z_Q)) + [x_\lambda, x_\nu](x_\mu z_Q) + [x_\mu, x_\nu](x_\lambda z_Q) + \\ + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] z_Q .$$

En échangeant λ et μ, et retranchant membre à membre :

$$x_\lambda (x_\mu z_N) - x_\mu (x_\lambda z_N) = x_\nu (x_\lambda (x_\mu z_Q) - x_\mu (x_\lambda z_Q)) + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] z_Q - \\ - [x_\mu, [x_\lambda, x_\nu]] z_Q = x_\nu ([x_\lambda, x_\mu] z_Q) + ([x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] + [x_\mu, [x_\nu, x_\lambda]]) z_Q \\ = [x_\lambda, x_\mu] x_\nu z_Q + ([x_\nu, [x_\lambda, x_\mu]] + [x_\mu, x_\nu]] + [x_\mu, [x_\nu, x_\lambda]]) z_Q$$

soit, en vertu de l'identité de Jacobi

$$x_\lambda (x_\mu z_N) - x_\mu (x_\lambda z_N) = [x_\lambda, x_\mu] z_N$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.

Le reste de la démonstration est facile :

<u>Lemme 2.- Il existe une représentation de $\mathfrak{g}$ dans le A-module Π telle que 1° $(x_\lambda)_\pi z_M = z_\lambda z_M$ quels que soient l'élément λ de L et la suite croissante M tels que $\lambda \leqslant M$; 2°- $(x_\lambda)_\pi z_M \equiv z_\lambda z_M \pmod{\Pi_p}$ quels que soient l'élément λ de L et la suite croissante M à p éléments.</u>

En effet, d'après le lemme 1, il existe un homomorphisme f du A-module $\mathfrak{g} \otimes \Pi$ dans Π vérifiant, quel que soit p, les conditions (A_p), (B_p), (C_p) (où l'on remplace f_p par f). Ceci entraîne que Π est muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-module, et que la représentation correspondante de $\mathfrak{g}$ possède les propriétés du lemme 2.

<u>Lemme 3.- Soit</u> t <u>un tenseur de</u> $T_n \cap J$. <u>La composante homogène</u> t_n <u>d'ordre</u> n <u>de</u> t <u>est dans</u> I.

En effet, écrivons t_n sous la forme $\sum_{i=1}^{r} x_{M_i}$, où les M_i sont des suites de n éléments de L. D'après le lemme 2, t_{Π} transforme l'élément 1 de Π en un polynôme dont les termes de plus haut degré sont $\sum_{i=1}^{r} z_{M_i}$. Comme $t \in J$, on a $t_{\Pi} = 0$, donc $\sum_{i=1}^{r} z_{M_i} = 0$ dans Π. Or, Π s'identifie canoniquement à S, grâce à la donnée de la base (x_λ) de $\mathfrak{g}$. Donc l'image canonique de t_n dans S est nulle, c'est-à-dire que $t_n \in I$.

Nous pouvons maintenant démontrer le th. 1. Il faut prouver que l'homomorphisme canonique de S sur $G(U)$ est injectif. Soient $t \in T^n$, et ψ l'application canonique de T sur U. Il faut montrer que la condition $\psi(t) \in U_{n-1}$ entraîne $t \in I$. Or, $\psi(t) \in U_{n-1}$ signifie qu'il existe un tenseur $t' \in T_{n-1}$ tel que $t - t' \in J$. Le tenseur $t - t'$ admet t pour composante homogène d'ordre n, donc $t \in I$ d'après le lemme 3.

<u>Corollaire 1. Si</u> $\mathfrak{g}$ <u>est un</u> A-<u>module libre, l'application canonique de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans</u> U <u>est injective.</u>

En effet, si l'application canonique de $\mathfrak{g}$ dans U n'était pas injective, l'application canonique de S sur $G(U)$ ne serait pas injective.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est un A-module libre, on identifie $\mathfrak{g}$ à un sous-module de U par l'application canonique de $\mathfrak{g}$ dans U.

Corollaire 2.- Les éléments $x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_p}$ de U, où $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ est une suite finie croissante quelconque d'éléments de L, forment une base du A-module U.

En effet, considérons les éléments $x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_p} = \psi(x_M)$ correspondant à une valeur donnée de p. Les éléments $\sigma(x_M)$ forment une base du A-module S^p. Donc (th.1) les éléments $\omega(\sigma(x_M))$ forment une base de $G^p(U)$. D'autre part, ces éléments sont les images canoniques des $x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_p}$ dans $G^p(U) = U_p/U_{p-1}$ (prop.2). Le corollaire résulte alors d'un th. d'algèbre locale.

Soit maintenant $S'^n \subset T^n$ l'ensemble des tenseurs symétriques homogènes d'ordre n, et $S' = \sum_{n=1}^{\infty} S'^n \subset T$. Posons $U^n = \psi(S'^n) \subset U_n$. Les éléments de U^n s'appellent les éléments symétriques homogènes d'ordre n de U.

Corollaire 3.- Si A est un corps de caractéristique 0, U est la somme directe des U^n.

En effet, soit $\overline{x_M}$ le tenseur symétrisé de x_M. Quand M parcourt l'ensemble des suites croissantes de n éléments de L, les $\overline{x_M}$ forment une base de S'^n (parce que A est un corps de caractéristique 0). Compte-tenu du th.1 et de la prop.1, les images canoniques dans $G^n(U)$ des $\overline{x_M}$ forment une base de $G^n(U)$. Le corollaire résulte alors du th. d'algèbre locale déjà cité.

5. Prolongement des homomorphismes et des dérivations.- Supposons toujours que $\mathfrak{g}$ est un A-module libre, de sorte que $\mathfrak{g}$ est plongé dans U. Alors, toute linéarisation de $\mathfrak{g}$ dans une algèbre associative se prolonge de manière unique en un homomorphisme de U dans cette algèbre. En particulier un homomorphisme φ de $\mathfrak{g}$ dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$, d'algèbre enveloppante U', est une linéarisation de $\mathfrak{g}$ dans U', donc se prolonge de manière

unique en un homomorphisme de U dans U'. D'autre part, on a le résultat suivant :

Proposition 3 - Soit D une dérivation de $\mathfrak{g}$. Il existe une dérivation Δ (resp. Δ') de U (resp. S) et une seule qui prolonge D . Les U_n sont stables pour Δ . Soit Δ_n l'endomorphisme du module $G^n(U)$ déduit par passage au quotient de la restriction de Δ à U_n . Soit Δ'' l'endomorphisme du module G(U) qui prolonge les Δ_n . Alors, Δ'' est une dérivation de l'algèbre G(U). Si ω désigne l'isomorphisme canonique de S sur G(U), on a $\Delta' = \omega^{-1} \circ \Delta'' \circ \omega$.

En effet, soit D' la dérivation de T qui prolonge D . L'idéal J est stable pour D', à cause de l'égalité

$$D'(x \otimes y - y \otimes x - [x,y]) = Dx \otimes y - y \otimes Dx - [Dx,y] + x \otimes Dy - Dy \otimes x - [x, Dy] \;;$$

par passage au quotient, D' définit une dérivation Δ de U , qui est l'unique dérivation de U prolongeant D , puisque $\mathfrak{g}$ et 1 engendrent l'algèbre U . Puisque les T_n sont stables pour D', les U_n sont stables pour Δ . Puisque Δ est une dérivation de U , Δ'' est une dérivation de G(U) ; donc, $\omega^{-1} \circ \Delta'' \circ \omega$ est une dérivation de S , qui prolonge D , donc est l'unique dérivation de S qui prolonge D .

Proposition 4.- Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie sur A , $x \to x_{\mathfrak{g}}$ une représentation de $\mathfrak{a}$ par des dérivations de $\mathfrak{g}$, x_U et x_S les dérivations de U et S qui prolongent $x_{\mathfrak{g}}$, x_G la dérivation de G(U) qui correspond à x_U . Alors, $x \to x_U$, $x \to x_S$ et $x \to x_G$ sont des représentations de $\mathfrak{a}$, et ω est un isomorphisme du $\mathfrak{a}$-module S sur le $\mathfrak{a}$-module G(U).

En effet, soient $x, y \in \mathfrak{a}$. Alors, $[x_U, y_U]$ et $[x,y]_U$ sont des dérivations de U qui prolongent $[x_{\mathfrak{a}}, y_{\mathfrak{a}}] = [x,y]_{\mathfrak{a}}$, donc sont identiques

Donc $x \rightarrow x_U$, et par suite $x \rightarrow x_G$, sont des représentations de $\mathfrak{a}$. On raisonne de même pour $x \rightarrow x_S$. Enfin, l'isomorphisme des $\mathfrak{a}$-modules S et G(U) résulte aussitôt de la prop.3 .

6. Algèbre enveloppante d'une sous-algèbre de Lie.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps A, $\mathfrak{g}'$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$; i l'injection canonique de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$, U et U' les algèbres enveloppantes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$; i' l'homomorphisme de U dans U' qui prolonge i . Alors, i' est injectif. En effet, il existe une base $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ de $\mathfrak{g}$, un ordre total sur L, et deux sous-ensembles M,N complémentaires dans L, tels que : 1) les x_μ, $\mu \in M$, forment une base de $\mathfrak{g}'$; 2) pour $\mu \in M$ et $\nu \in N$, on a $\mu \leq \nu$. Alors, les éléments $x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_n}$ de U', où $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ est une suite croissante d'éléments de M, forment une base de l'espace U', et leurs images par i' sont linéairement indépendantes dans U (cor.2 du th.1). Ceci prouve notre assertion. Désormais, on identifiera U' à une sous-algèbre de U au moyen de l'homomorphisme i'.

Soient $\mathfrak{g}''$ une autre sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, U" son algèbre enveloppante, qui est une sous-algèbre de U . L'application bilinéaire $(u',u'') \rightarrow u'u''$ de $U' \times U''$ dans U définit une application linéaire θ de $U' \otimes U''$ dans U telle que $\theta(u' \otimes u'') = u'u''$. Si $\mathfrak{g}$ est somme directe des sous-espaces U' et U", θ est un isomorphisme de l'espace $U' \otimes U''$ sur l'espace U . En effet, conservant les notations précédentes, on peut supposer que les x_ν, $\nu \in N$, forment une base de $\mathfrak{g}''$. Alors, les $(x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_n}) \otimes (x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_p})$, où $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ (resp. $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p)$) est une suite croissante quelconque d'éléments de M (resp. N), forment une base de l'espace $U' \otimes U''$; et les $x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_n} x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_p}$ forment une base de l'espace U. D'où notre assertion.

Si en outre $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}''] = 0$, les sous-algèbres U' et U'' de U sont permutables, de sorte que l'algèbre U s'identifie par l'isomorphisme θ à l'algèbre $U' \otimes U''$.

Exercices.

1. Soit t un tenseur homogène d'ordre p de T, σ une permutation de $[1,p]$. Alors, $t - \sigma t \in J + T_{p-1}$ (se ramener au cas où σ est une transposition, et où t est le produit tensoriel de p éléments de $\mathfrak{g}$).
2. Si un sous-module homogène W de T est tel que $W \cap I = 0$, $W \cap J = 0$ (utiliser le lemme 3).
3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur le corps A, U son algèbre enveloppante.
   a. Soient u et v des éléments de U. Si $u \notin U_n$ et $v \notin U_p$, on a $uv \notin U_{n+p}$ (utiliser le th.1).
   b. Déduire de a que les seuls éléments inversibles de U sont les scalaires.
   c. Déduire de b que U est une algèbre sans radical.
   d. Déduire de a qu'il n'existe dans U ni diviseurs à droite de 0, ni diviseurs à gauche de 0.
   e. Soit V un idéal à gauche (resp. à droite) de U. Montrer qu'il existe un nombre fini d'éléments de V, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, tels que l'idéal à gauche (resp. à droite) de U engendré par les u_i soit V. (Soit W_n l'image canonique de $V \cap U_n$ dans $G^n(U)$, et $W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \subset G(U)$; montrer que W est un idéal de G(U) ; soit $w_1, w_2, \ldots, w_n$ un système fini de générateurs homogènes de l'idéal W ; soit u_i un élément de V dont l'image canonique dans G(U) est w_i ; montrer que l'idéal à gauche V' de U engendré par les u_i

est égal à V ; on raisonnera par récurrence en supposant démontré que $V' \cap U_p = V \cap U_p$ pour $p < q$).

4. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur le corps A., U son algèbre enveloppante. La représentation régulière gauche de U correspond à une représentation ρ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace U. Montrer que l'idéal bilatère U' de U sur lequel s'annule l'augmentation de U est stable pour ρ, et que U' n'admet pas de supplémentaire dans U stable pour ρ. En particulier, ρ n'est pas complètement réductible.

§ 3. Invariants.

Opérations sur les représentations.- Nous avons défini au § 2, n°2, la somme directe d'une famille de représentations de $\mathfrak{g}$. Nous allons maintenant définir d'autres opérations sur les représentations.

Proposition 1.- *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A, et $x \to x_{M_i}$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans le A-module M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Dans le produit tensoriel $M = \bigotimes_{i=1}^{n} M_i$, il existe une représentation $x \to x_M$ de $\mathfrak{g}$ et une seule telle que*

$$(1) \quad x_M(u_1 \otimes u_2 \otimes \ldots \otimes u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_1 \otimes \ldots \otimes x_{M_i} u_i \otimes \ldots \otimes u_n$$

quels que soient $x \in \mathfrak{g}$ et les $u_j \in M_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

En effet, pour un x donné dans $\mathfrak{g}$, chaque terme $u_1 \otimes \ldots \otimes x_{M_i} u_i \otimes \ldots \otimes u_n$ est une fonction multilinéaire des u_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ à valeurs dans M. Il existe donc un endomorphisme x_M du A-module M tel que l'on ait l'égalité (1). D'autre part, pour $x, y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$(x_M y_M - y_M x_M)(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n) = \sum\sum_{i \neq j} u_1 \otimes \dots x_{M_i} u_i \otimes \dots y_{M_j} u_j \otimes \dots u_n$$
$$+ \sum_k u_1 \otimes \dots x_{M_k} y_{M_k} u_k \otimes \dots u_n - \sum\sum_{i \neq j} u_1 \otimes \dots y_{M_i} u_i \otimes \dots x_{M_j} u_j \otimes \dots u_n$$
$$- \sum_k u_1 \otimes \dots y_{M_k} x_{M_k} u_k \otimes \dots u_n = \sum_k u_1 \otimes \dots (x_{M_k} y_{M_k} - y_{M_k} x_{M_k}) u_k \otimes \dots u_n$$
$$= [x,y]_M \; (u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n)$$

donc $x \to x_M$ est une représentation de $\mathfrak{g}$.

La représentation $x \to x_M$ s'appelle <u>le produit tensoriel</u> des représentations $x \to x_{M_i}$.

En particulier, si $x \to x_M$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un A-module M, la formule (1) définit dans chaque module $M_p = \overset{p}{\otimes} M$ une représentation $x \to x_{M_p}$. Soit T l'algèbre tensorielle de M, et soit x_T l'endomorphisme du A-module T qui prolonge les x_{M_p}. Alors, l'application $x \to x_T$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans T. La formule (1) montre que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, x_T est l'unique <u>dérivation</u> de l'algèbre T qui prolonge x_M.

<u>Remarque 1</u>.- Soit φ une permutation de $[1,n]$. L'isomorphisme canonique de $\bigotimes_{i=1}^{n} M_i$ sur $\bigotimes_{i=1}^{n} M_{\varphi(i)}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules. De même, si $n_1 = 1, n_2, \dots, n_p = n+1$ sont des entiers strictement croissants, l'isomorphisme canonique de $\bigotimes_{i=1}^{n} M_i$ sur $\bigotimes_{k=1}^{p-1} \left(\bigotimes_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} M_i \right)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules.

<u>Proposition 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A, et $x \to x_{M_i}$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans le A-module M_i $(1 \leq i \leq n+1)$. Soit N le A-module $\mathcal{L}(M_1, M_2, \dots, M_n; M_{n+1})$ des applications multilinéaires de $\prod_{i=1}^{n} M_i$ dans M_{n+1}. Il existe une représentation $x \to x_N$ de $\mathfrak{g}$ dans N et une seule telle que</u>

(2) $(x_N f)(u_1,u_2,\ldots,u_n) = x_{M_{n+1}}(f(u_1,u_2,\ldots,u_n)) - \sum_{i=1}^{n} f(u_1,\ldots,x_{M_i}u_i,\ldots,u_n)$

<u>quels que soient</u> $x \in \mathfrak{g}$, $f \in N$ <u>et les</u> $u_j \in M_j$ $(1 \leq j \leq n)$.

En effet, pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et tout $f \in N$, $x_N f$, défini par la formule (2), est une application multilinéaire de $\prod_{i=1}^{n} M_i$ dans M_{n+1} , et $x_N f$ dépend linéairement de f et de x . Prouvons que $x \to x_N$ est une représentation de $\mathfrak{g}$. Soit $M = \bigotimes_{i=1}^{n} M_i$, et soit $x \longrightarrow x_M$ la représentation produit tensoriel des représentations $x \longrightarrow x_{M_i}$ $(1 \leq i \leq n)$. Identifiant canoniquement N et $\mathcal{L}(M,M_{n+1})$, la formule (2) peut s'écrire :

(3) $(x_N f)(u) = x_{M_{n+1}}(f(u)) - f(x_M u)$

en posant $u = u_1 \otimes u_2 \otimes \ldots \otimes u_n$. Alors, pour $x,y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$(x_N y_N f)(u) = x_{M_{n+1}}((y_N f)(u)) - (y_N f)(x_M u)$$

$$= (x_{M_{n+1}} y_{M_{n+1}})(f(u)) - x_{M_{n+1}}(f(y_M u)) - y_{M_{n+1}}(f(x_M u)) + f(y_M x_M u) .$$

D'où :

$$((x_N y_N - y_N x_N)f)(u) = (x_{M_{n+1}} y_{M_{n+1}} - y_{M_{n+1}} x_{M_{n+1}})(f(u)) + f((y_M x_M - x_M y_M)u)$$

$$= ([x,y]_N f)(u)$$

ce qui prouve la proposition.

Justifier les formules (1) et (2) par référence aux groupes de Lie.

<u>Exemples 1</u>.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A, $x \to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M . Le dual M^* du A-module M est l'espace des applications A-linéaires de M dans A . Considérons dans A la représentation nulle de $\mathfrak{g}$. La prop.2 définit dans M^* une représentation $x \longrightarrow x_{M^*}$ de $\mathfrak{g}$, appelée représentation <u>duale</u> de la représentation $x \longrightarrow x_M$. On a $(x_{M^*} f)(u) = -f(x_M u)$ quels que soient $x \in \mathfrak{g}$, $u \in M$, $f \in M^*$. Autrement dit,

$x_{M^*} = -{}^t x_M$. Lorsque A est un corps et que M est de dimension finie, la représentation $x \to x_M$ est irréductible (resp. complètement réductible) si et seulement si $x \to x_{M^*}$ est irréductible (resp. complètement réductible).

Exemple 2.- Conservons les notations de l'exemple 1. Dans le A-module $N = \mathcal{L}_2(M,A)$ des formes bilinéaires sur M , la représentation $x \to x_M$ et la représentation nulle de $\mathfrak{g}$ dans A définissent une représentation $x \to x_N$ de $\mathfrak{g}$. On a :

$$(4) \qquad (x_N B)(u,v) = -B(x_M u,v) - B(u,x_M v)$$

quels que soient $x \in \mathfrak{g}$, $u, v \in M$, $B \in N$. Par suite, si B est un élément donné de N , l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $B(x_M u,v)+B(u,x_M v)=0$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. En particulier :

Proposition 3.- Soient M un A-module, B une forme bilinéaire sur A . L'ensemble des $x \in \mathfrak{gl}(M)$ tels que $B(xu, v)+B(u,xv)=0$ quels que soient $u \in M$ et $v \in M$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(M)$.

Exemple 3.- Conservons les notations de l'exemple 1. La représentation $x \to x_M$ définit dans le A-module $P = \mathcal{L}(M,M)$ des endomorphismes de M une représentation $x \to x_P$. On a, pour $u \in M$ et $f \in \mathcal{L}(M,M)$:

$$(x_P f)(u) = x_M(f(u)) - f(x_M u) = (x_M f - f x_M)(u) \quad .$$

Donc $x_P f = x_M f - f x_M$, et par suite :

$$(5) \qquad x_P = \mathrm{ad}\, x_M \; .$$

Remarque 2.- Supposons que A soit un corps, et que tous les espaces considérés soient de dimension finie sur A . Soit $x \to x_{M_i}$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M_i $(1 \leq i \leq q+1)$. Il en résulte une représentation $x \to x^*_{M_i} = -{}^t x_{M_i}$ de $\mathfrak{g}$ dans le dual M_i^* de M_i , et des représentations $x \to x_N$, $x \to x_P$ de $\mathfrak{g}$ dans $N = \mathcal{L}(M_1,M_2,\ldots,M_q \,;\, M_{q+1})$,

$P = M_1^* \otimes M_2^* \otimes \dots \otimes M_q^* \otimes M_{q+1}$. Si on identifie canoniquement N et P, alors *la représentation* $x \to x_N$ *s'identifie à la représentation* $x \to x_P$. En effet, si $u_i \in M_i$ et $v_i^* \in M_i^*$, l'élément $p = v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^* \otimes u_{q+1}$ de P s'identifie à l'élément n de N défini par $n(u_1, u_2, \dots, u_q) = \langle v_1^*, u_1 \rangle \langle v_2^*, u_2 \rangle \dots \langle v_q^*, u_q \rangle \, u_{q+1}$; on a :

$$x_P p = \sum_{i=1}^{q} v_1^* \otimes \dots \otimes (-{}^t x_{M_i} v_i^*) \otimes \dots \otimes v_q^* \otimes u_{q+1} + v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^* \otimes x_{M_{q+1}} u_{q+1}$$

et

$$(x_N n)(u_1, u_2, \dots, u_q) = x_{M_{q+1}}(n(u_1, u_2, \dots, u_q)) - \sum_{i=1}^{q} n(u_1, \dots, x_{M_i} u_i, \dots, u_q)$$

$$= \langle v_1^*, u_1 \rangle \langle v_2^*, u_2 \rangle \dots \langle v_q^*, u_q \rangle \, x_{M_{q+1}} u_{q+1} - \sum_{i=1}^{q} \langle v_1^*, u_1 \rangle \dots \langle {}^t x_{M_i} v_i^*, u_i \rangle \dots$$

$$\dots \langle v_q^*, u_q \rangle \, u_{q+1}$$ ce qui prouve notre assertion.

Il y a quelques autres identifications canoniques à expliciter pour la suite (proximus redactor...). Par exemple : l'isomorphisme canonique φ de $Q = M_1^* \otimes M_2^* \otimes \dots \otimes M_q^*$ sur $R = (M_1 \otimes M_2 \otimes \dots M_q)^*$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules. En effet, posant $S = M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_q$; on a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$\langle \varphi x_Q (v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^*), u_1 \otimes \dots \otimes u_q \rangle = \sum_{i=1}^{q} \langle \varphi(v_1^* \otimes \dots x_{M_i}^* v_i^* \otimes \dots v_q^*), u_1 \otimes \dots \otimes u_q \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \langle v_1^*, u_1 \rangle \dots \langle x_{M_i}^* v_i^*, u_i \rangle \dots \langle v_q^*, u_q \rangle$$

$$\langle x_R \varphi(v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^*), u_1 \otimes \dots \otimes u_q \rangle = -\langle \varphi(v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^*), x_S(u_1 \otimes \dots \otimes u_q) \rangle$$

$$= -\sum_{i=1}^{q} \langle \varphi(v_1^* \otimes \dots \otimes v_q^*), u_1 \otimes \dots \otimes x_{M_i} u_i \dots \otimes u_q \rangle$$

$$= -\sum_{i=1}^{q} \langle v_1^*, u_1 \rangle \dots \langle v_i^*, x_{M_i} u_i \rangle \dots \langle v_q^*, u_q \rangle$$

ce qui prouve notre assertion.

Eléments invariants. - *Définition 1.* - *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* A, M *un A-module,* $x \to x_M$ *une représentation de* $\mathfrak{g}$ *dans* M . *Un élément* $u \in M$ *est dit invariant si* $x_M u = 0$ *pour tout* $x \in \mathfrak{g}$.

Rapport avec les groupes de Lie.

Proposition 4.- Soient $x \to x_M$, $x \to x_N$ deux représentations de $\mathfrak{g}$ dans des A-modules M,N. Soient $P = \mathcal{L}(M,N)$, et $x \to x_P$ la représentation correspondante de $\mathfrak{g}$ dans P . Pour qu'un élément $f \in P$ soit invariant, il faut et il suffit que f soit un homomorphisme du $\mathfrak{g}$-module M dans le $\mathfrak{g}$-module N .

En effet, on a, pour tout $u \in M$, $(x_P f)(u) = x_N(f(u)) - f(x_M u)$; donc f est invariant si et seulement si $x_N \circ f = f \circ x_M$, ce qui prouve la proposition.

Exemple 1.- Supposons le $\mathfrak{g}$-module N identique au $\mathfrak{g}$-module M . Pour qu'un endomorphisme de M soit un invariant de $\mathcal{L}(M,M)$, il faut et il suffit qu'il permute aux x_M . Ceci résulte également aussitôt de la formule (5).

Exemple 2.- Prenons $N = M^*$, et $x_N = x_M^* = -{}^t x_M$. Pour qu'une application $f \in \mathcal{L}(M,M^*)$ soit invariante, il faut et il suffit que f soit un homomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules. D'autre part, il existe un isomorphisme canonique φ de $\mathcal{L}(M,M^*)$ sur le module des formes bilinéaires sur M , et cet isomorphisme est compatible avec les structures de $\mathfrak{g}$-modules. Ainsi, pour que f soit un homomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules, il faut et il suffit que $\varphi(f)$ soit une forme bilinéaire invariante sur M .

En particulier, une forme bilinéaire B sur M invariante et non dégénérée définit, si A est un corps et si M est de dimension finie, un isomorphisme du $\mathfrak{g}$-module M sur le $\mathfrak{g}$-module M^* , donc un isomorphisme du $\mathfrak{g}$-module $M \otimes M$ sur le $\mathfrak{g}$-module $M^* \otimes M = \mathcal{L}(M,M)$. Comme 1 est un invariant de $\mathcal{L}(M,M)$ (cf. exemple 1), l'élément correspondant de $M \otimes M$ est un invariant c de $M \otimes M$, qu'on peut définir de la manière suivante : soient (x_i) une base de M , (x'_i) la base de M telle que $B(x_i, x'_j) = \delta_{ij}$; alors $c = \sum_i x_i \otimes x'_i$. Cet élément de $M \otimes M$ ne dépend donc que du choix de B , et est un invariant du $\mathfrak{g}$-module $M \otimes M$.

Proposition 5.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur l'anneau A , h un idéal de $\mathfrak{g}$, $x \to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M , N le sous-module des éléments $u \in M$ tels que $x_M u = 0$ pour tout $x \in h$. Alors, quel que soit $y \in \mathfrak{g}$, N est stable pour y_M .

En effet, si $u \in N$ et $y \in \mathfrak{g}$, on a, quel que soit $x \in h$, $x_M(y_M u) = [x,y]_M u + y_M x_M u = 0$ car $[x,y] \in h$. Donc $y_M u \in N$.

Proposition 6.- Soit $x \to x_M$ une représentation complètement réductible de $\mathfrak{g}$ dans le A-module M . Alors, le sous-module M_o des éléments invariants admet un et un seul supplémentaire stable pour les x_M , à savoir le sous-module M_1 engendré par les $x_M u$ ($x \in \mathfrak{g}$, $u \in M$).

En effet, soit M' un sous-module de M stable pour les x_M et supplémentaire de M_o dans M . Pour tout $u \in M$, on a $u = u_o + u'$, avec $u_o \in M_o$, $u' \in M'$, donc $x_M u = x_M u' \in M'$. Donc $M_1 \subset M'$. Soit M_2 un sous-module de M' stable pour les x_M et supplémentaire de M_1 dans M'. Pour tout $u \in M_2$, on a $x_M u \in M_2 \cap M_1 = 0$ quel que soit $x \in \mathfrak{g}$, donc $u \in M_o$, donc $u = 0$. Donc $M_2 = 0$, ce qui prouve que $M_1 = M'$.

Supposons que A soit un corps.

Proposition 6 bis.- 1° Soient $x \to x_M$ une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}$, et $x \to x_{M^*}$ la représentation duale. Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ des bases duales de M et M^*. Alors, $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$ est invariant dans $M \otimes M^*$.

2° Soient $x \to x_M$, $x \to x_N$ des représentations de $\mathfrak{g}$, $x \to x_N$ étant irréductible et de dimension finie. Soit $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de N . Si des éléments non tous nuls $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de M sont tels que $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$ soit invariant dans $M \otimes N$, alors le sous-espace M_1 de M engendré par les e_i est stable pour les x_M , et la représentation $x \to x_{M_1}$ est duale de la représentation $x \to x_N$.

1° Dans l'isomorphisme canonique du $\mathfrak{g}$-module $M \otimes M^*$ sur le $\mathfrak{g}$-module $\mathcal{L}(M,M)$, $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$ correspond à l'endomorphisme identique de M, qui est invariant dans $\mathcal{L}(M,M)$. Donc $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$ est invariant dans $M \otimes M^*$.

2° On a $x_N f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} f_k$. Soit N^* l'espace dual de N, et soit (f_i^*) la base duale de la base (f_i). La représentation $x \rightarrow x_{N^*}$ est définie par les formules

(5 bis) $\qquad x_{N^*} f_k^* = - \sum_{i=1}^{n} a_{ik} f_i^*$.

D'autre part,

$$x_{M\otimes N}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_M e_i \otimes f_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_i \otimes f_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[x_M e_k + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i\right] \otimes f_k .$$

Si $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$ est invariant, on a donc, pour $k = 1,2,\ldots,n$

(5 ter) $\qquad x_M e_k = - \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i$.

Ceci prouve que M_1 est stable pour les x_M, de sorte que M_1 est un $\mathfrak{g}$-module. Les formules (5 bis) et (5 ter) montrent que le $\mathfrak{g}$-module M_1 est un quotient du $\mathfrak{g}$-module N^*. Comme ce dernier est simple, ou bien $M_1 = 0$, ou bien M_1 est isomorphe à N^*.

3. <u>Formes bilinéaires invariantes</u>.- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur l'anneau A. Dans le A-module $N = \mathcal{L}_2(\mathfrak{g}, A)$ des formes bilinéaires sur $\mathfrak{g}$, la représentation adjointe et la représentation nulle de $\mathfrak{g}$ dans A définissent une représentation $x \rightarrow x_N$. On dit brièvement qu'une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ est <u>invariante</u> si elle est invariante pour la représentation $x \rightarrow x_N$. D'après la formule (4), la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'on ait

(6) $\qquad B([x,y],z) = B(x,[y,z])$

quels que soient $x,y,z \in \mathfrak{g}$.

Maintenant, soit d l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$. La représentation identique de d et la représentation nulle de d dans A définissent une représentation $D \to D_N$ de d dans N. On dit brièvement qu'une ~~xxx~~ forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ est <u>complètement invariante</u> si elle est invariante pour la représentation $D \to D_N$. Une forme bilinéaire complètement invariante est invariante. Pour qu'une forme bilinéaire B sur soit complètement invariante, il faut et il suffit qu'on ait

$$(7) \qquad B(Dx, y) + B(x, Dy) = 0$$

quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$ et $D \in d$.

<u>Proposition 7.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, B une forme bilinéaire symétrique invariante sur $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors, l'orthogonal $\mathfrak{a}'$ de $\mathfrak{a}$ pour B est un idéal de $\mathfrak{g}$. Si B est non dégénérée, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$ est abélien. Si $\mathfrak{a}$ est caractéristique, et si B est complètement invariante, $\mathfrak{a}'$ est caractéristique.</u>

En effet, soit D une dérivation de $\mathfrak{g}$. Supposons que $\mathfrak{a}$ soit stable pour D et que $B(Dx,y) + B(x,Dy)=0$ pour $x,y \in \mathfrak{g}$. Alors, si $z \in \mathfrak{a}'$ et $t \in \mathfrak{a}$, on a $Dt \in \mathfrak{a}$, donc $B(Dz,t) = -B(z, Dt)=0$; donc $Dz \in \mathfrak{a}'$, de sorte que $\mathfrak{a}'$ est stable pour D. Ceci établit la première et la troisième assertion de la proposition. Maintenant, soit $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, et supposons la restriction de B à $\mathfrak{b}$ nulle. Pour $x,y \in \mathfrak{b}$ et $z \in \mathfrak{g}$, on a $B([x,y], z) = B(x,[y,z])=0$ car $[y,z] \in \mathfrak{b}$; ainsi, $D\mathfrak{b}$ est orthogonal à $\mathfrak{g}$; si donc B est non dégénérée, $\mathfrak{b}$ est abélien. Ce résultat, appliqué à $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$, établit la deuxième assertion de la proposition.

<u>Définition 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A</u>, $x \to x_M$ <u>une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un A-module M possédant une base finie. On appelle forme bilinéaire associée à la représentation la forme bilinéaire symétrique</u> $(x,y) \to \mathrm{Tr}(x_M y_M)$ <u>sur $\mathfrak{g}$. Si la représentation considérée est</u>

la représentation adjointe, la forme bilinéaire associée s'appelle la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

Proposition 8.- Soient $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur l'anneau* A , $x \to x_M$ *une représentation de* $\mathfrak{g}$ *dans un A-module* M *possédant une base finie. La forme bilinéaire associée est invariante.*

En effet, pour $x,y,z \in \mathfrak{g}$, on a

$$\mathrm{Tr}([x,y]_M z_M) = \mathrm{Tr}(x_M y_M z_M) - \mathrm{Tr}(y_M x_M z_M) = \mathrm{Tr}(x_M y_M z_M) - \mathrm{Tr}(x_M z_M y_M) = \mathrm{Tr}(x_M [y,z]_M)$$

Dans toute la fin du § , *on suppose que* A *est un corps.*

Proposition 9.- Supposons que $\mathfrak{g}$ *soit de dimension finie sur* A . *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$, B *la forme de Killing de* $\mathfrak{g}$, B' *celle de* $\mathfrak{a}$. *Alors,* B' *est la forme bilinéaire induite par* B *dans* $\mathfrak{a}$.

En effet, soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ qui laisse stable $\mathfrak{a}$. Soient v la restriction de u à $\mathfrak{a}$, et w l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ déduit de u par passage au quotient. On a $\mathrm{Tr}\, u = \mathrm{Tr}\, v + \mathrm{Tr}\, w$ (référence ?). Ceci posé, soient $x \in \mathfrak{a}$ et $y \in \mathfrak{a}$, et appliquons la formule précédente au cas où $u = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x)(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} y)$.
On a $v = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} x)(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} y)$, et $w = 0$. Donc $B(x,y) = B'(x,y)$.

Proposition 10.- Supposons que $\mathfrak{g}$ *soit de dimension finie sur* A . *La forme de Killing de* $\mathfrak{g}$ *est complètement invariante.*

En effet, soit $\mathfrak{h}$ l'holomorphe de $\mathfrak{g}$. On peut identifier $\mathfrak{g}$ à un idéal de $\mathfrak{h}$. Soient B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, B' celle de $\mathfrak{h}$. D'après la prop.9, B est la restriction de B' à $\mathfrak{g}$. D'autre part, si $x,y \in \mathfrak{g}$, et si D est une dérivation de $\mathfrak{g}$, qu'on peut identifier à un élément de $\mathfrak{h}$, on a, d'après la prop.8, $B'([D,x],y)+B'(x,[D,y])=0$, c'est-à-dire $B(Dx,y) + B(x,Dy)=0$.

Si B est un surcorps commutatif de A , la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}_{(B)}$ obtenue à partir de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ par extension à B du corps des scalaires est la forme de Killing de $\mathfrak{g}_{(B)}$.

4. Elément de Casimir. – **Proposition 11.** – *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur A , U son algèbre enveloppante, $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, B une forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$, dont la restriction à $\mathfrak{h}$ est non dégénérée. Soient $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(y'_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux bases de l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$ telles que $B(y_i, y'_j) = \delta_{ij}$. Alors, l'élément $\sum_{k=1}^{n} y_k y'_k$ appartient au centre de U et est indépendant du choix de la base (y_i).*

Pour $x \in \mathfrak{g}$, soit $x_{\mathfrak{h}}$ la restriction à $\mathfrak{h}$ de l'endomorphisme $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ de $\mathfrak{g}$. Alors, $x \to x_{\mathfrak{h}}$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $\mathfrak{h}$, et la restriction B' de B à $\mathfrak{h}$ est invariant pour cette représentation. D'après le n°2, exemple 2, le tenseur $\sum_{k=1}^{n} y_k \otimes y'_k$ est indépendant du choix de la base (y_i), et est un élément invariant de l'algèbre tensorielle T de $\mathfrak{h}$. Par passage au quotient, la représentation $x \to x_T$ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace T donne une représentation $x \to x_U$ de $\mathfrak{g}$ dans U , où x_U est la dérivation de U qui prolonge $x_{\mathfrak{h}}$. Donc $\sum_{k=1}^{n} y_k y'_k$ est indépendant du choix de la base (y_i) , et est invariant pour la représentation $x \to x_U$, c'est-à-dire commute avec tous les éléments de $\mathfrak{g}$.

Nous allons montrer directement que $\sum_{k=1}^{n} y_k y'_k$ appartient au centre de U , les formules (8), (9), (10) ci-dessous devant nous être utiles au § 4. Pour $x \in \mathfrak{g}$, on peut poser ($\mathfrak{h}$ étant un idéal de $\mathfrak{g}$)

(8) $[x, y_k] = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} y_\ell$ (9) $[x, y'_k] = \sum_{\ell=1}^{n} a'_{k\ell} y'_\ell$

On a $a_{k\ell} = B([x,y_k], y'_\ell)$, $a'_{k\ell} = B(y_\ell, [x,y'_k])$, donc, en vertu de l'invariance de B :

(10) $a_{k\ell} = -a'_{\ell k}$.

Alors, $\left[x, \sum_{k=1}^{n} y_k y'_k\right] = \sum_{k=1}^{n} [x, y_k] y'_k + \sum_{k=1}^{n} y_k [x, y'_k] =$

$= \sum_k \sum_\ell a_{k\ell}\, y_\ell\, y'_k + \sum_k \sum_\ell a'_{k\ell}\, y_k\, y'_\ell = 0$

ce qui prouve que $\sum_{k=1}^{n} y_k y'_k$ appartient au centre de U .

L'élément $\sum_{k=1}^{n} y_k y'_k$ s'appelle <u>l'élément de Casimir</u> de U correspondant à $\mathfrak{h}$ et B .

<u>Proposition 12.- Si</u> B <u>est la forme bilinéaire associée à une représentation</u> $x \to x_M$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans un espace vectoriel</u> M <u>de dimension finie, et si</u> t <u>est l'élément de Casimir de</u> U <u>associé à</u> B <u>et</u> $\mathfrak{h}$ <u>, on a</u> $Tr(t_M) = \dim \mathfrak{h}$. <u>Si</u> $\dim \mathfrak{h} \neq 0$ <u>dans</u> A <u>, et si la représentation</u> $x \to x_M$ <u>est irréductible,</u> t_M <u>est un automorphisme de l'espace vectoriel</u> M .

En effet, on a $Tr((y_k)_M (y'_k)_M) = B(y_k, y'_k) = 1$, donc $Tr(t_M) = \dim \mathfrak{h}$. Comme t appartient au centre de U , t_M est permutable aux x_M , $x \in \mathfrak{g}$. Si la représentation $x \to x_M$ est irréductible, le lemme de Schur montre que, ou bien t_M est un automorphisme de l'espace vectoriel M , ou bien $t_M = 0$. La deuxième alternative est écartée si $Tr(t_M) = \dim \mathfrak{h} \neq 0$ dans A .

5. <u>Eléments invariants dans une algèbre</u>.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A , $x \to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel M . Pour toute classe $\mathcal{D}$ de représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, soit $M_{\mathcal{D}}$ le composant homogène d'espèce $\mathcal{D}$ de M . Le sous-espace M_0 des éléments invariants de M n'est autre que $M_{\mathcal{D}_0}$, $\mathcal{D}_0$ désignant la représentation nulle de $\mathfrak{g}$ dans un espace de dimension 1 .

<u>Proposition 13.- Supposons que</u> M <u>soit une algèbre</u> (<u>non nécessairement associative</u>), <u>et que les</u> x_M <u>soient des dérivations de</u> M . <u>Si</u> $u \in M_0$ <u>et</u> $v \in M_{\mathcal{D}}$ <u>, on a</u> $uv \in M_{\mathcal{D}}$ <u>et</u> $vu \in M_{\mathcal{D}}$. <u>En particulier,</u> M_0 <u>est une sous-algèbre de</u> M .

En effet, pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et tout $w \in M$, on a $u(x_M w) = x_M(uw) - (x_M u)w = x_M(uw)$, et $(x_M w)u = x_M(wu) - w(x_M u) = x_M(wu)$, de sorte que les multiplications à gauche et à droite par u dans M sont des endomorphismes de $\mathfrak{g}$-modules. Les composants homogènes du $\mathfrak{g}$-module M sont donc stables pour ces multiplications (Alg. VIII).

Lorsque M est associative, $M_{\mathcal{D}}$ est donc un module à gauche et à droite sur M_0 .

Proposition 14.- *Supposons la représentation $x \to x_M$ complètement réductible, autrement dit M somme directe des $M_{\mathcal{D}}$. Pour tout $u \in M$, soit $u^\natural$ son composant dans $M_0 = M_{\mathcal{D}_0}$. Alors, pour $u \in M$ et v , $v' \in M_0$; on a $(vuv')^\natural = vu^\natural v'$.*

Par linéarité, il suffit d'envisager le cas où $u \in M_{\mathcal{D}}$. Si $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}_0$, on a $u^\natural = 0$, et $vuv' \in M_{\mathcal{D}}$ (prop.13), donc $(vuv')^\natural = 0 = vu^\natural v'$. Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, on a $u = u^\natural$ et $vuv' \in M_0$ (prop.13), donc $(vuv')^\natural =$ $= vuv' = vu^\natural v'$.

Théorème 1.- *Soit $x \to x_V$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V de dimension finie. Soit S l'algèbre symétrique de V, x_S la dérivation de S qui prolonge x_V , de sorte que $x \to x_S$ est une représentation de $\mathfrak{g}$. Supposons $x \to x_S$ complètement réductible. Alors, l'algèbre $S_{\mathcal{D}_0}$ est engendrée par un nombre fini d'éléments et $S_{\mathcal{D}}$ est un module de type fini sur $S_{\mathcal{D}_0}$.*

Soit $\overline{S} \subset S$ l'idéal des polynômes sans termes constants. Soit I l'idéal de S engendré par $S_{\mathcal{D}_0} \cap \overline{S}$ et soit $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ un système de générateurs de l'idéal I . On peut supposer que les s_i appartiennent à $S_{\mathcal{D}_0} \cap \overline{S}$ et sont homogènes (car, puisque les x_S conservent les degrés, chaque $S_{\mathcal{D}}$ est homogène). Soit S_1 la sous-algèbre de S engendrée par 1 et les s_i. On a $S_1 \subset S_{\mathcal{D}_0}$. Montrons que $S_1 = S_{\mathcal{D}_0}$. Pour, cela, nous allons montrer que tout élément homogène s de $S_{\mathcal{D}_0}$ est dans S_1, en raisonnant par récurrence sur le degré de s . Si s est un scalaire, notre assertion est évidente. Supposons-la démontrée lorsque le degré de s est $< n$, et étudions le cas où s est un élément homogène de degré n de $S_{\mathcal{D}_0}$.

Comme $s \in I$, on a $s = \sum_{i=1}^{p} s_i s_i'$, les s_i' étant des éléments de S qu'on peut supposer homogènes, avec $\deg . s_i' = \deg . s - \deg . s_i < n$. Alors, avec les notations de la prop.14, $s = s^{\natural} = \sum_{i=1}^{p} (s_i s_i')^{\natural} = \sum_{i=1}^{p} s_i s_i'^{\natural}$. Les $s_i'^{\natural}$ sont des éléments de $S_{\mathfrak{D}_0}$ homogènes et de degré $< n$ (parce que chaque $S_{\mathfrak{D}}$ est homogène). Ils sont donc dans M_1 d'après notre hypothèse de récurrence. Donc s est dans M_1, ce qui achève de prouver que $S_{\mathfrak{D}_0}$ est engendré par un nombre fini d'éléments.

Montrons maintenant que $S_{\mathfrak{D}}$ est un module de type fini sur $S_{\mathfrak{D}_0}$. Soit $x \to x_{V'}$ une représentation de classe $\mathfrak{D}^*$ (duale de la classe $\mathfrak{D}$) dans un espace V'. (Remarquons que, si $S_{\mathfrak{D}} \neq 0$, ce qu'on peut supposer, V' est de dimension finie, puisque l'espace des éléments de degré donné de S est stable pour les x_S et de dimension finie). Soit S' l'algèbre symétrique de V', $x_{S'}$ la dérivation de S' qui prolonge $x_{V'}$. L'algèbre $S \otimes S'$ s'identifie à l'algèbre symétrique de la somme directe $V+V'$. Considérons la représentation $x \to x_{V+V'}$ somme directe des représentations $x \to x_V$, $x \to x_{V'}$, et la représentation $x \to x_{S \otimes S'}$ produit tensoriel des représentations $x \to x_S$ et $x \to x_{S'}$. On voit facilement que $x_{S \otimes S'}$ est la dérivation de $S \otimes S'$ qui prolonge $x_{V+V'}$. Considérons un système fini de générateurs de l'algèbre $(S \otimes S')_{\mathfrak{D}_0}$. Comme les projecteurs de la bigraduation de $S \otimes S'$ sont permutables aux $x_{S \otimes S'}$, on peut supposer ces générateurs doublement homogènes. Soient $j_1, j_2, \dots, j_\ell$ ceux dont le deuxième degré est 1 ; si $(w_1, w_2, \dots, w_q)$ est une base de V', on a $j_i = \sum_{k=1}^{q} s_k^i \otimes w_k$, avec $s_k^i \in S$. Alors, $s_k^i \in S_{\mathfrak{D}}$ (prop.6 bis) donc le $S_{\mathfrak{D}_0}$-module M engendré par les s_k^i est contenu dans $S_{\mathfrak{D}}$. Montrons que $S_{\mathfrak{D}} = M$. Pour cela, soit $\hat{S}$ un sous-espace de S stable pour les x_S et dans lequel les x_S induisent une représentation de classe $\mathfrak{D}$, et montrons que $\hat{S} \subset M$.

On peut supposer $\hat{S} \subset S^r$ pour un certain r . Pour une base $s_1, s_2, \ldots, s_q$ de $\hat{S}$ bien choisie, $\sum_{i=1}^{q} s_i \otimes w_i$ est un élément de $(S \otimes S')_{\mathcal{D}_0}$ (prop.6 bis) doublement homogène de bidegré $(r,1)$, donc de la forme $\sum_{k=1}^{\ell} n_k j_k$, où les n_k sont des éléments de $(S \otimes S')_{\mathcal{D}_0}$ de bidegré $(r',0)$, c'est-à-dire des éléments de $S_{\mathcal{D}_0}$. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{q} s_i \otimes w_i = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{q} n_k (s_i^k \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{\ell} n_k s_i^k \right) \otimes w_i$$

donc $s_i = \sum_{k=1}^{\ell} n_k s_i^k \in M$.

<u>Théorème 2.- Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, de dimension finie, U son algèbre enveloppante, $x \to x_{\mathfrak{h}}$ une représentation de $\mathfrak{g}$ par des dérivations de $\mathfrak{h}$, x_U la dérivation de U qui prolonge $x_{\mathfrak{h}}$, de sorte que $x \to x_U$ est une représentation de $\mathfrak{g}$. Supposons $x \to x_U$ complètement réductible. Alors, l'algèbre $U_{\mathcal{D}_0}$ est engendrée par un nombre fini d'éléments, et $U_{\mathcal{D}}$ est un module à gauche (resp. à droite) de type fini sur $U_{\mathcal{D}_0}$.</u>

(Remarquons que, si $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie abélienne, on retrouve le th.1).

Considérons la représentation $x \to x_G$ de $\mathfrak{g}$ dans $G(U)$ associée à la représentation $x \to x_U$, et la représentation $x \to x_S$ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre symétrique S de l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$ définie en prenant pour x_S la dérivation de S qui prolonge $x_{\mathfrak{h}}$. D'après la prop.4 du § 2, l'isomorphisme canonique de S sur G(U) est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules. Donc la représentation $x \to x_S$ est complètement réductible, et on peut appliquer le th.1 aux représentations $x \to x_S$ et $x \to x_G$. On remonte aux propriétés de $x \to x_U$ par la technique habituelle. Le rédacteur, qui en a marre, laisse à son successeur le plaisir de mettre au point les détails.

AW 48

192

Exercices.

1\. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur le corps A. Soit ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace M . Soit σ la représentation associée de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre tensorielle de V . Montrer que le sous-espace des tenseurs symétriques et le sous-espace des tenseurs antisymétriques sont stables pour σ.

2\. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, sur l'anneau A, $x \to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$. Soient $Q = \mathcal{L}_2(M;M)$ et $x \to x_Q$ la représentation de $\mathfrak{g}$ dans Q déduite de la représentation $x \to x_M$. Pour qu'une application A-bilinéaire f de $M \times M$ dans M soit un invariant de $x \to x_Q$, il faut et il suffit que les x_M soient des dérivations de M muni de la multiplication définie par f .

3\. Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps A , $\mathfrak{g} = s\ell(V)$, U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, U_n l'ensemble des éléments de filtration $\leqslant n$ dans U , U_n l'ensemble des éléments symétriques homogènes d'ordre n dans U , $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. Soit $W_s = \overset{s}{\otimes} V$. La représentation identique de $\mathfrak{g}$ définit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans W_s qui se prolonge en un homomorphisme π_s de U dans l'algèbre $M_s = \mathcal{L}(W_s)$.

a\. Soit M'_s le sous-espace de M_s engendré par les éléments de la forme $\beta_1 \otimes \beta_2 \otimes \cdots \otimes \beta_s$, où $\beta_i \in \mathcal{L}(V)$ et où $\beta_i = 1$ pour au moins un i . Soit z un élément de U_s , $z_0 = \sum_{1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_s \leqslant m} a_{i_1 i_2 \ldots i_s} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_s}$ sa composante dans U^s , où les $a_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ sont symétriques par rapport aux permutations des indices . Montrer que $\pi_s(z) \equiv s! \sum_{1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_s \leqslant m} a_{i_1 i_2 \ldots i_s} \alpha_{i_1} \otimes \alpha_{i_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_{i_s}$ (mod. M'_s) .

b\. Déduire de a que, si N_s est le noyau de π_s , on a $N_s \cap U_s = 0$.

c\. Déduire de b que, pour tout $z \in U$, il existe une représentation de dimension finie π de l'algèbre associative U telle que $\pi(z) \neq 0$.

* 4. Une représentation est dite décomposable si elle est équivalente à la somme directe de deux représentations dans des modules non nuls, indécomposable dans le cas contraire. Montrer que, si A est un corps et si ρ est une représentation de degré fini, ρ est équivalente à une somme directe d'un nombre fini de représentations indécomposables (références éventuelle à un exerc. sur les modules indécomposables).

5. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $x \to x_M$ une représentation complètement réductible de $\mathfrak{g}$, M_0 le sous-module des éléments invariants, M_1 son supplémentaire stable pour les x_M. Soient U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $u \to u_M$ la représentation de U correspondant à la représentation donnée de $\mathfrak{g}$. Montrer que, pour tout $m \in M$, la composante de m dans M_0 est de la forme $u_M m$ où $u \in U$ (montrer qu'un sous-$\mathfrak{g}$-module simple de M_1, et un sous-$\mathfrak{g}$-module simple de M_0 sont de classes distinctes, et appliquer un résultat de Alg. VIII).

6. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur le corps A, M_1, M_2, N trois modules de représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$, N^* le module de représentation dual de N. Supposons M_1 et M_2 simples. Pour que le $\mathfrak{g}$-module M_1 soit isomorphe à un sous-$\mathfrak{g}$-module de $M_2 \otimes N$, il faut et il suffit que M_2 soit isomorphe à un sous-$\mathfrak{g}$-module de $M_1 \otimes N^*$ (utiliser la prop.6 bis).

* 7. a. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur le corps A, B un surcorps commutatif de A, M un $\mathfrak{g}$-module, N le sous-espace des éléments invariants de M. Alors, le sous-espace des éléments invariants de $M_{(B)}$ est égal à $N_{(B)}$.

b. Déduire de a et de la prop.6 bis que, si M_1 et M_2 sont des $\mathfrak{g}$-modules simples non isomorphes, il n'existe pas de $\mathfrak{g}_{(B)}$-modules simples isomorphes à la fois à un sous-$\mathfrak{g}_{(B)}$-module de $M_{1(B)}$ et à un sous-$\mathfrak{g}_{(B)}$-module de $M_{2(B)}$ (probablement, çà résulte aussi de théorèmes d'Algèbre VIII !).

8. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur le corps A, $x \to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace M de dimension finie. Soient $(x_1,\dots,x_n)$ une base de l'espace M , $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ la base duale de l'espace dual M^* .

a. Si f est une forme linéaire sur $\overset{r}{\otimes} M$, on a

$$f = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_r} f(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r})(x_{i_1}^* \otimes \dots \otimes x_{i_r}^*)$$

b. Soit B une forme bilinéaire non dégénérée sur M , invariante pour $\mathfrak{g}$. Soit $(x_1',x_2',\dots,x_n')$ la base de M telle que $B(x_i,x_j') = \delta_{ij}$. Soit f une forme linéaire invariante sur $\overset{r}{\otimes} M$. Déduire de a que
$\sum_{i_1,i_2,\dots,i_r} f(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r})(x_{i_1}' \otimes \dots \otimes x_{i_r}')$ est un élément invariant de $\overset{r}{\otimes} M$ indépendant du choix de la base (x_i).

c. Soient U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, U^* l'espace dual de l'espace U. La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ se prolonge en une représentation $x \to x_U$ de $\mathfrak{g}$ dans U définie par $x_U u = xu-ux$ pour tout $u \in U$. Donc U^* est muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-module. Pour qu'un élément f de U^* soit invariant, il faut et il suffit que $f(uv)=f(vu)$ quels que soient $u,v \in U$.

d. Soient $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, C une forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$, dont la restriction à $\mathfrak{h}$ soit non dégénérée. Soient $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(y_j')_{1 \leq j \leq n}$ deux bases de l'espace $\mathfrak{h}$ telles que $C(y_i,y_j')=\delta_{ij}$.
Soit r un nombre entier ≥ 1. Soit f une forme linéaire sur U telle que $f(uv)=f(vu)$ quels que soient $u \in U$, $v \in U$. Déduire de b et c que
$\sum_{i_1,i_2,\dots,i_r} f(y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_r}) y_{i_1}' y_{i_2}' \dots y_{i_r}'$ est un élément du centre de U indépendant du choix de la base (y_i).

e. Soit θ une permutation de $[1,r]$. Raisonnant de manière analogue, montrer que $u = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_r} f(y_{i_{\theta(1)}} y_{i_{\theta(2)}} \dots y_{i_{\theta(r)}})\, y_{i_1}' y_{i_2}' \dots y_{i_r}'$ est un élément du centre de U indépendant du choix de la base (y_i).

f. Supposons que r soit égal à 2, que θ soit la permutation identique, que B soit la forme bilinéaire associée à une représentation ρ de $\mathfrak{g}$, que f soit le caractère de la représentation de U associée à ρ . Alors, u est l'élément de Casimir correspondant à B et $\mathfrak{h}$.

Dans toute la fin du chapitre, A désigne un corps commutatif.

§ 4. Cohomologie des Algèbres de Lie.

1. Cochaînes.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A, et M un module de représentation de $\mathfrak{g}$. On désigne par $C^p(\mathfrak{g},M)$ l'espace des applications multilinéaires alternées de $\mathfrak{g}^p$ (considéré comme produit direct d'espaces vectoriels) dans M. On pose $C^0(\mathfrak{g},M)=M$, et, pour $p<0$, $C^p(\mathfrak{g},M)=0$. Soit $C^*(\mathfrak{g},M)$ la somme directe des espaces $C^p(\mathfrak{g},M)$. Les éléments de $C^*(\mathfrak{g},M)$ sont appelés les cochaînes de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M. Les cochaînes appartenant à $C^p(\mathfrak{g},M)$ sont dites de degré p.

Pour tout $y\in\mathfrak{g}$, nous désignerons par $\iota(y)$ l'endomorphisme de $C^*(\mathfrak{g},M)$ qui applique chaque sous-espace $C^p(\mathfrak{g},M)$ dans $C^{p-1}(\mathfrak{g},M)$ et qui, pour $p>0$, est donné par la formule

(1) $\quad (\iota(y).f)(x_1,x_2,\dots,x_{p-1}) = -f(y,x_1,x_2,\dots,x_{p-1})$

quels que soient $f\in C^p(\mathfrak{g},M)$ et $(x_1,x_2,\dots,x_{p-1})\in\mathfrak{g}^{p-1}$ (cf. Alg. III).

On a

(2) $\quad \iota(y)^2=0$

quel que soit $y\in\mathfrak{g}$.

La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ et la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M définissent une représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des applications multilinéaires de $\mathfrak{g}^p$ dans M. Il résulte aussitôt de la formule (2) du § 3 que $C^p(\mathfrak{g},M)$ est stable pour cette représentation. Il existe donc une représentation θ de $\mathfrak{g}$ dans $C^*(\mathfrak{g},M)$ telle que la restriction de $\theta(y)$ à $C^0(\mathfrak{g},M)$ soit y_M et que, pour $p>0$, la restriction de $\theta(y)$ à $C^p(\mathfrak{g},M)$ soit donnée par la formule

(3) $\quad (\theta(y)f)(x_1,\dots,x_p)= y_M.f(x_1,\dots,x_p)-\sum_{i=1}^{p} f(x_1,\dots,[y,x_i],\dots,x_p)$.

Puisque θ est une représentation de $\mathfrak{g}$, on a

(4) $\theta(x)\,\theta(y) - \theta(y)\,\theta(x) = \theta([x,y])$

quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$.

Enfin, soient $x,y \in \mathfrak{g}$, et $f \in C^p(\mathfrak{g},M)$. Quels que soient $x_1,x_2,\dots,x_{p-1} \in \mathfrak{g}$, on a :

$$(\theta(x)\iota(y)f)(x_1,\dots,x_{p-1}) = -x_M.f(y,x_1,\dots,x_{p-1}) + \sum_{i=1}^{p} f(y,x_1,\dots,[x,x_i],\dots,x_{p-1})$$

$$(\iota(y)\theta(x)f)(x_1,\dots,x_{p-1}) = -x_M.f(y,x_1,\dots,x_{p-1}) + f([x,y],x_1,\dots,x_{p-1}) + \sum_{i=1}^{p} f(y,x_1,\dots,[x,x_i],\dots,x_{p-1})$$

d'où

(5) $\theta(x)\,\iota(y) - \iota(y)\,\theta(x) = \iota([x,y])$.

2. <u>L'endomorphisme cobord</u>. (*) - Si $(x_1,x_2,\dots,x_r)$ est un élément de $\mathfrak{g}^r$ $(r>1)$, on notera $(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_r)$ l'élément de $\mathfrak{g}^{r-1}$ obtenu en mettant x_i dans la suite des composantes de $(x_1,x_2,\dots,x_r)$. Avec cette convention, nous définissons un endomorphisme d du A-module $C^*(\mathfrak{g},M)$, qui applique $C^p(\mathfrak{g},M)$ dans $C^{p+1}(\mathfrak{g},M)$, par les conditions suivantes :

(6) $(d\,f)(x) = -x_M f$ si $f \in C^0(\mathfrak{g},M) = M$

(7) $(d\,f)(x_1,x_2,\dots,x_{p+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} f([x_i,x_j],x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{p+1}) + \sum_i (-1)^i (x_i)_M f(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{p+1})$.

Dans le second membre de (7), la première somme porte sur tous les couples d'indices i,j tels que $1 \leq i < j \leq p+1$. La seconde porte sur les $i \in [1,p+1]$. Chacune d'elle donne une application multilinéaire <u>alternée</u> de $\mathfrak{g}^{p+1}$ dans M (vérification pénible !).

Quel que soit $y \in \mathfrak{g}$, on a

(8) $d\,\iota(y) + \iota(y)d = \theta(y)$

(*) Le lecteur trouvera une introduction plus naturelle (et plus longue) de certaines des notions ci-dessous en Algèbre homologique.

En effet, si $f \in C^0(\mathfrak{g}, M)$, on a

$$(d\,\iota(y)+\iota(y)d)f = \iota(y)df = -(df)(y) = y_M f = \theta(y)f \quad .$$

Et, si $f \in C^p(\mathfrak{g}, M)$ avec $p>0$, alors

$$(d\,\iota(y)f)(x_1,\dots,x_p) = \sum_{1\leq i<j\leq p}(-1)^{i+j}f(y,[x_i,x_j],x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots x_p) + \sum_{1\leq i\leq p+1}(-1)^{i+1}(x_i)_M\, f(y,x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_p)$$

$$(\iota(y)df)(x_1,\dots,x_p) = -df(y,x_1,\dots,x_p) = \sum_{1\leq j\leq p}(-1)^j f([y,x_j], x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_p) + \sum_{1\leq i<j\leq p}(-1)^{i+j}\, f([x_i,x_j],y,x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots, x_{p+1}) + \sum_{1\leq i\leq p}(-1)^i (x_i)_M\, f(y,x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_p) + y_M f(x_1,\dots,x_p)$$

d'où

$$((d\iota(y)+\iota(y)d)f)(x_1,\dots,x_p) = \sum_j (-1)^j f([y,x_j],\ x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_p) + y_M f(x_1,\dots,x_p) = (\theta(y)\ f)(x_1,\dots,x_p) \ .$$

Il est clair que, si f est une cochaîne de degré >0 et si $\iota(y)f=0$ pour tout $y\in\mathfrak{g}$, alors $f=0$. On va appliquer cette remarque à la démonstration de la formule

$$(9) \qquad d\theta(y) - \theta(y)d = 0$$

pour tout $y\in\mathfrak{g}$. On a, d'après (4), (5), (8)

$$\iota(x)(d\theta(y)-\theta(y)d) = \theta(x)\ \theta(y)-d\,\iota(x)\theta(y)-\iota([x,y])d-\theta(y)\,\iota(x)d$$
$$= \theta(x)\theta(y)+(d\iota([x,y])-d\theta(y)\iota(x))-\iota([x,y])d-(\theta(y)\theta(x)-\theta(y)d\,\iota(x))$$
$$= \theta(x)\theta(y)-\theta(y)\theta(x)-(d\,\iota([x,y])+\iota([x,y])d)-(d\theta(y)-\theta(y)d)\,\iota(x)$$
$$= -\ (d\theta(y)-\theta(y)d)\,\iota(x) \ .$$

Supposons donc que (9) soit vérifiée sur $C^p(\mathfrak{g}, M)$ (ce qui est trivial pour $p<0$), et soit $f\in C^{p+1}(\mathfrak{g}, M)$ avec $p+1 \geqslant 0$. Alors $f'=(d\theta(y)-\theta(y)d)f$ est de degré $p+2>0$. Le calcul précédent montre que $\iota(x)f'=0$ pour tout $x\in\mathfrak{g}$, donc $f'=0$.

On va montrer de la même manière que

$$(10) \qquad d^2 = 0 \ .$$

En effet, d'après (8) et (9), on a $i(x)d^2 = \theta(x)d - di(x)d = d\theta(x) - di(x)d = d^2 i(x)$. Supposons donc que (10) soit vérifiée sur $C^p(\mathfrak{g},M)$ (ce qui est trivial pour $p<0$), et soit $f \in C^{p+1}(\mathfrak{g},M)$, avec $p+1 \geqslant 0$. Alors, $d^2 f$ est de degré $p+3>0$. On a $i(x)d^2 f = d^2 i(x)f = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, donc $d^2 f = 0$.

3. L'espace de cohomologie.- La restriction de d à $C^p(\mathfrak{g},M)$ a un noyau que nous noterons $Z^p(\mathfrak{g},M)$. Les éléments de $Z^p(\mathfrak{g},M)$ s'appellent les cocycles de degré p de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M. La restriction de d à $C^{p-1}(\mathfrak{g},M)$ a une image (contenue dans $C^p(\mathfrak{g},M)$) que nous noterons $B^p(\mathfrak{g},M)$. Les éléments de $B^p(\mathfrak{g},M)$ s'appellent les cobords de degré p de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M. En vertu de (10), $B^p(\mathfrak{g},M) \subset Z^p(\mathfrak{g},M)$. L'espace quotient $Z^p(\mathfrak{g},M)/B^p(\mathfrak{g},M) = H^p(\mathfrak{g},M)$ s'appelle l'espace de cohomologie de degré p de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M. La somme directe $H^*(\mathfrak{g},M)$ des $H^p(\mathfrak{g},M)$ s'appelle l'espace de cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M.

Pour $p=0$, on a $B^0(\mathfrak{g},M)=0$, et $Z^0(\mathfrak{g},M) = H^0(\mathfrak{g},M)$ est le sous-espace des éléments invariants du $\mathfrak{g}$-module M.

Soient M et N deux $\mathfrak{g}$-modules, et φ un homomorphisme (au sens de la structure de $\mathfrak{g}$-modules) de M dans N. Alors, pour toute cochaîne $f \in C^p(\mathfrak{g},M)$, $\varphi \circ f$ est une cochaîne de $C^p(\mathfrak{g},N)$. L'homomorphisme φ se prolonge donc en une application A-linéaire φ' de l'espace $C^*(\mathfrak{g},M)$ dans l'espace $C^*(\mathfrak{g},N)$ qui conserve les degrés. On a :

(11) $$\varphi' \circ d = d \circ \varphi' .$$

En effet, si $f \in C^0(\mathfrak{g},M)=M$, on a, quel que soit $x \in \mathfrak{g}$:

$$((\varphi' \circ d)f)(x) = \varphi((df)(x)) = -\varphi(x_M f)$$

$$((d \circ \varphi')f)(x) = (d(\varphi f))(x) = -x_M(\varphi f) ,$$

donc $(\varphi'\circ d)f = (d\circ\varphi')f$. Si $f \in C^p(\mathfrak{g}, M)$ avec $p > 0$, on a :

$$((\varphi'\circ d)f)(x_1,\dots,x_{p+1}) = \varphi((df)(x_1,\dots,x_{p+1})) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1} \varphi(f([x_i,x_j],x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{p+1})) + \sum_i (-1)^i \varphi(x_i)_M f(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{p+1})$$

et

$$((d\circ\varphi')f)(x_1,\dots,x_{p+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\varphi f([x_i,x_j],x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{p+1}) + \sum_i (-1)^i (x_i)_N \varphi f(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{p+1})$$

donc $(\varphi'\circ d)f = (d\circ\varphi')f$.

De la formule (11), on déduit aussitôt que $\varphi'(Z^p(\mathfrak{g},M)) \subset Z^p(\mathfrak{g},N)$, $\varphi'(B^p(\mathfrak{g},M)) \subset B^p(\mathfrak{g},N)$. Donc φ' définit par passage au quotient un homomorphisme φ^p de l'espace $H^p(\mathfrak{g},M)$ dans l'espace $H^p(\mathfrak{g},N)$. En prolongeant par linéarité, on obtient un homomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $H^*(\mathfrak{g},M)$ dans $H^*(\mathfrak{g},N)$. Les homomorphismes φ^p et $\tilde{\varphi}$ sont dits <u>associés</u> à φ . Si ψ est un homomorphisme du $\mathfrak{g}$-module N dans un $\mathfrak{g}$-module P , et si $\tilde{\psi}$ désigne l'homomorphisme associé de $H^*(\mathfrak{g},N)$ dans $H^*(\mathfrak{g},P)$, on a $(\psi\circ\varphi)^\sim = \tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}$.

4. <u>Cohomologie à valeurs dans un sous-module, dans un module quotient</u>.- Soient M un $\mathfrak{g}$-module, L un sous-$\mathfrak{g}$-module de M , et N le $\mathfrak{g}$-module quotient M/L . Soient i l'injection canonique de L dans M , p la surjection canonique de M sur N . D'après ce qu'on a vu au n°3, i et p se prolongent en homomorphismes i' et p' de $C^*(\mathfrak{g},L)$ dans $C^*(\mathfrak{g},M)$ et de $C^*(\mathfrak{g},M)$ dans $C^*(\mathfrak{g},N)$. D'ailleurs, si $f \in C^*(\mathfrak{g},L)$, f s'identifie de manière évidente à un élément de $C^*(\mathfrak{g},M)$, qui n'est autre que i'(f). Nous considèrerons donc désormais $C^*(\mathfrak{g},L)$ comme un sous-espace de $C^*(\mathfrak{g},M)$. Ce sous-espace est le noyau de p'. En considérant un supplémentaire de L dans l'espace M, on voit que toute cochaîne de $C^*(\mathfrak{g},N)$ provient d'une cochaîne de $C^*(\mathfrak{g},M)$ par passage au quotient.

Nous pouvons donc identifier $C^*(\mathfrak{g},N)$ au quotient $C^*(\mathfrak{g},M)/C^*(\mathfrak{g},L)$. Avec ces conventions, i' est l'injection canonique de $C^*(\mathfrak{g},L)$ dans $C^*(\mathfrak{g},M)$, et p' est la surjection canonique de $C^*(\mathfrak{g},M)$ sur $C^*(\mathfrak{g},M)/C^*(\mathfrak{g},L)$. Soient i^n et p^n les homomorphismes associés de $H^n(\mathfrak{g},L)$ dans $H^n(\mathfrak{g},M)$ et de $H^n(\mathfrak{g},M)$ dans $H^n(\mathfrak{g},N)$.

<u>Proposition 1</u>.- <u>L'image de</u> i^n <u>est égale au noyau de</u> p^n .

En effet, on a $p'\circ i'=0$, donc $p^n\circ i^n = 0$, donc l'image de i^n est contenue dans le noyau de p^n . Considérons maintenant un élément c du noyau de p^n . Cet élément provient par passage au quotient d'un cocycle $f\in Z^n(\mathfrak{g},M)$, et l'on a $p'f\in B^n(\mathfrak{g},N)$. Autrement dit, $p'f=dg$, avec une cochaîne $g\in C^{n-1}(\mathfrak{g},N)$. Ecrivons $g = p'h$, où $h\in C^{n-1}(\mathfrak{g},M)$. On a $p'f = dp'h = p'dh$, donc $f-dh$ appartient à $i'(Z^n(\mathfrak{g},L))$. Par suite, c appartient à l'image de i^n .

5. <u>Cohomologie de degré 1 et représentations</u>.- Soient $x \to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace M , L un sous-espace de M , stable pour les x_M , N l'espace quotient M/L . Soit $V = \mathcal{L}(N,L)$. Les représentations de $\mathfrak{g}$ dans N et L définissent une représentation $x \to x_V$ de $\mathfrak{g}$ dans V . Nous nous proposons de définir un élément de $H^1(\mathfrak{g},V)$.

Soit λ l'application canonique de M sur N . Soit μ une application linéaire de l'espace N dans l'espace M telle que $\lambda\circ\mu$ soit l'application identique de N . Pour tout $x\in\mathfrak{g}$, soit f(x) l'application linéaire de N dans M définie par $f(x)u = x_M\mu u - \mu x_N u$. Puisque $\lambda x_M = x_N\lambda$, on voit que $\lambda f(x)u = 0$, et par conséquent $f(x)N \subset L$. Donc $f(x)\in V$, et il est immédiat que $f\in C^1(\mathfrak{g},V)$.

<u>Proposition 2</u>.-<u>La cochaîne f est un cocycle</u>. <u>Sa classe c dans</u> $H^1(\mathfrak{g},V)$ <u>ne dépend pas du choix de</u> μ .

En effet, on a :

$$(df)(x,y) = f([x,y]) - x_V(f(y)) + y_V(f(x))$$

Or, pour tout $u \in L$,

$$f([x,y])u = [x,y]_M \mu u - \mu [x,y]_N u$$

$$(x_V f(y))u = x_L(f(y)u) - f(y)(x_N u) = x_M y_M \mu u - x_M \mu y_N u - y_M \mu x_N u + \mu y_N x_N u .$$

$$(y_V f(x))u = y_L(f(x)u) - f(x)(y_N u) = y_M x_M \mu u - y_M \mu x_N u - x_M \mu y_N u + \mu x_N y_N u$$

$$-(x_V f(y))u + (y_V f(x))u = (-x_M y_M + y_M x_M)\mu u + \mu(x_N y_N - y_N x_N)u =$$

$$= -[x,y]_M \mu u + \mu [x,y]_N u .$$

Donc $(df)(x,y)=0$, ce qui prouve que f est un cocycle. Soit maintenant μ' une autre application linéaire de N dans M telle que $\lambda' \circ \mu'$ soit l'application identique de N. L'application $h = \mu - \mu'$ est une application de N dans L et peut donc être considérée comme une cochaîne de degré 0 de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans V. On a $(dh)(x) = -x_V h = -x h + h x_N =$ $= -x_M \mu + x_M \mu' + \mu x_N - \mu' x_N$. Si l'on désigne par f' le cocycle correspondant à μ', on a donc $dh(x) = -f(x) + f'(x)$, ce qui prouve que f et f' appartiennent à la même classe de cohomologie.

<u>Proposition 3.- Pour qu'il existe dans M un sous-espace supplémentaire de N et stable pour les x_M, il faut et il suffit que la classe c de $H^1(\mathfrak{g}, V)$ soit nulle.</u>

En effet, si un tel sous-espace existe, on peut choisir pour μ un homomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules. Alors, $f(x) = x_M \mu - \mu x_L$ est nul pour tout x, de sorte que $f=0$. Réciproquement, supposons $c=0$. Etant donnée une application linéaire μ de N dans M telle que $\lambda \circ \mu$ soit l'application identique de N, il existe une application linéaire h de N dans L telle que $x_M \mu - \mu x_N = (dh)(x) = - x_L h + h x_N$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, autrement dit telle que $x_M(\mu + h) = (\mu + h) x_N$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Ainsi, $\mu + h$ est un homomorphisme du $\mathfrak{g}$-module N dans le $\mathfrak{g}$-module M, et $\lambda\circ(\mu+h) = \lambda\circ\mu$ est l'application identique de N. Par conséquent, $(\mu+h)(N)$ est un sous-espace de M supplémentaire de L et stable pour les x_M.

. Cohomologie de degré 2 et extensions à noyau abélien.- Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux algèbres de Lie, $\mathfrak{g}$ une extension de $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{b}$, d'injection λ et de surjection μ. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, ad x laisse stable l'idéal $\mathfrak{b}$. Si $\mathfrak{b}$ est abélien, ce que nous supposons dans tout ce n°, la restriction de ad x à $\mathfrak{b}$ est nulle pour $x \in \mathfrak{b}$. Par passage au quotient, l'extension donnée de $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{b}$ définit donc une représentation de $\mathfrak{a}$ dans l'espace $\mathfrak{b}$. Nous désignerons par B le $\mathfrak{a}$-module correspondant.

Soit ν une application linéaire de l'espace $\mathfrak{a}$ dans l'espace $\mathfrak{g}$ telle que $\mu\circ\nu$ soit l'application identique de $\mathfrak{a}$. Posons $f(x,y) = [\nu x, \nu y] - \nu([x,y])$ quels que soient $x,y \in \mathfrak{a}$. On a $\mu f(x,y) = [(\mu\circ\nu)x, (\mu\circ\nu)y] - (\mu\circ\nu)([x,y]) = 0$, et $f(x,x)=0$ quels que soient $x,y \in \mathfrak{a}$. Donc $f \in C^2(\mathfrak{a},B)$.

Proposition 4.- La cochaîne f est un cocycle. Sa classe c dans $H^2(\mathfrak{a},B)$ ne dépend pas du choix de ν.

Quels que soient $x,y,z \in \mathfrak{a}$, on a :

$(df)(x,y,z) = f([x,y],z) - f([x,z],y) + f([y,z],x) - x_B f(y,z) - y_B f(x,z) - z_B f(x,y)$.

Or, $f([x,y],z) = [\nu([x,y]), \nu z] - \nu([[x,y],z])$, et

$x_B f(y,z) = [\nu x, f(y,z)] = [\nu x, [\nu y, \nu z]] - [\nu x, \nu([y,z])]$.

Grâce à l'identité de Jacobi, on voit alors que $(df)(x,y,z)=0$, de sorte que f est un cocycle. Soit maintenant ν' une autre application linéaire de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que $\mu\circ\nu'$ soit l'application identique de $\mathfrak{a}$. Alors, $g = \nu' - \nu \in C^1(\mathfrak{a}, B)$, et on a :

$$(dg)(x,y) = g([x,y]) - x_B g(y) + y_B\, g(x)$$
$$= \nu'([x,y]) - \nu([x,y]) - [\nu(x), \nu'(g)] + [\nu(x), \nu(g) + [\nu'(g), \nu'(x)]$$
$$-[\nu'(g), \nu(x)] = \nu'([x,y]) - [\nu'(x), \nu'(y)] - \nu([x,y]) + [\nu(x), \nu(y)] .$$

Si l'on désigne par f' le cocycle correspondant à ν', on a donc

$$(12) \qquad dg = f - f'$$

ce qui prouve que f et f' appartiennent à la même classe de cohomologie.

Proposition 5.- Pour que l'extension $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{b}$ soit inessentielle, il faut et il suffit que la classe c de $H^2(\mathfrak{a}, B)$ soit nulle.

Si l'extension est inessentielle, on peut choisir pour ν un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ sur une sous-algèbre supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$, auquel cas le cocycle correspondant est nul. Réciproquement, supposons c = 0. Etant donnée une application linéaire ν de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que $\mu \circ \nu$ soit l'application identique de $\mathfrak{a}$, il existe une application linéaire g de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{b}$ telle que

$[\nu x, \nu y] - \nu([x,y]) = g([x,y] - x_B g(y) + y_B g(x) = g([x,y]) - [\nu(x), g(y)] + + [\nu(y), g(x)]$. Soit alors $\rho = \nu + g$. On a $[\rho x, \rho y] - \rho([x,y]) = = [\nu x, \nu y] + [\nu x, gy] + [gx, \nu y] - \nu([x,y]) - g([x,y]) = 0$. Ainsi, ρ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et $\mu \circ \rho = \mu \circ \nu$ est l'application identique de $\mathfrak{a}$. Par conséquent, $\rho(\mathfrak{a})$ est une sous-algèbre supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$. Ceci achève la démonstration.

Une extension à noyau abélien $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}$ définit : 1°) une structure de $\mathfrak{a}$-module, soit B, sur $\mathfrak{b}$; 2°) une classe de $H^2(\mathfrak{a}, B)$. Réciproquement

Proposition 6.- Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, B un module de représentation de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ l'espace vectoriel B considéré comme algèbre de Lie abélienne, f un cocycle de degré 2 de $\mathfrak{a}$ à valeurs dans B. Il existe une extension de $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{b}$ telle que : 1°) le $\mathfrak{a}$-module correspondant est identique à B ; 2°) la classe de $H^2(\mathfrak{a},B)$ correspondante est égale à celle de f .

Définissons dans l'espace $\mathfrak{a}\times B$ une structure d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ en posant, quels que soient $x,y\in\mathfrak{a}$ et $u,v\in B$:

$$[(x,u),(y,v)] = ([x,y], f(x,y) + x_B v - y_B u) .$$

Le crochet ainsi défini est anticommutatif. Il vérifie l'identité de Jacobi, car :

$$[[(x,u),(y,v)],(z,w)] = ([[x,y],z], f([x,y],z) + [x,y]_B w - z_B f(x,y) - z_B x_B v + z_B y_B u)$$

et l'on a :

$$f([x,y],z) + f([y,z],x) + f([z,x],y) - x_B f(y,z) - y_B f(z,x) - z_B f(x,y) = (df)(x,y,z) = 0$$

$$[x,y]_B w + [y,z]_B u + [z,x]_B v - z_B x_B v + z_B y_B u - x_B y_B w + x_B z_B v - y_B z_B u + y_B x_B w = 0$$

L'application $(x,u)\to x$ est un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{a}$, dont le noyau est abélien et s'identifie à $\mathfrak{b}$. Soit ν l'application linéaire $x\to(x,0)$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. On a, pour $x\in\mathfrak{a}$ et $u\in\mathfrak{b}$, $[\nu x,u] = [(x,0),(0,u)] = (0,x_B u) = x_B u$, de sorte que le $\mathfrak{a}$-module défini par l'extension $\mathfrak{g}$ est bien B . Enfin, $[\nu x,\nu y] - \nu([x,y]) = (0,f(x,y)) = f(x,y)$, de sorte que la classe de $H^2(\mathfrak{a},B)$ correspondant à l'extension $\mathfrak{g}$ est bien égale à celle de f .

7. Formes bilinéaires et cohomologie.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur A , $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, B une forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$ dont la restriction à $\mathfrak{h}$ est non dégénérée, t l'élément de Casimir correspondant, (y_i) et (y'_i) deux bases de $\mathfrak{h}$ telles que $B(y_i, y'_j) = \delta_{ij}$. Soient $x\to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace M , ρ l'endomorphisme de $C^*(\mathfrak{g},M)$ qui applique chaque sous-espace

$C^p(\mathfrak{g},M)$ dans $C^{p-1}(\mathfrak{g},M)$ et qui, pour $p>0$, est défini par :

$$(\rho f)(x_1,\dots,x_{p-1}) = \sum_{k=1}^{n}(y_k)_M f(y'_k, x_1,\dots,x_{p-1}) .$$

Soit enfin Γ l'endomorphisme de l'espace $C^*(\mathfrak{g},M)$ prolongeant $-t_M$ qui applique toute cochaîne f de degré >0 sur la cochaîne $-t_M\circ f$.

<u>Lemme 1</u>.- <u>On a</u> : $\rho d + d\rho = \Gamma$, <u>et</u> $\Gamma d = d\Gamma$.

En effet, si $f\in C^0(\mathfrak{g},M) = M$, on a :

$$(\rho d + d\rho)f = \rho df = \sum_k (y_k)_M (df)(y'_k) = -\sum_k (y_k)_M(y'_k)_M f = -t_M f = \Gamma f .$$

Si $f\in C^1(\mathfrak{g},M)$, on a :

$$(d\rho f)(x) = -x_M(\rho f) = -x_M(\sum_k (y_k)_M f(y'_k))$$

$$(\rho df)(x) = \sum_k (y_k)_M df(y'_k,x) = \sum_k (y_k)_M[f([y'_k,x])-(y'_k)_M f(x)+x_M f(y'_k)]$$

$$((d\rho+\rho d)f)(x) = \Gamma f(x)+ \sum_k [y_k,x]_M f(y'_k) + \sum_k (y_k)_M f([y'_k ,x]) .$$

Utilisant les notations du § 3, n°4, et les formules (8),(9),(10) de ce n°, on a :

$$\sum_k [y_k,x]_M f(y'_k) = -\sum_k \sum_\ell a_{k\ell} (y_\ell)_M f(y'_k)$$

$$\sum_k (y_k)_M f([y'_k,x]) = -\sum_k \sum_\ell a'_{k\ell} (y_k)_M f(y'_\ell)$$

d'où $((d\rho + \rho d)f(x) =(\Gamma f)(x)$.

Enfin, si $f\in C^p(\mathfrak{g},M)$, avec $p>1$, on a :

$$\begin{aligned}(d\rho f)(x_1,\dots,x_p) &= \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}(\rho f)([x_i,x_j],x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_p)\\ &\quad+ \sum_i (-1)^i(x_i)_M(\rho f)(x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_p)\\ &= \sum_{i<j}\sum_k (-1)^{i+j+1}(y_k)_M f(y'_k,[x_i,x_j],x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_p) +\\ &\quad+\sum_i\sum_k (-1)^i(x_i)_M(y_k)_M f(y'_k, x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\rho df)(x_1,\dots,x_p) &= \sum_k (y_k)_M(df)(y'_k, x_1,\dots,x_p)\\ &= \sum_k\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}(y_k)_M f([x_i,x_j], y'_k , x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_p)\\ &\quad+\sum_k\sum_i (y_k)_M(-1)^i f([y'_k ,x_i], x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_p)\\ &\quad+\sum_k\sum_i (y_k)_M (-1)^{i+1}(x_i)_M f(y'_k , x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_p)\\ &\quad-\sum_k (y_k)_M(y'_k)_M f(x_1,\dots,x_p)\end{aligned}$$

$((d\rho+\rho d)f)(x_1,\ldots,x_p) = \Gamma f(x_1,\ldots,x_p) + \sum_i \sum_k (-1)^i [x_i, y_k]_M$
$f(y'_k, x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_p) + \sum_i \sum_k (-1)^i (y_k)_M f([y'_k, x_i], x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_p)$.

On voit comme plus haut que, pour $i=1,2,\ldots,p$

$$\sum_k [x_i, y_k]_M f(y'_k, x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_p) + \sum_k (y_k)_M f([y'_k, x_i], x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_p) = 0$$

de sorte que $(d\rho+\rho d)f = \Gamma f$. Donc $d\rho+\rho d = \Gamma$ et par suite $\Gamma d = \rho d^2 + d\rho d = d\rho d = d\Gamma$.

Dans le langage de l'Algèbre homologique, Γ est un opérateur d'homotopie.

<u>Proposition 7.</u>- <u>Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie de dimension finie sur</u> A, $\mathfrak{h}$ <u>un idéal de</u> $\mathfrak{g}$, $x \to x_M$ <u>une représentation irréductible de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans un espace</u> M <u>de dimension finie</u>, B <u>la forme bilinéaire associée</u>. <u>Si la restriction de</u> B <u>à</u> $\mathfrak{h}$ <u>est non dégénérée, et si</u> dim $\mathfrak{h} \neq 0$ <u>dans</u> A, <u>on a</u> $H^p(\mathfrak{g}, M)=0$ <u>pour tout</u> p.

En effet, soit t l'élément de Casimir correspondant à $\mathfrak{h}$ et B. D'après la prop.12 du § 3, t_M est un automorphisme de l'espace vectoriel M. Conservant les notations antérieures, Γ est donc un automorphisme de l'espace vectoriel $C^*(\mathfrak{g}, M)$, permutable avec d. Par suite, Γ induit, pour tout p, un automorphisme des espaces vectoriels $Z^p(\mathfrak{g}, M)$ et $B^p(\mathfrak{g}, M)$. Mais, si $f \in Z^p(\mathfrak{g}, M)$, on a $\Gamma f = (d\rho + \rho d)f = d\rho f \in B^p(\mathfrak{g}, M)$. Donc $Z^p(\mathfrak{g}, M) = B^p(\mathfrak{g}, M)$, de sorte que $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Dans toute la fin du chapitre, les algèbres de Lie et les modules de représentation considérés sont supposés de dimension finie, sauf mention expresse du contraire.

§ 5. Algèbres de Lie nilpotentes.

Définition des algèbres de Lie nilpotentes.- Définition 1.- Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite nilpotente s'il existe une suite finie décroissante d'idéaux $(\mathfrak{g}_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de $\mathfrak{g}$, avec $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_p = 0$, telle que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ pour $0 \leqslant i < p$.

Une algèbre de Lie abélienne est nilpotente.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A, B un surcorps commutatif de A. Alors, $\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si $\mathfrak{g}_{(B)}$ est nilpotente.

Proposition 1.- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Pour que $\mathfrak{g}$ soit nilpotente, il faut et il suffit que $C^k(\mathfrak{g})=0$ pour k assez grand, ou que $C_k(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$ pour k assez grand.

Si $C^k(\mathfrak{g})=0$ (resp. $C_k(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$), il est clair que la suite $C^0(\mathfrak{g}), C^1(\mathfrak{g}), \ldots, C^k(\mathfrak{g})$ (resp. $C_k(\mathfrak{g}), C_{k-1}(\mathfrak{g}), \ldots, C_0(\mathfrak{g})$) possède les propriétés de la déf. 1, donc que $\mathfrak{g}$ est nilpotente. Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(\mathfrak{g}_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ possèdent les propriétés de la déf. 1. On voit par récurrence sur i que $\mathfrak{g}_i \supset C^i(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{g}_{p-i} \subset C_i(\mathfrak{g})$. Donc $C^p(\mathfrak{g})=0$ et $C_p(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$, d'où la proposition.

Corollaire 1.- Le centre d'une algèbre de Lie nilpotente non nulle est non nul.

Corollaire 2.- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Pour que $\mathfrak{g}$ soit nilpotente, il faut et il suffit qu'il existe un entier i tel que

$\operatorname{ad} x_1 \circ \operatorname{ad} x_2 \circ \ldots \circ \operatorname{ad} x_i = 0$ quels que soient les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_i$ de $\mathfrak{g}$.

En effet, $C^i(\mathfrak{g})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de la forme $[x_1,[x_2,\ldots,[x_{i-1},x_i]\ldots]]$ quand $x_1,x_2,\ldots,x_i$ parcourant $\mathfrak{g}$.

Corollaire 3.- La forme de Killing d'une algèbre de Lie nilpotente est nulle.

En effet, quels que soient x et y dans une algèbre de Lie nilpotente, $\mathrm{ad}\, x\circ \mathrm{ad}\, y$ est nilpotent d'après le cor.2, donc de trace nulle.

Proposition 2.- Une sous-algèbre, une algèbre quotient, une extension centrale d'une algèbre de Lie nilpotente, sont nilpotentes. Une algèbre produit d'algèbres de Lie nilpotentes est nilpotente.

En effet, soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}'$ une sous-algèbre, $\mathfrak{u}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$, f l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, on a $C^k\mathfrak{g}=0$ pour un entier k, donc $C^k\mathfrak{g}'\subset C^k\mathfrak{g}=0$ et $C^k\mathfrak{h}=f(C^k\mathfrak{g})=0$, donc $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h}$ sont nilpotentes. Si $\mathfrak{h}$ est nilpotente et $\mathfrak{u}$ contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$, on a $C^k\mathfrak{h}=0$ pour un entier k, donc $C^k\mathfrak{g}\subset\mathfrak{u}$, donc $C^{k+1}\mathfrak{g}\subset[\mathfrak{u},\mathfrak{g}]=0$, de sorte que $\mathfrak{g}$ est nilpotente. Enfin, l'assertion relative aux produits résulte par exemple du cor.2 de la prop.1.

Le théorème d'Engel.- Lemme 1.- Soient V un espace vectoriel sur A, E l'espace vectoriel des endomorphismes de V. Si x est un endomorphisme nilpotent de V, l'application $y\longrightarrow[x,y]$ de E dans E est nilpotente.

En effet, si f désigne cette application, $f^m(y)$ est une somme de termes de la forme $\pm x^i y x^j$ avec $i+j=m$. Si $x^k=0$, on a donc $f^{2k}(y)=0$ pour tout y.

Théorème 1 (Engel).- Soient V un espace vectoriel sur A, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie dont les éléments sont des endomorphismes nilpotents de V. Si $V\neq 0$, il existe un $u\neq 0$ dans V tel que $xu=0$ pour tout $x\in\mathfrak{g}$.

La démonstration procède par récurrence sur la dimension n de $\mathfrak{g}$. Le théorème est évident si n=0. Supposons-le vrai pour les algèbres de dimension $<$ n.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ de dimension $m < n$. Si $x \in \mathfrak{h}$, ad x applique $\mathfrak{h}$ dans lui-même et définit par passage au quotient un endomorphisme $\sigma(x)$ de l'espace $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. D'après le lemme 1, ad x est nilpotent, donc $\sigma(x)$ est nilpotent. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe un élément non nul de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ qui est annulé par tous les $\sigma(x)$, $x \in \mathfrak{h}$. Autrement dit, il existe $y \in \mathfrak{g}$, $y \notin \mathfrak{h}$, tel que $[x,y] \in \mathfrak{h}$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$. Il en résulte aussitôt que $\mathfrak{h}$ est un idéal dans une certaine sous-algèbre de dimension m+1 de $\mathfrak{g}$.

On en conclut (par itération à partir de $\mathfrak{h}=0$) que $\mathfrak{g}$ possède un idéal de dimension n-1. Soient $\mathfrak{n}$ un tel idéal, a un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{n}$. Faisant usage à nouveau de l'hypothèse de récurrence, les $u \in V$ tels que $xu=0$ pour tout $x \in \mathfrak{n}$ forment un sous-espace $U \neq 0$ de V, stable pour les endomorphismes de $\mathfrak{g}$ (§ 3, prop. ~~4~~5) et en particulier pour a. Puisque a est un endomorphisme nilpotent de V, il existe un élément non nul de U qui est annulé par a, donc par tout élément de $\mathfrak{g}$.

<u>Corollaire 1.- Pour qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit nilpotente, il faut et il suffit que, pour tout</u> $x \in \mathfrak{g}$, ad x <u>soit nilpotent</u>.

En effet, la condition est nécessaire d'après le cor. 2 de la prop. 1. Supposons démontrée sa suffisance pour les algèbres de Lie de dimension $<$ n ($n \neq 0$). Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n telle que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, ad x soit nilpotent. Le théorème d'Engel, appliqué à l'ensemble des ad x, $x \in \mathfrak{g}$, prouve que le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ est non nul. Alors, $\mathfrak{g}$ est extension centrale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, qui est nilpotente d'après notre hypothèse de récurrence. On conclut en appliquant (la prop. 2.

Corollaire 2.- Soient V un espace vectoriel, une algèbre de Lie dont les éléments sont des endomorphismes nilpotents de V. Alors, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente.

Ceci résulte aussitôt du lemme 1 et du cor.1 .

3. *Le plus grand idéal nilpotent d'une algèbre de Lie.- Lemme 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, $x \to x_M$ une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ dans un espace M. Si, pour tout $x \in \mathfrak{a}$, x_M est nilpotent, alors $x_M=0$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$.*

En effet, soit N le sous-espace de M formé des $u \in M$ tels que $x_M u=0$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$. D'après le th. d'Engel, $N \neq 0$. D'autre part, pour tout $y \in \mathfrak{g}$, N est stable pour y_M (§ 3, prop.5). Donc $N=M$, ce qui prouve le lemme.

Lemme 3.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, M un module de représentation de $\mathfrak{g}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes : 1°- pour tout $x \in \mathfrak{a}$, x_M est nilpotent. 2°- pour tout $x \in \mathfrak{a}$, x_M est dans le radical de l'algèbre associative engendrée par 1 et les y_M, $y \in \mathfrak{g}$.

En effet, il est clair que la condition 2° entraîne la condition 1°. Réciproquement, supposons remplie la condition 1°. Soit $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_p = 0$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module M. Chaque quotient $Q_i = M_i/M_{i+1}$ $(0 \leqslant i < p)$ est un $\mathfrak{g}$-module simple ; pour tout $x \in \mathfrak{a}$, l'endomorphisme x_{Q_i} (déduit de x_M par restriction à M_i et passage au quotient) est nilpotent, donc nul d'après le lemme 2 ; autrement dit, $x_M M_i \subset M_{i+1}$ pour $0 \leqslant i < p$. Quel que soit l'endomorphisme f dans l'algèbre associative engendrée par 1 et les y_M , $y \in \mathfrak{g}$, on a $f(M_i) \subset M_i$ $(0 \leqslant i \leqslant p)$, donc $(x_M f)^p M = 0$. D'où le lemme (Alg.VIII).

Soient une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{a}$ est un *idéal nilpotent* de $\mathfrak{g}$ si l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est nilpotente.

Proposition 3.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Pour que $\mathfrak{a}$ soit un idéal nilpotent, il faut et il suffit que, pour tout $x \in \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ soit nilpotent.

En effet, si $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ est nilpotent, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x$, qui est la restriction de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ à $\mathfrak{a}$, est nilpotent. Réciproquement, si $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x$ est nilpotent, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ est nilpotent parce que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ applique $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}$. Ceci, avec le cor.1 du th.1, prouve la proposition.

Théorème 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, E l'algèbre associative engendrée par 1 et les ad x quand x parcourt $\mathfrak{g}$, R le radical de E. L'ensemble $\mathfrak{n}$ des $y \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathrm{ad}\, y \in R$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$.

En effet, il est clair que $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. D'autre part, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, y$ est nilpotent pour tout $y \in \mathfrak{n}$, donc $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent. Soit maintenant $\mathfrak{n}'$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. D'après la prop.3 et le lemme 3, on a $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, y \in R$ pour tout $y \in \mathfrak{n}'$. Donc $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{n}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire.- L'idéal $\mathfrak{n}$ est orthogonal à $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing.

En effet, quels que soient $x \in \mathfrak{n}$ et $y \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y$ est nilpotent d'après le th.2, donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y) = 0$.

Soit B un surcorps commutatif de A. Alors, $\mathfrak{n}_{(B)}$ est égal au plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}'$ de $\mathfrak{g}_{(B)}$. En effet, $\mathfrak{n}_{(B)}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}_{(B)}$, donc $\mathfrak{n}_{(B)} \subset \mathfrak{n}'$. Réciproquement, soit y un élément de $\mathfrak{n}'$, et montrons que $y \in \mathfrak{n}_{(B)}$. Soit E' l'algèbre associative (sur B) engendrée par 1 et les $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}(B)}\, x$ quand x parcourt $\mathfrak{g}_{(B)}$. L'algèbre E' s'identifie canoniquement à $E_{(B)}$ (d'après Alg.VIII, lemme 1, p.23 !!!). Soit R' le radical de $E' = E_{(B)}$. On a $R' \subset R_{(B)}$ (cf. Alg.VIII, moyennant les hypothèses restrictives sur B, inutiles ici parce que E est de dimension finie - Serre dixit). Ecrivons $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$, où les y_i sont dans $\mathfrak{g}$ et où les λ_i sont linéairement indépendants sur A . On a : $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{(B)}} y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{(B)}} y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} y_i)_{(B)} \in R' \subset R_{(B)}$, donc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} y_i \in R$ et par suite $y_i \in \mathfrak{n}$, donc $y \in \mathfrak{n}_{(B)}$.

Exercices.

1. Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ des algèbres de Lie sur A , $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ leurs plus grands idéaux nilpotents. Montrer que le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ est égal à $\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2$. (Pour montrer que $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2$, observer que les images canoniques de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont des idéaux nilpotents).

2. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, p (resp. q) le plus petit entier tel que $C^p\mathfrak{g} = 0$ (resp. $C_q\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$). Montrer que $p=q$ et que $C_i\mathfrak{g} \supset C^{p-i}\mathfrak{g}$ (utiliser le raisonnement de la prop.1).

3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension 1 sur A , e un élément non nul de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ une algèbre de Lie abélienne, u un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}'$. Considérons l'application $\lambda e \longrightarrow \lambda u$ ($\lambda \in A$) comme une représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}'$. Formons le produit croisé $\mathfrak{h}$ correspondant, dans lequel $\mathfrak{g}'$ est un idéal et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre. Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{h}$.

a. Pour que $\mathfrak{h}$ soit nilpotent, et il faut et il suffit que l'endomorphisme u soit nilpotent (si $\mathfrak{h}$ est nilpotent, exprimer que ad e est nilpotent ; si u est nilpotent, montrer que $C^k\mathfrak{h} = 0$ pour k assez grand en observant d'abord que $D\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}'$).

b. Pour que B=0, il faut et il suffit que $Tr(u^2)=0$ (observer que est orthogonal à $\mathfrak{h}$ pour B d'après le cor. du th.2).

c. Déduire de a et b qu'il existe des algèbres de Lie non nilpotentes dont la forme de Killing est nulle.

d. Déduire de a que, dans une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ nilpotente, on peut avoir $C_i\mathfrak{g} = C^{p-i}\mathfrak{g}$.

4. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotent, $\mathfrak{z}$ son centre, $\mathfrak{b}$ un idéal non nul de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{z}\cap\mathfrak{b} \neq 0$. (Posant $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}_k = [\mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{g}]$, il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $\mathfrak{b}_p \neq 0$ et $\mathfrak{b}_{p+1} = 0$; alors, $\mathfrak{b}_p \subset \mathfrak{z}\cap\mathfrak{b}$).

5. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ l'idéal intersection des $C^p\mathfrak{g}$.

a. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est nilpotente.

b. Montrer qu'il existe une sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{h}$. (Raisonner par récurrence sur dim $\mathfrak{g}$. Supposant $\mathfrak{g}$ non nilpotente, soit $x \in \mathfrak{g}$ tel que $I = \bigcap_k (\mathrm{ad}\ x)^k\mathfrak{g} \neq 0$. Soit $\mathfrak{n}$ la réunion des noyaux des $(\mathrm{ad}\ x)^k$, qui est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ d'après l'exerc.9 du § 1. Alors, $\mathfrak{g}$ est la somme directe de I et $\mathfrak{n}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathfrak{n}$ est somme de l'intersection $\mathfrak{m}$ des $C^p\mathfrak{n}$, et d'une sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{h}$. Enfin, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}$ et $I \subset \mathfrak{a}$).

6. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente. Toute sous-algèbre $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ est sous-invariante (§ 1, exerc.11). (Montrer que les $C^p\mathfrak{g} + \mathfrak{a}$, $p=0,1,\dots$, forment une suite de composition joignant $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{a}$).

7. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ l'intersection des $C^p\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{z} \not\subset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}$ a un centre non nul. (Ecrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + k$, avec k sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ (exerc.5). Soit $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{z} + k$. Soit $\mathfrak{b}$ l'intersection des $C^p\mathfrak{g}_1$. Ecrire $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{b} + \mathfrak{h}$, avec $\mathfrak{h}$ sous-algèbre nilpotente. Montrer que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{h}$ et que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{z}$. Soit y un élément de $\mathfrak{z}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{a}$. Ecrire $y = x + x'$ avec $x \in \mathfrak{b}$, $x' \in \mathfrak{b}$; on a $x \neq 0$, donc $\mathfrak{z}\cap\mathfrak{h}$ est un idéal non nul

de $\mathfrak{h}$; utilisant l'exerc.4, en déduire qu'il existe un élément non nul de $\mathfrak{g}$ permutable à $\mathfrak{a}$ et à $\mathfrak{h}$).

8. a. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre sous-invariante de $\mathfrak{g}$ (§ 1,exerc.11). Si le centraliseur $\mathfrak{z}(\mathfrak{b})$ de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ est nul, le centraliseur $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega})$ de $\mathfrak{b}^{\omega}$ (intersection des $C^p\mathfrak{b}$) dans $\mathfrak{g}$ est contenu dans $\mathfrak{b}^{\omega}$. (Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \not\subset \mathfrak{b}^{\omega}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \not\subset \mathfrak{b}$ d'après l'exerc.7 ; $\mathfrak{b}^{\omega}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ (§ 1,exerc.11) ; soit $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega})$; $\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre, $\mathfrak{b}$ est sous-invariante dans $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{b}$ est un idéal dans $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{c}$ avec $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}_1$; soit $y \in \mathfrak{b}_1$, $y \notin \mathfrak{b}$; $y = x+x'$ avec $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega})$, $x' \in \mathfrak{b}$; on a $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \cap \mathfrak{b}_1$, $x \notin \mathfrak{b}$; $\mathfrak{d} = Ax + \mathfrak{b}$ est une sous-algèbre, $\mathfrak{d}^{\omega} = \mathfrak{b}^{\omega}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{d}^{\omega}) \cap \mathfrak{d} \not\subset \mathfrak{d}^{\omega}$, donc le centre de $\mathfrak{d}$ est non nul d'après l'exerc.7 ; a fortiori, $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}) \neq 0$, ce qui est absurde).

b. Déduire de a que, en désignant par $\mathcal{D}$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{b}^{\omega}$, on a $\dim \mathfrak{a} \leqslant \dim \mathcal{D} + \dim$ (centre de $\mathfrak{b}^{\omega}$) (faire opèrer $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{b}^{\omega}$ par la représentation adjointe, et appliquer a).

9. Soient une algèbre de Lie de centre nul, $\mathcal{D}_1$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{a}$, $\mathcal{D}_2$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathcal{D}_1$ ..... Alors, $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_1$ un idéal de $\mathcal{D}_2$,.... (§ 1,exerc.8). Soit $\mathfrak{a}^{\omega}$ l'intersection des $C^p\mathfrak{a}$.

a. On a : $\dim \mathcal{D}_i \leqslant \dim \mathfrak{a}^{\omega} + \dim$ (centre de $\mathfrak{a}^{\omega}$) (utiliser l'ex.8b, et l'exerc. 12 c du § 1).

b. Déduire de a que, pour i assez grand, toutes les dérivations de $\mathcal{D}_i$ sont intérieures.

c. Déduire de a que, si $\mathfrak{a} = D\mathfrak{a}$, toutes les dérivations de $\mathfrak{a}$ sont intérieures.

§ 6. Algèbres de Lie résolubles.

1. Définition des algèbres de Lie résolubles.- Définition 1.- *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite résoluble si on a $D^k\mathfrak{g} = 0$ pour k assez grand.*

Une algèbre de Lie nilpotente est résoluble.

Soit B un surcorps commutatif de A. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{(B)}$ est résoluble.

Proposition 1.- *Une sous-algèbre, une algèbre quotient d'une algèbre de Lie résoluble sont résolubles. Une extension d'une algèbre de Lie résoluble par une algèbre de Lie résoluble est résoluble.*

En effet, soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}'$ une sous-algèbre, ~~une sous-algèbre~~, $\mathfrak{u}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/\mathfrak{u}$, f l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, on a $D^k\mathfrak{g} = 0$ pour un entier k, donc $D^k\mathfrak{g}' \subset D^k\mathfrak{g} = 0$ et $D^k\mathfrak{h} = f(D^k\mathfrak{g}) = 0$, donc $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h}$ sont résolubles. Si $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{h}$ sont résolubles, il existe des entiers k et ℓ tels que $D^k\mathfrak{h} = D^\ell\mathfrak{u} = 0$; on a alors $D^k\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}$, donc $D^{k+\ell}\mathfrak{g} = D^\ell(D^k\mathfrak{g}) \subset D^\ell\mathfrak{u} = 0$, de sorte que $\mathfrak{g}$ est résoluble.

2. Radical d'une algèbre de Lie.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{a}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ si l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est résoluble.

Proposition 2.- *Dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe un plus grand idéal résoluble.*

En effet, soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$, donc est résoluble (prop.1). Puisque les algèbres de Lie $\mathfrak{b}$ et $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ sont résolubles, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est résoluble (prop.1). Ceci posé soit $\mathfrak{r}$ un idéal résoluble de dimension maximum. Pour tout autre idéal résoluble $\mathfrak{a}$, on a $\dim(\mathfrak{a}+\mathfrak{r}) \leq \dim \mathfrak{r}$ d'après ce qui précède, donc $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$, de sorte que $\mathfrak{r}$ est le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$.

<u>Définition 2.- On appelle radical d'une algèbre de Lie le plus grand idéal résoluble de</u> $\mathfrak{g}$.

<u>Proposition 3.- Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>et</u> $\mathfrak{g}'$ <u>des algèbres de Lie sur</u> A, $\mathfrak{r}$ <u>et</u> $\mathfrak{r}'$ <u>leurs radicaux,</u> f <u>un homomorphisme de</u> $\mathfrak{g}$ <u>sur</u> $\mathfrak{g}'$. <u>Alors,</u> $f(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{r}'$, <u>et</u> $f(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}'$ <u>si le noyau de</u> f <u>est contenu dans</u> $\mathfrak{r}$.

En effet, $f(\mathfrak{r})$ est un idéal de $\mathfrak{g}'$, résoluble d'après la prop.1, donc contenu dans $\mathfrak{r}'$. D'autre part, $f^{-1}(\mathfrak{r}')$ est une extension de $\mathfrak{r}'$ par le noyau $\mathfrak{n}$ de f, donc est résoluble si $\mathfrak{n}$ est résoluble (prop.1), c'est-à-dire si $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{r}$.

<u>Proposition 4.- Le radical</u> $\mathfrak{r}$ <u>d'une algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}$ <u>est le plus petit idéal</u> $\mathfrak{a}$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>tel que</u> $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ <u>ait pour radical</u> 0.

En effet, soient $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, f l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Pour que le radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ soit nul, il faut (prop.3) que $f(\mathfrak{r})=0$, c'est-à-dire que $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{a}$. Et, si $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ a pour radical 0 (prop.3).

<u>Proposition 5.- Soient</u> $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ <u>des algèbres de Lie. Le radical du produit des</u> $\mathfrak{a}_i$ <u>est le produit des radicaux des</u> $\mathfrak{a}_i$.

Il suffit d'envisager le cas de deux algèbres de Lie $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. Soient $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ leurs radicaux, f et g les homomorphismes canoniques de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{t}$ le radical de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$: On a $f(\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{r}$ et $g(\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{s}$ (prop.3), donc $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{r} \times \mathfrak{s}$. D'autre part, $\mathfrak{r} \times \mathfrak{s}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ (prop.1), donc $\mathfrak{r} \times \mathfrak{s} \subset \mathfrak{t}$.

Exercices

1. Montrer que l'algèbre de Lie non abélienne de dimension 2 sur A (§ 1, exerc.6) est résoluble et que sa forme de Killing est non nulle.

* 2. Pour qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit résoluble, il faut et il suffit qu'il existe une suite de composition $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ (§ 1, exerc.11) joignant $\mathfrak{g}$ à 0 telle que les quotients $\mathfrak{a}_i / \mathfrak{a}_{i+1}$ soient abéliens $(0 \leqslant i < n)$.

3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble telle que les conditions $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$, $[[x,y],y] = 0$ entraînent $[x,y] = 0$. Montrer que $\mathfrak{g}$ est abélienne. (Soit k le plus grand entier tel que $D^{k-1}\mathfrak{g} \neq 0$, $D^k \mathfrak{g} = 0$. Supposant $k \geqslant 2$, montrer d'abord que $[D^{k-2}\mathfrak{g}, D^{k-1}\mathfrak{g}] = 0$, puis que $[D^{k-2}\mathfrak{g}, D^{k-2}\mathfrak{g}] = 0$, d'où contradiction).

Dans toute la fin du chapitre, A désigne un corps de caractéris-tique 0.

§ 7. Algèbres de Lie algébriques.

1. Répliques.- Soient V un espace vectoriel de dimension finie n sur A, V^* son dual, V_q^p l'espace $(\bigotimes^p V)\otimes(\bigotimes^q V^*)$, V_0^0 étant A. La représentation identique de $\mathfrak{gl}(V)$ dans V définit dans chaque espace V_q^p une représentation $\alpha \to \alpha_q^p$ de $\mathfrak{gl}(V)$. Pour tout $\alpha \in \mathfrak{gl}(V)$, on a, en posant $\alpha^* = -{}^t\alpha$

$$(1) \quad \alpha_q^p(u_1\otimes\dots\otimes u_p\otimes v_1^*\otimes\dots\otimes v_q^*)$$
$$= \sum_{i=1}^p u_1\otimes\dots\otimes\alpha u_i\dots\otimes u_p\otimes v_1^* + \sum_{j=1}^q u_1\otimes\dots\otimes u_p\otimes v_1^*\otimes\dots\otimes\alpha^* v_j^*\otimes\dots$$
$$\dots\otimes v_q^*$$

quels que soient les $u_i \in V$ et les $v_j^* \in V^*$. Si $p=q=0$, on pose $\alpha_q^p = 0$.

Définition 1.- Un endomorphisme β de V est appelé une réplique de l'endomorphisme α si, quels que soient les entiers $p, q \geqslant 0$, tout zéro de α_q^p dans V_q^p est un zéro de β_q^p.

Par exemple, 0 est une réplique de tout endomorphisme de V.

Remarque.- Soient $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite d'espaces vectoriels tous identiques à V ou à V^*, et $W = \bigotimes_{i=1}^n V_i$. Il existe une représentation canonique $\alpha \to \alpha_W$ de $\mathfrak{gl}(V)$ dans W. Soient α un endomorphisme de V, β une réplique de α. Alors, tout zéro de α_W est un zéro de β_W. En effet, il existe des entiers p, q et un isomorphisme canonique de l'espace W sur l'espace V_q^p, qui est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules (§ 3, Remarque 1). Par cet isomorphisme, α_W et β_W sont donc transformés en α_q^p et β_q^p, ce qui prouve notre assertion.

Lemme 1.- Soit β une réplique de α. Il existe un polynôme $P \in A[X]$, sans terme constant, tel que $\beta = P(\alpha)$.

En effet, identifions le $\mathfrak{g}$-module V_1^1 au $\mathfrak{g}$-module $\mathcal{L}(V)$ (§ 3, n°1). La formule (5) du § 3 montre que tout élément de $\mathcal{L}(V)$ permutable à α est permutable à β. Donc (Alg.VIII) il existe un polynôme $P \in A[X]$ tel que $\beta = P(\alpha)$. Si α n'est pas inversible, soit x un élément non nul du noyau de α. On doit avoir $P(\alpha)x = \beta x = 0$, ce qui montre que le terme constant de P est nul. Si α est inversible, son polynôme caractéristique a un terme constant non nul, et le th. de Hamilton-Cayley donne une égalité de la forme $1 = Q(\alpha)$, où Q est un polynôme de $A[X]$ sans terme constant. On peut donc remplacer P par un polynôme P_1 de $A[X]$, sans terme constant, et tel qu'on ait encore $\beta = P(\alpha)$.

Lemme 2.- *Si α est un endomorphisme diagonal, α_q^p est un endomorphisme diagonal.*

Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de V telle que $\alpha e_i = \lambda_i e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit (e_i^*) la base duale de (e_i) dans V^*. On a : $\alpha^* e_i^* = -\lambda_i e_i$. Les tenseurs de V_q^p de la forme $t = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes e_{j_2}^* \ldots \otimes e_{j_q}^*$, où $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ et $(j_1, j_2, \ldots, j_q)$ constituent des suites arbitraires d'entiers de $[1,n]$, constituent une base de V_q^p. Or, on a

$$(2) \qquad \alpha_q^p\, t = \Big(\sum_{r=1}^{p} \lambda_{i_r} - \sum_{s=1}^{q} \lambda_{j_s}\Big) t ,$$

ce qui prouve le lemme.

Lemme 3.- *Soient $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de V, α et β des endomorphismes de V tels que $\alpha e_i = \lambda_i e_i$, $\beta e_i = \mu_i e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Si toute relation linéaire à coefficients entiers entre les λ_i reste vraie quand on remplace λ_i par μ_i, alors β est une réplique de α.*

En effet, écrire qu'un tenseur t' est un zéro de α_q^p revient, d'après la formule (2), à écrire un certain nombre de conditions de la forme $\sum_{r=1}^{p} \lambda_{i_r} - \sum_{s=1}^{q} \lambda_{j_s} = 0$. Ces conditions entraînent par hypothèse les conditions $\sum_{r=1}^{p} \mu_{i_r} - \sum_{s=1}^{q} \mu_{j_s} = 0$. Donc t' est un zéro de β_q^p, ce qui prouve le lemme.

Pour un réciproque du lemme 3, cf. exerc.

Soient α un endomorphisme de V. Supposons que les racines du polynôme caractéristique de α soient dans A. Ecrivons $\alpha = \delta + \nu$, où δ est diagonal, ν nilpotent, et où δ et ν sont permutables (par extension de A à sa clôture algébrique, on voit que ceci est possible d'une manière unique, en appliquant la prop. 11 de Alg. VII, § 5, et la prop. 12, loc. cit., qui est utilisable parce que A est de caractéristique 0). Nous dirons que δ (resp. ν) est la composante diagonale (resp. nilpotente) de α. La réduction de α à la forme de Jordan (horrible !) montre en outre que tout zéro de α est un zéro de δ et ν.

Lemme 4.- Soit α un endomorphisme de V. Supposons que les racines du polynôme caractéristique de α soient dans A. Alors, la composante diagonale δ et la composante nilpotente ν de α sont des répliques de α.

D'après le lemme 2, δ^q_p est diagonal. D'après la formule (1), ν^q_p est nilpotent. Puisque $\alpha \rightarrow \alpha^p_q$ est une représentation de $\mathfrak{gl}(V)$, on a $\alpha^p_q = \delta^p_q + \nu^p_q$, $[\delta^p_q, \nu^p_q] = [\delta, \nu]^p_q = 0$. Donc les composantes diagonale et nilpotente de α^p_q sont δ^p_q et ν^p_q. Tout zéro de α^p_q est donc un zéro de δ^p_q et de ν^p_q, ce qui prouve le lemme.

Lemme 5.- Si β est une réplique de α, β^p_q est une réplique de α^p_q.

On peut évidemment supposer $p+q \neq 0$, car $\beta^o_o = 0$. Posons $U = V^p_q$. Il existe un isomorphisme canonique φ de U^r_s sur un espace de la forme $\bigotimes_{i=1}^m V_i$, où, pour tout $i \in [1, m]$, on a $V_i = V$ ou $V_i = V^*$, et, d'après les remarques 1 et 2 du § 3, n°1, φ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules. En vertu de la Remarque, tout zéro de $\varphi \circ (\alpha^p_q)^r_s \circ \varphi^{-1}$ est donc un zéro de $\varphi \circ (\beta^p_q)^r_s \circ \varphi^{-1}$. Par suite, tout zéro de $(\alpha^p_q)^r_s$ est un zéro de $(\beta^p_q)^r_s$, ce qui prouve le lemme.

Soient B un surcorps commutatif de A , $(\ell_\iota)_{\iota\in I}$ une base de B considéré comme espace vectoriel sur A . Pour tout endomorphisme α de V , nous désignerons par $\alpha_{(B)}$ le prolongement canonique de α à $V_{(B)}$. Pour tout endomorphisme β de $V_{(B)}$, il existe une famille unique $(\beta_\iota)_{\iota\in I}$ d'endomorphismes de V , nuls sauf un nombre fini d'entre eux, tels que $\beta = \sum_{\iota\in I} \ell_\iota(\beta_\iota)_{(B)}$. Ceci posé :

<u>Lemme 6.- Soient α un endomorphisme de V , β un endomorphisme de $V_{(B)}$, $(\beta_\iota)_{\iota\in I}$ les endomorphismes de V tels que $\beta = \sum_{\iota\in I} \ell_\iota(\beta_\iota)_{(B)}$. Si β est une réplique de $\alpha_{(B)}$, les β_i sont des répliques de α .</u>

En effet, il existe un B-isomorphisme canonique de $(V_{(B)})^p_q$ sur $(V^p_q)_{(B)}$. Si on identifie ces deux espaces au moyen de cet isomorphisme, alors, pour tout $\ell\in B$ et tout $t\in V^p_q$, on a $(\alpha_{(B)})^p_q(\ell\otimes t) = \ell\otimes(\alpha^p_q\, t)$. Ceci posé, si t est un zéro de α^p_q , $1\otimes t$ est un zéro de $(\alpha_{(B)})^p_q$, donc de β^p_q . Or $\beta^p_q(1\otimes t) = \sum_{\iota\in I} \ell_\iota\left[1\otimes(\beta_\iota)^p_q\, t\right] = \sum_{\iota\in I} \ell_\iota\otimes(\beta_\iota)^p_q\, t$. Donc $(\beta_\iota)^p_q\, t = 0$, ce qui prouve que β_ι est une réplique de α .

2\. <u>Un critère de nilpotence.- Proposition 1.- Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur A . Pour qu'un endomorphisme α de V soit nilpotent, il faut et il suffit que, pour toute réplique β de α ,</u> $Tr(\alpha\beta)=0$.

En effet, si β est une réplique de α , on a $\alpha\beta = \beta\alpha$ d'après le lemme 1. Par conséquent, si α est nilpotent, il en est de même de $\alpha\beta$ et l'on a donc $Tr(\alpha\beta)=0$.

Démontrons la réciproque. Soit α un endomorphisme de V tel que $Tr(\alpha\beta)=0$ pour toute réplique β de α . Montrons que α est nilpotent, en supposant d'abord que toutes les racines du polynôme caractéristique de α sont dans A . Soient δ et ν les composantes diagonale et nilpotente de α , et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de V formée de vecteurs propres de δ .

Posons $\delta e_i = \lambda_i e_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Les scalaires λ_i engendrent dans A , considéré comme espace vectoriel sur son corps premier R, un espace vectoriel P de dimension finie. Si $\delta \neq 0$, alors $P \neq 0$ et une base $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de P contient au moins un élément. Pour tout $\lambda \in P$, on pose $\lambda = \sum_{j=1}^{p} h_j(\lambda) u_j$, où les $h_j(\lambda)$ sont des fonctions R-linéaires sur P à valeurs dans R . D'après le lemme 3, l'endomorphisme β de V défini par $\beta e_i = h_1(\lambda_i) e_i$ $(1 \leq i \leq n)$ est une réplique de δ , par conséquent (lemme 4) une réplique de α . D'autre part, le lemme 1 entraîne que β et ν sont permutables, donc que $\beta\nu$ est nilpotent, donc que $Tr(\beta\nu)=0$. On doit donc avoir : $0 = Tr(\beta\delta) = \sum_{i=1}^{n} h_1(\lambda_i)\lambda_i =$ $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} h_1(\lambda_i) h_j(\lambda_i) u_j$. Les fonctions h_j étant à valeurs dans R et les u_i étant linéairement indépendants sur R , il en résulte que $\sum_{i=1}^{n} h_1(\lambda_i)^2 = 0$. <u>Puisque la caractéristique de A est</u> 0, R est isomorphe au corps Q . On a donc $h_1(\lambda_i)=0$ pour tout i , contrairement à la définition des u_j . Par conséquent, $\delta=0$, et $\alpha = \nu$ est nilpotent.

On va maintenant démontrer la proposition dans le cas général. Soit B la clôture algèbrique de A . Soit β une réplique de $\alpha_{(B)}$. Si $(\ell_\iota)_{\iota \in I}$ est une base de B considéré comme espace vectoriel sur A , il existe des endomorphismes $(\beta_\iota)_{\iota \in I}$ de V , nuls sauf un nombre fini d'entre eux, tels que $\beta = \sum_{\iota \in I} \ell_\iota (\beta_\iota)_{(B)}$. Alors, $Tr(\beta\alpha_{(B)}) =$ $= Tr\left[\sum_{\iota \in I} \ell_\iota (\beta_\iota)_{(B)} \alpha_{(B)}\right] = \sum_{\iota \in I} \ell_\iota \, Tr(\beta_\iota \alpha) = 0$ puisque β_ι est une réplique de α (lemme 6). La première partie de la démonstration prouve que $\alpha_{(B)}$ est nilpotent. Donc α est nilpotent.

3. <u>Algèbres de Lie algèbriques</u>.- <u>Définition 2</u>.- <u>Soient</u> V <u>un espace vectoriel de dimension finie sur</u> A, $\mathfrak{g}$ <u>une sous-algèbre de Lie de</u> $\mathfrak{gl}(V)$. <u>On dit que</u> $\mathfrak{g}$ <u>est algèbrique si toute réplique d'un élément de</u> $\mathfrak{g}$ <u>appartient à</u> $\mathfrak{g}$.

Toute intersection de sous-algèbres de Lie algèbriques de $\mathfrak{gl}(V)$ est algèbrique. Donc, si $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie quelconque de $\mathfrak{gl}(V)$, il existe une plus petite sous-algèbre de Lie algèbrique $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{gl}(V)$ contenant V. On dit que $\mathfrak{g}^*$ est l'<u>enveloppe algèbrique</u> de $\mathfrak{g}$.

<u>Lemme 7.- Soient $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ des sous-espaces de $\mathfrak{gl}(V)$ tels que $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$ et $[\mathfrak{P}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{Q}$. Alors, $[\mathfrak{P}, \mathfrak{g}^*] \subset \mathfrak{Q}$.</u>

En effet, l'espace des endomorphismes de V s'identifie canoniquement à V_1^1, et, pour $x \in \mathfrak{gl}(V)$, $x_1^1 = \mathrm{ad}\, x$ (§ 3, formule (5)). Ceci posé, soit $\mathfrak{g}'$ le sous-espace de $\mathfrak{gl}(V)$ formé des x tels que $[\mathfrak{P}, x] = x_1^1(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{Q}$. La formule $[x,y]_1^1 = [x_1^1, y_1^1]$ prouve que $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Si x' est une réplique d'un élément x de $\mathfrak{g}'$, x'^1_1 est une réplique de x_1^1 (lemme 5), donc $x'^1_1 = p(x_1^1)$, où p est un polynôme de $A[X]$ sans terme constant (lemme 1) on a donc $x'^1_1(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{Q}$, donc $x' \in \mathfrak{g}'$. Ainsi, $\mathfrak{g}'$ est algèbrique. Il est clair que $\mathfrak{g}' \supset \mathfrak{g}$. Par conséquent, $\mathfrak{g}' \supset \mathfrak{g}^*$, ce qui prouve le lemme.

<u>Proposition 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{g}^*$ son enveloppe algèbrique.</u>

1°) <u>Tout idéal de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}^*$.</u>

2°) <u>Le centre de $\mathfrak{g}$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}^*$.</u>

3°) <u>Les idéaux $D\mathfrak{g}$ et $D(\mathfrak{g}^*)$ sont égaux.</u>

4°) <u>Si $\mathfrak{g}$ est un idéal dans une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{gl}(V)$ et si $\mathfrak{g}_1^*$ est l'enveloppe algèbrique de $\mathfrak{g}_1$, on a $[\mathfrak{g}_1^*, \mathfrak{g}^*] \subset \mathfrak{g}$.</u>

En effet, soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Prenant $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{a}$ dans le lemme 7, on obtient le 1° de la proposition. Ceci entraîne que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}_1^*$. Prenant $\mathfrak{P} = \mathfrak{g}_1^*$ et $\mathfrak{Q} = \mathfrak{g}$ dans le lemme 7, on obtient le 4° de la proposition.

Prenant $\mathfrak{P} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{Q} = D\mathfrak{g}$, on obtient $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*] \subset D\mathfrak{g}$; on peut alors prendre $\mathfrak{P} = \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{Q} = D\mathfrak{g}$, d'où $[\mathfrak{g}^*,\mathfrak{g}^*] \subset D\mathfrak{g}$ et par suite le 3° de la proposition. Enfin, soit $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$; prenant $\mathfrak{P} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{Q} = 0$, on obtient $[\mathfrak{c},\mathfrak{g}^*] = 0$, ce qui prouve que $\mathfrak{c}$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}^*$.

Corollaire 1.- L'algèbre $\mathfrak{g}$ est un idéal dans $\mathfrak{g}^*$, et $\mathfrak{g}^*/\mathfrak{g}$ est abélien.

Ceci résulte aussitôt du 1° et du 3° de la prop.2 .

Corollaire 2.- Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, $\mathfrak{g}^*$ est résoluble.

Ceci résulte aussitôt du cor.1 .

Corollaire 3.- Si $\mathfrak{g}$ est algèbrique, son radical $\mathfrak{r}$ est algèbrique

D'après le 4° de la prop.2, $\mathfrak{r}^*$ est un idéal de $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, et cet idéal est résoluble d'après le cor.2. Donc $\mathfrak{r}^* \subset \mathfrak{r}$ et par suite $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}$.

Proposition 3.- Soient $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie algèbrique de $\mathfrak{gl}(V)$, E l'algèbre associative engendrée par 1 et $\mathfrak{g}$, R le radical de E . Pour qu'un élément α de $\mathfrak{g}$ soit dans R , il faut et il suffit que $Tr(\alpha\beta)=0$ pour tout $\beta \in \mathfrak{g}$.

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, soit $\mathfrak{h}$ l'ensemble des $\alpha \in \mathfrak{g}$ tels que $Tr(\alpha\beta)=0$ pour tout $\beta \in \mathfrak{g}$. D'après la prop.7 du § 3, $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. D'autre part, si $\alpha \in \mathfrak{h}$, on a $Tr(\alpha\alpha')=0$ pour toute réplique α' de α puisque $\mathfrak{g}$ est algèbrique. Donc (prop.1) α est nilpotent. On conclut en utilisant le lemme 3 du § 5 .

4. Application aux algèbres de Lie quelconques.- Théorème 1.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $x \to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace M , B la forme bilinéaire associée, E l'algèbre associative engendrée par 1 et les x_M. Soit $\mathfrak{h}$ l'idéal de $\mathfrak{g}$ formé des éléments orthogonaux à $\mathfrak{g}$ pour B . Alors, pour $x \in \mathfrak{h}$ et $y \in \mathfrak{g}$, $[x,y]_M$ est dans le radical de E .

En effet, soient $\mathfrak{a}$ l'image de $\mathfrak{g}$ par la représentation et $\mathfrak{a}^*$ l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{a}$. Pour $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{g}$ et $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, on a $\mathrm{Tr}([x,y]_M\,\alpha) = \mathrm{Tr}(x_M[y_M,\alpha])=0$ car $[y_M,\alpha] \in \mathfrak{a}$ (prop.2). La prop.3 montre alors que $[x,y]_M$ est dans le radical de l'algèbre associative engendrée par 1 et $\mathfrak{a}^*$, donc a fortiori dans le radical de E.

<u>Corollaire.- Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie,</u> $\mathfrak{r}$ <u>son radical,</u> $x \to x_M$ <u>une représentation fidèle de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans un espace</u> M, B <u>la forme bilinéaire associée,</u> $\mathfrak{h}$ <u>l'orthogonal de</u> $\mathfrak{g}$ <u>pour</u> B. <u>On a</u> $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$.

En effet, d'après le th.1, $[x,y]_M$ est nilpotent, pour $x \in \mathfrak{h}$ et $y \in \mathfrak{g}$. Donc l'image de $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]$ par la représentation est formée d'endomorphismes nilpotents. Comme cette représentation est fidèle, $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]$ est nilpotent (§ 5, cor.2 du th.1). A fortiori, $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = D\mathfrak{h}$ est résoluble, donc $D^{p+1}\mathfrak{h} = D^p(D\mathfrak{h})$ est nul pour p assez grand. Ainsi, $\mathfrak{h}$ est résoluble et par suite contenu dans $\mathfrak{r}$.

<u>Exercices.</u>

* 1. Soient $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ des sous-espaces de V_q^p tels que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$. L'ensemble des $\alpha \in \mathfrak{gl}(V)$ tels que $\alpha_q^p(\mathfrak{Q}) \subset \mathfrak{P}$ est une sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{gl}(V)$ (utiliser la démonstration du lemme 7).

2. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre (non nécessairement associative) de dimension finie sur A. L'ensemble des dérivations de $\mathfrak{A}$ est une algèbre de Lie algébrique (utiliser l'exerc.1 et l'exerc.2 du § 3).

§ 8. Algèbres de Lie semi-simples.

1. Définition des algèbres de Lie semi-simples.- Théorème 1.- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Le radical de $\mathfrak{g}$ est nul.
2. Le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ est nul.
3. Tout idéal abélien de $\mathfrak{g}$ est nul.
4. La forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée.

Les implications $1 \Longrightarrow 2$, $2 \Longrightarrow 3$ sont claires. D'autre part, si le radical $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ est non nul, soit p le plus grand entier tel que $D^p\mathfrak{r} \neq 0$; alors, $D^p\mathfrak{r}$ est un idéal abélien non nul de $\mathfrak{g}$. On déduit de là l'implication $3 \Longrightarrow 1$, de sorte que les conditions 1,2,3 sont équivalentes. On a l'implication $4 \Longrightarrow 2$ (§ 5, cor. du th.2). Enfin, si $\mathfrak{r} = 0$, le centre de $\mathfrak{g}$ est nul, donc la représentation adjointe est fidèle, de sorte que l'orthogonal de $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing est nul (§ 7, cor. du th.1). Ceci prouve l'implication $1 \Longrightarrow 4$ et achève la démonstration.

Définition 1.- Une algèbre de Lie est dite semi-simple si elle vérifie les conditions équivalentes du th.1 .

Remarques.- 1. Comme on l'a observé, le centre d'une algèbre de Lie semi-simple est nul, donc sa représentation adjointe est fidèle.

2. Soit B un surcorps commutatif de A . L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{(B)}$ est semi-simple : ceci se voit aussitôt en utilisant la condition 4 du th.1 .

Soit alors $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quelconque, $\mathfrak{r}$ son radical . Le radical $\mathfrak{r}'$ de $\mathfrak{g}_{(B)}$ est égal à $\mathfrak{r}_{(B)}$. En effet, $\mathfrak{r}_{(B)}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}_{(B)}$, donc $\mathfrak{r}_{(B)} \subset \mathfrak{r}'$. D'autre part, $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ est semi-simple (§ 6, prop.3), donc $(\mathfrak{g}/\mathfrak{r})_{(B)} = \mathfrak{g}_{(B)}/\mathfrak{r}_{(B)}$

est semi-simple, donc $\mathfrak{r}_{(B)} = \mathfrak{r}'$ (§ 6, prop. 3).

<u>Proposition 1.- Tout idéal dans une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple. Tout quotient d'une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple. Toute extension d'une algèbre de Lie semi-simple par une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple et triviale.</u>

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{a}'$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$ est abélien (§ 3, prop. 7) donc nul. Donc $\mathfrak{a}'$ est supplémentaire de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. Par suite, $\mathfrak{g}$ s'identifie à $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}'$. Le produit des radicaux de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ est le radical de $\mathfrak{g}$ (§ 6, prop. 5), donc est nul. Ceci prouve que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont semi-simples. Comme $\mathfrak{a}'$ est isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, les deux premières assertions de la proposition sont établies. Maintenant, soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, et supposons $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ semi-simples. Alors, le radical de $\mathfrak{g}$ est contenu dans $\mathfrak{a}$ (parce que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est semi-simple) donc est nul (parce que $\mathfrak{a}$ est semi-simple). Puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $\mathfrak{a}$ admet un idéal supplémentaire, d'où la dernière assertion de la proposition.

<u>Corollaire 1.- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. On a $D\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.</u>

En effet, $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g}$ est semi-simple et abélienne, donc nulle.

Le cor. suivant complète la prop. 4 du § 6 :

<u>Corollaire 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{r}$ son radical, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{r}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est semi-simple.</u>

En effet, $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ est semi-simple (§ 6, prop3), et $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est isomorphe à un quotient de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$.

2. <u>Idéaux semi-simples dans les algèbres de Lie.</u>- <u>Proposition 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, B sa forme de Killing, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ deux idéaux de $\mathfrak{g}$.</u>

<u>Si $\mathfrak{a}$ est semi-simple, les conditions suivantes sont équivalentes</u> : 1) $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}'=0$; 2) $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}']=0$; 3) $\mathfrak{a}$ <u>et</u> $\mathfrak{a}'$ <u>sont orthogonaux pour</u> B .

Comme $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}']\subset\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}'$, la condition 1 entraîne la condition 2 . Réciproquement, si $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}']=0$, on a $[\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}',\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}']=0$, donc $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}'$ est un idéal abélien de $\mathfrak{a}$, de sorte que $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}'=0$.

Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont orthogonaux pour B , $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}'=0$ puisque la forme de Killing de $\mathfrak{a}$ est induite par B. Réciproquement, supposons $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}']=0$; on a $B(\mathfrak{a}',[\mathfrak{a},\mathfrak{a}])=B([\mathfrak{a}',\mathfrak{a}],\mathfrak{a})=0$, donc $\mathfrak{a}'$ est orthogonal à $D\mathfrak{a}$; mais $D\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ puisque $\mathfrak{a}$ est semi-simple.

<u>Corollaire 1</u>.- <u>Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie</u>, B <u>sa forme de Killing</u>, $\mathfrak{a}$ <u>un idéal semi-simple de</u> $\mathfrak{g}$. <u>Alors, il existe un idéal</u> $\mathfrak{a}'$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>unique supplémentaire de</u> $\mathfrak{a}$ <u>dans</u> $\mathfrak{g}$. <u>Cet idéal est l'orthogonal de</u> $\mathfrak{a}$ <u>pour</u> B , <u>et aussi l'annulateur de</u> $\mathfrak{a}$ <u>dans</u> $\mathfrak{g}$.

En effet, l'orthogonal $\mathfrak{a}'$ de $\mathfrak{a}$ pour B est un idéal de $\mathfrak{g}$, tel que $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}'=0$ (prop.2), donc supplémentaire de $\mathfrak{a}$. Tout idéal $\mathfrak{a}''$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}'=0$ est contenu dans $\mathfrak{a}'$ (prop.2). Soit $\mathfrak{a}_1$ l'annulateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. D'après la prop.2, on a $\mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{a}'\subset\mathfrak{a}_1$.

<u>Corollaire 2</u>.- <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie semi-simple</u>. <u>Toute dérivation de</u> $\mathfrak{g}$ <u>est intérieure</u>.

En effet, soit $\mathcal{D}$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$. L'application $x\longrightarrow \operatorname{ad} x$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{D}$. Soit $\mathfrak{a}'$ l'annulateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{D}$, qui est supplémentaire de $\mathfrak{a}$ d'après le cor.1 . Si $D\in\mathfrak{a}'$ et $x\in\mathfrak{g}$, on a $\operatorname{ad}(Dx)=[D,\operatorname{ad} x]=0$, donc $Dx=0$. Ceci prouve que $D=0$. Donc $\mathfrak{a}'=0$ et par suite $\mathcal{D}=\mathfrak{a}$.

3. Algèbres de Lie simples.- Définition 2.- Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite simple si elle est de dimension >1 et si elle ne possède pas d'autres idéaux que les idéaux 0 et $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie qui ne possède pas d'autres idéaux que 0 et $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne, $\mathfrak{g}$ est semi-simple (condition 3 du th.1). Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, $\mathfrak{g}$ est de dimension 1. On voit donc qu'une algèbre de Lie simple est semi-simple. Plus généralement :

Théorème 2.- Pour qu'une algèbre de Lie soit semi-simple, il faut et il suffit qu'elle soit isomorphe à un produit fini d'algèbre de Lie simples.

En effet, si $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ sont des algèbres de Lie simples, elles sont semi-simples comme on vient de le remarquer, donc leur produit est semi-simple (prop.1). Réciproquement, soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, et montrons que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à un produit d'algèbre de Lie simples. Si $\mathfrak{g}=0$, c'est évident. Supposons notre assertion établie pour les algèbres de Lie de dimension $< n = \dim \mathfrak{g}$. On a $n > 1$.

Si $\mathfrak{g}$ ne possède pas d'idéaux distincts de 0 et $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ est donc simple. S'il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ distinct de 0 et $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ sont semi-simples et de dimension $< n$, donc isomorphes à des produits d'algèbres de Lie simples d'après notre hypothèse de récurrence. Comme $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$, le théorème est démontré.

Proposition 3.- Soient $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$ des algèbres de Lie simples, $\mathfrak{g}$ leur produit. Tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ est le produit de certains des $\mathfrak{g}_i$.

Considérons les entiers $i \in [1,n]$ tels que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i \neq 0$. Soient I leur ensemble, J le complémentaire de I dans $[1,n]$. Pour $i \in I$, on a $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$, donc $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{a}$. Donc $\prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{a}$. D'autre part, pour tout $j \in J$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_j]=0$; donc, si $x \in \mathfrak{a}$, les composantes de x suivant les $\mathfrak{g}_j$ $(j \in J)$ sont nulles puisque les centres des $\mathfrak{g}_j$ sont nuls. Donc $\mathfrak{a} = \prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i$.

Corollaire.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (resp. $(\mathfrak{b}_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$) une famille d'idéaux simples de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g}$ soit somme directe des $\mathfrak{a}_i$ (resp. $\mathfrak{b}_j$). Alors, n=p , et chaque $\mathfrak{b}_j$ est égal à l'un des $\mathfrak{a}_i$.

Ainsi, les idéaux simples $\mathfrak{a}_i$ sont bien déterminés à l'ordre près par la seule donnée de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. On les appelle les composants simples de $\mathfrak{g}$.

4. Représentations des algèbres de Lie semi-simples.- Lemme 1.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, M un module de représentation nulle de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$, on a $H^1(\mathfrak{g}, M)=0$.

En effet, pour qu'une cochaîne $f \in C^1(\mathfrak{g}, M)$ soit un cocycle, il faut et il suffit que $f([x,y])=0$ quels que soient x et y , c'est-à-dire que f soit nulle sur $D\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

Proposition 4 (premier lemme de Whitehead).- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, M un module de représentation de $\mathfrak{g}$. On a $H^1(\mathfrak{g}, M)=0$.

Soit ρ la représentation considérée. Si ρ est la représentation nulle, il suffit d'appliquer le lemme 1. Sinon, soient $\mathfrak{n}$ le noyau de ρ , $\mathfrak{n}'$ l'idéal supplémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$, B la forme bilinéaire associée à ρ . On a $\mathfrak{n}' \neq 0$. La restriction de ρ à $\mathfrak{n}'$ est fidèle, et $\mathfrak{n}'$ est semi-simple. Donc la restriction de B à $\mathfrak{n}'$ est non dégénérée (§ 7, cor. du th.1). Comme A est de caractéristique 0, la prop.7 du § 4 achève la démonstration lorsque ρ est irréductible.

On démontre la proposition dans le cas général par récurrence sur la dimension de M . Supposons-la vérifiée pour les $\mathfrak{g}$ -modules de dimension $< n$. Si M est un $\mathfrak{g}$ -module de dimension n et n'est pas simple, alors il existe dans M un sous-module N tel que N et M/N soient de dimension $< n$. Dans la suite exacte

$$H^1(\mathfrak{g}, N) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, M/N)$$

(§ 3, prop. 1), on a $H^1(\mathfrak{g}, N) = H^1(\mathfrak{g}, M/N) = 0$, donc $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$.

<u>Lemme 2</u>.- <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie de dimension</u> 1. <u>Il existe une représentation de</u> $\mathfrak{g}$ <u>non complètement réductible</u>.

En effet, soit (e_1, e_2) une base d'un espace vectoriel V de dimension 2 sur A , et u l'endomorphisme de V défini par les égalités $ue_1 = e_2$, $ue_2 = 0$. L'ensemble des λu $(\lambda \in A)$ peut être considéré comme une algèbre de Lie abélienne de dimension 1, et la représentation identique de cette algèbre n'est pas complètement réductible.

<u>Théorème 3</u>.- <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie</u>. <u>Pour que</u> $\mathfrak{g}$ <u>soit semi-simple, il faut et il suffit que toute représentation de</u> $\mathfrak{g}$ <u>soit complètement réductible</u>.

En effet, si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, toute représentation de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible, d'après le premier lemme de Whitehead et la prop. 3 du § 4. La réciproque est évidente si $\mathfrak{g} = 0$. Supposons cette réciproque établie pour les algèbres de Lie de dimension $< \dim \mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est simple, $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Sinon, il existe dans $\mathfrak{g}$ un idéal $\mathfrak{a}$ distinct de 0 et $\mathfrak{g}$ (le cas où $\dim \mathfrak{g} = 1$ étant exclu par le lemme 2). Puisque la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible, il existe dans $\mathfrak{g}$ un idéal $\mathfrak{a}'$ supplémentaire de $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}'$. Puisque $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont isomorphes à des quotients de $\mathfrak{g}$, toute représentation de $\mathfrak{a}$, ou de $\mathfrak{a}'$, peut être identifiée canoniquement à une représentation de $\mathfrak{g}$, donc est complètement réductible. D'après notre hypothèse de récurrence, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont semi-simples, donc $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Corollaire.- Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, U son algèbre enveloppante, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $x \to x_{\mathfrak{h}}$ une représentation de $\mathfrak{g}$ par des dérivations de $\mathfrak{h}$, x_U la dérivation de U qui prolonge $x_{\mathfrak{h}}$, de sorte que $x \to x_U$ est une représentation de $\mathfrak{g}$. Alors, l'algèbre $U_{\mathfrak{D}_0}$ des invariants de U est engendrée par un nombre fini d'éléments, et, pour toute classe $\mathfrak{D}$ de représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, $U_{\mathfrak{D}}$ est un module à gauche (resp. à droite) de type fini sur $U_{\mathfrak{D}_0}$.

D'après le th.2 du § 3, il suffit de prouver que la représentation $x \to x_U$ est complètement réductible. Or, soit U_n le sous-espace des éléments de filtration $\leq n$ dans U . Chaque U_n est stable pour les x_U . Et chaque $\mathfrak{g}$-module U_n est semi-simple d'après le th.3. Le $\mathfrak{g}$-module U , somme de sous-modules semi-simples, est semi-simple.

5\. Extensions des algèbres de Lie semi-simples.- Proposition 5 (second lemme de Whitehead).- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, M un module de représentation de $\mathfrak{g}$. On a $H^2(\mathfrak{g},M)=0$.

Il suffit d'envisager le cas où M est un module de représentation nulle, car on passe de là au cas général exactement comme dans la démonstration du premier lemme de Whitehead. Soit $c \in H^2(\mathfrak{g},M)$. Il existe (§ 4, prop.6) une extension $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ par l'algèbre de Lie abélienne M telle que : 1°) le $\mathfrak{g}$-module défini par l'extension soit identique à M (autrement dit, l'extension est centrale) ; 2°) la classe c' de $H^2(\mathfrak{g},M)$, définie par l'extension est égale à c . Si deux éléments x,x' de $\mathfrak{h}$ sont congrus modulo M , on a ad x = ad x' puisque x-x' est dans le centre de $\mathfrak{h}$.

Donc la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ définit par passage au quotient une représentation de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}/M$ dans l'espace $\mathfrak{h}$, pour laquelle M est un sous-espace stable. Il existe donc (th.3) un sous-espace de $\mathfrak{h}$ stable pour la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ et supplémentaire de M dans $\mathfrak{h}$. Donc l'extension est triviale, de sorte que (§ 4, prop.5) $c'=0$.

Lemme 3.- Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{b}$ un idéal caractéristique de $\mathfrak{a}$. Si toute extension de toute algèbre de Lie semi-simple par $\mathfrak{b}$ ou par $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ est inessentielle, toute extension de toute algèbre de Lie semi-simple par $\mathfrak{a}$ est inessentielle.

En effet, soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie dans laquelle $\mathfrak{a}$ soit un idéal, et telle que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ soit semi-simple. Puisque $\mathfrak{b}$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})/(\mathfrak{a}/\mathfrak{b})$, isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, est semi-simple. Il existe donc dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{c}$ supplémentaire de $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$. Soit $\mathfrak{d}$ l'image réciproque de $\mathfrak{c}$ pour l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$. Alors, $\mathfrak{d}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, telle que $\mathfrak{d}+\mathfrak{a}=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}\cap\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$; en outre, $\mathfrak{d}/\mathfrak{b}$, isomorphe à $\mathfrak{c}$, est semi-simple. Il existe une sous-algèbre e de $\mathfrak{d}$, supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{d}$. Alors, e est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, supplémentaire de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$.

Théorème 4.- Toute extension d'une algèbre de Lie semi-simple par une algèbre de Lie résoluble est inessentielle.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$, tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ soit semi-simple. Il faut prouver que $\mathfrak{g}$ est une extension inessentielle de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{a}$ est abélien, cela résulte du second lemme de Whitehead et de la prop.5 du § 4. Nous allons le prouver pour $\mathfrak{a}$ résoluble en raisonnant par récurrence. Supposons notre assertion établie lorsque $D^p\mathfrak{a} = 0$ $(p>0)$, et envisageons le cas où $D^{p+1}\mathfrak{a} = 0$. Soit $\mathfrak{b} = D\mathfrak{a}$, qui est un idéal caractéristique de $\mathfrak{a}$. On a $D^p\mathfrak{b}$ et $D^p(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) = 0$, de sorte qu'il suffit d'utiliser l'hypothèse de récurrence et le lemme 1.

<u>Corollaire</u> <u>(Lévi)</u>.- <u>Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{r}$ son radical.</u> <u>Il existe une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{a}$ supplémentaire de $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{g}$.</u>

La décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{r}$ s'appelle une <u>décomposition de Levi</u>, et $\mathfrak{a}$ s'appelle une <u>section de Levi</u>.

6. <u>Application</u> <u>dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple</u>

<u>Proposition 6</u>.- <u>Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, U son algèbre enveloppante, Z le centre de U, V le sous-espace de U engendré par les éléments de la forme</u> $uv - vu$ $(u \in U, v \in U)$. <u>Alors, U est somme directe de V et Z</u>.

En effet, posons, pour $x \in \mathfrak{g}$ et $u \in U$, $x_U u = xu - ux$, de sorte que x_U est la dérivation de U qui prolonge ad x. L'application $x \to x_U$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans U, dont on a déjà observé qu'elle est complètement réductible, et Z est la sous-algèbre des éléments invariants pour cette représentation. D'après la prop. 6 du § 3, il existe un et un seul sous-espace V de U, stable pour les x_U, et supplémentaire de Z dans U, et V est engendré par les éléments $xu-ux$, $x \in \mathfrak{g}$, $u \in U$. Reste à montrer que, pour $u \in U$ et $v \in U$, on a $uv - vu \in V$. On peut se limiter au cas où u est de la forme $x_1 . x_2 \dots x_n$, où les x_i sont dans $\mathfrak{g}$, et on a alors

$$uv-vu = x_1(x_2\dots x_n v)-(x_2\dots x_n v)x_1+x_2(x_3\dots x_n v x_1)-(x_3\dots x_n v)x_2$$
$$+\dots+ x_n(vx_1x_2\dots x_{n-1})-(vx_1x_2\dots x_{n-1})x_n \in V$$

ce qui prouve notre assertion.

La décomposition en somme directe $U = V+Z$ définit un projecteur $u \to u^\natural$ de U sur Z.

<u>Proposition 7.- L'application</u> $u \to u^\natural$ <u>possède les propriétés suivantes</u> : 1) $(uv)^\natural = (vu)^\natural$ <u>quels que soient</u> $u, v \in U$. 2) $(zu)^\natural = zu^\natural$ <u>quels que soient</u> $u \in U$, $z \in Z$.

La première propriété résulte aussitôt du fait que $uv - vu \in V$. La deuxième a déjà été démontrée (§ 3, prop. 14).

<u>Définition 3.- Une forme linéaire f sur U est dite centrale si</u> $f(uv) = f(vu)$ <u>quels que soient</u> $u, v \in U$.

Soient f une forme linéaire centrale sur U, et f' la restriction à Z. On a, pour tout $u \in U$, $f(u) = f'(u^\natural)$. L'application $f \to f'$ est une application biunivoque de l'ensemble des formes linéaires centrales sur U sur l'ensemble des formes linéaires sur Z.

<u>Remarque</u>.- Ces propriétés sont vraies pour $\mathfrak{g}$ réductive, de sorte que ce n° (s'il est adopté) serait rejeté avec avantage au § 9 (ainsi que l'exerc. 14).

<u>Exercices</u>.

1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{r}$ son radical, $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots)$ une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$ définie de la manière suivante : 1. $\mathfrak{a}_0 = 0$. 2. $\mathfrak{a}_{i+1}/\mathfrak{a}_i$ est un idéal abélien maximal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_i$. Soit p le plus petit entier tel que $\mathfrak{a}_p = \mathfrak{a}_{p+1} = \ldots$ Montrer que $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_p$. (Pour voir que $\mathfrak{a}_p \supset \mathfrak{r}$, montrer par récurrence que les $\mathfrak{a}_i$ sont résolubles. Pour voir que $\mathfrak{a}_p \supset \mathfrak{r}$, montrer que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_p$ est semi-simple).

2. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}'$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{g}'$ est <u>réductive dans</u> $\mathfrak{g}$ si la représentation $x \to \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ de $\mathfrak{g}'$ est complètement réductible. Pour qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ soit semi-simple,

il faut et il suffit que $\mathfrak{a}$ soit réductive dans toute algèbre de Lie contenant $\mathfrak{a}$. (Si $\mathfrak{a}$ vérifie cette condition, soit $x \rightarrow x_M$ une représentation de $\mathfrak{a}$ dans un espace M. Considérant M comme une algèbre de Lie abélienne, former le produit croisé de $\mathfrak{g}$ par M correspondant à l'homomorphisme $x \rightarrow x_M$ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de M. Montrer que la représentation $x \rightarrow x_M$ est complètement réductible).

3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $x \rightarrow x_M$ une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ dans un espace M de dimension >1. Identifions M à une algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{a}$, et $x \rightarrow x_M$ à un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{h}$ le produit croisé correspondant, dans lequel $\mathfrak{a}$ est un idéal et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre.

a. Montrer que $\mathfrak{h} = D\mathfrak{h}$ (pour montrer que $D\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$, utiliser le fait que la représentation $x \rightarrow x_M$ est irréductible et non nulle).

b. Montrer que le centre $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{h}$ est nul (montrer d'abord que $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{a}$).

c. Déduire de a et b qu'il existe des algèbres de Lie de centre nul, égales à leur idéal dérivé, et non semi-simples.

d. Déduire de c qu'il existe des algèbres de Lie qui ne sont pas isomorphes au produit d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre résoluble (considérer une algèbre de Lie non semi-simple égale à son idéal dérivé).

4. a. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ un idéal semi-simple de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ l'annulateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, de telle sorte que $\mathfrak{g}$ s'identifie au produit $\mathfrak{h} \times \mathfrak{a}$. Montrer que, pour tout idéal $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \times (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{a})$ (Soit $\mathfrak{k}_1$ la projection canonique de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{h}$; c'est un idéal de $\mathfrak{h}$, donc $D\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_1$; en déduire que $\mathfrak{k}_1$ est contenu dans $\mathfrak{k}$.

b. Déduire de a qu'il existe dans $\mathfrak{g}$ un plus grand idéal semi-simple (considérer un idéal semi-simple maximal de $\mathfrak{g}$).

c. Soient $\mathfrak{h}$ un idéal semi-simple de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ l'annulateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, B une forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ sont orthogonaux pour B (utiliser le fait que $D\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$), et que $B = B_1+B_2$, où B_1 (resp. B_2) est une forme bilinéaire invariante dont la restriction à $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{h}$) est nulle.

5. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie ; un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est dit <u>minimal</u> si $\mathfrak{h} \neq 0$ et si tout idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{h}$ est égal à 0 ou $\mathfrak{h}$.

a . Tout idéal simple de $\mathfrak{g}$ est minimal.

b. Soient $\mathfrak{h}$ un idéal minimal de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ le radical de $\mathfrak{g}$. On a, ou bien $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$, auquel cas $\mathfrak{h}$ est abélien, ou $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r} = 0$, auquel cas $\mathfrak{h}$ est simple (utiliser le fait que l'idéal dérivé d'une algèbre de Lie, et les composants simples d'une algèbre de Lie semi-simple, sont des idéaux caractéristiques).

6. Montrer directement que si $\mathfrak{g}$ possède un idéal abélien non nul $\mathfrak{a}$, la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est dégénérée (pour $x \in \mathfrak{g}$ et $y \in \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y$ applique $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}$, donc $\mathrm{ad}\, y \circ \mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y = 0$, donc $\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y$ est nilpotent, donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)=0$).

7. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{r}$ son radical. Si $\mathfrak{r}$ est de dimension 1, $\mathfrak{g}$ est extension triviale de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ par $\mathfrak{r}$ (Observer que $D(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, que l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{r}$ est abélienne, donc que l'extension est centrale).

8. a. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ un idéal semi-simple de $\mathfrak{h}$. Montrer que $\mathfrak{k}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. (L'application $x \to \rho(x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$, $x \in \mathfrak{k}$, est une représentation de $\mathfrak{k}$, pour laquelle $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{h}$ sont stables. Soient $\mathfrak{a}$ un sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{h}$, et $\mathfrak{b}$ un sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant stables pour ρ . Montrer que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont annulés par ρ).

b. Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie. Tout idéal semi-simple $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{h}$ est caractéristique (appliquer a en prenant pour $\mathfrak{g}$ l'holomorphe de $\mathfrak{h}$).

9. a. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Toute forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$ est, soit nulle, soit non dégénérée.

b. Si le corps A est algèbriquement clos, deux formes bilinéaires invariantes B,B' sur $\mathfrak{g}$ sont proportionnelles (Supposant B non dégénérée, considérer l'endomorphisme σ de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ défini par $B(\sigma x,y) = B'(x,y)$, et montrer que σ permute aux ad x, donc est un scalaire). Donc toute forme bilinéaire invariante est proportionnelle à la forme de Killing.

c. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur un corps A algèbriquement clos. Déduire de b et de l'exerc.4 que la dimension de l'espace des formes bilinéaires invariantes sur $\mathfrak{g}$ est égale au nombre de composants simples de $\mathfrak{g}$, et que toutes ces formes sont symétriques.

10. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace M de dimension d, ρ' la représentation définie par ρ dans $V' = \bigotimes^{d} V$. Montrer qu'il existe un élément de V' invariant pour ρ' (considérer les éléments antisymètriques de V', et appliquer l'exerc.1 du § 3).

11. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ l'idéal intersection des $D^p\mathfrak{g}$ ($p=1,2,\ldots$). Montrer que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est résoluble, et que $D\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Pour que $\mathfrak{g}$ soit isomorphe au produit d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre résoluble, il faut et il suffit que $\mathfrak{h}$ soit semi-simple, et $\mathfrak{h}$ est alors le plus grand idéal semi-simple de $\mathfrak{g}$.

12. a. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 3 est simple ou résoluble. (Soit $\mathfrak{r}$ son radical. Montrer que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ ne peut être de dimension 1 ou 2

en utilisant l'exerc. 1 du § 6. Si $\gamma = 0$, montrer que $\mathfrak{g}$ est simple en utilisant ce même exercice).

b. Soit V un espace vectoriel de dimension 2. Montrer que $s\ell(V)$ admet une base (e,f,g) telle que $[e,f] = g$, $[f,g] = f$, $[e,g] = -e$. Montrer que la forme de Killing B de $s\ell(V)$ est non dégénérée, donc que $s\ell(V)$ est simple.

c. Montrer qu'il existe une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 3 sur A , admettant une base (e,f,g), telle que $[e,f]= g$, $[f,g]= e$, $[g,e]=f$. Montrer que la forme de Killing B_1 de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée, donc que $\mathfrak{g}$ est simple. Comparant B et B_1 , montrer que $s\ell(V)$ et $\mathfrak{g}$ ne sont pas isomorphes si A est le corps des nombres réels.

13. Un exercice, que je n'ai pas le courage de rédiger, prouvant que la simplicité ne se conserve pas par extension du corps de base.

14. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, U son algèbre enveloppante, Z le centre de U .

a. Soit R un idéal bilatère de U . Montrer que $R \cap Z$ est égal à l'image de R par l'application $\natural$ de U . (Utiliser l'exerc. 5 du § 3).

b. Soit R' un idéal de Z . Soit R_1 l'idéal bilatère de U engendré par R'. Montrer que $R_1 \cap Z = R'$ (utiliser la propriété 2 de la prop. 7).

---

§ 9. Algèbres de Lie réductives.

1. Le radical nilpotent d'une algèbre de Lie.- Définition 1.- On appelle radical nilpotent d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'intersection des noyaux des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Une algèbre de Lie est dite réductive si son radical nilpotent est nul.

Le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Proposition 1.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{s}$ son radical nilpotent. L'ensemble des noyaux des représentations complètement réductibles de $\mathfrak{g}$ admet un plus petit élément, qui est égal à $\mathfrak{s}$.

En effet, il est clair que $\mathfrak{s}$ est contenu dans le noyau de toute représentation complètement réductible de $\mathfrak{g}$. D'autre part, il existe un nombre fini de représentations irréductibles dont les noyaux ont pour intersection $\mathfrak{s}$. La somme directe de ces représentations est complètement réductible et a pour noyau $\mathfrak{s}$.

Corollaire 1.- Pour qu'une algèbre de Lie soit réductive, il faut et il suffit qu'elle possède une représentation complètement réductible fidèle.

Corollaire 2.- Un produit fini d'algèbres de Lie réductives est réductif. Une algèbre de Lie abélienne, ou semi-simple, est réductive.

En effet, soit $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ des algèbres de Lie réductives, M (resp. M') un module de représentation semi-simple fidèle de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$). Alors, on définit dans l'espace $M \times M'$ une représentation complètement réductible fidèle de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ en posant

$$(x,x')_{M \times M'}(u,u') = (x_M u \, , \, x'_{M'} u')$$

quels que soient $x \in \mathfrak{g}$, $x' \in \mathfrak{g}'$, $u \in M$, $u' \in M'$. La première assertion du corollaire résulte aussitôt de là. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple, sa représentation adjointe est complètement réductible et fidèle, donc $\mathfrak{g}$ est réductive. Pour montrer qu'une algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{g}$ est réductive, il suffit, d'après ce qui précède, d'envisager le cas où $\dim \mathfrak{g} = 1$; alors, toute représentation non nulle de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel de dimension 1 est complètement réductible et fidèle.

<u>Proposition 2.- Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie,</u> s <u>son radical nilpotent,</u> M <u>un module de représentation de</u> $\mathfrak{g}$, E <u>l'algèbre associative engendrée par 1 et les</u> x_M , $x \in \mathfrak{g}$. <u>Pour tout</u> $y \in s$, y_M <u>appartient au radical de</u> E (<u>donc est nilpotent</u>).

En effet, tout module simple à gauche sur E est un $\mathfrak{g}$-module simple. Donc, si $y \in s$, y_M est dans l'annulateur de tout module simple à gauche sur E , ce qui prouve qu'il est dans le radical de E .

<u>Corollaire 1.- Le radical nilpotent d'une algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}$ <u>est un idéal nilpotent de</u> $\mathfrak{g}$.

Il suffit d'appliquer la prop.2 à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.

<u>Corollaire 2.- Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie,</u> s <u>son radical nilpotent,</u> $x \to x_M$ <u>une représentation de</u> $\mathfrak{g}$, B <u>la forme bilinéaire associée. Alors,</u> s <u>est orthogonal à</u> $\mathfrak{g}$ <u>pour</u> B .

En effet, pour $x \in \mathfrak{g}$ et $y \in s$, $x_M y_M$ est nilpotent d'après la prop.2, donc $\mathrm{Tr}(x_M y_M) = B(x,y) = 0$.

La proposition suivante constitue une réciproque de la prop.2 .

<u>Proposition 3.- Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie,</u> $\mathfrak{a}$ <u>un idéal de</u> $\mathfrak{g}$ <u>tel que, pour tout module de représentation simple</u> M <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>et tout</u> $x \in \mathfrak{a}$, x_M <u>soit nilpotent. Alors,</u> $\mathfrak{a}$ <u>est contenu dans le radical nilpotent de</u> $\mathfrak{g}$.

En effet, pour tout module de représentation simple M de $\mathfrak{g}$ et tout $x \in \mathfrak{a}$, on a alors $x_M = 0$ d'après le lemme 2 du § 5 .

Proposition 4.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, s son radical nilpotent, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans s . Alors, le radical nilpotent de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est $s/\mathfrak{a}$.

En effet, les représentations irréductibles de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ proviennent par passage au quotient des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ puisque ces dernières s'annulent sur s , donc sur $\mathfrak{a}$. La proposition résulte aussitôt de là .

2\. Caractérisations des algèbres de Lie réductives.- Lemme 1.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, réductive, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Si tout élément z de $\mathfrak{a}$ peut s'écrire $z = \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$ ($x_i \in \mathfrak{g}$, $y_i \in \mathfrak{g}$), les y_i étant permutables à z , alors $\mathfrak{a} = 0$.

En effet, soit M un module de représentation de $\mathfrak{g}$. On va montrer que z_M est nilpotent, ce qui, avec la prop.3, établira le lemme. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on a $\mathrm{Tr}\, z_M^p = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}\,[(x_i)_M (y_i)_M z_M^{p-1} - (y_i)_M (z_i)_M z_M^{p-1}] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}\,(x_i)_M ,[z_M^{p-1}]$. Or $(y_i)_M$ est permutable à z_M , donc à z_M^{p-1} . D'où $\mathrm{Tr}\, z_M^p = 0$ pour tout entier $p \geqslant 1$, ce qui prouve notre assertion.

Théorème 1.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive, $\mathfrak{c}$ son centre. Alors, $\mathfrak{c} \cap D\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} + D\mathfrak{g}$, de sorte que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{c} \times D\mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie $D\mathfrak{g}$ est semi-simple.

En effet, soient $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, λ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}'$, et $\mathfrak{h} = \overset{-1}{\lambda}(\mathfrak{h}')$. Puisque $\mathfrak{h}'$ est abélien, on a $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{c}$, donc $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$ (lemme 1), de sorte que $\mathfrak{h}$ est abélien. Comme $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ et que $\mathfrak{h}$ est abélien, une nouvelle utilisation du lemme 1 montre que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0$. Donc $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{c}$ et par suite $\mathfrak{h}' = 0$. Ainsi, $\mathfrak{g}'$ est semi-simple. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{g}$ supplémentaire de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{g}$ (§ 8,th.4).

On a $D\mathfrak{g} = [\mathfrak{a} + \mathfrak{c}, \mathfrak{a} + \mathfrak{c}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$, et toutes les assertions de la proposition se trouvent établies.

<u>Corollaire.- Pour qu'une algèbre de Lie soit réductive, il faut et il suffit qu'elle soit isomorphe au produit d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple.</u>

La condition est nécessaire d'après la prop.5, et suffisante d'après le cor.2 de la prop.1 .

<u>Proposition 5.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive, $\mathfrak{c}$ son centre, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{a}$ est la somme directe des idéaux $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a} \cap D\mathfrak{g}$.</u>

Identifions $\mathfrak{g}$ à l'algèbre de Lie $\mathfrak{c} \times D\mathfrak{g}$. L'image $\mathfrak{a}_1$ de $\mathfrak{a}$ dans $D\mathfrak{g}$ par l'application canonique de $\mathfrak{c} \times D\mathfrak{g}$ sur $D\mathfrak{g}$ est un idéal de $D\mathfrak{g}$. Donc l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_1$ est semi-simple, de sorte que $\mathfrak{a}_1 = D\mathfrak{a}_1$. Si $x_1 \in \mathfrak{a}_1$ et $y_1 \in \mathfrak{a}_1$, on a $x_1 = x - x'$, $y_1 = y - y'$, avec $x, y \in \mathfrak{a}$, $x', y' \in \mathfrak{c}$, donc $[x_1, y_1] = [x, y] \in \mathfrak{a}$.

Donc $\mathfrak{a}_1 = D\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}$. Il en résulte que l'image $\mathfrak{a}_2$ de $\mathfrak{a}$ par l'application canonique de $\mathfrak{c} \times D\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{c}$ est aussi contenue dans $\mathfrak{a}$, et la proposition s'en déduit aussitôt.

<u>Corollaire.- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre réductive. Tout idéal de $\mathfrak{g}$ et toute algèbre quotient de $\mathfrak{g}$ sont des algèbres de Lie réductives.</u>

En effet, conservant les notations de la démonstration précédente, on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1$ est semi-simple et $\mathfrak{a}_2$ est abélienne, donc l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est réductive. De même, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, isomorphe à $(D\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1) \times (\mathfrak{c}/\mathfrak{a}_2)$ est réductive.

<u>Proposition 6.- Pour qu'une algèbre de Lie soit réductive, il faut et il suffit que sa représentation adjointe soit complètement réductible.</u>

En effet, les représentations adjointes d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple sont complètement réductible, donc la représentation adjointe d'une algèbre de Lie réductive est complètement réductible. Réciproquement, soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et supposons la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ complètement réductible. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$; il existe un idéal $\mathfrak{a}'$ supplémentaire de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$; on a $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'] = 0$, donc $\mathfrak{a}$ est contenu dans le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$. Ceci prouve d'abord que $\mathfrak{g}$ est isomorphe au produit de $\mathfrak{c}$ et d'un idéal $\mathfrak{c}'$, puis que tout idéal abélien de $\mathfrak{c}'$ est nul, de sorte que $\mathfrak{c}'$ est semi-simple. Donc $\mathfrak{g}$ est réductive.

3. Nouvelles propriétés du radical nilpotent.- Proposition 7.- *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{s}$ son radical nilpotent, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Pour que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ soit réductive, il faut et il suffit que $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{s}$.*

En effet, $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ est réductive (prop.4). Si $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{s}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, qui est isomorphe à un quotient de $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$, est réductive (cor. de la prop.5). Réciproquement, supposons $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ réductive. Il existe une représentation complètement réductible fidèle de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Cette représentation définit une représentation complètement réductible de $\mathfrak{g}$, de noyau $\mathfrak{a}$. Donc $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{a}$.

Théorème 2.- *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{r}$ son radical, $\mathfrak{s}$ son radical nilpotent. On a $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = D\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$.*

Soit $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$. L'image canonique de $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{g}'$ est, d'une part, le radical de $\mathfrak{g}'$ (§ 6, prop.3), et d'autre part est contenue dans le centre de $\mathfrak{g}'$. Donc $\mathfrak{g}'$ est extension centrale d'une algèbre semi-simple, donc est réductive. Par suite, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \supset \mathfrak{s}$ (prop.7). Il est clair que $D\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$. Enfin, l'image canonique de $D\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ est contenue, d'une part, dans $D(\mathfrak{g}/\mathfrak{s})$, et d'autre part, dans le radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$, donc est nulle puisque $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ est réductive. Donc $\mathfrak{s} \supset \mathrm{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$, ce qui achève la démonstration.

Remarque.- Soit B un surcorps commutatif de A . On sait (§ 8, n°1, remarque 2), que le radical de $\mathfrak{g}_{(B)}$ est $\mathfrak{r}_{(B)}$. Donc le radical nilpotent de $\mathfrak{g}_{(B)}$ est $[\mathfrak{g}_{(B)}, \mathfrak{r}_{(B)}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]_{(B)} = \mathfrak{s}_{(B)}$.

4. Applications. I. Nouvelles propriétés du radical.- Proposition 8.- *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{r}$ son radical, B sa forme de Killing. Alors, $\mathfrak{r}$ est l'orthogonal de $\mathrm{D}\mathfrak{g}$ pour B .*

En effet, soit $\mathfrak{r}'$ l'orthogonal de $\mathrm{D}\mathfrak{g}$ pour B , et soit $\mathfrak{s}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$. On a $B(\mathfrak{r}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = B([\mathfrak{r}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = B(\mathfrak{s}, \mathfrak{g}) = 0$ (§ 5, cor. du th.2), donc $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{r}'$. D'autre part, le th.1 du § 7, appliqué à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, et le th.2 du § 5, montrent que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}']$ est contenu dans le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. A fortiori, $[\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'] = \mathrm{D}\mathfrak{r}'$ est résoluble, donc $\mathfrak{r}'$ est résoluble, donc $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{r}$.

Corollaire 1.- *Le radical d'une algèbre de Lie est un idéal caractéristique.*

Ceci résulte de la prop.8, et de la prop.7 du § 3.

Corollaire 2.- *Le radical nilpotent d'une algèbre de Lie est un idéal caractéristique.*

Ceci résulte du cor. 1 et du th.2 .

Le cor.1 peut être précisé de la manière suivante :

Proposition 9.- *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{r}$ son radical, $\mathfrak{n}$ son plus grand idéal nilpotent. Toute dérivation de $\mathfrak{g}$ applique $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{n}$.*

En effet, identifions $\mathfrak{g}$ à un idéal de son holomorphe $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{r}$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ est un idéal de $\mathfrak{h}$. Il est donc contenu dans le radical $\mathfrak{r}'$ de $\mathfrak{h}$. Ceci posé, toute dérivation D de $\mathfrak{g}$ est induite par une dérivation intérieure D' de $\mathfrak{h}$, qui applique $\mathfrak{r}'$ dans le radical nilpotent s de $\mathfrak{h}$ (th.2). Donc D applique $\mathfrak{r}$ dans $s \cap \mathfrak{g}$, qui est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$.

Corollaire.– Le plus grand idéal nilpotent d'une algèbre de Lie est un idéal caractéristique.

Le cor. 1 de la prop. 8 permet aussi de généraliser le th.4 du § 8:

Proposition 10.– Toute extension d'une algèbre de Lie semi-simple est inessentielle.

Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{b}$ son radical. Toute extension d'une algèbre de Lie semi-simple par $\mathfrak{b}$ est inessentielle (§ 8,th.4). Toute extension d'une algèbre de Lie semi-simple par $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ (qui est semi-simple) est inessentielle (§ 8,prop.1). Donc toute extension d'une algèbre de Lie semi-simple par $\mathfrak{a}$ est inessentielle (§ 8,lemme 3).

5. *Applications. II. Nouvelles propriétés des algèbres de Lie résolubles.–*

Théorème 3.– Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, B sa forme de Killing. Pour que $\mathfrak{g}$ soit résoluble, il faut et il suffit que $\mathfrak{g}$ soit orthogonal à $D\mathfrak{g}$ pour B.

C'est une conséquence immédiate de la prop.8.

Proposition 11.– Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Pour que $\mathfrak{g}$ soit résoluble, il faut et il suffit que $D\mathfrak{g}$ soit nilpotente.

Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, son radical nilpotent est $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ (th.2), donc $D\mathfrak{g}$ est nilpotente. Réciproquement, si $D\mathfrak{g}$ est nilpotente, $D\mathfrak{g}$ est résoluble, donc $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Proposition 12.– Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble, $x \to x_M$ une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$. Les x_M sont deux à deux permutables.

En effet, la représentation s'annule sur le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire sur $D\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne.

Corollaire 1.- Une représentation irréductible d'une algèbre de Lie résoluble sur un corps algèbriquement clos est de dimension 1. Une représentation irréductible d'une algèbre de Lie résoluble sur le corps R est de dimension 1 ou 2.

Ceci résulte aussitôt de la prop. 12.

Corollaire 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble sur un corps algèbriquement clos, $x \to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace M de dimension n. Il existe une suite croissante $M_0, M_1, \ldots, M_n$ de sous-espaces stables pour les x_M tels que $\dim M_i = n-i$.

En effet, soit $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module M. La représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace M_i/M_{i+1} déduite de la représentation $x \to x_M$ par restriction à M_i et passage au quotient est irréductible, donc de dimension 1 (cor. 1). D'où $\dim M_i = n-i$.

Corollaire 3.- Soient $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(M)$, $\mathfrak{r}$ son radical, E l'algèbre associative engendrée par 1 et $\mathfrak{g}$. Soit $x \in \mathfrak{g}$. Pour que x soit dans le radical de E, il faut et il suffit que x soit nilpotent et que $x \in \mathfrak{r}$.

Soit $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}$) l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ qui sont nilpotents et dans $\mathfrak{r}$ (resp. qui sont dans le radical de E). L'ensemble $\mathfrak{b}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ (§ 5, cor. 2 du th. 1), donc $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$. Pour montrer que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, il suffit de montrer que $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ (§ 5, lemme 3). Or $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{b}$ (prop. 2), et a fortiori $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$. Il suffit donc de montrer que les conditions $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{a}$ entraînent $x+y \in \mathfrak{a}$. Or, soit $(M_i)_{0 \leq i \leq p}$ une suite de Jordan-Hölder de M considéré comme Γ-module, et soit N_i le Γ-module M_i/M_{i+1}, qui est simple ; comme Γ est résoluble, x_{N_i} et y_{N_i} sont permutables (prop.12) ; par ailleurs, x_{N_i} et y_{N_i} sont nilpotents ; donc $(x+y)_{N_i}$ est nilpotent ; ceci ayant lieu pour $i \in [0,p-1]$, $x+y$ est nilpotent, donc $x+y \in \mathfrak{n}$.

6. Représentations des algèbres réductives.— Proposition 13.— Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive, $\mathfrak{c}$ son centre, ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M. Pour que ρ soit complètement réductible, il faut et il suffit que la restriction de ρ à $\mathfrak{c}$ soit complètement réductible.

Soient ρ' et ρ'' les restrictions de ρ à $\mathfrak{c}$ et $D\mathfrak{g}$. Supposons d'abord le corps A algèbriquement clos.

Si ρ est complètement réductible, ρ' est complètement réductible ; en effet, on peut se limiter au cas où ρ est irréductible ; alors, pour tout $y \in \mathfrak{c}$, y_M est permutable aux x_M, $x \in \mathfrak{g}$, donc est un scalaire, ce qui prouve notre assertion.

Supposons maintenant ρ' complètement réductible. Le $\mathfrak{c}$-module semi-simple M est somme directe de ses composants homogènes M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Comme les x_M $(x \in D\mathfrak{g})$ sont permutables aux y_M $(y \in \mathfrak{c})$, chaque M_i est stable pour ρ'', donc pour ρ. On est ramené à prouver que M_i est un $\mathfrak{g}$-module semi-simple. Autrement dit, on peut supposer que M est un $\mathfrak{c}$-module homogène. Comme A est algèbriquement clos, ceci signifie que y_M est un endomorphisme scalaire pour tout $y \in \mathfrak{c}$. Comme ρ'' est complètement réductible (puisque $D\mathfrak{g}$ est semi-simple), il est clair que ρ est complètement réductible.

Si enfin A est quelconque, soit A' sa clôture algèbrique. Alors, $\mathfrak{g}_{(A')}$ est réductive, de centre $\mathfrak{c}_{(B')}$. Pour que $\rho_{(A')}$ soit complètement réductible, il faut et il suffit que $\rho'_{(A')}$ soit complètement réductible. Or $\rho_{(A')}$ (resp. $\rho'_{(A')}$) est complètement réductible si et seulement si ρ (resp. ρ') est complètement réductible.

Corollaire.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, ρ et ρ' deux représentations complètement réductibles de $\mathfrak{g}$. Alors le produit tensoriel σ de ρ et ρ' est complètement réductible.

Supposons d'abord le corps A algèbriquement clos. Soient $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}'$ les noyaux de ρ et ρ' ; le radical nilpotent $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ est contenu dans $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}'$. Les représentations ρ et ρ' définissent des représentations complètement réductibles de $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$, qui est réductive. On peut donc supposer désormais que $\mathfrak{g}$ est réductive. Soit $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$. Il suffit de prouver que la restriction σ_1 de σ à $\mathfrak{c}$ est complètement réductible. Or, σ_1 est le produit tensoriel des restrictions ρ_1 et ρ_1' de ρ et ρ' à $\mathfrak{c}$, lesquelles sont complètement réductibles. On est donc ramené à prouver le corollaire lorsque $\mathfrak{g}$ est abélienne. D'autre part, ρ (resp. ρ') est somme directe de représentations irréductibles ρ_i (resp. ρ_j'), donc σ est somme directe des produits tensoriels des ρ_i et des ρ_j'. On peut donc supposer ρ et ρ' irréductibles. Comme A est algèbriquement clos et $\mathfrak{g}$ abélienne, les $\rho(x)$ et les $\rho'(x)$ sont des endomorphismes scalaires, et le corollaire est évident dans ce cas. Si enfin A est quelconque, soit A' sa clôture algèbrique. Les représentations $\rho_{(A')}$, $\rho'_{(A')}$ sont complètement réductibles, donc $\sigma_{(A')}$ est complètement réductible, donc σ est complètement réductible.

7. Le théorème de Malcev.- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On va indiquer les rapports qui existent entre les différentes décompositions de Levi de $\mathfrak{g}$.

Lemme 2.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre (non nécessairement associative) et D une dérivation nilpotente de $\mathfrak{g}$. L'endomorphisme exp D est un automorphisme de l'algèbre $\mathfrak{g}$.

En effet, D étant nilpotente, exp D est défini et est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. En outre, pour $y, z \in \mathfrak{g}$, on a :

$$D^p(yz) = \sum_{0 \leqslant r \leqslant p} \binom{p}{r} D^r y \,.\, D^{p-r} z$$

pour tout entier $p \geqslant 0$ (formule de Leibnitz). Il en résulte que

$$(\exp D)(y\,z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}\, D^p(yz) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{0 \leqslant r \leqslant p} \left(\frac{1}{r!}\, D^r y\right)\left(\frac{1}{(p-r)!}\, D^{p-r} z\right)$$
$$= (\exp D)\, y \,.\, (\exp D) z \quad ,$$

les sommes ne comprenant qu'un nombre fini de termes non nuls puisque D est nilpotente. D'où le lemme.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Si x est un élément du radical nilpotent de $\mathfrak{g}$, ad x est nilpotent (§ 5, prop. 3). On peut donc poser la définition suivante :

<u>Définition 2</u>.- On appelle automorphisme spécial de $\mathfrak{g}$ un élément du groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}$ engendré par les automorphismes de la forme exp (ad x), où x est dans le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$.

<u>Théorème 4</u> (Malcev).- <u>Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ deux sections de Levi de $\mathfrak{g}$. Il existe un automorphisme spécial de $\mathfrak{g}$ qui transforme $\mathfrak{l}$ en $\mathfrak{l}'$</u>.

Supposons d'abord que le radical $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ soit abélien. Soit $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. L'extension $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{r}$ définit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $\mathfrak{r}$ (§ 4, n°6). Soient μ l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{a}$, ν et ν' les applications linéaires de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ telles que $\mu \circ \nu$, $\mu \circ \nu'$ soient les applications identiques de $\mathfrak{a}$, et telles que $\nu(\mathfrak{a}) = \mathfrak{l}$, $\nu'(\mathfrak{a}) = \mathfrak{l}'$. Posant $g(x) = \nu'(x) - \nu(x)$ pour $x \in \mathfrak{a}$, g est une cochaîne de degré 1 de $\mathfrak{a}$ à valeurs dans $\mathfrak{r}$. Les cocycles f et f' définis par ν et ν' (§ 4, n°6) sont nuls puisque ν et ν' sont des homomorphismes. La formule (12) du § 3 prouve alors que $dg = 0$. En vertu du premier lemme de Whitehead, g est le le cobord d'une cochaîne de degré 0 ; autrement dit, il existe un élément $e \in \mathfrak{b}$ tel que $g(x) = -x_{\mathfrak{b}} e$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$. D'autre part, l'idéal $[\mathfrak{b}, \mathfrak{g}]$ est un sous-$\mathfrak{a}$-module de $\mathfrak{b}$; puisque $\mathfrak{a}$ est semi-simple, il existe dans $\mathfrak{b}$ un sous-$\mathfrak{a}$-module supplémentaire de $[\mathfrak{b}, \mathfrak{g}]$, qui est annulé par tous les $x_{\mathfrak{b}}$, $x \in \mathfrak{a}$; on a donc $x_{\mathfrak{b}} e = x_{\mathfrak{b}} e'$, en désignant par e' la composante de e dans $[\mathfrak{b}, \mathfrak{g}]$. On peut donc supposer désormais que e appartient à $[\mathfrak{b}, \mathfrak{g}]$, c'est-à-dire au radical nilpotent de $\mathfrak{g}$. Alors, $\exp(\mathrm{ad}\, e)$ est un automorphisme spécial de $\mathfrak{g}$. D'autre part, $(\mathrm{ad}\, e)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}$ car $\mathfrak{b}$ est un idéal, et $(\mathrm{ad}\, e)\mathfrak{b} = 0$ car $\mathfrak{b}$ est abélien ; donc $(\mathrm{ad}\, e)^2 = 0$, et par suite :

$$\nu' x = \nu x + gx = \nu x - [\nu x, e] = \nu x + (\mathrm{ad}\, e).\nu x = (\exp \mathrm{ad}\, e)\nu x$$

pour tout $x \in \mathfrak{a}$, ce qui prouve le théorème dans le cas où $\mathfrak{b}$ est abélien.

Dans le cas général, la démonstration procède par récurrence sur la dimension du radical. Supposons le théorème démontré lorsque le radical est de dimension $< n$, et étudions le cas où $\dim \mathfrak{b} = n > 0$. Soit ρ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/D\mathfrak{b}$. Le radical $\mathfrak{b}/D\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}/D\mathfrak{b}$ est abélien, et $\rho(\mathfrak{l}_1)$, $\rho(\mathfrak{l}_2)$ sont des sections de Levi de $\mathfrak{g}/D\mathfrak{b}$. D'après la première partie de la démonstration, $\rho(\mathfrak{l}_2)$ se déduit de $\rho(\mathfrak{l}_1)$ par un automorphisme spécial ω de $\mathfrak{g}/D\mathfrak{b}$. Or, comme $D\mathfrak{b}$ est contenu dans le radical nilpotent $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}]$ de $\mathfrak{g}$, le radical nilpotent de $\mathfrak{g}/D\mathfrak{b}$ est l'image par ρ du radical nilpotent de $\mathfrak{g}$. Donc ω se déduit par passage au quotient d'un automorphisme spécial ω' de $\mathfrak{g}$. Alors, ω' transforme $\mathfrak{l}_1$ en une section de Levi $\mathfrak{l}'_1$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\rho(\mathfrak{l}'_1) = \rho(\mathfrak{l}_1)$. Autrement dit, nous sommes ramenés au cas où $\mathfrak{l}_1 + D\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{l}_2 + D\mathfrak{b}$ sont égaux à une même sous-algèbre, soit $\mathfrak{g}'$, de $\mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$ sont deux sections de Levi de $\mathfrak{g}'$, dont le radical $D\mathfrak{b}$ est de dimension $< n$. Il existe donc un automorphisme spécial ω'' de $\mathfrak{g}'$ qui transforme $\mathfrak{l}_1$ en $\mathfrak{l}_2$.

Comme le radical nilpotent $[\mathfrak{g}', D\mathfrak{b}]$ de $\mathfrak{g}'$ est contenu dans le radical nilpotent $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}]$ de $\mathfrak{g}$, ω'' est la restriction à $\mathfrak{g}'$ d'un automorphisme spécial de $\mathfrak{g}$, ce qui achève la démonstration.

8. Exemple d'algèbre de Lie réductive.- Théorème 5.- *Soit* M *un espace vectoriel de dimension finie* >1 *sur* A. *Alors,* $\mathfrak{gl}(M)$ *est une algèbre de Lie réductive. Son centre est formé des endomorphismes scalaires de* M. *Son algèbre dérivée est* $\mathfrak{sl}(M)$, *qui est simple*.

L'application identique de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(M)$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ dans M, donc $\mathfrak{g}$ est réductive (cor.1 de la prop.1). Son centre $\mathfrak{c}$ est formé des endomorphismes scalaires de M (Alg.II). On sait que $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{c}$ et de $D\mathfrak{g}$. D'autre part, il est clair que $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{c}$ et de $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(M)$, et que $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{s}$. Donc $D\mathfrak{g} = \mathfrak{s}$, de sorte que $\mathfrak{s}$ est semi-simple. Soient $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots, \mathfrak{s}_n$ ses composants simples. La forme de Killing de $\mathfrak{s}_i$ définit une forme bilinéaire symétrique invariante B_i sur $\mathfrak{g}$ pour laquelle $\mathfrak{c}$ et les $\mathfrak{s}_j$ d'indice $j \neq i$ orthogonaux à $\mathfrak{g}$. Soit d'autre part B_0 la forme bilinéaire symétrique $(x,y) \to (\mathrm{Tr}\, x)(\mathrm{Tr}\, y)$ sur $\mathfrak{g}$, pour laquelle $\mathfrak{s}$ est orthogonal à $\mathfrak{g}$, donc qui est invariante. Il est clair que $B_0, B_1, \ldots, B_n$ sont linéairement indépendantes. On achèvera donc la démonstration en prouvant que l'espace $\mathcal{B}$ des formes bilinéaires invariantes sur $\mathfrak{g}$ est de dimension 2.

Pour cela, soient $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de l'espace M, et soit x_{ij} l'élément de $\mathfrak{gl}(M)$ défini par $x_{ij}e_j = e_i$, $x_{ij}e_k = 0$ pour $k \neq j$.

Les x_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ forment une base de l'espace $g\ell(M)$. Une forme bilinéaire B sur $g\ell(M)$ est définie par les nombres $B(x_{ij}, x_{k\ell}) = a_{ijk\ell}$. Pour que B soit invariante, il faut et il suffit qu'on ait $B([x_{ij}, x_{k\ell}], x_{rs}) = B(x_{ij}, [x_{k\ell}, x_{rs}])$ quels que soient i, j, k, ℓ, r, s dans $[1,n]$. Cette condition se traduit aussitôt par la formule :

$$(1) \qquad \delta_{jk}\, a_{i\ell rs} - \delta_{i\ell}\, a_{kjrs} = \delta_{\ell r}\, a_{ijks} - \delta_{ks}\, a_{ijr\ell}$$

Faisant $j=k$, $i\neq\ell$, $\ell\neq r$, $k\neq s$, on obtient $a_{i\ell rs}=0$ pour $i\neq\ell$ et $\ell\neq r$. On voit de façon analogue, et changeant les noms des indices, que $a_{i\ell rs}=0$ si $i\neq\ell$ et $i\neq s$, ou si $\ell\neq r$ et $r\neq s$, ou si $r\neq s$ et $i\neq s$. Bref, les $a_{i\ell rs}$ sont nuls sauf éventuellement les a_{iijj} et les a_{ijji}.

Faisant, dans (1), $j=k$, $r=\ell$, $s=i$, $i\neq\ell$, $k\neq s$, on obtient $a_{i\ell\ell i} = a_{ijji}$ pour $i\neq\ell$ et $i\neq j$. De même, pour $i=\ell$, $j=r$, $k=s$, $k\neq j$, $i\neq j$, on obtient $a_{kjjk} = a_{ijji}$ pour $k\neq j$ et $i\neq j$. Bref, tous les a_{ijji} sont égaux pour $i\neq j$.

Faisant $j=k$, $i=\ell$, $r=s$, $i\neq r$, $j\neq r$, on obtient $a_{iirr} = a_{jjrr}$ pour $i\neq r$ et $j\neq r$. Faisant $\ell=r$, $i=j$, $k=s$, $j\neq k$, $i\neq\ell$, on obtient $a_{iikk} = a_{ii\ell\ell}$ pour $i\neq k$ et $i\neq\ell$. Bref, tous les a_{iijj} sont égaux pour $i\neq j$.

Modulo un sous-espace de $\mathcal{B}$ de dimension 2 au plus, tout élément de $\mathcal{B}$ est donc congru à une forme B telle que $a_{i\ell rs}=0$ sauf éventuellement pour $i=\ell=r=s$. Appliquant alors (1) au cas $i=\ell=r=s\neq j=k$, on trouve $a_{iiii}=0$, ce qui achève la démonstration.

Exercices.

* 1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Si la restriction de la forme de Killing à un idéal $D^p\mathfrak{g}$ est nulle, $\mathfrak{g}$ est résoluble (montrer que $D^p\mathfrak{g}$ est résoluble).

2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On suppose que, pour toute représentation irréductible $x \to x_M$ de $\mathfrak{g}$, les x_M sont deux à deux permutables. Montrer que $\mathfrak{g}$ est résoluble. (Observer que $D\mathfrak{g}$ est contenu dans le radical nilpotent, donc résoluble).

* 3. Pour qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit réductive, il faut et il suffit qu'il existe une représentation de $\mathfrak{g}$ telle que la forme bilinéaire associée soit non dégénérée (pour la suffisance, utiliser le cor.2 de la prop.2 ; pour la nécessité, envisager le cas d'une algèbre de Lie semi-simple, et d'une algèbre de Lie abélienne de dimension 1).

* 4. a. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{r}$ son radical, $\mathfrak{n}$ son plus grand idéal nilpotent. Soient $\mathfrak{g}'$ un idéal de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}'$ son radical, $\mathfrak{n}'$ son plus grand idéal nilpotent. Montrer que $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}'$.

b. En déduire que $\mathfrak{n}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{r}$.

c. Montrer que le radical nilpotent de $\mathfrak{r}$ peut être distinct du radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ (soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie semi-simple, $x \to x_{\mathfrak{b}}$ une représentation irréductible de $\mathfrak{a}$ dans un espace vectoriel $\mathfrak{b} \neq 0$ considéré comme algèbre de Lie abélienne. Prendre pour $\mathfrak{g}$ le produit croisé de $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{b}$.

5. Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ des algèbres de Lie, s_1 et s_2 leurs radicaux nilpotents. Montrer que le radical nilpotent de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ est $s_1 \times s_2$ (utiliser le th.2).

6. Pour qu'une algèbre de Lie soit réductive, il faut et il suffit que son radical soit égal à son centre. (Utiliser une section de Levi).

7\. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension 3 ; si $D\mathfrak{g}$ est de dimension 2 , $D\mathfrak{g}$ est abélienne (utiliser la prop.11, et l'exerc.1 du § 6), et $\mathfrak{g}$ est le produit croisé d'une algèbre de Lie abélienne de dimension 2 par une algèbre de Lie de dimension 1 .

8\. a. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble, $x \to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$. Pour que x_M soit nilpotente, il faut et il suffit que x_M appartienne au radical de l'algèbre associative engendrée par 1 et les x_M (appliquer le cor.3 de la prop.12 à l'image de $\mathfrak{g}$ par la représentation.

b. Le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que ad x soit nilpotent (appliquer a à la représentation adjointe)

c. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quelconque, $\mathfrak{r}$ son radical, $\mathfrak{n}$ son plus grand idéal nilpotent. Alors, $\mathfrak{n}$ est l'ensemble des $x \in \mathfrak{r}$ tels que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ soit nilpotent (utiliser b et l'exerc. 4 b).

9\. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, M l'espace dual de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, $x \to x_M$ la représentation duale de la représentation adjointe On considère M comme une algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{a}$, $x \to x_M$ comme un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$, et on forme le produit croisé $\mathfrak{h}$ correspondant, dans lequel $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre et $\mathfrak{a}$ un idéal. Pour $y, z \in \mathfrak{g}$ et $y', z' \in \mathfrak{a}$, on pose $B(y+y', z+z') = \langle y,z'\rangle + \langle z,y'\rangle$. Ceci définit sur $\mathfrak{h}$ une forme bilinéaire symétrique B .

a . Montrer que B est invariante et non dégénérée.

b. Montrer que le radical et le radical nilpotent de $\mathfrak{h}$ sont égaux à $\mathfrak{a}$.

c. Déduire de a et b qu'il existe des formes bilinéaires symétriques invariantes non associées à des représentations.

10\. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que les conditions $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$, $[[x,y],y] = 0$ entraînent $[x,y]=0$. Montrer que $\mathfrak{g}$ est réductive. (Soit $\mathfrak{r}$ le radical de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{r}$ est abélien en utilisant l'exerc. 3 du § 6, puisque $\mathfrak{r}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$. Utiliser alors l'exerc. 6).

§ 10. Le théorème d'Ado.

1. Un théorème sur les représentations.– Lemme 1.– *Soit* U *une algèbre associative sur* A *qui possède un ensemble fini de générateurs, et soit* Z *un idéal bilatère de codimension finie dans* U. *Pour tout entier* $s \geq 1$, *l'idéal* Z^s *est de codimension finie dans* U.

En effet, soient N un sous-espace supplémentaire de Z dans U, et N' l'ensemble des éléments nn', où $n \in N$, $n' \in N$. Il existe un sous-espace de dimension finie G de U possédant les propriétés suivantes : 1° G engendre l'algèbre U ; 2° $N \subset G$ et $N' \subset G$. Soit alors Z' l'idéal bilatère de U engendré par $V = Z \cap G$. On a : $G = N+(Z\cap G) \subset \subset N+Z'$; par récurrence sur p, l'ensemble G_p des éléments de la forme $g_1g_2\cdots g_p$, où les g_i sont dans G, est contenu dans $N+Z'$, car, si $G_{p-1} \subset N+Z'$, on a $G_p \subset (N+Z')G_{p-1} \subset (N+Z')(N+Z') \subset N'+Z' \subset G+Z' \subset \subset N+Z'$; ceci prouve que $N+Z'=U$, et comme d'autre part $Z' \subset Z$, on voit que $Z'=Z$. Donc Z est le sous-espace de U engendré par UVU, UV, VU et V. Or, $U=Z+N$, et les éléments de ZVU, UVZ, ZV, VZ sont dans Z^2. Donc tout élément de Z est congru modulo Z^2 à un élément du sous-espace engendré par NVN, NV, VN, V, sous-espace qui est de dimension finie. Par suite, Z^2 est de codimension finie dans U. Par récurrence, on voit alors que Z^{2^n} est de codimension finie dans U pour tout entier $n \geq 0$, ce qui établit le lemme.

Lemme 2.– *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{h}$ *un idéal abélien de* $\mathfrak{g}$ *distinct de* $\mathfrak{g}$. *Il existe dans* $\mathfrak{g}$ *un idéal résoluble* $\mathfrak{g}'$ *et une sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{b}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

a. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$

b. $\mathfrak{g}$ *est somme directe de* $\mathfrak{g}'$ *et* $\mathfrak{b}$.

c. Si $\mathfrak{u}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, alors
$\mathfrak{u} = (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}') + (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{b})$.

En effet, si $\mathfrak{g}$ n'est pas résoluble, on prend pour $\mathfrak{g}'$ le radical de $\mathfrak{g}$ et pour $\mathfrak{b}$ une section de Levi de $\mathfrak{g}$; la propriété c est vérifiée car $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}'$. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est résoluble et non nul, $D(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \neq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, donc $D\mathfrak{g} + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. Choisissons alors pour $\mathfrak{g}'$ un sous-espace de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ et contenant $D\mathfrak{g} + \mathfrak{h}$; on a $\mathfrak{g}' \supset D\mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{g}'$ est un idéal (résoluble), et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$.
La propriété b sera vérifiée en choisissant pour $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de dimension 1 engendrée par un élément quelconque x de $\mathfrak{g}$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{g}'$. Si $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}'$, la propriété c est aussi vérifiée ; sinon, il suffit de prendre x dans $\mathfrak{u}$.

Lemme 3.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}'$ un idéal de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, et supposons que $\mathfrak{g}$ soit somme directe de $\mathfrak{g}'$ et de $\mathfrak{b}$. Soit U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}'$. Il existe une représentation $x \to x_U$ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace U (*) et une seule telle que : α) pour $x \in \mathfrak{g}'$ et $u \in U$, $x_U u = xu$; β) pour $x \in \mathfrak{b}$ et $u \in U$, $x_U u = xu - ux$.

Observons d'abord que, quand u parcourt l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, l'application $u \to xu - ux$ ($x \in \mathfrak{g}$) est une dérivation de cette algèbre. Comme $\mathfrak{g}'$ est stable pour cette dérivation, il en est de même de U , de sorte que la condition β définit bien un endomorphisme de U .

Ceci posé, les conditions α et β définissent de manière unique une application linéaire $x \to x_U$ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des endomorphismes de U

(*) Cette représentation est en général de degré infini, contrairement à toutes les représentations considérées depuis le § 5 .

Il suffit de vérifier que $[x,y]_U = [x_U, y_U]$ pour $x, y \in \mathfrak{g}$. On peut se borner à envisager les cas suivants :

1. $x \in \mathfrak{g}'$, $y \in \mathfrak{g}'$: alors, $[x,y]_U\, u = (xy-yx)u = (x_U y_U - y_U x_U)u$
2. $x \in \mathfrak{b}$, $y \in \mathfrak{g}'$: alors $[x,y]_U u = (x_U y)u = x_U(yu) - y(x_U u) = (x_U y_U - y_U x_U)u$
3. $x \in \mathfrak{b}$, $y \in \mathfrak{b}$: alors, $[x,y]_U$ et $[x_U, y_U]$ sont deux dérivations de U qui, sur $\mathfrak{g}'$, se réduisent à $\mathrm{ad}([x,y])$, et à $[\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y]$, donc coïncident.

<u>Théorème 1.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Il existe un module de représentation M de $\mathfrak{g}$ de dimension finie pour lequel</u> :

1) <u>la représentation</u> $x \to x_M$, <u>restreinte à $\mathfrak{h}$, est fidèle</u> ;
2) <u>si</u> x <u>est dans le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$</u>, x_M <u>est nilpotent</u> ;
3) <u>quels que soient</u> $x \in \mathfrak{h}$ et $y \in \mathfrak{g}$, <u>on a</u> $x_M y_M = 0$.

La démonstration procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, définissons un module de représentation M de $\mathfrak{g}$ de la manière suivante : prenons pour M l'espace $A \times \mathfrak{g}$; si $x \in \mathfrak{g}$, définissons x_M par les conditions $x_M(1,0) = (0,x)$ et $x_M(0,y) = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$; il est immédiat que M vérifie les conditions du théorème. Supposons donc que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit de dimension $n > 0$, et que le théorème soit vrai lorsque ce quotient est de dimension $< n$. D'après le lemme 2, il existe dans $\mathfrak{g}$ un idéal résoluble $\mathfrak{g}'$ et une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ tels que : a) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$; b) $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{b}$; c) $\mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}' + (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{b})$.

Compte-tenu de l'hypothèse de récurrence, il existe une représentation $y \to y_{M'}$ de $\mathfrak{g}'$ qui vérifie les conditions du théorème (où l'on remplace $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}'$).

Cette représentation se prolonge en un homomorphisme $u \to u_{M'}$ de U (algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}'$) sur E (algèbre associative engendrée par 1 et les $y_{M'}$). Soient S le noyau de cet homomorphisme, et R l'image réciproque du radical de E par cet homomorphisme ; on a $S \subset R$, et il existe un entier s tel que $R^s \subset S$ (car le radical de E est un idéal nilpotent de E). L'idéal R, donc l'idéal R^s, sont de codimension finie dans U (lemme 1). Soit d'autre part R' l'idéal bilatère de U engendré par les éléments yz, où $y \in \mathfrak{h}$ et $z \in \mathfrak{g}'$; comme la représentation $y \to y_{M'}$ de $\mathfrak{g}'$ vérifie la condition 3 du théorème, on a $R' \subset S$. Posons $Z = R' + R^s$. <u>L'idéal bilatère</u> Z <u>de</u> U <u>est de codimension finie dans</u> U , <u>et</u> $Z \subset S$. La condition 2 du théorème entraîne que le <u>plus grand idéal nilpotent de</u> $\mathfrak{g}'$ <u>est contenu dans</u> R . Enfin, la condition 1 du théorème entraîne que $\mathfrak{h} \cap S = 0$, <u>d'où</u>, <u>a fortiori</u>, $\mathfrak{h} \cap Z = 0$.

Par ailleurs, il existe une représentation $x \to x_U$ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace U, définie par les conditions α, β du lemme 3. Montrons que R' et R^s, donc Z , <u>sont stables pour les</u> x_U . C'est évident si $x \in \mathfrak{g}'$. Supposons donc $x \in \mathfrak{b}$. D'abord, R' est stable pour x_U ; car, si $y \in \mathfrak{h}$ et $z \in \mathfrak{g}'$, on a $x_U(yz) = [x,y]z + y[x,z] \in R'$ car $[x,y] \in \mathfrak{h}$ et $[x,z] \in \mathfrak{g}'$; et, x_U étant une dérivation de U, $x_U(R') \subset R'$. Ensuite, R est stable pour x_U (ce qui entraînera que R^s est stable pour x_U) ; car x_U applique $\mathfrak{g}'$ dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}']$, donc, $\mathfrak{g}'$ étant résoluble, dans le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$, donc dans un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, et finalement, d'après ce qu'on a remarqué, dans R ; par suite, x_U , étant une dérivation de U , applique U dans R .

La représentation $x \to x_U$ de $\mathfrak{g}$ définit donc, par passage au quotient, une représentation $x \to x_M$ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $M = U/Z$, qui est de dimension finie. On va voir que cette représentation vérifie les 3 conditions du théorème :

1. Si $x \in \mathfrak{h}$, on a $x_U.1 = x \notin Z$, donc $x_M \neq 0$

2. L'ensemble des $z \in \mathfrak{n}$ tels que z_M soit nilpotent est un sous-espace de $\mathfrak{n}$, d'après le cor.3 de la prop.12 du § 9 ; comme $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}') + (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{b})$, il suffit de montrer que z_M est nilpotent pour $z \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}'$ et pour $z \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{b}$; dans le premier cas, on sait que $z \in R$, donc $(z_U)^s U \subset R^s \subset Z$, donc $z_M^s = 0$; dans le deuxième cas, ad z est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$, donc il en est de même de la restriction de ad z à $\mathfrak{g}'$; puisque z_U est la dérivation de U qui prolonge cette restriction, il existe, pour tout $u \in U$, un entier q tel que $(z_U)^q u = 0$; comme M est de dimension finie, on voit que z_M est nilpotent.

3. Si $x \in \mathfrak{h}$ et $y \in \mathfrak{g}$, on a $(x_U y_U) U \subset R'$: c'est évident si $y \in \mathfrak{g}'$; et si $y \in \mathfrak{b}$, cela résulte du fait que la dérivation y_U annule les éléments scalaires de U. Donc $(x_U y_U) U \subset Z$, de sorte que $x_M y_M = 0$.

2. <u>Applications</u> : <u>I. Le théorème d'Ado</u>.- <u>Théorème 2</u>.- <u>Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie</u>, $\mathfrak{n}$ <u>son plus grand idéal nilpotent</u>. <u>Il existe une représentation fidèle</u> $x \to x_N$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>qui est de dimension finie et telle que</u> x_N <u>soit nilpotent pour tout</u> $x \in \mathfrak{n}$.

En effet, soit $\mathfrak{h}$ le centre de $\mathfrak{g}$. Soit M un module de représentation de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions du th.1. La somme directe N de M et du module de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est le module d'une représentation de $\mathfrak{g}$ qui vérifie les conditions du théorème. En effet, le noyau de cette représentation est l'intersection de $\mathfrak{h}$ (noyau de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$) et du noyau de la représentation $x \to x_M$, donc est nul d'après la condition 1 du th.1 . D'autre part, si x est dans $\mathfrak{u}$, ad x est nilpotent, et x_M est nilpotent d'après la condition 2 du th.1, donc x_N est nilpotent.

3. Applications : II. Le théorème d'Iwasawa.- Théorème 3.- Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}$ une extension de $\mathfrak{a}$ à noyau abélien de surjection μ . Il existe une extension inessentielle à noyau abélien $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{a}$, de surjection μ', avec un isomorphisme α de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ tel que $\mu' \circ \alpha = \mu$.

En effet, soient $\mathfrak{h}$ le noyau abélien de μ , et $x \to x_M$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M vérifiant vis à vis de $\mathfrak{h}$ les conditions 1 et 3 du th.1 . Soit L l'algèbre associative engendrée par les x_M pour $x \in \mathfrak{g}$. On définit une représentation $x \to x_L$ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace L en posant $x_L(e) = x_M e$ quels que soient $x \in \mathfrak{g}$ et $e \in L$. Il résulte de la condition 3 du th.1 que $\mathfrak{h}$ est dans le noyau de cette représentation. Par conséquent, il existe une représentation $y \to y_L$ de $\mathfrak{a}$ dans L telle que $(\mu x)_L = x_L$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Considérons l'espace L comme une algèbre de Lie abélienne, et la représentation $y \to y_L$ comme un homomorphisme de $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de L . Formons le produit croisé correspondant $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{a}$ par L (§ 1, n°7 ; rappelons que l'ensemble $\mathfrak{g}'$ est le produit $\mathfrak{a} \times L$). Alors, L s'identifie à un idéal abélien de $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{a}$ s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'/L$, et l'extension $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{a}$ par L est inessentielle. Soit μ' l'application canonique de $\mathfrak{g}'$ sur $\mathfrak{a}$. Soit α l'application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ définie par $\alpha x = (\mu x , x_M)$. Il est clair que $\mu' \circ \alpha = \mu$. D'autre part, α est un homomorphisme d'algèbres de Lie ; car, pour $x, y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\alpha([x,y]) = ([\mu x, \mu y], x_M y_M - y_M x_M) = ([\mu x, \mu y], x_L(y_M) - y_L(x_M)) = \\ = [\alpha x , \alpha y] .$$

C'est un isomorphisme, car, si $\alpha x = 0$, alors $\mu x = 0$ et $x_M=0$, donc $x \in \mathfrak{h}$, et il résulte alors de la condition 1 du th.1 que $x=0$.

Exercices.

1. Pour qu'une algèbre de Lie soit nilpotente, il faut et il suffit qu'elle soit isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre $\mathfrak{gl}(V)$ formée d'endomorphismes nilpotents.

2. Soient M un espace vectoriel sur A , $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base de M . Soit $\mathfrak{g}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(M)$ formée des endomorphismes représentables, par rapport à la base (e_i), par des matrices (a_{ik}) telles que $a_{ik}=0$ pour $k > i$.

a. Montrer que $\mathfrak{g}$ est résoluble (montrer que tout endomorphisme de la forme $[x,y]$, où $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$, est tel que $a_{ii}=0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et en déduire que $D\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente).

b. Montrer que, si A est algèbriquement clos, toute algèbre de Lie résoluble sur A est isomorphe à une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie telle que $\mathfrak{g}$ (utiliser le th. d'Ado et le cor.2 de la prop.12, § 9).

3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{n}$ son plus grand idéal nilpotent. Il existe un espace vectoriel V de dimension finie et un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur une sous-algèbre de $\mathfrak{sl}(V)$ qui applique tout élément de $\mathfrak{n}$ sur un endomorphisme nilpotent de V (utiliser le th. d'Ado et l'exerc.7 du § 1).

4. a. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, U son algèbre enveloppante. Montrer que, pour tout $u \in U$ $(u \neq 0)$, il existe une représentation indécomposable (§ 3, exerc.4) de dimension finie π de U telle que $\pi(u) \neq 0$ (utiliser l'exerc.3, et l'exerc.3c du § 3).

b. Déduire de a qu'il existe une infinité de représentations indécomposables de dimension finie de $\mathfrak{g}$ non équivalentes (soient $\rho_1, \dots, \rho_n$ des représentations indécomposables de $\mathfrak{g}$, $N_1, \dots, N_n$ les annulateurs des U-modules correspondants, $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$. Montrer que N est de codimension finie dans U. Doit $n \in N$, $n \neq 0$; appliquer a à n).

c. Déduire de b que, si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, il existe une infinité de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$ non équivalentes.

Appendice I. Automorphismes et dérivations.

(à usage interne)

Soit $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps A. Posons $B = A((T))$, T étant une indéterminée. Le corps B est muni canoniquement d'une valuation qui en fait un corps valué complet. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}_{(B)}$, qui est de dimension n sur B, est muni canoniquement d'une structure d'espace vectoriel topologique métrisable et complet.

Soit (x_p) une suite d'éléments de $\mathfrak{g}$ nuls pour p inférieur à un certain entier rationnel. La série $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_p T^p$ est convergente dans $\mathfrak{g}_{(B)}$. En effet, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$, qui est aussi une base de $\mathfrak{g}_{(B)}$. La composante de $\sum_{p=z}^{z'} x_p T^p$ suivant e_i est $\sum_{p=z}^{z'} x_{pi} T^p$, où $x_{pi} \in A$ désigne la composante de x_p suivant e_i ; or, la série $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_{pi} T^p$ converge dans B.

Tout élément de $\mathfrak{g}_{(B)}$ se met d'une manière unique sous la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} x_p T^p$, où les x_p sont des éléments de $\mathfrak{g}$ nuls pour p assez petit. En effet, soit $x \in \mathfrak{g}_{(B)}$, et soit $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_{pi} T^p$ sa composante suivant e_i, qui est limite de $\sum_{p=-\infty}^{s} x_{pi} T^p$ quand $s \to +\infty$. L'élément x est limite, quand $s \to +\infty$, de $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{p=-\infty}^{s} x_{pi} T^p) e_i = \sum_{p=-\infty}^{s} (\sum_{i=1}^{n} x_{pi} e_i) T^p$.

Donc $x = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\sum_{i=1}^{n} x_{pi}\, e_i) T^p$. D'autre part, l'égalité $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_p T^p = 0$ entraîne que tous les x_p sont nuls. En effet, si x_{pi} est la composante de x_p suivant e_i, la composante de $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_p T^p$ est $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_{pi}\, T^p$, donc $x_{pi} = 0$ pour tout p et tout i .

Les endomorphismes de $\mathfrak{g}_{(B)}$ forment un espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathfrak{g}_{(B)})$ de dimension finie sur B ; donc $\mathcal{L}(\mathfrak{g}_{(B)})$ est canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel topologique métrisable et complet. Soit alors (u_p) une suite d'endomorphismes de $\mathfrak{g}$ nuls pour p assez petit. Raisonnant à peu près comme précédemment, on voit que $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p\, T^p$ converge dans $\mathcal{L}(\mathfrak{g}_{(B)})$. Tout endomorphisme de $\mathfrak{g}_{(B)}$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p\, T^p$.

En particulier, <u>si A est de caractéristique 0</u>, on peut définir, pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$, $\exp(uT) = 1 + \frac{1}{1!} uT + \frac{1}{2!} u^2T^2 + \dots$, qui est un endomorphisme de $\mathfrak{g}_{(B)}$.

<u>Proposition 1.- Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre (non nécessairement associative), et si D est une dérivation de $\mathfrak{g}$, exp (D T) est un automorphisme de $\mathfrak{g}_{(B)}$.</u>

En effet, compte-tenu du fait que la multiplication est une application bilinéaire continue, on a

$$\begin{aligned}(\exp(DT)x)(\exp(DT)y) &= \Big[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(D^n x)T^n\Big]\Big[\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}(D^m y)T^m\Big] \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \Big(\sum_{m+n=p} \frac{1}{n!\,m!}(D^n x)(D^m y)\, T^p\Big) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}\Big(\sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m}(D^{p-m}x)(D^m y)T^p\Big) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} D^p(xy)T^p \\ &= (\exp(DT))(xy) .\end{aligned}$$

Ceci permet de montrer, par exemple, que le radical $\mathfrak{r}$, le radical nilpotent $\mathfrak{s}$, le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sont caractéristiques (résultats qui sont évidents du point de vue global), dès qu'on sait que ces idéaux sont "linéaires". Considérons par exemple le radical $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$. Soit D une dérivation de $\mathfrak{g}$. Alors, exp(DT) est un automorphisme de $\mathfrak{g}_{(B)}$, donc laisse stable le radical de $\mathfrak{g}_{(B)}$, qui est $\mathfrak{r}_{(B)}$. Pour $x \in \mathfrak{r}$, on a donc $\exp(DT)x = x + (Dx)T + \frac{1}{2!}(D^2x)T^2 + \ldots$ $\ldots \in \mathfrak{r}_{(B)}$, d'où en particulier $Dx \in \mathfrak{r}$.

Malheureusement, le fait que $\mathfrak{r}$, s, $\mathfrak{n}$ sont linéaires n'est pas immédiat (Est-ce vrai en caractéristique $\neq 0$?).

Appendice II. Résumé de certaines propriétés des algèbres de Lie

(sur un corps de caractéristique 0).

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{r}$ son radical, $\mathfrak{n}$ son plus grand idéal nilpotent, s son radical nilpotent, k l'orthogonal de $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing. Alors, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}$, s, k sont des idéaux caractéristiques, et $\mathfrak{r} \supset k \supset \mathfrak{n} \supset s$.

(I) L'une quelconque des propriétés suivantes caractérise les algèbres de Lie semi-simples : 1) $\mathfrak{r} = 0$. 2) $\mathfrak{n} = 0$. 3) $k=0$. 4) Tout idéal abélien de $\mathfrak{g}$ est nul. 5) L'algèbre $\mathfrak{g}$ est isomorphe à un produit d'algèbres de Lie simples. 6) Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible.

(II) L'une quelconque des propriétés suivantes caractérise les algèbres de Lie réductives : 1) $s=0$. 2) L'algèbre $\mathfrak{g}$ est isomorphe au produit d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple. 3) La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible.

(III) L'une quelconque des propriétés suivantes caractérise les algèbres de Lie résolubles : 1) $D^p\mathfrak{g} = 0$ pour p assez grand. 2) $k \supset D\mathfrak{g}$. 3) $D\mathfrak{g}$ est nilpotente.

(IV) L'une quelconque des propriétés suivantes caractérise les algèbres de Lie nilpotentes : 1) Il existe une suite décroissante $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_p)$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_p = 0$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ 2. $C^p\mathfrak{g} = 0$ pour p assez grand. 3. $C_p\mathfrak{g} = 0$ pour p assez grand. 4. Il existe un entier i tel que $(\mathrm{ad}\, x_1) \circ (\mathrm{ad}\, x_2) \circ \dots (\mathrm{ad}\, x_i) = 0$ quels que soient $x_1, x_2, \dots, x_i \in \mathfrak{g}$. 5. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, ad x est nilpotent.

(V) $\mathfrak{g}$ abélienne $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ nilpotente $\Rightarrow$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est nulle $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ résoluble.

$\mathfrak{g}$ abélienne $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ réductive.

$\mathfrak{g}$ semi-simple $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ réductive.

(VI) Caractérisations de $\mathfrak{r}$: 1) $\mathfrak{r}$ est le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. 2) $\mathfrak{r}$ est le plus petit idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ soit semi-simple. 3) $\mathfrak{r}$ est l'orthogonal de $D\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing.

(VII) Caractérisations de $\mathfrak{n}$: 1) $\mathfrak{n}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. 2) $\mathfrak{n}$ est l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que ad x appartienne au radical de l'algèbre associative engendrée par 1 et les ad y , $y \in \mathfrak{g}$.

(VIII) Caractérisations de s : 1) s est l'intersection des noyaux des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$. 2) s est le plus petit des noyaux des représentations complètement réductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$. 3) s est le plus petit idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ soit réductive. 4) s est le plus grand idéal $\mathfrak{a}$ tel que, pour toute représentation $x \to x_M$ de dimension finie de $\mathfrak{g}$ et tout $y \in \mathfrak{a}$, y_M soit nilpotent. 5) $s = \mathfrak{r} \cap D\mathfrak{g}$. 6) $s = [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}]$.
