RÉDACTION N° 191

COTE : NBR 093

TITRE : DEUXIÈME PARTIE : ALGÈBRE COMMUTATIVE
CHAPITRE I : SPÉCIALISATIONS ET VALUATIONS
(ÉTAT 4)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 75

NOMBRE DE FEUILLES : 75

Archives
N° Diendonné
Mai 1953

NBR 093

191 2

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE COMMUTATIVE

CHAPITRE I

SPÉCIALISATIONS ET VALUATIONS (Etat 4)

Sommaire.

Commentaires.

Voir les commentaires au chap. III (Sommaire).

DEUXIÈME PARTIE
ALGÈBRE COMMUTATIVE
CHAPITRE I
SPÉCIALISATIONS ET VALUATIONS (Etat 4)

Sauf mention expresse du contraire, on entendra toujours par "anneau" dans ce chapitre, un anneau commutatif, ayant un élément unité $\neq 0$; par "homomorphisme d'anneau" un homomorphisme d'un tel anneau A dans un tel anneau A' qui applique l'élément unité de A sur l'élément unité de A' ; en outre, lorsque les anneaux considérés seront des anneaux à opérateurs, les notions de sous-anneau, d'idéal et d'homomorphisme seront toujours relatives aux structures d'anneau à opérateurs (Alg.,chap.I, §8). Si (a_ι) est une famille d'éléments d'un tel anneau A , on parlera du "sous-anneau de A engendré par la famille (a_ι)" en entendant par là qu'il s'agit du sous-anneau (à opérateurs) de A engendré par la famille (a_ι) et l'élément unité.

Pour tout anneau d'intégrité A , on désignera par A^* le monoïde multiplicatif des éléments $\neq 0$ de A .

§ 1. Spécialisations.

1. Zéros d'idéaux de polynômes.

Soit L un anneau commutatif, A une algèbre commutative sur L (ayant, comme L, un élément unité) ; I étant un ensemble d'indices, on appelle zéro d'un polynôme f de $L[X_\iota]_{\iota\in I}$ dans A^I un élément $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ de A^I tel que $f(x)=f((x_\iota)) = 0$. On dit qu'un élément $x \in A^I$ est un zéro d'un ensemble de polynômes de $L[X_\iota]_{\iota\in I}$ s'il est un zéro de chacun d'eux ; il est alors un zéro de l'idéal de $L[X_\iota]_{\iota\in I}$ engendré par cet ensemble de de polynômes. Pour tout élément $x=(x_\iota)\in A^I$, on sait (Alg., chap. IV) que l'ensemble des polynômes dont x est un zéro est un idéal $\mathfrak{a}$ de $L[X_\iota]_{\iota\in I}$ (appelé encore idéal des relations algèbriques entre les x_ι, à coefficients dans L, ou plus brièvement, idéal de x relatif à L) qui ne contient pas 1 ; la sous-algèbre $L[x]$ de A engendrée par les x_ι (et 1) est canoniquement isomorphe au quotient $L[X_\iota]_{\iota\in I}/\mathfrak{a}$.

Nous allons généraliser ces notions de la façon suivante. Rappelons (Alg., chap. IX) qu'on définit l'espace projectif de dimension n sur A de la manière suivante : dans le produit A^{n+1}, on considère l'ensemble U_{n+1} des points $x=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ tels qu'un au moins des x_i soit régulier dans A, et on définit dans U_{n+1} la relation $\Delta_{n+1}(A)$: "il existe deux éléments réguliers λ, μ dans A tels que $\lambda x=\mu y$". Comme le produit de deux éléments réguliers est régulier, $\Delta_{n+1}(A)$ est une relation d'équivalence dans U_{n+1} ; le quotient $P_n(A)$ de U_{n+1} par cette relation d'équivalence est appelé l'espace projectif de dimension n sur A ; si $\bar{x}$ est un point de cet espace, $x=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ un élément de la classe $\bar{x}$, on dit que les x_i forment un système de coordonnées homogènes de $\bar{x}$. L'espace projectif $P_1(A)$ s'appelle encore droite projective sur A ; si, à tout élément $x\in A$ on fait correspondre dans $P_1(A)$ le point de coordonnées projectives $(1,x)$, on obtient une application biunivoque de A dans $P_1(A)$; lorsque tout élément régulier de A est inversible (et en particulier lorsque A est un corps), le complémentaire de l'image de A par cette application se compose du seul point de coordonnées homogènes $(0,1)$, et s'appelle encore point à l'infini de $P_1(A)$ (ou de A) ; on le désigne par la notation ∞ (lorsque A est quelconque, on note encore ∞ le point de coordonnées homogènes $(0,1)$). Lorsque A est un corps, on prolonge à $P_1(A)$

l'application $x \to x^{-1}$ en posant $0^{-1} = \infty$, $\infty^{-1}=0$; de même, on prolonge l'application $(x,y) \to x+y$ de $A\times A$ dans A au complémentaire, dans $P_1(A)\times P_1(A)$, du point (∞, ∞), en posant $\infty+a=a+\infty = \infty$ pour tout $a\in A$ et on prolonge l'application $(x,y) \to xy$ au complémentaire, dans $P_1(A)\times P_1(A)$, de l'ensemble des deux points $(\infty,0)$ et $(0,\infty)$ en posant $\infty.a=a.\infty = \infty$ pour $a\in A$, $a\neq 0$, et $\infty\cdot\infty = \infty$. Ces conventions permettent de prolonger à $P_1(A)$ tout entier toute <u>fonction rationnelle</u> $x \to r(x)$ (où $r\in A(X)$), définie dans le complémentaire (par rapport à A) de l'ensemble des zéros du dénominateur de r .

Rappelons que pour un anneau quelconque A , la relation $\Delta_2(A)$ entre deux couples (x_0,x_1) et (y_0,y_1) de U_2 est équivalente à $x_0y_1-y_0x_1=0$; d'où on conclut que, si A' est l'<u>anneau des fractions</u> (<u>Alg</u>., chap.I, § 9) de A, on peut <u>identifier</u> les droites projectives $P_1(A')$ et $P_1(A)$. Autrement dit, on peut se borner au cas où <u>tout élément régulier de</u> A <u>est inversible</u> ; dans ce cas, tout élément du complémentaire $P_1(A)-A$ de A admet un système de coordonnées homogènes et un seul de la forme $(z,1)$, où z est un <u>diviseur de</u> 0 dans A .

Soit I un ensemble d'indices, $\iota \to n_\iota$ une application de I dans $\mathbb{N}$ telle que $n_\iota > 0$ pour tout ι ; soit J l'ensemble des couples (ι,k) de $I\times\mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n_\iota$. L'anneau de polynômes $L[X_{\iota,k}]_{(\iota,k)\in J}$ est muni d'une <u>multigraduation</u> à valeurs dans $\mathbb{N}^I$: polynôme de cet anneau est dit <u>homogène</u> pour cette multigraduation, de poids $\mathfrak{p}=(p_\iota)_{\iota\in I}$ si, pour chaque indice $\iota\in I$, il est homogène de degré p_ι par rapport aux $n_\iota+1$ indéterminées $X_{\iota,k}$ $(0\leqslant k\leqslant n_\iota)$. Un idéal $\mathfrak{a}$ de cet anneau est dit <u>homogène</u> (pour la multigraduation précédente) si, pour tout polynôme $f\in\mathfrak{a}$, les composantes homogènes de f pour cette multigraduation appartiennent aussi à $\mathfrak{A}$. On vérifie aussitôt que tout idéal engendré par des polynômes homogènes est homogène.

Considérons d'autre part l'ensemble produit $E = \prod_{\iota \in I} P_{n_\iota}(A)$; étant donné un polynôme homogène f de $L[X_{\iota,k}]_{(\iota,k)\in J}$, on dit qu'un point $\overline{x} = (\overline{x}_\iota)_{\iota \in I}$ de E est un <u>zéro</u> de f si, quand on substitue dans f, pour chaque $\iota \in I$, aux $n_\iota + 1$ indéterminées $X_{\iota,k}$ $(0 \leq k \leq n_\iota)$ les $n_\iota + 1$ éléments $x_{\iota,k}$ d'un système de coordonnées homogènes de $\overline{x}_\iota$, le polynôme s'annule ; cette condition ne dépend pas du système de coordonnées homogènes choisi pour chaque $\overline{x}_\iota$, puisque f est supposé homogène. On dit que $\overline{x}$ est un zéro d'un ensemble de polynômes homogènes de $L[X_{\iota,k}]_{(\iota,k)\in J}$ s'il est un zéro de chacun d'eux ; il est alors un zéro de tout polynôme homogène appartenant à l'idéal (homogène) engendré par cet ensemble de polynômes. Pour tout élément $\overline{x} \in E$, on appelle <u>idéal de</u> $\overline{x}$ (relatif à L) l'idéal engendré par l'ensemble des polynômes homogènes admettant $\overline{x}$ comme zéro ; c'est un idéal homogène, et tout polynôme homogène qui lui appartient admet $\overline{x}$ pour zéro.

Nous considèrerons surtout dans ce qui suit le cas où $n_\iota = 1$ pour tout $\iota \in I$, autrement dit le cas où E est un <u>produit de droites projectives</u>. L'application qui à tout point $x = (x_\iota)$ de A^I fait correspondre le point $\overline{x} = (\overline{x}_\iota)$ de $E = (P_1(A))^I$ tel que $\overline{x}_\iota$ soit le point de coordonnées projectives $(1, x_\iota)$, est une application biunivoque au moyen de laquelle on peut <u>identifier</u> A^I à un sous-ensemble de E. Si x est un zéro d'un polynôme $f \in L[X_\iota]_{\iota \in I}$, $\overline{x}$ est un zéro du polynôme $\overline{f}$ obtenu en "rendant homogène f" c'est-à-dire en effectuant l'opération suivante : pour chaque $\iota \in I$, si f est de degré p_ι par rapport à X_ι, on remplace dans chaque terme de f la puissance $X_\iota^{\alpha_\iota}$ qui y figure $(0 \leq \alpha_\iota \leq p_\iota)$ par $X_\iota^{\alpha_\iota} T_\iota^{p_\iota - \alpha_\iota}$;

le polynôme $\bar{f}$ obtenu dans l'anneau $L[X_\iota, T_\iota]_{\iota \in I}$ est homogène de poids (p_ι) pour la multigraduation correspondante. Inversement, f se déduit de $\bar{f}$ en remplaçant dans $\bar{f}$ chacune des indéterminées T_ι par 1, et on a ainsi défini une correspondance biunivoque entre les polynômes de l'anneau $L[X_\iota]_{\iota \in I}$ et les polynômes homogènes de l'anneau $L[X_\iota, T_\iota]_{\iota \in I}$; il est clair que si $\bar{x}$ est zéro de $\bar{f}$, $\bar{x}$ est zéro de f .

2. Spécialisations.

DÉFINITION 1.- Soient L un anneau, A et K deux algèbres commutatives sur L telles que K soit un corps. Soit I un ensemble d'indices. On dit qu'un point $\bar{y}$ de $(P_1(K))^I$ est une L-spécialisation d'un point $\bar{x}$ de $(P_1(A))^I$ si $\bar{y}$ est un zéro de tout polynôme homogène de $L[X_\iota, T_\iota]_{\iota \in I}$ pour lequel $\bar{x}$ est un zéro (autrement dit, si l'idéal de $\bar{x}$ (relatif à L) est contenu dans l'idéal de $\bar{y}$ (relatif à L)). On dit que $\bar{y}$ est une spécialisation finie de $\bar{x}$ lorsque $\bar{y} \in K^I$ (ce qui signifie qu'aucune des coordonnées de $\bar{y}$ n'est égale à ∞).

Le plus souvent, l'anneau d'opérateurs L sera, soit l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels (n.x ayant la signification habituelle (Alg., chap.I, §2,n°9)), soit un corps K_0 (identifié à un sous-corps de K). Lorsque l'on parle d'une spécialisation sans spécifier l'anneau d'opérateurs L, il est sous-entendu qu'il s'agit d'une $\mathbb{Z}$-spécialisation.

Il résulte aussitôt de cette définition que si une coordonnée $\bar{x}_\iota$ de $\bar{x}$ est 0 (resp. 1, ∞), la coordonnée $\bar{y}_\iota$ de $\bar{y}$ est 0 (resp. 1, ∞), puisque X_ι (resp. $X_\iota - T_\iota$, T_ι) appartient alors à l'idéal de $\bar{x}$. Si, pour deux indices distincts ι , $\varkappa$, on a $\bar{x}_\iota = \bar{x}_\varkappa$, on a aussi $\bar{y}_\iota = \bar{y}_\varkappa$, car $X_\iota T_\varkappa - X_\varkappa T_\iota$ est alors dans l'idéal de $\bar{x}$. La spécialisation $\bar{y}$

de $\overline{x}$ définit donc une application $\overline{x}_\iota \to \overline{y}_\iota$ de l'ensemble $E_{\overline{x}}$ des $\overline{x}_\iota$ dans $P_1(A)$ sur l'ensemble $E_{\overline{y}}$ des $\overline{y}_\iota$ dans $P_1(K)$, et réciproquement la donnée de cette application détermine complètement $\overline{y}$; on dit encore que cette application est une L-*spécialisation de la partie* $E_{\overline{x}}$ de $P_1(A)$ *sur la partie* $E_{\overline{y}}$ *de* $P_1(K)$. Inversement, une application f d'une partie V de $P_1(A)$ sur une partie W de $P_1(K)$ est une L-spécialisation si le point $(f(\overline{t}))_{\overline{t}\in V}$ est une L-spécialisation du point $(\overline{t})_{\overline{t}\in V}$. Nous utiliserons indifféremment, dans ce qui suit, le langage des spécialisations de *familles* d'éléments de $P_1(A)$ ou celui des spécialisations de *parties* d'éléments de $P_1(A)$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la déf. 1 .

PROPOSITION 1.- *Soient* A,K,K' *trois algèbres commutatives sur un anneau* L *telles que* K *et* K' *soient des corps, et soit* I *un ensemble d'indices.* *Si* $\overline{y}\in(P_1(K))^I$ *est une* L-*spécialisation de* $\overline{x}\in(P_1(A))^I$, *et* $\overline{z}\in(P_1(K'))^I$ *une* L-*spécialisation de* $\overline{y}$, $\overline{z}$ *est une* L-*spécialisation de* $\overline{x}$. ("transitivité des spécialisations").

DÉFINITION 2.- *Soient* A,K,K' *trois algèbres commutatives sur un anneau* L , *telles que* K *et* K' *soient des corps.* *Etant donné un point* $\overline{x}\in(P_1(A))^I$, *on dit qu'une spécialisation* $\overline{y}\in(P_1(K))^I$ *de* $\overline{x}$ *et une* L-*spécialisation* $\overline{y}'\in(P_1(K'))^I$ *de* $\overline{x}$ *sont équivalentes si* $\overline{y}'$ *est une* L-*spécialisation de* $\overline{y}$ *et* $\overline{y}$ *une* L-*spécialisation de* $\overline{y}'$. *Une spécialisation* $\overline{y}'\in(P_1(K'))^I$ *d'un point* $\overline{y}\in(P_1(K))^I$ *est dite générique si* $\overline{y}$ *est une spécialisation de* $\overline{y}'$.

Soit maintenant φ un homomorphisme d'un anneau commutatif L', ayant un élément unité, dans l'anneau L , de sorte que $\varphi(1)=1$; sur toute algèbre G par rapport à L on définit alors une structure d'algèbre par rapport à L' en posant $\lambda'.z=\varphi(\lambda')z$ pour tout $\lambda'\in L'$. Avec

Avec cette convention, A et K deviennent des L'-algèbres ; il résulte alors aussitôt des définitions que toute L-spécialisation $\bar{y} \in (P_1(K))^I$ de $\bar{x} \in (P_1(A))^I$ est aussi une L'-spécialisation. En particulier, si on prend pour φ l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans L défini par $n \to n.1$, on voit que toute L-spécialisation est une $\mathbb{Z}$-spécialisation.

3. Spécialisations et homomorphismes.

Les notations étant celles du no1, soit $\bar{x}$ un point de $(P_1(A))^I$ et soit, pour chaque $\iota \in I$, (x_ι, t_ι) un système de coordonnées projectives du point $\bar{x}_\iota \in P_1(A)$; l'anneau $L[x_\iota, t_\iota]_{\iota \in I}$ engendré par les x_ι, les t_ι et 1 dépend en général des coordonnées projectives (x_ι, t_ι) particulières choisies pour $\bar{x}_\iota$; nous allons introduire un nouvel anneau, dit anneau transcendant du point $\bar{x}$, et qui sera déterminé par $\bar{x}$ à une isomorphie près. Pour cela, soit pour chaque $\iota \in I$, Z_ι une indéterminée; nous appellerons anneau transcendant de $\bar{x}$ (pour les systèmes (x_ι, t_ι) de coordonnées projectives), le sous-anneau $L[Z_\iota x_\iota, Z_\iota t_\iota]_{\iota \in I}$ de l'anneau $A[Z_\iota]_{\iota \in I}$.

PROPOSITION 2.- Soient A et B deux algèbres commutatives sur L, $\bar{x}$ un point de $(P_1(A))^I$, $\bar{y}$ un point de $(P_1(B))^I$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\bar{y}$ est un zéro de tout polynôme homogène de $L[X_\iota, T_\iota]_{\iota \in I}$ pour lequel $\bar{x}$ est un zéro ;

b) il existe un L-homomorphisme et un seul f de l'anneau transcendant de $\bar{x}$ (pour des systèmes de coordonnées projectives (x_ι, t_ι)) sur l'anneau transcendant de $\bar{y}$ (pour des systèmes de coordonnées projectives (y_ι, u_ι)) tel que $f(Z_\iota x_\iota) = Z_\iota y_\iota$ et $f(Z_\iota t_\iota) = Z_\iota u_\iota$ pour tout $\iota \in I$.

Il est immédiat que b) entraîne a), car si u est un polynôme homogène de poids (p_ι), tel que $u((x_\iota, t_\iota))=0$, on a
$u((Z_\iota x_\iota, Z_\iota t_\iota))=(\prod_\iota Z_\iota^{p_\iota})u((x_\iota, t_\iota))=0$, et par suite

$$0=u((f(Z_\iota x_\iota), f(Z_\iota t_\iota)))=u((Z_\iota y_\iota, Z_\iota u_\iota))=(\prod_\iota Z_\iota^{p_\iota})u((y_\iota, u_\iota))$$

d'où $u((y_\iota, u_\iota))=0$. Montrons inversement que a) entraîne b) ; il suffit pour cela (Alg., chap. IV, § 2, prop. 2) de prouver que si u est un polynôme de $L[X_\iota, T_\iota]_{\iota\in I}$ (non nécessairement homogène) tel que $u((Z_\iota x_\iota, Z_\iota t_\iota))=0$, on a aussi $u((Z_\iota y_\iota, Z_\iota u_\iota))=0$. Or, on peut écrire
$u((Z_\iota X_\iota, Z_\iota T_\iota))=\sum_k H_k G_k((X_\iota, T_\iota))$, où les H_k sont des monômes distincts par rapport aux Z_ι , et les G_k des polynômes homogènes de $L[X_\iota, T_\iota]_{\iota\in I}$.
Par suite $u((Z_\iota x_\iota, Z_\iota t_\iota))= \sum_k H_k G_k((x_\iota, t_\iota))$ et $u((Z_\iota y_\iota, Z_\iota u_\iota)) =$
$= \sum_k H_k G_k((y_\iota, u_\iota))$; l'hypothèse entraîne que pour tout indice k ,
$G_k((x_\iota, t_\iota))=0$, et en raison de a), $G_k((y_\iota, u_\iota))=0$, d'où
$u((Z_\iota y_\iota, Z_\iota u_\iota))=0$, ce qui prouve b).

COROLLAIRE 1.- Les anneaux transcendants de $\overline{x}$ correspondant à des systèmes différents de coordonnées projectives pour les $\overline{x}_\iota$ sont isomorphes.

Il est clair en effet que, si pour chaque $\iota\in I$, (x_ι, t_ι) et (x'_ι, t'_ι) sont deux systèmes de coordonnées projectives de $\overline{x}_\iota$, les relations $u((x_\iota, t_\iota))=0$ et $u((x'_\iota, t'_\iota))=0$ sont équivalentes pour tout polynôme homogène $u\in L[X_\iota, T_\iota]_{\iota\in I}$.

COROLLAIRE 2.- Soit K une algèbre commutative sur L qui soit un corps. Si $\overline{y}\in(P_1(K))^I$ est une spécialisation de $\overline{x}\in(P_1(A))^I$, pour tout système (y_ι, u_ι) de coordonnées projectives de $\overline{y}_\iota$ $(\iota\in I)$, il existe un L-homomorphisme f et un seul de l'anneau transcendant

$L[Z_\iota x_\iota, Z_\iota t_\iota]_{\iota\in I}$ *de* $\bar{x}$ *sur l'anneau* $L[y_\iota, u_\iota]_{\iota\in I}$ *tel que* $f(Z_\iota x_\iota)=y_\iota$ *et* $f(Z_\iota t_\iota)=u_\iota$ *pour tout* $\iota\in I$.

En effet, pour tout polynôme $u\in L[X_\iota, T_\iota]_{\iota\in I}$ tel que $u((Z_\iota x_\iota, Z_\iota t_\iota))=0$, on a $u((Z_\iota y_\iota, Z_\iota u_\iota))=0$ d'après la prop.1 ; substituant 1 à chaque Z_ι dans la dernière équation, il vient $u((y_\iota, u_\iota))=0$, d'où le corollaire (*Alg.*, chap.IV, § 2, prop.2).

PROPOSITION 3.- *Pour qu'un point* $y\in K^I$ *soit une spécialisation (finie) d'un point* $x\in A^I$, *il faut et il suffit qu'il existe un L-homomorphisme* g *de l'anneau* $L[x_\iota]_{\iota\in I}$ *sur l'anneau* $L[y_\iota]_{\iota\in I}$ *tel que* $g(x_\iota)=y_\iota$ *pour tout* $\iota\in I$ *et* $g(1)=1$.

En effet, dire que y est une spécialisation de x revient ici, en prenant $(x_\iota, 1)$ et $(y_\iota, 1)$ comme système de coordonnées projectives de $\bar{x}_\iota$ et $\bar{y}_\iota$ respectivement, à dire que pour tout polynôme $u\in L[X_\iota]_{\iota\in I}$ tel que $u((x_\iota))=0$, on a aussi $u((y_\iota))=0$. La conclusion de la prop.3 en résulte aussitôt (*Alg.*, chap.IV, § 2, prop.2).

Remarques.- 1) L'exemple suivant montre que l'anneau $L[x_\iota, t_\iota]_{\iota\in I}$ dépend en général des systèmes de coordonnées projectives (x_ι, t_ι) des points $\bar{x}_\iota$: on prend $L=\mathbb{Z}$, $A=\mathbb{R}$, et I réduit à un seul élément ; si $\bar{x}$ est le point de coordonnées projectives $(1,1)$, il a aussi pour coordonnées projectives (π, π), et les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[\pi]$ ne sont pas isomorphes, puisque π est transcendant sur $\mathbb{Q}$. Cet exemple montre a fortiori que si $\bar{y}$ est spécialisation de $\bar{x}$, il n'existe pas nécessairement d'homomorphisme de $L[x_\iota, t_\iota]_{\iota\in I}$ sur $L[y_\iota, u_\iota]_{\iota\in I}$.

2) Nous verrons toutefois plus loin (n°8) comment on peut toujours ramener une spécialisation quelconque d'un point $\bar{x}\in(P_1(A))^I$ dans $(P_1(K))^I$ à une spécialisation finie.

4. Spécialisation d'un anneau.

Si A est une algèbre commutative sur L, ayant un élément unité, le point $e \in A^A$ qui correspond à l'application identique $x \rightarrow x$ de A sur lui-même, est appelé le point représentatif de A. Une ~~xxxx~~ spécialisation de e dans $(P_1(K))^A$ est donc une application $x \rightarrow h(x)=(u(x),v(x))$ de A dans $P_1(K)$ telle que, pour toute famille finie $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points de A, et tout polynôme $p(X_1,T_1,\ldots,X_n,T_n)$ de $L[X_1,T_1,\ldots,X_n,T_n]$ homogène par rapport à chacun des couples (X_i,T_i) et tel que $p(x_1,1,x_2,1,\ldots,x_n,1)=0$, on ait $p(u(x_1),v(x_1),\ldots,u(x_n),v(x_n))=0$. On dit qu'une telle spécialisation est une spécialisation de l'anneau A dans la droite projective $P_1(K)$. Une telle spécialisation est dite finie si la spécialisation de e dans $(P_1(K))^A$ est finie, autrement dit, si $v(x)$ peut être pris égal à 1 pour tout $x \in A$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit (prop.3) que $x \rightarrow u(x)$ soit un L-homomorphisme de A sur un sous-anneau de K contenant l'élément unité de K ; $u(K)$ est donc un anneau d'intégrité, qui est une algèbre sur L et admet un élément unité et on dit, par abus de langage, que u est une L-spécialisation finie de A dans $P_1(K)$ (ou dans K). Inversement, si w est un L-homomorphisme de A sur un anneau d'intégrité B (nécessairement non réduit à 0, par définition (Alg., chap. I, 2^{e} éd., § 8, déf. 3)), $w(1)$ est élément unité de B, et on peut considérer B comme plongé dans son corps des fractions K ; w est alors un homomorphisme de A dans K, tel que $w(1)$ soit l'élément unité de K, donc une spécialisation finie de A dans $P_1(K)$.

En vertu de la déf. 2, dire que deux spécialisations finies u,u' de A dans deux corps K,K' sont équivalentes signifie donc qu'il existe un L-homomorphisme φ de $u(A)$ sur $u'(A)$ et un L-homomorphisme ψ de $u'(A)$

sur $u(A)$ tels que $u'=\varphi\circ u$ et $u=\psi\circ u'$; on en conclut aussitôt que φ est un L-isomorphisme de $u(A)$ sur $u'(A)$ tel que $u'=\varphi\circ u$; la réciproque ést évidente.

Exemples.- 1) Soit L un corps commutatif, A l'anneau $L[X_1,\dots,X_n]$ des polynômes à n indéterminées sur L, K une extension de L, $a=(a_1,\dots,a_n)$ un point de K^n. L'application qui, à tout polynôme $p(X_1,\dots,X_n)\in A$, fait correspondre sa valeur $p(a_1,\dots,a_n)\in K$, est une L-spécialisation finie de A dans K.

2) Plus généralement, soit $\mathfrak{A}$ l'anneau des applications d'un ensemble E dans un anneau d'intégrité B (ou un sous-anneau de cet anneau d'applications) ; alors, pour tout $x\in E$, l'application $f\to f(x)$ est une $\mathbb{Z}$-spécialisation finie de $\mathfrak{A}$ dans tout corps contenant B.

3) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ dans un anneau commutatif A admettant un élément unité, on sait que $A/\mathfrak{m}=K$ est un corps (Alg., chap.I, § 9, th.2) ; l'homomorphisme canonique de A sur K est une $\mathbb{Z}$-spécialisation finie de A dans K.

4) Soit $A=K[[X_1,\dots,X_n]]$ l'anneau des séries formelles à n indéterminées sur un corps commutatif K (Alg., chap.IV, § 5). L'application qui, à toute série formelle s, fait correspondre son terme constant, est une K-spécialisation finie de A dans K, dont le noyau est l'idéal engendré par $X_1,X_2,\dots,X_n$.

PROPOSITION 3 bis.- Pour toute L-spécialisation f d'un anneau A dans $P_1(K)$, l'ensemble des $x\in A$ tels que $f(x)\neq\infty$ est une sous-algèbre B de A.

En effet, soient x et y deux éléments de A ; le polynôme $Y_1X_2X_3-Y_2X_3X_1-Y_3X_1X_2$ s'annule quand on remplace $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$ et (X_3,Y_3) par $(1,x+y),(1,x)$ et $(1,y)$ respectivement ; si on avait $f(x+y)=\infty$, il devrait s'annuler quand on remplace les mêmes couples par $(0,1),(1,f(x))$ et $(1,f(y))$, ce qui est absurde. On prouve de même que $f(xy)\neq\infty$ en considérant le polynôme $Y_1X_2X_3-Y_2Y_3X_1$, et que $f(\lambda x)\neq\infty$ pour $\lambda\in L$ en considérant le polynôme $Y_1X_2-\lambda Y_2X_1$.

<u>Remarque</u>.- Si L est un sous-corps d'un anneau A, pour toute L-spécialisation f de A, et tout $\lambda\in L$, on a $f(\lambda.1)=\lambda f(1)=\lambda$ (en identifiant L à un sous-corps de K, si f prend ses valeurs dans $P_1(K)$) ; autrement dit, f se réduit à l'automorphisme identique dans L. On dit encore que f est <u>triviale</u> dans L ; inversement, toute spécialisation qui est triviale dans L est une L-spécialisation, comme il résulte aussitôt de la déf.1.

5. <u>Prolongement d'une spécialisation</u>.

Les notations étant celles du n°2, nous emploierons dans ce qui suit le langage des spécialisations pour des <u>parties</u> de $P^1(A)$; on peut dès lors parler de <u>prolongement</u> d'une spécialisation d'une partie V de $P^1(A)$ en une spécialisation d'une partie $V'\supset V$. On notera que toute spécialisation d'une partie de $P^1(A)$ dans un espace projectif $P^1(K)$ peut aussi être considérée comme une spécialisation dans un espace projectif $P^1(K')$, où K' est une extension (commutative) quelconque de K, puisque $P^1(K)$ est canoniquement plongé dans $P^1(K')$.

PROPOSITION 4.- <u>Soit f une spécialisation d'une partie V de $P^1(A)$ dans $P^1(K)$, où le corps K est supposé algébriquement clos. Pour tout $\bar{x}\in P^1(A)$ n'appartenant pas à V, il existe une spécialisation de $V\cup\{\bar{x}\}$ dans $P^1(K)$ prolongeant f</u>.

Soit $(\overline{x}_\iota)_{\iota\in I}$ une représentation paramétrique biunivoque de V, et soit $\overline{y}_\iota = f(\overline{x}_\iota)$; nous désignerons par (x_ι, t_ι) un système de coordonnées projectives de x, par (x,t) un système de coordonnées projectives de $\overline{x}_\iota$, par (y_ι, u_ι) un système de coordonnées projectives de $\overline{y}_\iota$.

Soit $B=L[Z_\iota x_\iota, Z_\iota t_\iota]_{\iota\in I}$ l'anneau transcendant du point $(\overline{x}_\iota)$ (n°3). On sait (cor.2 de la prop.2) qu'il existe un L-homomorphisme g de B sur le sous-anneau $C=L[y_\iota, u_\iota]_{\iota\in I}$ de K, tel que $g(1)=1$, $g(Z_\iota x_\iota)=y_\iota$ et $g(Z_\iota t_\iota)=u_\iota$ pour tout $\iota\in I$. Nous désignerons par $\mathfrak{p}$ l'idéal de B, noyau de l'homomorphisme g, et nous prolongerons canoniquement l'homomorphisme g de B sur C en un homomorphisme g_0 de $B[X,T]$ sur $C[X,T]$ ((Alg.,chap.IV, §1,prop.1). Il est clair que le noyau de g_0 est l'idéal $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}[X,T]$ des polynômes dont les coefficients appartiennent à l'idéal $\mathfrak{p} \in B$.

Soit d'autre part $\mathfrak{a}$ l'idéal du point $(\overline{x},(\overline{x}_\iota))$ de $P^1(A)\times(P^1(A))^I$ (n°1) ; c'est un idéal de l'anneau de polynômes $L[X,T][X_\iota,T_\iota]_{\iota\in I}$ homogène par rapport à chaque couple d'indéterminées $(X,T),(X_\iota,T_\iota)$ $(\iota\in I)$. L'application $p(X,T,(X_\iota,T_\iota)) \rightarrow p(X,T,(Z_\iota x_\iota, Z_\iota t_\iota))$ définit un homomorphisme h de l'anneau $L[X,T][X_\iota,T_\iota]_{\iota\in I}$ sur l'anneau $B[X,T]$, qui transforme un polynôme homogène du premier anneau (par rapport à chaque couple d'indéterminées $(X,T),(X_\iota,T_\iota)$) en un polynôme de $B[X,T]$ homogène par rapport au couple (X,T). Il en résulte que $h(\mathfrak{a})$ est un idéal homogène de l'anneau $B[X,T]$. L'idéal $\mathfrak{b} = g_0(h(\mathfrak{a}))$ est donc un idéal homogène de l'anneau $C[X,T]$.

<u>Lemme 1.-</u> <u>L'idéal</u> $\mathfrak{b}$ <u>ne peut contenir à la fois un monôme</u> aX^r <u>et un monôme</u> bT^s <u>tels que</u> $ab\neq 0$ $(r\geqslant 0,\ s\geqslant 0)$.

Dans le cas contraire, $\mathfrak{b}$ contiendrait aussi tous les monômes cw_k $(0\leqslant k\leqslant r+s)$, où $c=ab\neq 0$ dans C et $w_k=X^kT^{r+s-k}$. Cela signifie

 16

qu'il existe des polynômes $p_k \in h(\mathfrak{A})$ tels que

(1) $\gamma w_k - p_k = q_k$

appartienne à l'idéal $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}[X,T]$, où γ est un élément de B tel que $c=g(\gamma)$ $(0 \leqslant k \leqslant r+s)$. L'idéal $h(\mathfrak{A})$ étant homogène, il est clair (vu la définition de $\mathfrak{P}$) qu'on peut supposer que les p_k sont homogènes de degré $r+s$, et il en est alors de même des q_k.

Remarquons maintenant que, par définition, tout polynôme homogène v de $\mathfrak{A}$ s'annule quand on y substitue x_ι à X_ι, t_ι à T_ι, x à X et t à T. En raison de l'homogénéité de v par rapport à chaque couple (X_ι, T_ι), v s'annule aussi lorsqu'on substitue $Z_\iota x_\iota$ à X_ι, $Z_\iota t_\iota$ à T_ι, x à X et t à T ; on en conclut que tout élément de $h(\mathfrak{A})$ s'annule quand on y substitue x à X et t à T. Posons alors $z_k = x^k t^{r+s-k}$ $(0 \leqslant k \leqslant r+s)$. Comme $q_k(X,T)$ est homogène de degré $r+s$, on peut écrire $q_k(x,t) = \sum_{j=0}^{r+s} \lambda_{kj} z_j$, où $\lambda_{kj} \in \mathfrak{P}$. Comme $p_k \in h(\mathfrak{A})$, on a $p_k(x,t)=0$ et les relations (1) donnent donc

(2) $$\gamma z_k = \sum_{j=0}^{r+s} \lambda_{kj} z_j \qquad (0 \leqslant k \leqslant r+s).$$

Soit alors $\Delta = \det(\lambda_{kj} - \gamma\delta_{kj})$ (δ_{kj} indice de Kronecker). On déduit des relations (1) que $\Delta z_k = 0$ pour tout indice k, et en particulier $\Delta x^{r+s} = \Delta t^{r+s} = 0$. Mais un au moins des deux éléments x, t est régulier dans l'anneau A et a fortiori dans l'anneau $A[Z_\iota]_{\iota \in I} \supset B$; on aurait donc $\Delta = 0$. Mais il est clair que $\Delta \equiv \pm \gamma^{r+s}$ (mod. $\mathfrak{P}$) ; on aurait par suite $\gamma^{r+s} \in \mathfrak{P}$, d'où $c^{r+s} = g(\gamma^{r+s}) = 0$. Mais cela contredit l'hypothèse $c \neq 0$, puisque c appartient au corps K, et le lemme est ainsi démontré.

Supposons par exemple que $\mathfrak{b}$ ne contienne aucun monôme $bT^s \neq 0$, et soit φ l'homomorphisme $p(X,T) \to p(X,1)$ de $C[X,T]$ sur $C[X]$;

il est clair que $\varphi(\mathfrak{b})$ est un idéal dans $C[X]$; montrons que $\varphi(\mathfrak{b})$ ne contient pas de constante $b\neq 0$ dans C. Sinon, en effet, il existerait un polynôme $p(X,T)\in\mathfrak{b}$ tel que $p(X,1)=1$. Soit p_k la composante homogène de degré k de p ; on a $p(X/T,1)=\sum_k p_k(X/T,1)=\sum_k T^{-k}p_k(X,T)$. Or, on a évidemment $p(X/T,1)=1$, d'où, si p est de degré m, $bT^m=\sum_{k=0}^{m} T^{m-k}p_k(X,T)$. Mais comme $\mathfrak{b}$ est un idéal homogène, les $p_k(X,T)$ appartiennent aussi à $\mathfrak{b}$, et il en serait donc de même de bT^m, contrairement à l'hypothèse.

Cela étant, l'ensemble des polynômes $\lambda q(X)$, où q parcourt $\varphi(\mathfrak{b})$ et λ le corps des fractions $K_o\subset K$ de C, est évidemment un idéal dans l'anneau de polynômes $K_o[X]$, et ce qui précède montre que cet idéal ne contient pas 1. Il est donc égal à (p_o), où p_o est un polynôme de $K_o[X]$, nul ou unitaire et de degré >0. Soit alors $y\in K$ tel que $p_o(y)=0$; un tel élément existe toujours puisque K est supposé <u>algébriquement clos</u> ; le point $\bar{y}=(y,1)$ est alors un zéro de l'idéal homogène $\mathfrak{b}$. Par définition de $\mathfrak{b}$, pour tout polynôme $p(X,T,(X_i,T_i))$ de l'idéal $\mathfrak{a}$ du point $(\bar{x},(\bar{x}_i))$, on a $p(y,1,(y_i,u_i))=0$, ce qui prouve que le point $(\bar{y},(\bar{y}_i))$ est une spécialisation de $(\bar{x},(\bar{x}_i))$ qui prolonge la spécialisation donnée f.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE.- <u>Dans les hypothèses de la prop.4, l'une des deux conclusions suivantes est valable</u> :

<u>ou bien, pour toute extension</u> K' <u>de</u> K <u>et tout élément</u> $\bar{y}\in P^1(K')$, <u>il existe un prolongement</u> $\bar{f}$ <u>de la spécialisation</u> f <u>tel que</u> $\bar{f}(\bar{x})=\bar{y}$;

<u>ou bien, il existe un nombre fini de points</u> $\bar{y}_i\in P^1(K)$ <u>tels que, pour tout prolongement</u> $\bar{f}$ <u>de</u> f <u>en une spécialisation à valeurs dans</u>

$P^1(K')$ (où K' est une extension quelconque de K), on ait nécessairement $\bar{Y}(\bar{x})=\bar{y}_i$ pour un indice i, (ce qui peut encore s'exprimer en disant qu'il n'y a qu'un nombre fini de spécialisations de $V \cup \{\bar{x}\}$ prolongeant f, et qu'elles prennent toutes leurs valeurs dans $P^1(K)$).

En effet, avec les notations de la démonstration de la prop.4, ou bien l'idéal $\mathfrak{b}$ est nul, et (en remplaçant K par K' dans l'énoncé de la prop.4), on a alors pour tout polynôme $p(X,T,(X_\iota),(T_\iota))$ de l'idéal $\mathfrak{a}$, et tout couple (y,u) d'éléments de K' (non tous deux nuls), $p(y,u,(y_\iota,u_\iota))=0$, ce qui prouve que la première éventualité de l'énoncé est réalisée. Ou bien $p_o \neq 0$, et dans ce cas il existe dans $\mathfrak{b}$ un polynôme $p(X,T,(X_\iota,T_\iota))$ tel que $p(X,1,(y_\iota,u_\iota))= bp_o(X)$, où $b\neq 0$ dans K ; pour que $\bar{y} = (y,u)$ soit tel que $(\bar{y},(\bar{y}_\iota))$ soit un prolongement de la spécialisation f, il faut et il suffit alors que $u\neq 0$ (sans quoi $\mathfrak{b}$ contiendrait tous les monômes en T), et que y/u soit racine du polynôme p_o, donc $\bar{y} =(y_i,1)$, où $y_i \in K$ est une des racines de p_o.

THÉORÈME 1.- Soient K un corps algèbriquement clos, f une spécialisation d'une partie V de $P^1(A)$ dans $P^1(K)$; il existe alors une spécialisation de $P^1(A)$ tout entier dans $P^1(K)$, qui prolonge f.

En effet, l'ensemble des spécialisations de parties de $P^1(A)$, à valeurs dans $P^1(K)$ est évidemment un ensemble inductif quand on l'ordonne par prolongement ; en vertu du th. de Zorn, cet ensemble admet donc un élément maximal f_o ; mais la prop.4 prouve alors que f_o est nécessairement une spécialisation de $P^1(A)$ tout entier dans $P^1(K)$.

DÉFINITION 3.- Soient A un anneau, K un corps (tous deux étant des algèbres sur L) ; on appelle place de A (sur L), à valeurs dans $P^1(K)$, toute L-spécialisation de $P^1(A)$ tout entier dans $P^1(K)$; si π est une telle place, l'image $\pi(\bar{x})$ de $\bar{x}\in P^1(A)$ par π se note encore $\bar{x}(\pi)$ et s'appelle aussi la valeur de $\bar{x}$ en π.

Ce langage et cette notation sont suggérés par des exemples tels que les suivants :

Exemples.- 1) Soit $A=L(X)$ le corps des fractions rationnelles à une indéterminée X sur un corps L, et soit ξ un élément d'une extension K de L. Toute fraction rationnelle $r(X)\in A$ distincte de 0 peut écrire $p(X)/q(X)$, où p et q sont des polynômes premiers entre eux dans $L[X]$; on a donc $p(\xi)\neq 0$ ou $q(\xi)\neq 0$, et l'élément $r(\xi)=p(\xi)/q(\xi)$ de $P_1(K)$ est donc toujours défini pour $r(X)\in L(X)$ (avec $r(\xi)=0$ si $r=0$ et $r(\xi)=\infty$ si $q(\xi)=0$). L'application $r\rightarrow r(\xi)$ de A dans $P_1(K)$, prolongée à $P_1(A)$ en faisant correspondre au point ∞ de $P_1(A)$ le point ∞ de $P_1(K)$, est une place de A (sur L) à valeurs dans $P_1(K)$ (puisqu'il n'existe aucun polynôme homogène $p(U,V)\neq 0$ qui s'annule pour tout couple $(p(X),q(X))$ de polynômes non tous deux nuls dans $L[X]$).

2) *Soient D un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$, a un point de D, M le corps des fonctions méromorphes dans D ; $f\rightarrow f(a)$ ($f(a)=\infty$ lorsque a est un pôle de f ou lorsque $f=\infty$) est une place (sur $\mathbb{C}$) du corps M, à valeurs dans $P_1(\mathbb{C})$. On observera qu'il n'y a pas de résultat correspondant pour le corps des fonctions méromorphes dans un ensemble ouvert D de $\mathbb{C}^n$, lorsque $n>1$, car si f est une telle fonction, il y a en général des points $a\in D$ tels que ni f ni $1/f$ ne soient holomorphes au point a. *

Si π est une place de l'anneau A, il résulte de la prop.3 bis que l'ensemble B des $x\in A$ tels que $\pi(x)\neq\infty$ est un sous-anneau de A : on dit que B est l'anneau de la place π.

6. Spécialisations finies et idéaux premiers.

Les hypothèses et notations étant celles de la déf.1, la prop.3 montre que toute L-spécialisation finie dans K d'une partie S de A se prolonge d'une seule manière en une L-spécialisation finie dans K du sous-anneau

$L[S]$ de A engendré par $S \cup \{1\}$. Pour étudier les spécialisations finies de S, on peut donc se borner au cas où S est un sous-anneau de A.

PROPOSITION 5.- Pour que deux spécialisations finies f, f' d'un sous-anneau B de A soient équivalentes, il faut et il suffit qu'elles aient même noyau.

La condition évidemment nécessaire en vertu de la déf.1. Elle est suffisante, car si f est une spécialisation finie de B, de noyau $\mathfrak{p}$, on peut écrire $f = g \circ \varphi$, où φ est l'homomorphisme canonique de B sur $B/\mathfrak{p}$, et g un isomorphisme de $B/\mathfrak{p}$ sur $f(B)$; toutes les spécialisations de B, de noyau $\mathfrak{p}$, sont donc équivalentes à la spécialisation φ.

DÉFINITION 4.- Un idéal $\mathfrak{p}$ d'une algèbre commutative A sur L est dit premier si $\mathfrak{p}$ est le noyau d'une L-spécialisation finie de A.

Il revient au même de dire que $\mathfrak{p}$ satisfait à l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

a) $A/\mathfrak{p}$ est un anneau d'intégrité ;

b) $\mathfrak{p} \neq A$ et les relations $x \in A$, $y \in A$, $xy \in \mathfrak{p}$ entraînent $x \in \mathfrak{p}$ ou $y \in \mathfrak{p}$;

c) le complémentaire $\complement \mathfrak{p} = A - \mathfrak{p}$ est non vide et stable pour la multiplication.

Exemples.- 1) Tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ d'un anneau A est premier, car $A/\mathfrak{m}$ est un corps (Alg.,chap.I, §9,th.2).

2) Dans un anneau principal A, dire qu'un idéal $(p) \neq 0$ est premier signifie que p est élément extrémal de A (Alg., chap.VI, §1,prop.14 (DIV)) ; il en résulte que l'idéal (p) est maximal (Alg., chap.VII, §1,prop.2). D'autre part l'idéal (0) est premier puisque $A/(0)$ est isomorphe à A, donc est un anneau d'intégrité.

3) Dans l'anneau $K[X,Y]$ des polynômes à deux indéterminées X,Y sur un corps K, les idéaux principaux (X) et (Y) sont premiers, car $K[X,Y]/(X)$ est isomorphe à $K[Y]$ et $K[X,Y]/(Y)$ isomorphe à $K[X]$; ces deux idéaux sont strictement contenus dans l'idéal maximal $(X)+(Y)$.

7. Anneaux de fractions.

Soit B un sous-anneau de A ; une spécialisation finie f de B dans un corps K ne peut pas toujours être prolongée en une spécialisation finie de A dans K, même si K est algébriquement clos (alors qu'elle peut être dans ce cas prolongée en une place de A à valeurs dans $P_1(K)$, en vertu du th.1).

Par exemple, si a est un élément de B admettant dans A un inverse $a' \notin B$, et si $f(a)=0$, il n'existe aucune spécialisation finie $\overline{f}$ prolongeant f à un anneau C contenant a', car on devrait avoir $1=\overline{f}(1)=\overline{f}(aa')=f(a)\overline{f}(a')=0$, ce qui est absurde.

Nous nous proposons de déterminer un sous-anneau $C \supset B$ de A tel que f puisse se prolonger d'une seule manière en une spécialisation finie de C dans le corps des fractions K de $f(B)$.

La prop.5 montre que la spécialisation f est déterminée, à une équivalence près, par son noyau $\mathfrak{p}$ dans B, et par suite aussi par l'ensemble $S=B-\mathfrak{p}$ des $x\in B$ tels que $f(x)\neq 0$; cet ensemble ne contient pas 0 et nous avons vu qu'il est stable pour la multiplication (n°6). Soit $M \supset B$ un sous-anneau de A tel que f se prolonge en une spécialisation finie $\overline{f}$ de M ; pour tout $x\in M$ tel que $xy=0$ pour un élément $y\in S$, on a nécessairement $\overline{f}(x)=0$, car $0=\overline{f}(xy)=\overline{f}(x)\overline{f}(y)$, et comme $f(y)\neq 0$, $f(y)$ n'est pas diviseur de 0 dans l'anneau d'intégrité $\overline{f}(M)$. Si on désigne par $\mathfrak{U}_S$ la réunion des annulateurs dans A des éléments de S, on voit qu'on a $\overline{f}(x)=0$ dans $M\cap \mathfrak{U}_S$.

Nous sommes ainsi amenés à étudier, plus généralement, les parties non vides S de A, stables pour la multiplication et ne contenant pas 0, et, pour une telle partie S, l'ensemble $\mathcal{U}_S$, réunion des annulateurs, dans A, des éléments de S. On a la proposition suivante :

PROPOSITION 6.- L'ensemble $\mathcal{U}_S$ est un idéal de A ne rencontrant pas S ; si φ est l'homomorphisme canonique de A sur $A/\mathcal{U}_S$, les éléments de $\varphi(S)$ sont réguliers dans l'anneau $A/\mathcal{U}_S = \varphi(A)$.

En effet, si $x \in \mathcal{U}_S$ et $z \in A$, on a $xy=0$ pour un $y \in S$, d'où $zxy=0$, $zx \in \mathcal{U}_S$; si x,x' sont deux éléments de S, on a $xy=0$, $x'y'=0$ pour deux éléments y,y' de S ; comme $yy' \in S$, et qu'on a aussi $xyy'=0$, $x'yy'=0$, d'où $(x+x')yy'=0$, on a $x+x' \in \mathcal{U}_S$, ce qui prouve que $\mathcal{U}_S$ est un idéal. Il ne peut contenir aucun élément $x \in S$, car pour tout $y \in S$, on a alors $xy \in S$, d'où $xy \neq 0$ par hypothèse. Si $x \in S$ et $z \in A$ sont tels que $\varphi(z)\varphi(x)=0$ dans $\varphi(A)$, cela signifie que $zx \in \mathcal{U}_S$; il existe donc $y \in S$ tle que $zxy=0$, et comme $xy \in S$, $z \in \mathcal{U}_S$, donc $\varphi(z)=0$, ce qui montre que $\varphi(x)$ est régulier dans $\varphi(A)$.

Il est clair que l'ensemble $\varphi(S)$ est multiplicativement stable et ne contient pas 0 ; en outre, dans l'anneau des fractions R de $\varphi(A)$ (Alg., chap.I, § 9, n°4), les éléments de $\varphi(S)$ sont inversibles. On en déduit que l'ensemble A_S des éléments de R de la forme $\varphi(x)/\varphi(s)$, où $x \in A$ et $s \in S$, est un sous-anneau de R, car on a

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(s)} + \frac{\varphi(x')}{\varphi(s')} = \frac{\varphi(xs'+x's)}{\varphi(ss')} \quad \text{et } ss' \in S .$$

DÉFINITION 5.- Soient A un anneau, S une partie non vide de A stable pour la multiplication et ne contenant pas 0. Soient $\mathcal{U}_S$ la réunion des annulateurs, dans A, des éléments de S, φ l'homomorphisme canonique de A sur $A/\mathcal{U}_S$, et R l'anneau des fractions de $\varphi(A)=A/\mathcal{U}_S$.

Le sous-anneau $A_S = \varphi(A)(\varphi(S))^{-1}$ de R, formé des éléments $\varphi(x)/\varphi(s)$, où $x \in A$ et $s \in S$, est appelé l'anneau des fractions dérivé de A au moyen de S.

Remarques.- 1) Lorsque tous les éléments de S sont réguliers, on a $\mathfrak{N}_S=(0)$ et $A/\mathfrak{N}_S$ peut donc être identifié à A. Par suite A_S est alors un sous-anneau de l'anneau des fractions de A, et A est un sous-anneau de A_S. Plus particulièrement, si tous les éléments de S sont inversibles dans A, on a $A_S=A$.

2) Si on prend pour S l'ensemble de tous les éléments réguliers de A, qui est multiplicativement stable et ne contient pas 0, A_S n'est autre que l'anneau des fractions de A.

La construction de l'anneau A_S résout un problème d'"applications universelles" :

PROPOSITION 7.- Soient A un anneau, S une partie non vide de A, stable pour la multiplication et ne contenant pas 0, A_S l'anneau des fractions dérivé de A au moyen de S, φ l'homomorphisme canonique de A dans A_S. Pour tout homomorphisme f de A dans un anneau A', tel que les éléments de f(S) soient inversibles dans A', il existe un homomorphisme et un seul g de A_S dans A', tel que $f=g\circ\varphi$. On a $g(A_S)=f(A)(f(S))^{-1}$; si $\mathfrak{A}$ est le noyau de f, le noyau de g est $\varphi(\mathfrak{A})(\varphi(S))^{-1}$.

Il est clair que si un homomorphisme g satisfaisant aux conditions de l'énoncé existe, on a nécessairement $g(\varphi(x)/\varphi(s)) = f(x)/f(s)$ pour $x \in A$ et $s \in S$, ce qui prouve que g est unique ; réciproquement, il est immédiat que la formule précédente définit un homomorphisme de A_S dans A' répondant à la question ; la dernière partie de la proposition est évidente.

Lorsque S est l'ensemble des éléments réguliers de A, on retrouve la seconde partie de la prop.4 d'*Alg.*, chap.I, § 9.

COROLLAIRE 1.- *Soient* f *un homomorphisme de* A *dans un anneau* A' *tel que* $0 \notin T = f(S)$. *Soit* A'_T *l'anneau des fractions dérivé de* A' *au moyen de* T, *et soit* ψ *l'homomorphisme canonique de* A' *dans* A'_T. *Il existe alors un homomorphisme et un seul* g *de* A_S *dans* A'_T *tel que* $g\circ\varphi = \psi\circ f$; *on a* $g(A_S)=\psi(f(A))(\psi(f(S)))^{-1}$; *si* $\mathfrak{a}$ *est le noyau de* f, *le noyau* $\mathfrak{a}'$ *de* $\psi\circ f$ *est l'ensemble des* $x\in A$ *tels que* xS *rencontre* $\mathfrak{a}$, *et le noyau de* g *est* $\varphi(\mathfrak{a}')(\varphi(S))^{-1}$.

La première partie du corollaire est une application immédiate de la prop.7, puisque les éléments de $\psi(T) = \psi(f(S))$ sont inversibles dans A'_T. Quant à la seconde partie, tout revient à caractériser $\mathfrak{a}'$; or, dire que $\psi(f(x))=0$ signifie que $f(x)$ annule un élément de $T=f(S)$, autrement dit qu'il existe $s\in S$ tel que $f(x)f(s)=0$, c'est-à-dire $f(xs)=0$, ou encore $xs\in\mathfrak{a}$.

COROLLAIRE 2.- *Avec les notations du cor.1, si* f *est un isomorphisme de* A *dans* A', g *est un isomorphisme de* A_S *dans* $A'_{f(S)}$.

En effet, on a alors $\mathfrak{a}=(0)$, et par suite (cor.1) $\mathfrak{a}'=\mathfrak{n}_S$; comme $\varphi(\mathfrak{n}_S)=0$ par définition, le noyau de g est réduit à 0.

En vertu de ce dernier corollaire, si A est un *sous-anneau* de A', et qu'on prenne pour f l'injection de A dans A', il y a un isomorphisme g, canoniquement défini, de A_S dans A'_S au moyen duquel on peut *identifier* A_S *avec le sous-anneau* $A.S^{-1}$ *de* A'_S ; le plus souvent, on conviendra de faire cette identification.

PROPOSITION 8.- Soient A un anneau, S une partie non vide de A stable pour la multiplication et ne contenant pas 0, A_S l'anneau des fractions dérivé de A au moyen de S, φ l'homomorphisme canonique de A dans A_S.

a) Pour tout idéal $\mathfrak{a}'$ de A_S, l'idéal $\mathfrak{a}=\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{a}')$ est un idéal de A, tel que tout élément $x\in A$ pour lequel xS rencontre $\mathfrak{a}$, appartienne à $\mathfrak{a}$; on a en outre $\mathfrak{a}'=\varphi(\mathfrak{a})(\varphi(S))^{-1}$.

b) La relation $\mathfrak{a}=\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{a}')$ établit une correspondance biunivoque entre les idéaux $\mathfrak{a}'$ de A_S et les idéaux $\mathfrak{a}$ de A tels que la relation $xS\cap\mathfrak{a}\neq\emptyset$ entraîne $x\in\mathfrak{a}$.

c) Si $\mathfrak{a}=\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{a}')\neq A$, et si f est l'homomorphisme canonique de A sur l'anneau $B=A/\mathfrak{a}$, B est un sous-anneau de $B_{f(S)}$, et il y a un homomorphisme g de A_S sur $B_{f(S)}$, de noyau $\mathfrak{a}'$, tel que $f=g\circ\varphi$ (ce qui entraîne que $A_S/\mathfrak{a}'$ est isomorphe à $(A/\mathfrak{a})_{f(S)}$). En outre si $A/\mathfrak{a}$ est un anneau d'intégrité, il en est de même de $A_S/\mathfrak{a}'$ (en d'autres termes, si $\mathfrak{a}$ est premier dans A, $\mathfrak{a}'$ est premier dans A_S).

Si $\mathfrak{a}'=A$, on a $\mathfrak{a}=A$, et la proposition est triviale. Supposons donc $\mathfrak{a}'\neq A_S$, et soit $B'=A_S/\mathfrak{a}'$, qui est alors un anneau ayant un élément unité. Soit g l'homomorphisme canonique de A_S sur B', et posons $f=g\circ\varphi$. Comme les éléments de $\varphi(S)$ sont inversibles dans A_S, ceux de $T=f(S)=g(\varphi(S))$ le sont dans B', et par suite on a $B'_T=B'$ et l'homomorphisme canonique ψ de B' dans B'_T est l'application identique.

Si on applique aux anneaux A,B' et à l'homomorphisme f le cor.1 de la prop.7, on voit que le noyau $\mathfrak{a}=\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{a}')$ de f est identique à l'ensemble des $x\in A$ tels que xS rencontre $\mathfrak{a}$, et que le noyau $\mathfrak{a}'$ et g est $\varphi(\mathfrak{a})(\varphi(S))^{-1}$, ce qui prouve a) et la première partie de c).

Soit inversement $\mathfrak{a}$ ~~est~~ un idéal de A, idstinct de A et tel que la relation $xS\cap\mathfrak{a}\neq\emptyset$ entraîne $x\in\mathfrak{a}$, et considérons l'homomorphisme canonique f de A sur $A/\mathfrak{a}=B$; l'hypothèse faite sur $\mathfrak{a}$ revient à dire que pour $s\in S$, la relation $xs\in\mathfrak{a}$, équivalente à $f(x)f(s)=0$, entraîne $f(x)=0$, autrement dit que les éléments de $T=f(S)$ sont réguliers dans B ; mais alors B est un sous-anneau de B_T, et l'homomorphisme canonique ψ de B dans B_T est l'injection de B dans B_T. Appliquons aux anneaux A,B et à l'homomorphisme f le cor.1 de la prop.7 ; le noyau de l'homomorphisme g de A_S dans B_T est $\mathfrak{a}'=\varphi(\mathfrak{a})(\varphi(S))^{-1}$ et comme le noyau de $\psi\circ f=g\circ\varphi$ est identique au noyau $\mathfrak{a}$ de f, on a $\mathfrak{a}=\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{a}')$; on a ainsi établi b).

Enfin, si $A/\mathfrak{a}$ est un anneau d'intégrité, il en est de même de $(A/\mathfrak{a})_{f(S)}$, qui est contenu dans le corps des fractions de $A/\mathfrak{a}$ et par suite $A_S/\mathfrak{a}'$, isomorphe à $(A/\mathfrak{a})_{f(S)}$ est un anneau d'intégrité.

8. <u>Domaine d'une spécialisation</u>.

Reprenons maintenant le problème posé au début du n°7, avec les notations introduites à cette occasion. Formons l'anneau des fractions A_S dérivé de A au moyen de $S=B-\mathfrak{p}$, et soit φ l'homomorphisme canonique de A dans A_S ; on a vu que toute spécialisation finie $\bar{f}$ d'un anneau $M\supset B$, prolongeant f, s'annule dans $\mathfrak{n}_S$, et peut par suite s'écrire $\bar{f}=\bar{g}\circ\varphi$, où $\bar{g}$ est une spécialisation (finie) dans K (corps des fractions de $f(B)$) de l'anneau $\varphi(M)$. En particulier, on a $f=g\circ\varphi$, où g est une spécialisation finie de $B'=\varphi(B)$ dans K, et on a $g(\varphi(B))=f(B)$. On peut donc se borner à considérer des spécialisations de sous-anneaux de A_S qui <u>prolongent</u> g. Or, le noyau $\mathfrak{p}'=\varphi(\mathfrak{p})$ de g est le complémentaire de l'ensemble $\varphi(S)$ dans B' ; les éléments de $\varphi(S)$ étant inversibles dans A_S, l'anneau des fractions dérivé de B' au moyen de $\varphi(S)$ peut être identifié au sous-anneau $C'=B'.(\varphi(S))^{-1}$ de A_S ; en vertu de la prop.7, g se prolonge <u>d'une seule manière</u> en une spécialisation finie g_0 dans K de l'anneau C' ; en outre, on a $g_0(C')=K$. Il en résulte que $f_0=g_0\circ\varphi$ est une spécialisation finie de l'anneau $C=\overset{-1}{\varphi}(C')$ dans K , prolongeant f ; en outre, pour toute spécialisation $\overline{f}$ d'un anneau $H\supset B$ dans K , prolongeant f , on a nécessairement $\overline{f}(x)=f_0(x)$ dans $H\cap C$. Nous dirons que C est l'<u>anneau de la spécialisation finie</u> f (relativement à l'anneau A contenant B). Le noyau de g_0 étant $\mathfrak{P}'_0=\mathfrak{P}'.(\varphi(S))^{-1}$, le noyau de f_0 est $\mathfrak{P}_0=\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{P}'_0)$.

Soit F une partie de $P_1(A)$ contenant C , et soit f_1 une spécialisation (finie ou non) de F dans $P_1(K)$, prolongeant f_0 . Soit $\overline{u}$ un point de F ayant un système de coordonnées homogènes (a,b) ; tel que $a\in C$, $b\in C$, et soit (α,β) un système de coordonnées homogènes de $f_1(u)$ dans $P_1(K)$. Comme l'image du point de coordonnées homogènes (1,a) (resp. (1,b)) de $P_1(A)$ par f_1 est par hypothèse le point de coordonnées homogènes $(1,f_0(a))$ (resp. $(1,f_0(b))$ de $P_1(K)$, et que d'autre part le polynôme $X_1Y_2X_3-Y_1X_2Y_3$, homogène par rapport à chacun des couples (X_i,Y_i) $(1\leqslant i\leqslant 3)$ s'annule quand on remplace X_1,X_2,X_3 par a,1,1 respectivement et Y_1,Y_2,Y_3 par b,b,a respectivement, on a, en vertu de la déf.1 , $\alpha f_0(b)-\beta f_0(a)=0$. Il en résulte que, si $f_0(a)$ et $f_0(b)$ ne sont pas tous deux nuls, le point de $P_1(K)$ de coordonnées homogènes (α,β) a aussi pour coordonnées homogènes $(f_0(a),f_0(b))$ et par suite est <u>entièrement déterminé</u> par la donnée de f . L'ensemble $D\subset P_1(A)$, formé des points ayant un système de coordonnées (a,b) appartenant à C (un des éléments a,b au moins étant régulier dans A) et tels que $f_0(a)$ et $f_0(b)$ ne soient pas tous deux nuls, est appelé le <u>domaine de la spécialisation</u> f ;

toute spécialisation d'une partie $G \subset B$ de $P_1(A)$ dans $P_1(K)$, qui prolonge la spécialisation donnée f, est __entièrement déterminée__ dans $D \cap G$. On peut d'ailleurs remplacer partout dans le raisonnement qui précède le corps K par un quelconque de ses surcorps K' (à cela près qu'on a $g_0(C')=K$ et non K') ; le th. de prolongement, joint au résultat ci-dessus, prouve alors qu'__il existe__ une spécialisation de D dans $P_1(K)$ (et une seule) prolongeant la spécialisation donnée f ; on dit que c'est le __prolongement canonique__ de f.

__Remarque__.- On peut en un certain sens ramener une spécialisation __quelconque__ f à l'étude d'une spécialisation __finie__. Soit en effet A' l'anneau (total) des fractions de A ; on a vu que $P_1(A)$ peut être identifié à $P_1(A')$, et par suite on peut supposer d'emblée que tout élément __régulier__ de A est __inversible__, de sorte que A est identifié à l'ensemble des éléments de $P_1(A)$ de coordonnées homogènes $(1,x)$ $(x \in A)$, et le complémentaire de A dans $P_1(A)$ à l'ensemble des éléments de coordonnées homogènes $(z,1)$, où z est __diviseur de__ 0 dans A. Soit alors $(\overline{x}_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments de $P_1(A)$, et $(\overline{y}_\iota)_{\iota \in I}$ une spécialisation de $(\overline{x}_\iota)$ dans $P_1(K)$; soit H l'ensemble des indices $\iota \in I$ tels que $\overline{x}_\iota \notin A$; on peut supposer que $(x_\iota, 1)$ est un système de coordonnées homogènes de $\overline{x}_\iota$ pour $\iota \in H$; si (u_ι, v_ι) est un système de coordonnées homogènes de $\overline{y}_\iota$, posons $\overline{x}'_\iota = (1, x_\iota)$ et $y'_\iota = (v_\iota, u_\iota)$ pour $\iota \in H$, $\overline{x}'_\iota = \overline{x}_\iota$ et $\overline{y}'_\iota = \overline{y}_\iota$ pour $\iota \notin H$; il résulte aussitôt de la déf. 1 que $(\overline{y}'_\iota)$ est une spécialisation de $(\overline{x}'_\iota)$. On est ainsi ramené au cas où __tous les__ $\overline{x}_\iota$ __appartiennent à__ A, les $\overline{y}_\iota$ pouvant être finis ou non. En considérant désormais ce cas et identifiant $\overline{x}_\iota$ avec sa seconde coordonnée $x_\iota \in A$, soit J l'ensemble des $\iota \in I$ tels que $\overline{y}_\iota = \infty$; montrons que l'ensemble $S \subset A$ multiplicativement engendré par les x_ι tels que $\iota \in J$ ne contient pas 0.

En effet si on avait $\prod_{k=1}^{n} x_{\iota_k}=0$, le polynôme $\prod_{k=1}^{n} Y_{\iota_k}$ (homogène par rapport aux couples $(X_{\iota_k},Y_{\iota_k})$) appartiendrait à l'idéal de $(\overline{x}_\iota)$ ce qui est absurde, car on a par hypothèse $\overline{y}_{\iota_k}=(0,1)$ pour tout k , et la valeur du polynôme $\prod_{k=1}^{n} Y_{\iota_k}$ est 1 quand on y substitue 0 à X_{ι_k} et 1 à Y_{ι_k} . Soit alors A_S l'anneau des fractions dérivé de A au moyen de S , et soit φ l'homomorphisme canonique de A dans A_S . Montrons que $(\overline{y}_\iota)$ est une spécialisation de la famille $(\varphi(x_\iota))$ d'éléments de A_S . Supposons en effet que pour un polynôme $p\in L[X_\iota, Y_\iota]_{\iota\in I}$, on ait $p((1,\varphi(x_\iota))=0$; cela signifie par définition que $p((1,x_\iota))$ appartient à l'idéal $\mathfrak{n}_S$, et par définition de S , cela veut dire aussi qu'il existe un nombre fini d'indices $\iota_k\in J$ tels que $x_{\iota_1}x_{\iota_2}\cdots x_{\iota_h}p((1,x_\iota))=0$; appliquant la déf.1 au polynôme homogène $Y_{\iota_1}Y_{\iota_2}\cdots Y_{\iota_h}p((X_\iota,Y_\iota))$, on voit que l'on a (puisque $\overline{y}_{\iota_k}=(0,1)$) $p((u_\iota,v_\iota))=0$, ce qui démontre notre assertion. Mais les éléments $\varphi(x_\iota)$ sont <u>inversibles</u> dans A_S pour tout $\iota\in J$; si on pose $x''_\iota=(\varphi(x_\iota))^{-1}$ pour $\iota\in J$, $x''_\iota=\varphi(x_\iota)$ pour $\iota\notin J$, $y''_\iota=0$ pour $\iota\in J$, $y''_\iota=\overline{y}_\iota\in K$ pour $\iota\notin J$, la déf.1 montre que (y''_ι) est une <u>spécialisation finie</u> de (x''_ι). Par définition, le domaine de cette spécialisation est aussi appelé le <u>domaine</u> de la spécialisation initialement donnée.

9. Anneaux locaux.

Avec les notations du n°8, nous avons vu qu'à partir d'une spécialisation finie f d'un sous-anneau B d'un anneau A , de noyau $\mathfrak{p}=B-S$, on définit une spécialisation finie g de l'anneau $B'=\varphi(B)\subset A_S$, telle que $f=g\circ\varphi$, $\varphi(S)$ étant le complémentaire du noyau $\mathfrak{p}'$ de g dans B' ; on prolonge ensuite g d'une seule manière en une spécialisation g_0 de $C'=\varphi(B).(\varphi(S))^{-1}$, telle que $g_0(C')$ soit le corps des fractions K de $f(B)=g(B')$. Le noyau $\mathfrak{p}'_0$ de g_0 étant égal à $\mathfrak{p}'.(\varphi(S))^{-1}$, son complémentaire dans C' est l'ensemble $(\varphi(S)).(\varphi(S))^{-1}$, dont tous les éléments sont *inversibles* dans C'. Nous allons étudier les anneaux pour lesquels le complémentaire de l'ensemble des éléments inversibles est un idéal.

PROPOSITION 9.- *Soient* A *un anneau, et soit* M *l'ensemble des éléments non inversibles de* A *. L'ensemble* M *est la réunion des idéaux de* A *, distincts de* A *; c'est aussi la réunion des idéaux principaux de* A *, distincts de* A *, et on a* $MA=M$ *. En outre, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(AL_I) M *est un idéal.*

(AL_{II}) *Il n'existe qu'un seul idéal maximal dans* A .

(AL_{III}) *On a* $M+M \subset M$.

(AL_{IV}) *La relation* $x \in M$ *entraîne* $1+x \notin M$.

Par définition, la relation $x \in M$ équivaut à $1 \notin xA$, donc à $xA \neq A$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal $\neq A$ et si $x \in \mathfrak{a}$, on a $xA \subset \mathfrak{a}$, donc $xA \neq A$ et $x \in M$. On voit ainsi que tout idéal $\neq A$ est contenu dans M, et que tout élément $x \in M$ appartient à un idéal principal $xA \neq A$, d'où la première partie de la proposition. L'équivalence de (AL_I) et (AL_{II}) résulte de ce que tout idéal $\neq A$ est contenu dans un idéal maximal (*Alg.*, chap. I, §8, th. 2). Comme $MA=M$, (AL_I) et (AL_{III}) sont équivalentes. Enfin, si (AL_{III}) est vérifiée, et si on avait $x \in M$ et $1+x \in M$, on aurait $-x \in M$, puis $1=(1+x)+(-x) \in M$, ce qui est absurde ; donc (AL_{III}) entraîne (AL_{IV}). Si au contraire (AL_{III}) n'est pas vérifiée, il existe deux éléments a, b dans M tels que $a+b \notin M$; $a+b$ est donc inversible. Si on pose $x=-(a+b)^{-1}a$, $y=(a+b)^{-1}b$, on a $x \in M$ et $y \in M$ en vertu de la relation $MA=M$; comme $y=1+x$, la condition (AL_{IV}) n'est pas vérifiée, et on voit donc que (AL_{IV}) entraîne (AL_{III}).

DÉFINITION 6.- On dit qu'un anneau A (commutatif et ayant un élément unité) est un anneau local s'il possède les quatre propriétés (équivalentes) (AL_I), (AL_{II}), (AL_{III}) et (AL_{IV}). Si M est l'unique idéal maximal de A, le corps quotient A/M est appelé corps résiduel (ou corps des restes) de A.

---

§ 2. Valuations.

1. Spécialisations d'un anneau d'intégrité.

Soient A un anneau d'intégrité, K son corps des fractions, f une spécialisation finie de A dans un corps K', autrement dit un homomorphisme de A dans K', et soit $\mathfrak{p} = \overset{-1}{f}(0)$ le noyau de f. Appliquons aux anneaux A et K les résultats du § 1, n°8 : posant $S = A - \mathfrak{p}$, l'anneau A_S est ici identifié au sous-anneau $A.S^{-1}$ de K, autrement dit à l'ensemble des éléments a/b de K, où $a \in A$ et $b \notin \mathfrak{p}$; par abus de notation, on écrit encore cet anneau $A_{\mathfrak{p}}$ et on dit que c'est l'anneau des fractions dérivé de A au moyen de l'idéal premier $\mathfrak{p}$.

Il n'en résulte d'ailleurs aucun danger de confusion, car $0 \in \mathfrak{p}$ et par suite la définition des anneaux de fractions dérivés de A (§ 1, n°7, déf. 5) n'attribue aucun sens au symbole $A_{\mathfrak{p}}$.

Les résultats du § 1, n^{os} 8 et 9 montrent que $A_{\mathfrak{p}}$ est l'anneau de la spécialisation f ; c'est un anneau local, dont l'unique idéal maximal est $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$; on dit que cet idéal est l'idéal de la spécialisation f. Les résultats du § 1, n°8 peuvent alors se résumer en l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1.- Soient f un homomorphisme d'un anneau d'intégrité A dans un corps K', $\mathfrak{p} = \overset{-1}{f}(0)$ le noyau de f, K le corps des fractions de A. L'homomorphisme f peut se prolonger d'une seule manière en un homomorphisme f_0 de l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ dans K' ; le noyau de f_0 est $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, et $f_0(A_{\mathfrak{p}})$ est le corps des fractions de $f(A)$. Enfin, le domaine de la spécialisation f est $D=A_{\mathfrak{p}} \cup (A_{\mathfrak{p}})^{-1} \subset P_1(K)$, et le prolongement canonique de f à D est égal à f_0 dans $A_{\mathfrak{p}}$ et à ∞ dans $D-A_{\mathfrak{p}}=(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^{-1}$.

La dernière partie de l'énoncé résulte de ce que si un point $\bar{x}$ de $P_1(K)$, de coordonnées homogènes (a,b) avec $a\in A_{\mathfrak{p}}$, $b\in A_{\mathfrak{p}}$ est tel que $f_0(a)\neq 0$, on a $a\notin \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, donc a est inversible dans $A_{\mathfrak{p}}$, et $\bar{x}$ a pour coordonnés homogènes $(1,ba^{-1})$, donc $\bar{x}\in A_{\mathfrak{p}}$; si au contraire $f_0(a)=0$, $f_0(b)\neq 0$, on a $b^{-1}\in A_{\mathfrak{p}}$, $a\in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, donc $\bar{x}^{-1}$, qui a pour coordonnées homogènes $(ab^{-1},1)$ appartient à $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Dans le cas particulier où A est déjà un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$, les éléments de $A-\mathfrak{p}$ sont inversibles dans A, donc $A_{\mathfrak{p}} = A$.

Exemples.- 1) Si p est un nombre premier rationnel, et f l'homomorphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/(p)$, l'anneau local de la spécialisation f est l'ensemble des nombres rationnels de la forme b/a, avec $b\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{Z}$, $a\not\equiv 0 \pmod{p}$; il est immédiat que le domaine de f est ici $P_1(\mathbb{Q})$ tout entier.

2) Dans l'anneau $A=L[[X_1,X_2,\dots,X_n]]$ des séries formelles à n indéterminées $X_1,\dots,X_n$ sur un corps L, toute série de terme constant $\neq 0$ est inversible (Alg., chap.IV, §5, prop.4) ; si f est la spécialisation de A qui, à toute série formelle, fait correspondre son terme constant (§1, n°4, exemple 4), l'anneau local de f est A

lui-même, et l'idéal maximal de A , qui est le noyau de f , est l'idéal engendré par $X_1, X_2, \ldots, X_n$. On notera qu'ici le domaine de f , égal à $A \cup A^{-1}$, est distinct de $P_1(A)$ lorsque $n > 1$, car le quotient X_2/X_1 n'appartient ni à A , ni à A^{-1}.

La prop.8 du n°1 donne ici en particulier la caractérisation des idéaux premiers dans un anneau $A_{\mathfrak{p}}$:

PROPOSITION 1.- Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier dans un anneau d'intégrité A ; les relations $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}$ établissent une correspondance biunivoque entre les idéaux premiers $\mathfrak{q}'$ de $A_{\mathfrak{p}}$ et les idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de A contenus dans $\mathfrak{p}$.

Il résulte en effet de la prop.8 du § 1 que les relations $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap A$ établissent une correspondance biunivoque entre les idéaux $\mathfrak{a}'$ de $A_{\mathfrak{p}}$ et les idéaux $\mathfrak{a}$ de A tels que, en posant $S = A - \mathfrak{p}$, la relation $xS \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$ entraîne $x \in \mathfrak{a}$; pour un tel idéal $\mathfrak{a}$, la relation $S \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$ entraîne donc $1 \in \mathfrak{a}$, autrement dit $\mathfrak{a} = A$, et par suite les idéaux $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap A$ sont identiques à A ou contenus dans $\mathfrak{p}$; le premier cas ne peut évidemment se produire que si $\mathfrak{a}' = A_{\mathfrak{p}}$. Si $\mathfrak{q}'$ est premier dans $A_{\mathfrak{p}}$, on a donc $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{p}$, et on sait que si f est l'homomorphisme canonique de A sur $A/\mathfrak{q}$, $A/\mathfrak{q}$ est un sous-anneau de $(A/\mathfrak{q})_{f(S)}$ (autrement dit, les éléments de f(S) sont réguliers dans $A/\mathfrak{q}$), et $(A/\mathfrak{q})_{f(S)}$ est isomorphe à $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}'$ (§ 1, prop.8) ; il en résulte que si $\mathfrak{q}'$ est premier dans $A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{q}$ est premier dans A . Inversement, supposons que $\mathfrak{q}$ soit premier dans A et $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$; alors, la relation $xS \cap \mathfrak{q} \neq \emptyset$ entraîne $x \in \mathfrak{q}$, puisque $\mathfrak{q}$ est premier et ne rencontre pas S ; la prop.8 du § 1 prouve alors que $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}$ est premier dans $A_{\mathfrak{p}}$.

On notera que dans cette correspondance biunivoque, à l'idéal premier de A correspond l'unique idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ de $A_{\mathfrak{p}}$.

2. Places d'un corps.

Soient K et K' deux corps, π une place de K à valeurs dans $P_1(K')$, c'est-à-dire (§ 1, n°5, déf. 3) une spécialisation de $P_1(K)$ tout entier dans $P_1(K')$. On a $\pi(\infty)=\infty$; d'autre part, l'ensemble A des $x\in K$ pour lesquels $\pi(x)\neq\infty$ est un sous-anneau de K, l'anneau de la place π (§ 1, n°5), sur lequel π induit une spécialisation finie ; soit $\mathfrak{p}$ le noyau de celle-ci, c'est-à-dire l'ensemble des $x\in K$ tels que $\pi(x)=0$. Si $x\in A-\mathfrak{p}$, on a $\pi(x)\neq 0$, donc $\pi(x^{-1})=(\pi x))^{-1}\neq\infty$, et par suite $x^{-1}\in A$; cela prouve (§ 1, n°9, déf. 5) que A est un anneau local, et $\mathfrak{p}$ son idéal maximal. En outre, si $x\in K-A$, on a $\pi(x)=\infty$, donc $\pi(x^{-1})=0$, c'est-à-dire $x^{-1}\in\mathfrak{p}$; il en résulte que le domaine de la spécialisation induite par π sur A, qui est égal à $A\cup A^{-1}=A\cup\mathfrak{p}^{-1}$ (th. 1) est égal à $P_1(K)$. Ceci s'écrit aussi $K^*=A^*\cup(A^*)^{-1}$; si $U=A^*\cap(A^*)^{-1}$ est le sous-groupe des unités de l'anneau A, le groupe K^*/U est réunion de A^*/U et de $(A^*/U)^{-1}$; cela signifie que, pour la structure de groupe ordonné sur K^*/U définie par l'ensemble des éléments "positifs" A^*/U (Alg., chap. VI, §1, n°5), K^*/U est un groupe totalement ordonné. Comme K^*/U est isomorphe au groupe $\mathcal{P}^*$ des idéaux principaux fractionnaires $\neq 0$) de K, ordonné par la relation $\supset$ (loc. cit.), on peut encore dire que le groupe $\mathcal{P}^*$ des idéaux principaux fractionnaires $\neq(0)$ de K est totalement ordonné par inclusion ; il revient au même de dire que, de deux éléments quelconques de K^*, l'un divise l'autre (relativement à l'anneau A).

Inversement, soit A un anneau d'intégrité, K son corps des fractions, et supposons que l'ensemble des idéaux principaux de A soit *totalement ordonné par inclusion* ; cela signifie que, de deux éléments $a\neq 0$, $b\neq 0$ de A , l'un divise l'autre, c'est-à-dire que $b^{-1}a$ ou $a^{-1}b$ appartient à A . On a donc dans ce cas $K^*=A^*\cup(A^*)^{-1}$ et $P_1(K)=A\cup A^{-1}$; comme la réunion des idéaux principaux de A distincts de A est alors un idéal de A (puisque ces idéaux principaux forment un ensemble totalement ordonné par inclusion), A est un *anneau local* (§ 1, prop. 9) ; si $\mathfrak{p}$ est l'idéal maximal de A , l'homomorphisme canonique f de A sur le corps quotient $K'=A/\mathfrak{p}$ est une spécialisation finie, et son prolongement canonique est défini dans $P_1(K)$ tout entier (th. 1), autrement dit, est une *place* π_0 de K , A étant l'anneau et $\mathfrak{p}$ l'idéal de cette place. On dit que π_0 est la place de K *canoniquement associée* à l'anneau A .

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 2.- *Soient* A *un anneau d'intégrité*, K *son corps des fractions. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

a) *L'ensemble des idéaux principaux de* A *est totalement ordonné par inclusion* (ou encore : *de deux éléments de* A , *l'un divise l'autre*).

b) *Le groupe des idéaux principaux fractionnaires* $\neq(0)$ *de* K *(relativement à* A) *est totalement ordonné par inclusion*.

c) *On a* $P_1(K)=A\cup A^{-1}$.

d) A *est l'anneau d'une place* π *de* K (c'est-à-dire (§ 1, n°5) l'anneau des $x\in K$ tels que $\pi(x)\neq\infty$).

Lorsqu'il en est ainsi, A *est un anneau local, et pour toute place* π *de* K *ayant pour anneau* A , *le noyau de* π *est l'idéal maximal* $\mathfrak{p}$ *de* A , *identique à* $(K-A)^{-1}\cup\{0\}$; *en particulier*, π *est équivalente à la place de* K *canoniquement associée à* A .

On a déjà noté qu'un anneau local d'intégrité quelconque n'est pas nécessairement l'anneau d'une place de son corps des fractions (n°1, exemple 2).

3. Valuations.

D'une manière générale, soit A un sous-anneau d'un corps K, tel que K soit le corps des fractions de A, et soit φ l'application $x \to (x)=Ax$ du groupe K^* sur le groupe $\mathcal{P}^*$ des idéaux principaux fractionnaires $\neq(0)$ de K, ordonné par la relation $\supset$. On a donc $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$; en outre, si $x,y,x+y$ et z sont dans K^*, les relations $\varphi(x)\supset\varphi(z)$ et $\varphi(y)\supset\varphi(z)$ entraînent $\varphi(x+y)\supset\varphi(z)$, car ces relations sont respectivement équivalentes à $x\in Az$, $y\in Az$, $x+y\in Az$.

Lorsque le groupe $\mathcal{P}^*$ est totalement ordonné, il est commode (le groupe $\mathcal{P}^*$ étant fréquemment isomorphe à un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$) d'introduire un groupe ordonné isomorphe à $\mathcal{P}^*$, où la loi de composition est notée additivement et la relation d'ordre notée $\geqslant$. On pose donc la définition suivante :

DÉFINITION 1.- On appelle valuation (ou ordination) d'un corps K une application ω de K^* dans un groupe (additif) totalement ordonné Γ, satisfaisant aux conditions suivantes :

(VA_I) $\omega(xy)=\omega(x)+\omega(y)$ pour $x\in K^*$, $y\in K^*$;

(VA_{II}) $\omega(x+y)\geqslant \mathrm{Min}(\omega(x),\omega(y))$ pour $x\in K^*$, $y\in K^*$, $x+y\in K^*$.

Pour tout $x\in K^*$, l'élément $\omega(x)\in\Gamma$ s'appelle l'ordre de x pour la valuation ω. On dit que deux valuations ω, ω' d'un corps K sont équivalentes s'il existe un isomorphisme θ du groupe ordonné $\omega(K^*)$ sur le groupe ordonné $\omega'(K^*)$, tel que $\omega'=\theta\circ\omega$.

On convient en outre, dans ces conditions, d'adjoindre une fois pour toutes à Γ un ensemble de deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$, d'étendre à l'ensemble somme $\Gamma' = \Gamma \cup \{-\infty, +\infty\}$ la relation d'ordre et la loi de composition de Γ en posant $-\infty < \gamma < +\infty$, $\gamma+(+\infty)=+\infty$, $\gamma-(-\infty)=+\infty$, $\gamma+(-\infty)=\gamma-(+\infty)=-\infty$ quel que soit $\gamma \in \Gamma$ $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ (on notera que la somme $(+\infty)+(-\infty)$ n'est pas définie), et de prolonger à $P_1(K)$ la valuation ω en posant $\omega(0)=+\infty$, $\omega(\infty)=-\infty$; on vérifie aussitôt que, dans ces conditions, les relations (VA_I) et (VA_{II}) sont satisfaites chaque fois que les deux membres ont un sens.

Le th.2 montre que, si A est l'anneau d'une place π de K, et si $U=A^* \cap (A^*)^{-1}$ désigne le groupe des éléments inversibles de A, l'homomorphisme canonique ω de K^* sur le groupe K^*/U, noté additivement, est une valuation de K, dite canoniquement associée à la place π, ou à l'anneau A. Par définition de ω, la relation $\omega(x) \geqslant 0$ (pour $x \in P_1(K)$) est équivalente à $x \in A$ et à $\pi(x) \neq \infty$; la relation $\omega(x)=0$ est équivalente à $x \in U = A \cap A^{-1}$ et à $\pi(x) \neq 0$, $\pi(x) \neq \infty$; par suite, en désignant par $\mathfrak{p} = A-U$ l'idéal maximal de A (idéal de la place π), la relation $\omega(x) > 0$ est équivalente à $x \in \mathfrak{p}$ et à $\pi(x)=0$.

Réciproquement, soit ω une valuation quelconque d'un corps K à valeurs dans un groupe totalement ordonné Γ ; il est immédiat que l'ensemble des $x \in P_1(K)$ tels que $\omega(x) \geqslant 0$ est un sous-anneau A de K, dont les éléments inversibles sont ceux pour lesquels $\omega(x)=0$, et que les $x \in A$ tels que $\omega(x) > 0$ forment un idéal $\mathfrak{p}$ de A, qui est donc l'unique idéal maximal de A. Comme $P_1(K)=A \cup A^{-1}$, l'anneau A satisfait aux conditions a),b),c) et d) du th.2 ; le groupe ordonné $\omega(K^*)$ est isomorphe au groupe K^*/U (ordonné comme il a été dit ci-dessus) ; autrement dit, ω est équivalente à la valuation canoniquement associée à l'anneau A .

DÉFINITION 2.- *Si* ω *est une valuation d'un corps* K , *l'ensemble* A *des* $x \in K$ *tels que* $\omega(x) \geqslant 0$, *et l'ensemble* $\mathfrak{p}$ *des* $x \in K$ *tels que* $\omega(x) > 0$, *s'appelleront respectivement l'anneau et l'idéal de la valuation* ω . *Un anneau d'intégrité* A *s'appelle un anneau de valuation d'un corps* K *si* A *est l'anneau d'une valuation de* K ; A *est dit anneau de valuation s'il est l'anneau d'une valuation de son corps des fractions.*

Nous avons démontré la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- *Soient* A *un anneau d'intégrité,* K *son corps des fractions. Pour que* A *soit l'anneau d'une place* π *sur* K , *il faut et il suffit que* A *soit l'anneau d'une valuation* ω *de* K . *L'idéal* $\mathfrak{p}$ *de la place* π *est identique à l'idéal de la valuation* ω ; *les relations* $\omega(x) > 0$, $\pi(x)=0$, $x \in \mathfrak{p}$ *sont équivalentes* ; *les relations* $\omega(x)=0$, " $\pi(x)\neq 0$ et $\pi(x) \neq \infty$ ", $x \in U = A \cap A^{-1}$ *sont équivalentes. En outre, lorsque* A *est un anneau de valuation dans* K , *toute valuation* ω *telle que* A *soit l'anneau de la valuation* ω *est équivalente à la valuation canoniquement associée à* A .

On dira qu'une place π de K et une valuation ω de K ayant le même anneau A sont *associées* l'une à l'autre, et *associées à* A . Par abus de langage, on transportera parfois aux valuations la terminologie relative aux places, et réciproquement ; c'est ainsi que si A' est un sous-anneau de A , l'idéal $A' \cap \mathfrak{p}$ de A', qui est le noyau de la spécialisation finie, restriction de π à A', s'appellera, soit le *noyau de* π *sur* A', soit le *noyau de* ω *sur* A'.

Comme la restriction de ω à A' n'est pas un homomorphisme de A', cet abus de langage ne peut en général causer aucune confusion.

L'image de A par π est encore appelé le corps des valeurs de la place π ou corps résiduel de la valuation ω ; l'image de K^* par ω appelé le groupe des ordres de la valuation ω. Le corps des valeurs d'une place associée à A est isomorphe au corps résiduel $A/\mathfrak{p}$ (§ 1, déf.6) de A, et le corps des valeurs de la place canoniquement associée à A est ce corps résiduel. Le groupe des ordres d'une valuation associée à A est isomorphe au groupe K^*/U, noté additivement.

On notera que si A est un anneau de valuation dans un corps K, tout anneau B tel que $A \subset B \subset K$ est encore un anneau de valuation dans K, car on a $B \cup B^{-1} \supset A \cup A^{-1} = P_1(K)$, c'est-à-dire $B \cup B^{-1} = P_1(K)$ (th.2).

Enfin, la donnée d'une valuation d'un corps K dans un anneau d'intégrité dont K est corps des fractions, détermine entièrement cette valuation. De façon précise :

PROPOSITION 3.- Soient A un anneau d'intégrité, et ω une application de l'ensemble A^* des éléments $\neq 0$ de A dans un groupe additif totalement ordonné Γ, telle que l'on ait $\omega(xy) = \omega(x) + \omega(y)$ pour $x \in A^*$, $y \in A^*$, et $\omega(x+y) \geqslant \mathrm{Min}(\omega(x), \omega(y))$ pour $x \in A^*$, $y \in A^*$ et $x+y \in A^*$. On peut alors, d'une manière et d'une seule, prolonger ω en une valuation du corps des fractions K de A, dont le groupe des ordres est le sous-groupe engendré par $\omega(A^*)$ dans Γ.

En effet, on peut, d'une manière et d'une seule, prolonger ω en un homomorphisme (noté encore ω) du groupe multiplicatif K^* dans Γ (Alg., chap.I, § 2, th.2); reste à vérifier (VA_{II}). Soient donc $x = a/b$,

$y=a'/b'$ des éléments de K^* tels que $x+y=(ab'+ba')/bb' \in K^*$ (a,b,a',b' étant des éléments de A^*) ; on a alors $\omega(x)=\omega(ab')-\omega(bb')$, $\omega(y)=\omega(ba')-\omega(bb')$ et $\omega(x+y)=\omega(ab'+ba')-\omega(bb')$; par hypothèse, $\omega(ab'+ba') \geqslant \mathrm{Min}(\omega(ba'),\omega(ab'))$, d'où le résultat.

Une application ω de A^* dans un groupe totalement ordonné Γ vérifiant les conditions de l'énoncé de la prop.3, sera encore appelée une <u>valuation</u> de l'anneau d'intégrité A .

<u>4.</u> <u>Exemples de valuations</u>.

1) Tout corps K est un anneau de valuation. Une place associée à cet anneau est un isomorphisme de K dans un corps ; en particulier, la place canoniquement associée à K est l'automorphisme identique de K . Une valuation associée à K prend dans K^* la valeur constante 0 . Ces places et ces valuations de K sont dites <u>triviales</u>.

2) Soient p un nombre premier rationnel, f l'homomorphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur le corps fini $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ à p éléments. Le domaine de f étant $P_1(\mathbb{Q})$ (cf. n°1, exemple 1), le prolongement canonique de f est une place π de $\mathbb{Q}$, à savoir la place canoniquement associée à l'anneau local A de f . Si, pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$, on définit $v_p(x)$ comme l'exposant de p dans la décomposition de x en facteurs premiers (<u>Alg</u>. chap.VII, § 1, th.2), on vérifie aussitôt que v_p est une valuation de $\mathbb{Q}$, par application de la prop.3 ; on dit que v_p est la <u>valuation</u> p-<u>adique</u> de $\mathbb{Q}$. On vérifie également de façon immédiate que l'anneau de v_p n'est autre que l'anneau local A de la spécialisation f , et par suite v_p et la place π sont associées.

3) L'exemple 2) se généralise aussitôt au cours des fractions d'un anneau principal quelconque (<u>Alg</u>., chap.VII, §1, th.2). Considérons en particulier le corps K(X) des fractions rationnelles à une

indéterminée X sur un corps K . Si ξ est un élément d'une extension E de K, on a vu (§ 1,n°5,exemple 1) que $r \to r(\xi)$ est une place de K(X), dont l'anneau est l'ensemble A des fractions $r(X)=p(X)/q(X)$, où $p(X) \in K[X]$, $q(X) \in K[X]$ et $q(\xi)\neq 0$. Si ξ est transcendant sur K , on a donc $A=K(X)$, et la place $r \to r(\xi)$ est triviale (exemple 1). Si au contraire ξ est algébrique sur K , soit f son polynôme minimal sur K , et pour tout $r \in K(X)$, soit $v_f(r)$ l'exposant de f dans l'expression de r comme produit de puissances de polynômes irréductibles de $K[X]$. Alors v_f est une valuation de $K(X)$, dont l'anneau est A, et qui est par suite associée à la place $r \to r(\xi)$.

4) Soit $K=L((X))$ le corps des fractions de l'anneau $A=L[[X]]$ des séries formelles à une indéterminée X sur un corps L ; rappelons (Alg.,chap.IV,§ 5,n°7) que K est le corps des séries formelles $u = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k X^k$, où n est un entier rationnel positif ou négatif, et les α_k appartiennent à L ; si $\omega(u)$ est l'ordre de u pour $u \neq 0$ (plus petit entier k tel que $\alpha_k \neq 0$), ω est une valuation de K , dont l'anneau est A et l'idéal est l'idéal principal (X). Si f est la spécialisation qui, à tout $u \in A$, fait correspondre le terme constant de u (§ 1,n°4,exemple 4), le domaine de f est $P_1(K)$, et son prolongement canonique est une place de K dont l'anneau est A .

5) Au contraire, l'anneau $L[[X_1,X_2,\dots,X_n]]$ des séries formelles à n indéterminées sur un corps L n'est pas un anneau de valuation lorsque $n > 1$, car aucun des deux idéaux principaux (X_1),(X_2) n'est contenu dans l'autre (cf. th.2).

6) Considérons le corps $K=L(X,Y)$ des fractions rationnelles à deux indéterminées X,Y sur un corps L . On peut écrire $K=K'(Y)$, avec $K'=L(X)$, et on peut alors appliquer à K les considérations de

de l'exemple 3) ci-dessus : on obtient ainsi des valuations de K dont le groupe des ordres est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et des places dont le corps des valeurs est isomorphe à une extension algèbrique de $K'=L(X)$. On peut procèder de même en échangeant X et Y. Nous allons maintenant définir des valuations et des places d'un autre type ; nous nous bornerons à considèrer des places dont la restriction à l'anneau $L[X,Y]$ est la spécialisation $p(X,Y) \to p(0,0)$, et les valuations associées à de telles places.

a) Dans l'anneau $L[[T]]$ des séries formelles à une indéterminée T , soient x,y deux séries algèbriquement indépendantes, à terme constant nul (si par exemple $L = \mathbb{C}$, on peut prendre $x=T$, $y=e^T-1 \sum_{n=1}^{\infty} T^n/n!$ (cf. Fonction var.réelle, chap.IV, § 2,prop.9)) ; l'application $r \to r(x,y)$ de $L(X,Y)$ dans $L((T))$ est alors un isomorphisme. Si ω désigne la valuation de $L((T))$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, définie dans l'exemple 4) ci-dessus, $r \to \omega(t(x,y))$ est une valuation de $L(X,Y)$, dont le groupe des ordres est $\mathbb{Z}$ (dans le cas particulier où $L = \mathbb{C}$, $x=T$, $y=e^T-1$, $\omega(r(x,y))$ est "l'ordre de $r(x,y)$ le long de la courbe $y=e^x-1$").

b) Soit α un nombre réel irrationnel >0. Un polynôme non nul $p(X,Y) \in L[X,Y]$ étant écrit sous la forme $p(X,Y)= \sum_i \lambda_i X^{m_i} Y^{n_i}$, où tous les couples (m_i, n_i) d'entiers $\geqslant 0$ sont distincts, et les $\lambda_i \in L$ non nuls, posons $v(p)=\operatorname{Min}_i(m_i+\alpha n_i)$; on notera que, pour $i \neq j$, on a $m_i+\alpha n_i \neq m_j+\alpha n_j$, puisque α est irrationnel. Dans ces conditions, on vérifie immédiatement que l'application v satisfait aux conditions de la prop.3 dans $L[X,Y]$, et par suite se prolonge en une valuation de $L(X,Y)$ par la formule $v(q/p)=v(q)-v(p)$ ($v(r)$ est "l'ordre de $r(x,y)$ le long de la courbe $y=x^\alpha$"). Le groupe des ordres de v est le sous-groupe $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$, qui est partout dense dans $\mathbb{R}$ (Top.gén.,chap.V, § 1,prop.1).

c) Ordonnons le groupe produit $Z \times Z$ lexicographiquement ; rappelons (Ens., chap.III, § 2) que, pour cet ordre, la relation $(m,n) < (m',n')$ signifie : "$m < m'$ ou $m=m'$ et $n < n'$" ; $Z \times Z$ est totalement ordonné par cet ordre. Pour tout polynôme non nul $p(X,Y) = \sum_i \lambda_i X^{m_i} Y^{n_i}$, où les couples (m_i, n_i) sont distincts et les coefficients $\lambda_i \in L$ non nuls, posons cette fois $w(p) = \operatorname{Min}_i((m_i, n_i))$, le minimum étant relatif à l'ordre lexicographique. On vérifie de nouveau que w se prolonge en une valuation de $L(X,Y)$; le groupe des ordres de w est ici $Z \times Z$. L'anneau A de w se compose des fractions rationnelles $r=p/q$ telles que l'on ait, soit $p(0,Y)=0$ et $q(0,Y) \neq 0$, soit $p(0,Y)=Y^n p_1(Y)$, $q(0,Y)=Y^n q_1(Y)$, n étant un entier ≥ 0 et p_1, q_1 deux polynomes non nuls, tels que $q_1(0) \neq 0$. Soit $E=L(Y)$, de sorte que $K=E(X)$; soit φ la place de K, à valeurs dans $P_1(E)$, qui à tout $r=u(X) \in E(X)$ (u fraction rationnelle à coefficients dans $E=L(Y)$), fait correspondre $\varphi(r)=u(0) \in P_1(E)$. Soit ensuite ψ la place de E, à valeurs dans $P_1(L)$ qui, à tout $v(Y) \in L(Y)$ fait correspondre $\psi(v)=v(0) \in P_1(L)$. Comme toujours, ψ est prolongé à $P_1(E)$ en posant $\psi(\infty)=\infty$; alors il est immédiat que $\psi \circ \varphi$ est une place de K, à valeurs dans $P_1(L)$, et on vérifie aisément que l'anneau de cette place n'est autre que l'anneau A de la valuation w (cf. n°8).

5. Propriétés élémentaires des valuations.

PROPOSITION 4.- *Soit* ω *une valuation d'un corps* K. *On a* $\omega(\zeta)=0$ *pour toute racine de l'unité* ζ *dans* K, $\omega(-x)=\omega(x)$ *pour tout* $x \in K$; *et, quels que soient les* $x_i \in K$ $(1 \leq i \leq n)$, *on a*

(1) $$\omega\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant \operatorname{Min}_{1\leqslant i\leqslant n} (\omega(x_i)).$$

<u>De plus, dans cette dernière relation, les deux membres sont égaux s'il n'y a qu'un seul indice</u> k <u>tel que</u> $\omega(x_k)=\operatorname{Min}_{1\leqslant i\leqslant n}(\omega(x_i))$.

Comme ω est un homomorphisme de K^* dans un groupe totalement ordonné, la relation $\xi^n=1$ entraîne $\omega(\xi^n)=n.\omega(\xi)=\omega(1)=0$, d'où $\omega(\xi)=0$; par suite $\omega(\xi x)=\omega(x)$ pour tout $x\in K$, et en particulier $\omega(-x)=\omega(x)$. La relation (1) est triviale pour $n=1$, se réduit à l'axiome (VA_{II}) pour $n=2$, et se déduit aussitôt de là par récurrence sur n, pour n quelconque. Enfin, si $\omega(x_k)<\omega(x_i)$ pour tout $i\neq k$, et qu'on pose $y=\sum_{i\neq k} x_i$, on a $\omega(y)\geqslant \operatorname{Min}_{i\neq k}(\omega(x_i))>\omega(x_k)$; on a aussi, dans ces conditions $\omega(x_k)=\omega((x_k+y)+(-y))\geqslant \operatorname{Min}(\omega(x_k+y),\omega(y))$; ces relations entraînent $\omega(x_k)\geqslant\omega(x_k+y)$; d'autre part on a $\omega(x_k+y)\geqslant\operatorname{Min}(\omega(x_k),\omega(y))=\omega(x_k)$, d'où $\omega\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)=\omega(x_k+y)=\omega(x_k)$.

COROLLAIRE 1.- <u>Si</u> $x\in K$, $y\in K$, <u>et</u> $\omega(x)\neq\omega(y)$, <u>on a</u> $\omega(x+y) = \operatorname{Min}(\omega(x),\omega(y))$.

~~COROLLAIRE 1.- Si x K, y K, et ω(x)=ω(y), on a ω(x+y) = Min (ω(x),ω(y)).~~

COROLLAIRE 2.- <u>Si les</u> x_i ($1\leqslant i\leqslant n$, $n>1$) <u>sont des éléments de</u> K <u>tels que</u> $\sum_{i=1}^{n} x_i=0$, <u>il y a au moins deux indices distincts</u> $j;k$ <u>tels que</u> $\omega(x_j)=\omega(x_k)=\operatorname{Min}_{1\leqslant i\leqslant n}(\omega(x_i))$.

Cela est évident si tous les x_i sont nuls. Sinon, on a, d'après (1), $\omega\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)=+\infty > \operatorname{Min}_{1\leqslant i\leqslant n}(\omega(x_i))$, d'où le résultat en vertu de la dernière assertion de la prop.4 .

COROLLAIRE 3.- <u>Un corps fini n'admet pas de valuation non triviale.</u>

En effet, dans un corps fini, tout élément $\neq 0$ est racine de l'unité.

PROPOSITION 5.- Soient A un anneau principal, K son corps des fractions. Si (p) est un idéal maximal de A , l'anneau local $A_{(p)}$ est un anneau de valuation de K , et les seuls anneaux de valuation de K , contenant A , sont K et les $A_{(p)}$. La place de K canoniquement associée à $A_{(p)}$ est le prolongement canonique de l'homomorphisme canonique de A sur A/(p) ; elle est associée à la valuation v_p , telle que $v_p(x)$, pour tout $x \in K$, est l'exposant de p dans une décomposition de x en facteurs premiers (relative à A).

Soit π une place de K dont l'anneau contienne A ; montrons que le domaine de la spécialisation f , restriction de π à A , est toujours égal à $P_1(K)$. En effet, le noyau de f est un idéal premier, donc (0) ou de la forme (p) ; dans le premier cas, l'anneau local de f est K , donc le domaine de f est $P_1(K)$. Dans le second cas, l'anneau local de f est $A_{(p)}$; en outre, la relation $x \in A^*_{(p)}$ équivaut à $v_p(x) \geqslant 0$, donc $x \notin A_{(p)}$ entraîne $x^{-1} \in A_{(p)}$ ce qui prouve que le domaine de f est $P_1(K)$. La place π est donc le prolongement canonique de sa restriction à A et son anneau est $A_{(p)}$. On vérifie aussitôt que v_p est une valuation.

COROLLAIRE 1.- Toute valuation non triviale du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est équivalente à l'une des valuations v_p (dites "p-adiques" ; cf. n°4, exemple 2) associées aux nombres premiers p .

En effet, tout sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contient 1, donc $\mathbb{Z}$; il n'y a qu'à appliquer la prop. 5 à $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

COROLLAIRE 2.- Soit K=L(X) le corps des fractions rationnelles à une indéterminée X sur un corps L . Alors toute valuation de K, non triviale sur K , et triviale sur L , est équivalente à l'une des valuations v_p, v_∞ , définies comme suit :

a) <u>p étant un polynôme irréductible dans</u> $L[X]$, <u>pour toute fraction rationnelle $r \neq 0$ dans</u> K , $v_p(r)$ <u>est l'exposant de p dans la décomposition de</u> r <u>en polynômes irréductibles de</u> $L[X]$;

b) <u>pour</u> $r=u/v$, $u \in L[X]$, $v \in L[X]$, $u \neq 0$, $v \neq 0$, $v_\infty(r) = \deg v - \deg u$.

Soit en effet A un anneau de valuation de K , contenant L et distinct de K . Si $X \in A$, on a $L[X] \subset A$; alors la prop.5, appliquée à $L[X]$ et K , montre que A est l'anneau de l'une des valuations v_p . Sinon, on a $1/X \in A$ (th.2), donc $L[1/X] \subset A$; de plus, comme $X \notin A$, $1/X$ appartient à l'idéal maximal de A , donc au noyau sur $L[1/X]$ de toute place d'anneau A ; ce noyau contient par suite l'idéal $(1/X)$ de $L[1/X]$, donc est identique à $(1/X)$ puisque ce dernier est un idéal maximal . La valuation v associée à A est alors (à une équivalence près) celle où v(r) est l'exposant de $1/X$ dans la décomposition de r en polynômes irréductibles en $1/X$; on vérifie immédiatement que cet exposant n'est autre que $v_\infty(r)$.

6. <u>Idéaux et topologie d'un anneau de valuation.</u>

Afin de décrire les idéaux dans un anneau de valuation nous introduirons la définition suivante :

DÉFINITION 3.- <u>Etant donné un ensemble totalement ordonné</u> X , <u>on appelle coupure de</u> X <u>toute partition</u> (X',X'') <u>de</u> X <u>formée de deux ensembles</u> X',X'' <u>tels que les relations</u> $x \in X'$, $y \in X''$ <u>entraînent</u> $x < y$.

Pour tout élément $a \in X$, les intervalles $]\leftarrow, a]$ et $]a, \rightarrow[$ forment une coupure si a n'est pas le plus grand élément de X ; les intervalles $]\leftarrow, a[$ et $[a, \rightarrow[$ forment une coupure si a n'est pas le plus petit élément de X . Il peut exister des coupures (X',X'') telles que X' n'ait pas de plus grand élément ni X'' de plus petit élément ; par exemple, dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, les traces des deux intervalles $]-\infty, \sqrt{2}]$ et $[\sqrt{2}, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ forment une telle coupure.

PROPOSITION 6.- Soit ω une valuation d'un corps K prenant ses valeurs dans un groupe Γ, A l'anneau de ω. Pour qu'une partie M de K soit un A-module, il faut et il suffit qu'il existe une coupure (Γ', Γ'') de l'ensemble $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ telle que M soit identique à l'ensemble des $x \in K$ pour lesquels $\omega(x) \in \Gamma''$. Pour qu'il existe $c \in A$ tel que $cM \subset A$, il faut et il suffit que l'intersection $\Gamma' \cap \omega(K^*)$ ne soit pas vide ; s'il n'en est pas ainsi, on a $M = K$.

Si M est un sous-A-module de K, et si on pose $\Delta'' = \omega(M)$, $\Delta' = \omega(P_1(K) - M)$, les ensembles Δ', Δ'' forment une coupure dans $\omega(P_1(K))$: en effet, comme $0 \in M$ et $\infty \notin M$, on a toujours $-\infty \in \Delta'$, $+\infty \in \Delta''$; en outre, si $y \in M$ et $x \notin M$, on ne peut avoir $\omega(y) \leqslant \omega(x)$, puisque cette relation entraînerait $x \in yA$ et par suite $x \in M$; on a donc $\omega(x) < \omega(y)$, ce qui prouve notre assertion. Soit alors Γ' l'ensemble des $\gamma \in \overline{\Gamma}$ qui sont majorés par un élément de Δ', et Γ'' le complémentaire de Γ' dans $\overline{\Gamma}$; il est clair que (Γ', Γ'') est une coupure de $\overline{\Gamma}$, que $\Delta' = \Gamma' \cap \omega(P_1(K))$ et $\Delta'' = \Gamma'' \cap \omega(P_1(K))$, et que l'on a $M = \overset{-1}{\omega}(\Gamma'')$. Réciproquement, pour toute coupure (Γ', Γ'') de $\overline{\Gamma}$, si on pose $M = \overset{-1}{\omega}(\Gamma'')$, les relations $x \in M$, $y \in M$ entraînent $\omega(x+y) \geqslant \mathrm{Min}(\omega(x), \omega(y))$, donc, comme $\omega(x) \in \Gamma''$, $\omega(y) \in \Gamma''$, on ne peut avoir $\omega(x+y) \in \Gamma'$, d'où $x+y \in M$. On vérifie de la même façon que, pour $x \in M$ et $z \in A$, on a $zx \in M$. La dernière partie de la proposition est immédiate, car dire que $M \subset c^{-1}A$ signifie que $\omega(x) > -\omega(c)$ pour tout $x \in M$.

On notera que pour que $\mathfrak{M}$ soit un idéal principal fractionnaire, il faut et il suffit que $\omega(K) \cap \Gamma''$ ait un plus petit élément ; A n'est donc un anneau principal que si $\omega(K)$ est un ensemble bien ordonné (cf. n°13).

COROLLAIRE.- L'ensemble des A-modules contenus dans K est totalement ordonné par inclusion.

Il suffit de remarquer que, si (Y',Y'') et (Z',Z'') sont deux coupures d'un ensemble totalement ordonné X , on a nécessairement $Y'' \subset Z''$ ou $Z'' \subset Y''$; dans le cas contraire, $Z' \cap Y''$ et $Y' \cap Z''$ seraient non vides, ce qui est absurde, car si $x \in Z' \cap Y''$ et $y \in Y' \cap Z''$, on devrait avoir à la fois $x < y$ et $y < x$.

Le cor. de la prop.6 montre aussitôt que les A-modules $\neq (0)$ contenus dans K forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie $\mathcal{C}$ compatible avec la structure de groupe additif de K (Top.gén., chap.III, §1,n°2, Exemple) ; si, pour tout $\gamma \in \omega(A^*)$, I_γ désigne l'idéal de A défini par la relation $\omega(x) > \gamma$, les I_γ forment un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathcal{C}$; comme leur intersection est réduite à 0 , $\mathcal{C}$ est séparée. Tout A-module contenu dans K est à la fois ouvert et fermé pour $\mathcal{C}$. Lorsque ω est triviale, $\mathcal{C}$ est la topologie discrète sur K .

Pour tout $\gamma \in \omega(K^*)$, soit I'_γ l'ensemble des $x \in P_1(K)$ tels que $\omega(x) < \gamma$; on définit une topologie séparée $\mathcal{C}'$ sur $P_1(K)$ en prenant pour système fondamental de voisinages de ∞ la famille des ensembles I'_γ , et pour système fondamental de voisinages de tout point $x \in K$ un système fondamental de voisinages pour la topologie $\mathcal{C}$: il suffit de remarquer que si $\omega(x) < \gamma < 0$, on a aussi $\omega(x+y) < \gamma$ pour tout y tel que $\omega(y) > 0$ (prop.4). Nous dirons que $\mathcal{C}'$ est la topologie sur $P_1(K)$ définie par la valuation ω .

PROPOSITION 7. *La topologie $\mathcal{C}$ est compatible avec la structure de corps de K . La fonction $x+y$ est continue en tout point $(a,b) \in P_1(K) \times P_1(K)$ où elle est définie* (c'est-à-dire sauf au point (∞, ∞)) ; *la fonction xy est continue en tout point de $P_1(K) \times P_1(K)$ où elle est définie* (c'est-à-dire sauf au point $(0, \infty)$ *et au point* $(\infty, 0)$. *Enfin, pour toute fraction rationnelle* $r \in K(X)$, *la fonction* $x \to r(x)$ *est continue dans* $P_1(K)$.

La continuité de $x+y$ en tout point $(a,b) \in K \times K$ a déjà été démontrée ; en un point (a, ∞) avec $a \in K$, elle est aussi continue, car si on prend $\omega(x-a) > \omega(a)$ et $\omega(y) < \gamma < \omega(a)$, on a $\omega(x) = \omega((x-a)+a) = \omega(a)$ (prop.4), et $\omega(x+y) = \omega(y) < \gamma$ (prop.4). De même, si $(a,b) \in K \times K$, on a

$$\omega(xy-ab) = \omega((x-a)(y-b)+a(y-b)+b(x-a))$$

par suite si $\gamma > 0$ et si on prend $\omega(x-a) > \mathrm{Max}(\gamma, \gamma-\omega(a))$, $\omega(y-b) > \mathrm{Max}(\gamma, \gamma-\omega-a))$, on a $\omega(xy-ab) > \gamma$, ce qui prouve que xy est continue au point (a,b). Pour voir que xy est continue au point (a, ∞), avec $a \in K$, $a \neq 0$, il suffit de remarquer que si $\omega(x-a) > \omega(a)$, on a $\omega(x) = \omega(a)$, et par suite en prenant $\omega(y) < \gamma - \omega(a)$, on aura $\omega(xy) < \gamma$; la vérification est encore plus facile au point (∞, ∞). Enfin, la continuité de $1/x$ aux points 0 et ∞ résulte de la définition des voisinages de ces points ; pour montrer que cette fonction est continue en un autre point a , on remarque que $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = (a-x)/ax$; pour tout $\gamma > \omega(a)$, si on prend $\omega(x-a) > \gamma$, on a $\omega(x) = \omega(a)$, donc $\omega(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}) > \gamma - 2\omega(a)$.

On notera en particulier que $x \to 1/x$ est un *homéomorphisme* de $P_1(K)$ sur lui-même .

7. Indépendance des valuations.

Nous allons dans ce n° faire l'étude des relations entre plusieurs valuations d'un même corps K. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1.- Soit A l'anneau d'une valuation d'un corps K, et une partie de K stable pour la multiplication et contenant 1. Alors l'anneau engendré par $A \cup R$ est $A' = AR$ (ensemble des produits xy, où $x \in A$ et $y \in R$) ; *en outre A' est un anneau de valuation.*

Nous avons déjà remarqué que tout sous-anneau de K contenant un anneau de valuation est lui-même un anneau de valuation. Tout revient donc à prouver que AR est un anneau, ou encore que, si a, b sont des éléments de A, r, s des éléments de R non tous deux nuls, on a $ar+bs \in AR$. Or, on a, soit $r/s \in A$, soit $s/r \in A$; si par exemple $r/s \in A$, on a $ar+bs=(a(r/s)+b)s \in AR$, d'où le lemme.

PROPOSITION 8.- *Soient ω_1, ω_2 deux valuations non triviales d'un corps K, et A_1, A_2 leurs anneaux respectifs. Alors l'anneau engendré par $A_1 \cup A_2$ est un anneau de valuation égal à $A_1 A_2$; en outre, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $A_1 A_2 = K$;

b) *quels que soient* $\gamma_1 \in \omega_1(K^*)$, $\gamma_2 \in \omega_2(K^*)$, *il existe* $x \in K^*$ *tel que* $\omega_1(x) \geqslant \gamma_1$, $\omega_2(x) \leqslant \gamma_2$;

c) *si $P_1(K_i)$ désigne l'espace topologique obtenu en munissant $P_1(K)$ de la topologie définie par ω_i* $(i=1,2)$ (cf. n°6), *et si U_i* $(i=1,2)$ *est un ensemble ouvert non vide dans $P_1(K_i)$, l'intersection $U_1 \cap U_2$ n'est pas vide* ;

d) *dans l'espace produit $P_1(K_1) \times P_1(K_2)$, la diagonale est partout dense.*

La définition de la topologie produit (Top. gén., chap. I, § 8) montre que c) et d) sont équivalentes ; d'autre part c) entraîne b), qui en est un cas particulier. La propriété b) entraîne a) ; en effet, si $z \in K^*$ et si, dans b), on prend $\gamma_1=0$ et $\gamma_2=\omega_2(z)$, on aura $x \in A_1$ et $z/x \in A_2$, donc $z=x(z/x) \in A_1 A_2$. Réciproquement, a) entraîne b) ; soit en effet $\gamma_1=\omega_1(y_1)$, $\gamma_2=\omega_2(y_2)$; la propriété a) entraîne qu'il existe $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$ tels que $y_2/y_1=a_1a_2$; en prenant $x=y_1a_1=y_2/a_2$, on a $\omega_1(x) \geqslant \gamma_1$ et $\omega_2(x) \leqslant \gamma_2$. Enfin, puisque par hypothèse ω_1 et ω_2 sont non triviales, et par suite que les groupes $\omega_1(K^*)$ et $\omega_2(K^*)$ ne sont pas réduits à 0, donc n'ont ni plus grand ni plus petit élément, b) entraîne que tout voisinage de 0 dans $P_1(K_1)$ rencontre tout voisinage de ∞ dans $P_1(K_2)$. Mais si a et b sont deux points distincts de $P_1(K)$, l'application $x \to (x-a)/(x-b)$ (si a et b sont finis), ou l'application $x \to x-a$ (si $b=\infty$) ou l'application $x \to \frac{1}{x-b}$ (si $a=\infty$) est un homéomorphisme de $P_1(K_i)$ sur lui-même (n°6) qui applique a sur 0 et b sur ∞. Par suite, un voisinage quelconque de a dans $P_1(K_1)$ rencontre un voisinage quelconque de b dans $P_1(K_2)$, ce qui démontre c).

DÉFINITION 4.- <u>On dit que deux valuations non triviales</u> ω_1, ω_2 <u>d'un corps</u> K, <u>d'anneaux respectifs</u> A_1, A_2, <u>sont étrangères si</u> $A_1A_2=K$.

PROPOSITION 9.- <u>Soient</u> ω_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ <u>des valuations non triviales d'un corps</u> K, <u>telles que</u> ω_o <u>et</u> ω_j <u>soient étrangères pour</u> $1 \leqslant j \leqslant n$. <u>Soient</u> a, b <u>deux éléments distincts de</u> $P_1(K)$; <u>soit</u> V_o <u>un voisinage de</u> a <u>pour la topologie définie par</u> ω_o, <u>et, pour</u> $1 \leqslant j \leqslant n$, <u>soit</u> V_j <u>un voisinage de</u> b <u>pour la topologie définie par</u> ω_j. <u>Alors l'intersection des</u> n+1 <u>ensembles</u> $V_o, V_1, \dots, V_n$ <u>n'est pas vide</u>.

Comme dans la démonstration de la prop.8, on peut toujours, au moyen d'une transformation de la forme $x \to (x-a)/(x-b)$, ou $x \to x-a$ ou $x \to 1/(x-b)$, se ramener au cas où $a=0$, $b=\infty$. Le résultat étant vrai pour $n=1$ en vertu de la prop.8, nous procèderons par récurrence sur n. En remplaçant V_o et les V_j par des voisinages plus petits, on peut supposer qu'ils soient définis respectivement par les relations $\omega_o(x) > \gamma_o$, $\omega_j(x) < -\gamma_j$, avec $\gamma_i \in \omega_i(K^*)$ et $\gamma_i > 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ (les ω_i n'étant pas triviales). D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $y \in K^*$ tel que $\omega_o(y) > \gamma_o$ et $\omega_h(y) < -\gamma_h$ pour $1 \leqslant h \leqslant n-1$; de même, il existe $z \in K^*$ tel que $\omega_o(z) > \gamma_o$ et $\omega_k(z) < -\gamma_k$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$. Pour définir un élément x appartenant à tous les V_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, on distinguera quatre cas :

a) Si $\omega_n(y) \leqslant 0$, $\omega_1(z) \leqslant 0$, on prendra $x=yz$.

b) Si $\omega_n(y) \leqslant 0$ et $\omega_1(z) > 0$, on prendra $x=y(1+z)$. En effet, on a alors, pour $2 \leqslant k \leqslant n$, $\omega_k(1+z)=\omega_k(z)$ (prop.4) et $\omega_k(y) \leqslant 0$, donc $\omega_k(x) \leqslant \omega_k(z)$, et $\omega_1(1+z)=\omega_o(1+z)=0$, donc $\omega_1(x)=\omega_1(y)$ et $\omega_o(x)=\omega_o(y)$.

c) De même, si $\omega_n(y) > 0$, $\omega_1(z) \leqslant 0$, on prendra $x=(1+y)z$.

d) Enfin, si $\omega_n(y) > 0$ et $\omega_1(z) > 0$, on prendra $x=(1+y)(1+z)-1$.

En effet, pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, on a alors (prop.4) $\omega_k(1+y)=\omega_k(y) < 0$ $\omega_k(1+z)=\omega_k(z) < 0$, d'où $\omega_k(x)=\omega_k(yz)=\omega_k(y)+\omega_k(z) < -\gamma_k$. D'autre part, $\omega_1(1+y)=\omega_1(y)\ \ 0$, $\omega_1(1+z)=0$, d'où $\omega_1(x)=\omega_1(y) < -\gamma_1$; de même $\omega_n(1+y)=0$, $\omega_n(1+z)=\omega_n(z) < 0$, d'où $\omega_n(x)=\omega_n(z) < -\gamma_n$; enfin comme $x=yz+y+z$, et que $\omega_o(yz)=\omega_o(y)+\omega_o(z) > \gamma_o$, on a $\omega_o(x) > \gamma_o$.

THÉORÈME 3 (théorème d'approximation).- <u>Soient</u> $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ <u>des valuations non triviales, deux à deux étrangères, d'un corps</u> K.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit U_i un ensemble ouvert non vide dans $P_1(K)$ pour la topologie définie par ω_i ; alors l'intersection des U_i n'est pas vide.

Comme les ω_i sont non triviales, chaque U_i contient un point $a_i \neq \infty$, et on est ramené à démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 10.- *Avec les notations du th. 3, soient a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ des éléments arbitraires de K, et, pour chaque indice i, soit γ_i un élément arbitraire de $\omega_i(K^*)$. Alors, il existe $x \in K$ tel que $\omega_i(x-a_i) > \gamma_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Prenons $x = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i$, d'où $x - a_i = (t_i - 1)a_i + \sum_{j \neq i} t_j a_j$; x satisfera aux conditions imposées si l'on a $\omega_i(t_i - 1) > \gamma_i - \omega_i(a_i)$ et $\omega_i(t_j) > \gamma_i - \omega_j(a_j)$ quels que soient les indices i, j. Autrement dit, t_i est assujetti à être dans un voisinage donné de 1 pour la topologie définie par ω_i, et dans un voisinage donné de 0 pour chacune des topologies définies par les ω_j avec $j \neq i$. Comme il existe de tels éléments t_i d'après la prop. 9, cela démontre le théorème.

En désignant par $P_1(K_i)$ l'ensemble $P_1(K)$ muni de la topologie définie par ω_i, le th. 3 s'énonce encore de la façon suivante : *si les valuations ω_i ne sont pas triviales et si, pour tout couple d'indices distincts i, j, la diagonale du produit $P_1(K_i) \times P_1(K_j)$ est partout dense, alors la diagonale du produit $\prod_{i=1}^{n} P_1(K_i)$ est partout dense.*

8. *Places et valuations composées.*

PROPOSITION 11.- *Soient K et L deux corps, φ une place de $P_1(K)$, appliquant $P_1(K)$ sur $P_1(L)$, et soit ψ une place de $P_1(L)$; alors $\varphi' = \psi \circ \varphi$ est une place de $P_1(K)$, et si A et A' sont les anneaux des places φ et φ', on a $A' \subset A$. Réciproquement, soient A et A' deux anneaux de valuation de K, tels que $A' \subset A$; si $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont les idéaux maximaux*

 54

de A et A', on a $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$; en outre, si φ est une place associée à l'anneau A, φ' une place associée à l'anneau A', et si on pose $\varphi(P_1(K))=P_1(L)$, il existe une place ψ de $P_1(L)$ telle que $\varphi'=\psi\circ\varphi$.

La première assertion résulte de la transitivité des spécialisations (§1, prop. 1) et du fait que, si B est l'anneau de la place ψ et $\psi(P_1(L))=P_1(M)$, on a $A'=\overset{-1}{\varphi'}(M)=\overset{-1}{\varphi}(\overset{-1}{\psi}(M)) = \overset{-1}{\varphi}(B) \subset \overset{-1}{\varphi}(L)=A$.

Si maintenant A et A' sont deux anneaux de valuation de K tels que $A'\subset A$, il résulte des définitions $\mathfrak{p} = P_1(K)-A^{-1}$, $\mathfrak{p}' = P_1(K)-A'^{-1}$, que l'on a $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$. La restriction de φ' à A' est un homomorphisme dont le noyau $\mathfrak{p}'$ contient le noyau $\mathfrak{p}$ de la restriction de φ à A'; donc, par passage au quotient, on voit qu'il existe un homomorphisme ψ_1 de $B=\varphi(A')$ sur $\varphi'(A')$, tel que l'on ait, dans A', $\varphi'=\psi_1\circ\varphi$. D'autre part, si $y\in P_1(L)-B$, on a $y=\varphi(x)$, avec $x\in P_1(K)-A'$, donc $x^{-1}\in\mathfrak{p}'$, et par suite $y^{-1}=\varphi(x^{-1})$ appartient au noyau $\mathfrak{q}=\varphi(\mathfrak{p}')$ de ψ_1. Cela montre que le domaine de la spécialisation finie ψ_1 est $P_1(L)$, et que le prolongement canonique ψ de ψ_1 à $P_1(L)$ est une place de $P_1(L)$, telle que l'on ait $\varphi'=\psi\circ\varphi$.

Pour examiner les relations entre les valuations associées à deux anneaux de valuation A, A' de K tels que $A'\subset A$, nous poserons une définition et démontrerons un lemme sur les groupes ordonnés :

DÉFINITION 5.- On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe ordonné G est isolé si les relations, $0\leqslant y\leqslant x$, $x\in H$ entraînent $y\in H$.

Il revient au même de dire quelles relations $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ et $x+y\in H$ entraînent $x\in H$ et $y\in H$.

Lemme 2.- Soient G un groupe ordonné, f un homomorphisme de G sur un groupe G', H le noyau de f; soient P l'ensemble des éléments positifs de G, et $P'=f(P)$ son image par f. Pour que P' soit l'ensemble des

des éléments positifs d'un ordre sur G' compatible avec sa structure de groupe, il faut et il suffit que H soit un sous-groupe isolé de G.

On a en tout cas $P'+P' \subset P'$; nous devons donc montrer que la relation $P' \cap (-P') = \{0\}$ équivaut à "H est isolé" (*Alg.*, chap. VI, § 1, prop. 3). Mais $P' \cap (-P') = \{0\}$ signifie que les relations $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $f(x)=f(-y)$ entraînent $f(x)=0$, ou encore que les relations $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x+y \in H$ entraînent $x \in H$; mais cela signifie que H est isolé.

PROPOSITION 12.- 1° *Soient* A *un anneau de valuation d'un corps* K, φ *une place et* ω *une valuation associées à* A, *et soient* $\varphi(P_1(K)) = P_1(L)$, *et* $\omega(K^*) = \Gamma$. *Pour toute valuation* η *de* L, *d'anneau* B, *il existe une valuation et une seule* ω' *de* K, *d'anneau* $A' = \overset{-1}{\varphi}(B)$ *contenu dans* A, *telle que* $\omega'(x) = \eta(\varphi(x))$ *dans l'ensemble* U *des éléments inversibles de* A ; *en outre, si* $\Delta = \eta(L^*)$ *et* $\Gamma' = \omega'(K^*)$, Δ *est un sous-groupe isolé de* Γ', *et il y a un homomorphisme* θ *de* Γ' *sur* Γ, *de noyau* Δ, *appliquant l'ensemble des éléments positifs de* Γ' *sur l'ensemble des éléments positifs de* Γ, *et tel que* $\omega = \theta \circ \omega'$.

2° *Les hypothèses sur* A, φ *et* ω *étant les mêmes que dans* 1°, *pour tout anneau de valuation* $A' \subset A$ *de* K, *et toute valuation* ω' *de* K *associée à* A', *il existe une valuation* η *de* L, *d'anneau* $B = \varphi(A')$, *telle que* $\omega'(x) = \eta(\varphi(x))$ *dans l'ensemble* U *des éléments inversibles de* A.

3° *Soient* A' *un anneau de valuation de* K, ω' *une valuation associée à* A', *de groupe des ordres* $\Gamma' = \omega'(K^*)$. *Pour tout sous-groupe isolé* Δ *de* Γ', *l'application* $\omega = \theta \circ \omega'$, *où* θ *est l'homomorphisme canonique de* Γ' *sur le groupe ordonné* $\Gamma = \Gamma'/\Delta$ *est une valuation de* K, *dont l'anneau contient* A'.

1° Soit ψ une place associée à la valuation η de L , et $\varphi'=\psi\circ\varphi$; on a vu (prop.11) que φ' est une place de K , d'anneau $A'=\overset{-1}{\varphi}(D)$. Soit ω'_1 une valuation associée à la place φ' ; son noyau sur K^* est l'ensemble $U'=A'-\mathfrak{p}'$ des éléments inversibles de A' ; comme $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}'$, on a $\varphi(U')=\varphi(A')-\varphi(\mathfrak{p}')=B-\mathfrak{q}$, où $\mathfrak{q}$ est l'idéal maximal $\varphi(\mathfrak{p}')$ de B . Mais $V=B-\mathfrak{q}$ est le noyau de la valuation η , d'où résulte que, dans $U=A-\mathfrak{p}\supset U'$, les homomorphismes ω'_1 et $\eta\circ\varphi$ ont même noyau $U'=\overset{-1}{\varphi}(V)$. On en conclut qu'il existe une valuation ω' équivalente à ω'_1 , et coïncidant sur U avec $\eta\circ\varphi$.

Remarquons maintenant que ω et ω' sont des homomorphismes de K^* sur Γ et Γ', de noyaux respectifs U et U' ; comme $U'\subset U$, il existe un homomorphisme θ de Γ' sur Γ tel que $\omega=\theta\circ\omega'$. Soient P et P' les ensembles des éléments positifs de Γ et Γ' ; nous allons voir que $\theta(P')=P$, d'où résultera que le noyau Δ de θ est un sous-groupe isolé de Γ'. En premier lieu, comme $A'\subset A$, la relation $\omega'(x)\geqslant 0$ implique $\omega(x)=\theta(\omega'(x))\geqslant 0$, donc $P\supset\theta(P')$. Inversement, montrons que $P\subset\theta(P')$; comme $\mathfrak{p}\subset A'\subset A$, on a $A=A'\cup U$; si $x\in A'$, on a $\omega(x)=\theta(\omega'(x))$ et $\omega'(x)\geqslant 0$; et si $x\in U$, $\omega(x)=0$, donc pour tout $x\in A$ il existe $x'\in A'$ tel que $\omega(x)=\theta(\omega'(x'))$, ce qui prouve notre assertion.

Enfin, si $x\in K^*$ est tel que $\omega'(x)\in\Delta$, cela signifie que $\omega(x)=0$, donc que $x\in U$; mais comme $\varphi(U)=L^*$ par définition d'une place, on a $\omega'(U)=\eta(\varphi(U))=\eta(L^*)$, ce qui achève de démontrer 1° .

2° Il suffit d'appliquer la prop.11 : A' est l'anneau d'une place $\varphi'=\psi\circ\varphi$, et d'après 1°, pour toute valuation η_1 associée à $B=\varphi(A')$, il y a une valuation ω'_1 équivalente à ω' et telle $\omega'_1=\eta_1\circ\varphi$ dans U , ce qui établit 2° .

3° Si P' est l'ensemble des éléments positifs de Γ', $P = \theta(P')$ est l'ensemble des éléments positifs pour un ordre sur Γ (lemme 2) et comme $P' \cup (-P') = \Gamma'$, on a aussi $P \cup (-P) = \Gamma$, ce qui prouve que Γ est totalement ordonné. Il est clair que $\omega = \theta \circ \omega'$ satisfait à (VA_I), puisque θ est un homomorphisme ; d'autre part, θ étant croissante, on a $\theta(\mathrm{Min}(\omega(x),\omega'(y))=\mathrm{Min}(\theta(\omega'(x)),\ \theta(\omega'(y)))$, ce qui démontre (VA_{II}) ; ω est donc une valuation sur K, dont l'anneau contient A' puisque θ est croissante.

COROLLAIRE.- Soient ω et ω' deux valuations non triviales sur un corps K, et soient A et A' leurs anneaux ; si $A' \subset A$, les topologies définies sur $P_1(K)$ par ω et ω' sont identiques.

En effet, pour la topologie définie par ω, un système fondamental de voisinages de 0 est formé par les ensembles xA, où x parcourt K^* ; un autre système fondamental de voisinages de 0 est formé par les $x\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ idéal maximal de A), où x parcourt K^*. La conclusion résulte alors de ce que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subset A' \subset A$.

Exemple.- La place $\varphi'=\psi\circ\varphi$ du corps $L(X,Y)$, définie dans l'exemple 6c) du n°4, est obtenue par le procédé de la prop.11 ; le groupe Γ' des valeurs d'une valuation associée à φ' est le produit $Z \times Z$ ordonné lexicographiquement, et le sous-groupe Δ est ici le sous-groupe $\{0\} \times Z$ de ce produit.

9. Prolongement des valuations.

THÉORÈME 4.- Soient A un sous-anneau d'un corps K, et $\mathfrak{a}$ un idéal de A autre que A. Il existe une place π et une valuation ω de K dont l'anneau contienne A et dont le noyau contienne $\mathfrak{a}$; en outre, si $\mathfrak{a}$ est premier dans A, il existe une place π et une valuation ω de K dont l'anneau contienne A et dont le noyau sur A soit $\mathfrak{a}$.

Si $\mathfrak{a}$ est premier, posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$; sinon, prenons pour $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{a}$ (Alg., chap. I, § 8, th. 2) ; Il suffit d'appliquer le th. de prolongement des spécialisations (§ 1, n° 5, th. 1) à l'homomorphisme canonique de A sur $A/\mathfrak{p}$; on obtient ainsi une place π de K répondant à la question, et on prend pour ω une valuation associée à π.

COROLLAIRE.- *Soit B un sous-anneau d'un corps K ; soient $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ deux idéaux premiers de B tels que $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}$. Alors, pour tout anneau de valuation A de K, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$, tel que $A \supset B$ et $\mathfrak{q} = B \cap \mathfrak{p}$, il existe un anneau de valuation A' de K, d'idéal maximal $\mathfrak{p}'$, tel que* $\cancel{\mathfrak{p}}$, $A \supset A' \supset B$ *et que* $\mathfrak{q}' = B \cap \mathfrak{p}'$.

En effet, soit φ une place d'anneau A, appliquant A sur un corps L ; alors $\varphi(B)$ est un sous-anneau de L et $\varphi(\mathfrak{q}')$ est un idéal premier de $\varphi(B)$, puisque $\varphi(B)/\varphi(\mathfrak{q}')$ est isomorphe à $B/\mathfrak{q}'$ (Alg., chap. I, § 8, th. 4). Appliquons à $\varphi(B)$ et $\varphi(\mathfrak{q}')$ le th. 4 : si ψ est une place de L dont l'anneau contienne $\varphi(B)$ et dont le noyau sur $\varphi(B)$ soit $\varphi(\mathfrak{q}')$, $\psi \circ \varphi$ sera une place de K dont l'anneau A' contient $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(B)) \supset B$ et est contenu dans $A = \overset{-1}{\varphi}(L)$, et dont le noyau sur B est $\mathfrak{q}'$.

THÉORÈME 5.- *Si L est une extension d'un corps K, toute valuation de K peut être prolongée en une valuation de L.*

En effet, soit ω une valuation de K, φ une place associée à ω, et soit $\varphi(P_1(K)) = P_1(K')$. Considérant φ comme une place à valeurs dans une extension algébriquement close K'_0 de K', on peut prolonger φ en une place φ' de L à valeurs dans $P_1(K'_0)$ (§ 1, n° 5, th. 1). Soit ω' une valuation associée à φ' ; la restriction de ω' à K est équivalente à ω, et par suite, en identifiant $\omega(K^*)$ à un sous-groupe de $\omega'(L^*)$, on peut considérer ω' comme un prolongement de ω.

On notera qu'en général le groupe des ordres $\omega'(L^*)$ est *distinct*

10. Valuations dans les extensions de dimension algèbrique finie.

DÉFINITION 6.- *On dit qu'un corps K est de rang fini s'il est de dimension algèbrique finie* n (*Alg.*, chap. V, § 5) *sur le corps premier contenu dans* K ; *on appelle alors rang de* K *le nombre* $n+1$ *si* K *est de caractéristique* 0, *le nombre* n *dans le cas contraire.*

Nous démontrerons simultanément les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 6.- *Soit* K *une extension d'un corps* L , *de dimension algèbrique finie* n *sur* L ; *soit* φ *une place sur* K , *triviale sur* L , *et soit* E *le corps des valeurs de* φ . *Alors la dimension algèbrique de* E *sur le corps* $\varphi(L)$ *est* $\leqslant n$; *et elle est* $\leqslant n-1$ *si* φ *n'est pas triviale sur* K .

THÉORÈME 7.- *Soit* K *un corps de rang fini* n ; *soient* φ *une place de* K *et* E *le corps des valeurs de* φ . *Alors le rang de* E *est* $\leqslant n$, *et est* $\leqslant n-1$ *si* φ *n'est pas triviale* ; *de plus, ou bien* K *et* E *ont même caractéristique, ou bien* K *est de caractéristique* 0 *et* E *de caractéristique* $\neq 0$.

Dans le cas du th. 7, l'anneau de φ contient l'anneau engendré par 1 , donc $\mathbb{Z}$ si K est de caractéristique 0, et le corps premier P de K dans le cas contraire. Dans le second cas, φ est triviale sur P (cor. 3 de la prop. 4), K et E ont même caractéristique et le th. 7 se réduit à un cas particulier du th. 6. Il en est de même dans le premier cas, si le noyau de φ sur $\mathbb{Z}$ est (0), car alors la restriction de φ à $\mathbb{Z}$ est un isomorphisme, et il en est donc de même de sa restriction à $\mathbb{Q}$ (*Alg.*, chap. I, § 9, prop. 4). Enfin si K est de caractéristique 0 et si le noyau de φ sur $\mathbb{Z}$ n'est pas (0), c'est un idéal premier (p), et l'image $\varphi(\mathbb{Z})$ dans E est le corps premier $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ à p éléments .

On voit donc que nous n'avons qu'à démontrer le th.6 et à traiter le cas d'"inégale caractéristique" du th.7 .

Soient $y_i=\varphi(x_i)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ des éléments de E algèbriquement indépendants sur le corps $\varphi(L)$ (resp. sur $\mathbb{F}_p=\varphi(\mathbb{Z})$). Alors la restriction de φ à l'ensemble $L\cup\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ (resp. $\mathbb{Z}\cup\{x_1,\dots,x_m\}$) est une spécialisation finie. Si les x_i n'étaient pas algèbriquement indépendants sur L (resp. sur $\mathbb{Q}$), ils satisferaient à une relation $g(x_1,\dots,x_n)=0$, où g est un polynôme $\neq 0$ à coefficients dans L (resp. un polynôme $\neq 0$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de pgcd égal à 1, et par suite non tous multiples de p). D'après la définition d'une spécialisation, cela entraînerait une relation analogue, à coefficients non tous nuls dans $\varphi(L)$ (resp. dans $\mathbb{F}_p$) entre les y_i, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc les x_i sont algèbriquement indépendants sur L (resp. sur $\mathbb{Q}$), et par suite $m\leqslant n$. Ceci achève de démontrer le th.7 lorsque K et E n'ont pas même caractéristique, vu la définition du rang de K (déf.6).

Reste à prouver que, dans les hypothèses du th.6, la relation $m=n$ entraîne que φ est triviale sur K . Remarquons que, d'après ce qui précède, la restriction de φ à $L[x_1,\dots,x_n]$ est un isomorphisme, et il en est donc de même de la restriction de φ au sous-corps $L(x_1,\dots,x_m)$ de K (Alg.,chap.I, § 9,prop.4). Si $m=n$, l'anneau A de la spécialisation φ contient donc le sous-corps $K_o=L(x_1,\dots,x_n)$; mais comme les x_i sont algèbriquement indépendants sur L , K et K_o ont même dimension algèbrique sur L, et par suite K est une extension algèbrique de K_o (Alg.,chap.V, § 5,th.4). Mais comme $K_o\subset A\subset K$, A est un corps (Alg.,chap.V, § 3,prop.3). D'ailleurs, comme $P_1(K)=A\cup A^{-1}=P_1(A)$, on a nécessairement $A=K$, autrement dit, φ est triviale sur K .

COROLLAIRE 1.- *Si* K *est une extension algèbriquement d'un corps* L , *toute place de* K , *triviale sur* L , *l'est aussi sur* K .

Pour formuler commodément le corollaire suivant, nous conviendrons, si K est une extension d'un corps L, et X une partie de $P_1(K)$, de désigner par L(X) le sous-corps engendré par L et l'ensemble des éléments de X *autres que* ∞ .

COROLLAIRE 2.- *Soient* K *une extension d'un corps* L , *et* X *une partie de* $P_1(K)$ *telle que* L(X) *soit de dimension algèbrique finie* n *sur* L . *Soit* f *une spécialisation de* $L \cup X$ *dans* $P_1(E)$, *dont la restriction à* L *est un isomorphisme de* L *sur un sous-corps* L' *de* E . *Alors la dimension algèbrique de* L'(f(X)) *sur* L' *est* $\leqslant n$; *et si cette dimension est* n , *la spécialisation* f *est générique*.

Soit en effet Ω une clôture algèbrique de L'(f(X)) ; d'après le th. de prolongement des spécialisations (§ 1, n°5, th.1), f peut être prolongée en une place φ de L(X) à valeurs dans Ω ; le corps des valeurs de φ contient L'(f(X)) et est contenu dans Ω , donc a même dimension algèbrique sur L' que L'(f(X)). La conclusion s'ensuit en appliquant à φ le th.6 .

11. Suites de Krull.

Soit K un corps, et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite finie décroissante d'anneaux de valuation de K, de sorte que $K \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_m$. En vertu de la prop.11 (n°8), la donnée d'une telle suite équivaut à la donnée d'une suite de corps $K_0=K, K_1, K_2, \dots, K_m$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, une place φ_i de K_{i-1} dont le corps des valeurs soit K_i. En effet, de telles places étant données, on définira par récurrence des places θ_i de K telles que $\theta_1=\varphi_1$, $\theta_{i+1} = \varphi_{i+1} \circ \theta_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$, et on on prendra pour A_i l'anneau de $\mathfrak{O}_i$. Réciproquement, les A_i étant donnés et les $\mathfrak{O}_i$ étant des places de K , d'anneaux respectifs A_i $(1\leqslant i\leqslant m)$, les formules précédentes définissent, en vertu de la prop.11, des places φ_i ayant les propriétés indiquées. Une suite décroissante $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ d'anneaux de valuation de K est dite <u>suite de Krull</u> si elle est strictement décroissante et si $K\neq A_1$; on dit qu'elle est <u>de longueur m</u> ; on appelle aussi <u>suite de Krull</u> une suite (φ_i) de places telle que φ_i soit une place d'un corps K_{i-1}, dont le corps des valeurs est K_i et qui soit non triviale sur K_{i-1}, avec en outre la condition $K_0=K$; il résulte de ce qui précède qu'à toute suite de Krull formée de places correspond une suite de Krull et une seule formée d'anneaux de valuation, et inversement que toute suite de Krull formée d'anneaux de valuation correspond à une suite de Krull formée de places. Si tous les anneaux A_i contiennent un sous-corps L de K, on peut supposer que chacun des corps K_i contient L , et que φ_i est triviale sur L pour $1\leqslant i\leqslant m$.

PROPOSITION 13.- <u>Soit</u> K <u>un corps de rang fini</u> n (resp. <u>une extension d'un corps</u> L , <u>de dimension algèbrique finie</u> n).

1° <u>Toute suite de Krull d'anneaux de valuation de</u> K (resp. <u>d'anneaux de valuation contenant</u> L) <u>est de longueur</u> $\leqslant n$.

2° <u>Quelle que soit la famille finie</u> $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ <u>d'éléments de</u> K , <u>il existe une suite de Krull</u> $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ <u>d'anneaux de valuation de</u> K (resp. <u>d'anneaux de valuation contenant</u> L) <u>de longueur</u> n <u>et telle que</u> $x_k\in A_n$ <u>pour</u> $1\leqslant k\leqslant r$.

1° Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une suite de Krull formée d'anneaux de valuation de K (resp. d'anneaux de valuation contenant L) ; soient K_i et φ_i les corps et places associés à cette suite comme il a été dit plus haut. D'après le th.7 (resp. le th.6), les rangs des corps K_i (resp. les dimensions algèbriques des corps K_i sur L) forment pour $0\leqslant i\leqslant m$, une suite strictement décroissante d'entiers $\geqslant 0$ dont le premier est n ; on a donc $m \leqslant n$.

2° Raisonnons par récurrence sur n ; supposons $n \geqslant 2$ et soit K' un sous-corps de K (resp. un sous-corps de K contenant L) tel que K soit de dimension 1 sur K'. L'hypothèse de récurrence (appliquée pour $n=1$) montre qu'il existe une place (resp. une place triviale sur L) φ_1 de K dont le corps des valeurs K_1 est une extension algèbrique de K', donc un corps de rang $n-1$ (resp. une extension de L de dimension $n-1$), et que l'anneau de φ_1 contient les x_k ($1 \leqslant k \leqslant r$). Comme les $\varphi_1(x_k)$ sont des éléments de K_1 l'hypothèse de récurrence, appliquée à K_1, démontre l'existence de la suite $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ayant les propriétés voulues.

On est donc ramené à démontrer la deuxième partie de la prop.13 lorsque $n=1$. Il suffit de prouver qu'il existe une place (resp. une place triviale sur L) φ de K, dont le corps des valeurs K_1 est algèbrique sur son corps premier (resp. sur L), et telle que les $\varphi(x_k)$ soient $\neq \infty$. Nous envisagerons successivement les divers cas possibles :

a) K est de rang 1 et de caractéristique 0, donc une extension algèbrique de $\mathbb{Q}$; pour tout nombre premier rationnel p, désignons par f_p l'homomorphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/(p)=\mathbb{F}_p$, et soit $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algèbrique de $\mathbb{F}_p$. Chacun des x_k est racine d'un polynome de la forme $a_{ko}x^{r_k} + \dots + a_{k,r_k} = 0$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, où $r_k \geqslant 1$ et $a_{ko} \neq 0$. Il existe donc un nombre premier p qui ne divise aucun des a_{ko} ; pour un tel p , toute place à valeurs dans $P_1(\overline{\mathbb{F}}_p)$, prolongeant f_p (§ 1, n°5, th.1) répondra à la question, en vertu de la définition d'une spécialisation.

b) K est une extension de L , de dimension algèbrique 1 . Soit $\overline{L}$ une clôture algèbrique de L ; on sait (<u>Alg.</u>, chap.V, § 4, n°1) que $\overline{L}$ est un corps infini. On peut toujours supposer que l'un au moins des x_k est transcendant sur L, sans quoi on considèrerait l'ensemble formé des x_k et d'un élément de K transcendant sur L (il en existe par hypothèse). Supposons par exemple que $x_1,\dots,x_q$ sont transcendants sur L , $x_{q+1},\dots,x_r$ algèbriques sur L . Par définition d'une spécialisation, pour toute place φ prolongeant l'automorphisme identique de L , $\varphi(x_k)\neq\infty$ pour $k\geqslant q+1$. D'autre part, pour tout indice k tel que $k\leqslant q$, et pour toute place φ de K, triviale sur L et à valeurs dans $\overline{L}$, telle que $\varphi(x_k)=\infty$, il n'existe qu'un nombre <u>fini</u> de valeurs de $\varphi(x_1)$ dans $\overline{L}$, puisque φ est bien déterminée dans $L(x_k)$ et que x_1 est algèbrique sur $L(x_k)$. Comme $\overline{L}$ est infini, tout revient donc à prouver que, pour tout $\xi\in\overline{L}$, il existe une place φ de K , triviale sur L et à valeurs dans $\overline{L}$, telle que $\varphi(x_1)=\xi$. Or, l'application $p(x_1)\rightarrow p(\xi)$ est un homomorphisme de l'anneau $L[x_1]$ dans $\overline{L}$, et toute place de K à valeurs dans $\overline{L}$ qui prolonge cet homomorphisme (§ 1,n°5,th.1) répond à la question.

c) K est de rang 1 et de caractéristique $\neq 0$; il est alors par définition extension de son sous-corps premier L , de dimension algèbrique 1 , et on est donc dans le cas b) .

COROLLAIRE 1.- <u>Soient</u> L <u>un corps</u>, E <u>un surcorps de</u> L , x_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ ~~un surcorps de L~~ , ~~x_k $(1\leqslant k\leqslant n)$~~ <u>un nombre fini d'éléments de</u> E , u <u>un polynôme</u> $\neq 0$ <u>de</u> $L[X_1,X_2,\dots,X_n]$ <u>tel que</u> $u(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq 0$. <u>Si</u> $\overline{L}$ <u>est une clôture algèbrique de</u> L , <u>il existe une</u> L<u>-spécialisation finie</u> $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, <u>à valeurs dans</u> $\overline{L}$, <u>telle que</u> $u(y_1,y_2,\dots,y_n)\neq 0$.

Il suffit d'appliquer la prop.13 à la famille formée des x_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ et de $x_0 = 1/u(x_1,\ldots,x_n)$.

COROLLAIRE 2 (théorème des zéros).- <u>Soit K un corps algèbriquement clos, et $\mathfrak{a}$ un idéal $\neq(1)$ de l'algèbre de polynômes $K[X_1,X_2,\ldots,X_n]$; il existe alors un zéro de $\mathfrak{a}$ dans K^n</u> .

En effet, soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $K[X_1,\ldots,X_n]$ contenant $\mathfrak{a}$, et soit E le corps $K[X_1,\ldots,X_n]/\mathfrak{m}$, extension de K ; si $x_1,\ldots,x_n$ sont les classes mod. $\mathfrak{m}$ de $X_1,\ldots,X_n$ dans E , une K-spécialisation finie de $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ à valeurs dans K est un zéro de $\mathfrak{a}$ et l'existence d'une telle spécialisation résulte du cor.1 .

12. Rang d'une valuation.

Ce qui précède permet de déterminer la structure des valuations des corps de rang fini. Nous donnerons d'abord quelques résultats auxiliaires sur les groupes ordonnés.

<u>Lemme 3.- Si G est un groupe totalement ordonné, les trois propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

a) G <u>n'admet pas de sous-groupe isolé</u> (n°8,déf.5) <u>autres que</u> G <u>et</u> $\{0\}$.

b) <u>Quels que soient</u> $x > 0$ <u>et</u> $y \geqslant 0$ <u>dans</u> G , <u>il existe un entier</u> $n > 0$ <u>tel que</u> $nx \geqslant y$.

c) G <u>est isomorphe à un sous-groupe du groupe additif</u> $\mathbb{R}$ <u>des nombres réels</u>.

a) entraîne b) : en effet, si $x > 0$ dans G , l'ensemble des $y \in G$ tels qu'il existe un entier $n > 0$ pour lequel $|y| \leqslant nx$ est un sous-groupe isolé de G , donc n'est autre que G si a) est vérifiée. Réciproquement, b) entraîne a) : en effet, soit alors H , un sous-groupe isolé de G , et supposons $H \neq \{0\}$; soit $x > 0$ un élément de H , et $y \geqslant 0$

un élément quelconque de G ; par hypothèse, il existe un entier $n > 0$ tel que $0 \leqslant y \leqslant nx$, donc $y \in H$ par définition d'un sous-groupe isolé ; on a donc $H=G$. La propriété b) n'est autre que l'"axiome d'Archimède" ((GR_{IV}) de Top.gén., chap.V, § 2), d'où résulte d'abord que c) entraîne b) ; d'autre part, si P est l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ de G , et si $P-\{0\}$ n'a pas de plus petit élément, la prop.1 de Top.gén., chap.V, § 2 s'applique à $E=I=P$, $\omega=0$, et montre que dans ce cas G est isomorphe à un sous-groupe partout dense de $\mathbb{R}$. Si au contraire $P-\{0\}$ a un plus petit élément a , pour tout $x \in P$, soit n le plus petit entier tel que $na > x$; on a alors $(n-1)a \leqslant x < na$ d'où $0 \leqslant x-(n-1)a < a$, et comme $x-(n-1)a \in P$, on a nécessairement $x=(n-1)a$; G est alors isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Lemme 4.– Si G est un groupe totalement ordonné, l'ensemble des sous-groupes isolés de G est totalement ordonné par inclusion.

Soient H, H' deux sous-groupes isolés de G , et supposons que $H' \not\subset H$; soit donc $x' \in H'$ tel que $x' > 0$ et $x' \notin H$,et soit $x > 0$ un élément de H : Comme H est isolé, on a nécessairement $x > x'$, donc $x \in H'$ puisque H' est isolé, et cela prouve que $H \subset H'$.

Lemme 5.– Si les groupes isolés d'un groupe totalement ordonné G sont en nombre fini, ils forment une suite décroissante

$H_0=G \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_m=\{0\}$ telle que chacun des groupes ordonnés $G_i=H_{i-1}/H_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ soit isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

La première assertion résulte du lemme 4. Si G_i n'était pas isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$, il aurait, d'après le lemme 3, un sous-groupe isolé M autre que G_i et 0 ; alors l'image réciproque de ce sous-groupe par l'homomorphisme canonique de H_{i-1} sur G_i serait un sous-groupe isolé de H_{i-1}, donc de G, distinct de tous les H_j .

PROPOSITION 14.- <u>Si</u> A <u>est un anneau de valuation d'un corps</u> K , <u>les sous-anneaux de</u> K <u>qui contiennent</u> A <u>forment un ensemble totalement ordonné par inclusion.</u>

En effet ($n^o 8$,prop.12) ces sous-anneaux sont en correspondance biunivoque (préservant la relation d'inclusion) avec les sous-groupes isolés du groupe des ordres d'une valuation associée à l'anneau A .

DÉFINITION 7.- <u>On dit qu'un groupe totalement ordonné</u> G <u>est de rang</u> m <u>si le nombre de ses sous-groupes isolés</u> (<u>y compris</u> G <u>et</u> $\{0\}$) <u>est</u> m+1. <u>On dit qu'une valuation d'un corps</u> K <u>est de rang</u> m <u>si son groupe des ordres est de rang</u> m .

Un groupe de rang 1 est donc un groupe isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$, en vertu du lemme 3. Une valuation de rang 0 est triviale ; une valuation de rang 1 est une valuation (non triviale) dont le groupe des ordres est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 15.- <u>Un corps</u> K <u>de rang fini</u> $n > 0$ <u>admet des valuations de rang</u> n , <u>et toute valuation de</u> K <u>est de rang</u> $\leqslant n$; <u>il en est de même pour une extension</u> K <u>d'un corps</u> L , <u>de dimension algébrique</u> n <u>sur</u> L , <u>lorsqu'on ne considère que les valuations triviales sur</u> L .

Compte-tenu de la correspondance biunivoque entre sous-groupes isolés du groupe des ordres d'une valuation ω de K et les anneaux de valuation contenant l'anneau de ω (prop.12), et de la prop.14, la proposition équivaut à la proposition correspondante sur les suites de Krull de K (resp. les suites de Krull formées d'anneaux contenant L), c'est-à-dire à une partie de la prop.13.

13. Valuations de rang 1.

Quand il s'agira désormais d'une valuation de rang 1, on supposera toujours qu'elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$; comme toute valuation de rang 1 est équivalente à une valuation prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ (lemme 3), cela ne restreint pas la généralité des ~~raîs~~onnements.

PROPOSITION 16.- Pour qu'un sous-anneau A d'un corps K soit l'anneau d'une valuation de rang 1 de K , il faut et il suffit que K soit le corps des fractions de A , et que A soit maximal dans l'ensemble (ordonné par inclusion) des anneaux $\neq K$ dont le corps des fractions est K .

La condition est nécessaire, car si A est l'anneau d'une valuation ω de rang 1, pour tout anneau A' tel que $A \subset A' \subset K$, A' est l'anneau d'une valuation dont le groupe des ordres est le quotient de $\omega(K^*)$ par un sous-groupe isolé (n°8,prop.12) ; mais par définition, ce dernier ne peut être que $\{0\}$ ou $\omega(K^*)$, ce qui entraîne $A'=A$ ou $A'=K$.

La condition est suffisante : en effet, comme $A \neq K$, il y a dans A un élément x non inversible dans A . En vertu du th.4, A est contenu dans l'anneau A' d'une place sur K dont le noyau sur A contient l'idéal $xA \neq A$. Cette place n'est donc pas triviale, et par suite $A' \neq K$; mais comme A est maximal, on a nécessairement $A'=A$.

COROLLAIRE.- Deux valuations de rang 1 d'un corps K sont, soit équivalentes, soit étrangères.

En effet, si A et A' sont les anneaux de deux telles valuations, AA' est un sous-anneau de K (prop.8) et on a $A \subset AA' \subset K$ et $A' \subset AA' \subset K$. En vertu de la prop.16, on a donc, soit $AA'=K$ et alors les deux valuations sont étrangères (prop.8), soit $AA'=A=A'$, et les valuations considérées sont équivalentes.

Ce résultat permet d'appliquer le théorème d'approximation (n^o7, th.3) chaque fois qu'on a affaire à un nombre fini de valuations distinctes de rang 1.

Le groupe des ordres d'une valuation de rang 1 est (avec les conventions faites ci-dessus), soit un sous-groupe partout dense de $\mathbb{R}$, soit un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$, isomorphe à $\mathbb{Z}$ (Top.gén., chap.V, § 1, prop.1).

DÉFINITION 8.- On dit qu'une valuation est discrète si son groupe des ordres est isomorphe à $\mathbb{Z}$; on dit qu'une valuation discrète est normalisée si son groupe des ordres est $\mathbb{Z}$.

Toute valuation discrète est équivalente à une valuation discrète normalisée et à une seule. Si ω est une valuation discrète d'un corps K, la restriction de ω à un sous-corps de K est, soit triviale, soit discrète ; dans ce dernier cas, on notera que ω peut être normalisée sans que sa restriction le soit.

Z

Soit A l'anneau d'une valuation discrète normalisée ω d'un corps K. D'après la prop.6 (n^o6), les A-modules contenus dans K sont $K, \{0\}$ et les ensembles déterminés par une relation $\omega(x) \geqslant n$, où $n \in \mathbb{Z}$. Si ϖ est un élément de K tel que $\omega(\varpi)=1$, ces ensembles ne sont autres que les idéaux principaux fractionnaires $A\varpi^n$; on dit souvent que ϖ est une uniformisante locale de K, relativement à l'anneau A (ou à la valuation ω, ou à une place de K, d'anneau A). En particulier, A est un anneau principal (cf. chap.IV, §   , exerc.   ).

Exemples.- 1) Soit L un corps et $E=L(X,Y)$ le corps des fractions rationnelles à deux indéterminées sur L. Considérons l'idéal principal $\mathfrak{q}=(X^2-Y^3-Y^5)$ de $L[X,Y]$; cet idéal est premier.

En effet, tout polynôme $p(X,Y)$ de $L[X,Y]$ peut être considéré comme polynôme en X, à coefficients dans $L(Y)$, et on peut par suite écrire (par division euclidienne)

$$p(X,Y)=(X^2-Y^3-Y^5)q(X,Y)+(r(Y)X+s(Y))$$

où $q(X,Y)$ est un polynôme en X à coefficients dans $L(Y)$, et $r(Y)$ et $s(Y)$ sont deux éléments de $L(Y)$. Pour montrer que la relation $p_1p_2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ implique $p_1 \equiv 0$ ou $p_2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$, tout revient donc à montrer que si, dans l'anneau $L(Y)[X]$, le polynome $(r_1(Y)X+s_1(Y))(r_2(Y)X+s_2(Y))$ est divisible par $X^2-Y^3-Y^5$, il est nécessairement nul. En considérant l'extension quadratique de $L(Y)$ obtenue par adjonction à $L(Y)$ d'une racine de $X^2-Y^3-Y^5$, cela revient à voir qu'il n'existe pas de polynômes non nuls $u(Y),v(Y)$ dans $L[Y]$ tels que $u^2(Y)(Y^3+Y^5)=v^2(Y)$, ce qui est immédiat par inspection des termes de plus haut degré des deux polynômes. Soit alors K le corps des fractions de l'anneau d'intégrité $L[X,Y]/\mathfrak{q}$; on a $K=L(x,y)$, où x et y sont les classes de X et Y mod. $\mathfrak{q}$. Considérons la valuation ω_o de l'anneau $L[X,Y]$ telle que $\omega_o(p)$ soit l'ordre du polynôme $p(T^3,T^2)$ (et $-\infty$ si ce polynôme est nul). Cette valuation est discrète, et son idéal $\mathfrak{p}$ contient évidemment $\mathfrak{q}$; par passage au quotient, elle définit donc une valuation discrète ω sur $L[X,Y]/\mathfrak{q}$, donc aussi sur K, et on a $\omega(x)=3$, $\omega(y)=2$; d'où $\omega(x/y)=1$; la valuation ω est donc normalisée, et $t=x/y$ est une uniformisante locale de K pour ω.

2) La valuation p-adique v_p sur le corps des rationnels Q est une valuation discrète normalisée (n^o4, exemple 2) ; pour cette valuation, le nombre premier p est une uniformisante locale.

14. Prolongement d'une valuation de rang 1 à une extension algèbrique.

DEFINITION 9.- Soient ω une valuation d'un corps K, et K_o un sous-corps de K ; soit $\Gamma = \omega(K^*)$ le groupe des ordres de ω, et $\Gamma_o = \omega(K^*_o)$ celui de la restriction de ω à K_o. Si Γ_o est un sous-groupe de Γ d'indice fini e, on dit que e est l'indice de ramification de ω par rapport à K_o, ou que ω est ramifiée d'indice e sur K_o ; sinon, on dit que ω est ramifiée d'indice infini sur K_o.

Si, dans ces conditions, φ est une place de K associée à ω, on dit aussi que φ est ramifiée d'indice e (resp. d'indice infini) sur K_o. Lorsque $e=1$, on dit que φ et ω sont non ramifiées sur K_o.

Exemple.- Soit L un corps algèbriquement clos de caractéristique $\neq 2$; soit $K=L(X)$ le corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur L, et soit $K_o=L(X^2)$; K est une extension quadratique de K_o. Soit $\xi \in K$, et soit ω_ξ la valuation normalisée de K associée à la place $r \to r(\xi)$ de K : pour toute fraction rationnelle $r \in K=L(X)$, $\omega_\xi(r)$ est l'exposant de $(X-\xi)$ dans la décomposition de r en puissances de polynômes irréductibles. Il est clair que $\omega_o(K^*_o)$ est le groupe $2\mathbb{Z}$, donc ω_o est ramifiée d'indice 2 sur K_o ; au contraire, pour $\xi \neq 0$, on a $\omega_\xi(X^2-\xi^2)=1$, donc ω_ξ n'est pas ramifiée sur K_o. On notera d'ailleurs que si $\omega_\xi(r) > 0$, on a $r(\xi^2)=0$, et par suite $\omega_\xi(r)=\omega_{-\xi}(r)$; les restrictions des deux valuations (distinctes) ω_ξ et $\omega_{-\xi}$ à K_o sont identiques.

DEFINITION 10.- Soient φ une place d'un corps K, et K_o un sous-corps de K ; soient E le corps des valeurs de φ, et E_o celui de la restriction de φ à K_o (c'est-à-dire que $P_1(E)=\varphi(P_1(K))$ et $P_1(E_o)=\varphi(P_1(K_o))$).

Si E est une extension algèbrique de E_0 de degré fini f , on dit que f est le degré résiduel de K sur K_0 pour la place φ , ou que φ a le degré résiduel f sur K_0 ; sinon on dit que K est de degré résiduel infini sur K_0 pour la place φ .

Si, dans ces conditions, ω est une valuation de K associée à φ , on dit que f est le degré résiduel de K sur K_0 pour la valuation ω , ou que ω a le degré résiduel f sur K_0 (resp. est de degré résiduel infini sur K_0) .

Bien entendu, les notions ci-dessus se conservent si on remplace la valuation ω , ou la place φ , par d'autres équivalentes, et ne dépendent donc que de l'anneau A de la valuation ω et de la place φ ; e est l'indice $(K^*: UK_0^*)$, où U est le groupe des éléments inversibles de A ; d'autre part, si $\mathfrak{P} = A-U$ est l'idéal maximal de A , et si $A_0=K_0 \cap A$, $\mathfrak{P}_0 = K_0 \cap \mathfrak{P}$, f est le nombre d'éléments d'un système maximal $x_1,\dots,x_f$ d'éléments de A, dont les images canoniques dans $A/\mathfrak{P}$ sont linéairement indépendantes par rapport à $A_0/\mathfrak{P}_0$ (identifié à un sous-corps de $A/\mathfrak{P}$), c'est-à-dire tels que la relation $\sum_{i=1}^{f} t_i x_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$, avec $t_i \in A_0$ $(1 \leqslant i \leqslant f)$ entraîne $t_i \in \mathfrak{P}_0$ pour $1 \leqslant i \leqslant f$.

THÉORÈME 8.- Soit L une extension algèbrique de degré fini n d'un corps K, et soit ω une valuation de rang 1 de K à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il n'existe qu'un nombre fini de valuations distinctes de L à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui prolongent ω ; ces valuations sont de rang 1, et ont chacune un degré résiduel et un indice de ramification fini par rapport à K ; en particulier, elles sont toutes discrètes si ω est discrète. En outre, si ω'_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ sont ces valuations, et si on désigne par e_i l'indice de ramification et par f_i le degré résiduel de ω'_i par rapport à K , on a $\sum_{i=1}^{h} e_i f_i \leqslant n$.

Soient A l'anneau de ω , Γ le groupe des ordres de ω . Soient ω'_i $(1 \leq i \leq q)$ des prolongements distincts de ω à L , à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc deux à deux non équivalents. Pour chaque indice i , soient $x_{i\alpha}$ $(1 \leq \alpha \leq m_i)$ des éléments de K^* dont les ordres $\omega'_i(x_{i\alpha})$ pour ω'_i appartiennent à des classes distinctes mod. Γ dans le groupe des ordres de ω'_i ; l'existence de tels éléments implique naturellement que l'indice de ramification de ω'_i sur K est infini ou $\geqslant m_i$. De même, pour chaque indice i , soient $y_{i\lambda}$ $(1 \leq \lambda \leq r_i)$ des éléments de l'anneau de ω'_i tels que leurs images canoniques dans le corps résiduel de ω'_i soient linéairement indépendantes par rapport au corps résiduel de ω ; cela signifie donc qu'une relation $\omega'_i(\sum_{\lambda=1}^{r_i} t_\lambda y_{i\lambda}) > 0$, avec $t_\lambda \in A$, implique $\omega(t_\lambda) > 0$ pour tout indice λ ; l'existence de ces éléments implique naturellement que le degré résiduel de ω'_i sur K est infini ou $\geqslant r_i$. On a en particulier $\omega'_i(y_{i\lambda})=0$ pour tout λ .

Posons $\gamma_i = \operatorname{Max}_{1 \leq \alpha \leq m_i} \omega'_i(x_{i\alpha})$. D'après le th. d'approximation (th.3) il existe des éléments $x'_{i\alpha}$ dans L^* tels que

$$\omega'_i(x'_{i\alpha}-x_{i\alpha}) > \gamma_i \qquad \text{et} \qquad \omega'_j(x'_{i\alpha}) > \gamma_j \qquad \text{pour} \quad j \neq i$$

pour tout α tel que $1 \leq \alpha \leq m_i$; cela implique en particulier $\omega'_i(x'_{i\alpha})=\omega'_i(x_{i\alpha})$. De même, il existe des éléments $y'_{i\lambda} \in L^*$ tels que $\omega'_i(y'_{i\lambda}-y_{i\lambda}) > 0$ et $\omega'_j(y'_{i\lambda}) \geqslant 0$ pour $j \neq i$, pour tout λ tel que $1 \leq \lambda \leq r_i$. Il est clair que $x'_{i\alpha}$ et $x_{i\alpha}$ sont dans la même classe mod. Γ du groupe des ordres de ω'_i ; d'autre part, pour $t_\lambda \in A$, on a $\omega'_i(\sum_{\lambda=1}^{r_i} t_\lambda (y'_{i\lambda}-y_{i\lambda})) > 0$, et par suite les relations $\omega'_i(\sum_\lambda t_\lambda y_{i\lambda}) > 0$ et $\omega'_i(\sum_\lambda t_\lambda y'_{i\lambda}) > 0$ sont équivalentes (prop. 4). Ces remarques montrent qu'on peut remplacer $x_{i\alpha}$ (resp. $y_{i\lambda}$) par $x'_{i\alpha}$ (resp. $y'_{i\lambda}$) ; autrement dit, on peut supposer que l'on a

(1) $\omega'_i(x_{j\beta}) > \gamma_i$ et $\omega'_i(y_{j\mu}) \geqslant 0$ pour $j \neq i$.

Dans ces conditions, nous allons prouver que les éléments $x_{i\alpha}y_{i\lambda}$ sont <u>linéairement indépendants</u> sur K $(1 \leqslant i \leqslant q,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant m_i,\ 1 \leqslant \lambda \leqslant r_i)$; cela impliquera que l'on a $\sum_{i=1}^{q} m_i r_i \leqslant n$, donc que $q \leqslant n$, et démontrera le théorème (il est clair en effet que si Γ est discret dans $\mathbb{R}$, il en est de même de $\frac{1}{e}\Gamma$ pour tout entier $e > 0$).

Supposons qu'on ait une relation de la forme

(2) $$\sum_{i=1}^{q} \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\lambda=1}^{r_i} a_{i\alpha\lambda} x_{i\alpha} y_{i\lambda} = 0$$

avec des $a_{i\alpha\lambda} \in K$, non tous nuls ; en considérant les $a_{i\alpha\lambda}$ pour lesquels $\omega(a_{i\alpha\lambda})$ est le plus petit possible, on peut par exemple supposer qu'il y en ait un pour lequel $i=1$; divisant la relation (2) par cet élément, on voit que l'on peut supposer que, dans (2), tous les $a_{i\alpha\lambda}$ <u>appartiennent à</u> A , et que l'un des éléments $a_{1\alpha\lambda}$ est égal à 1 . Dans ces conditions, l'un au moins des termes de (2) pour lesquels $i=1$ aura pour ω'_1 un ordre $\leqslant \gamma_1$; d'autre part, d'après (1), tous les termes de (2) pour lesquels $i \neq 1$ auront pour ω'_1 un ordre $> \gamma_1$. Si γ est le plus petit des ordres, pour ω'_1 , des termes de (1), les termes de (1) d'ordre γ sont tous relatifs à $i=1$. Supposons par exemple que l'un de ces termes soit $a_{111}x_{11}y_{11}$; si $a_{1\alpha\lambda}x_{1\alpha}y_{1\lambda}$ est un autre terme d'ordre γ pour ω'_1 , on a

$$\omega'_1(x_{1\alpha}) - \omega'_1(x_{11}) = \omega(a_{111}/a_{1\alpha\lambda}) \in \Gamma$$

ce qui, par définition des $x_{1\alpha}$, n'est possible que pour $\alpha=1$; autrement dit, tous les termes de (2) d'ordre γ pour ω'_1 , correspondent à $i=\alpha=1$. En divisant (2) par $a_{111}x_{11}$, on aura donc une relation de la forme

(3) $$\sum_{\lambda=1}^{r_1} b_\lambda y_{1\lambda} + z = 0$$

où z est une somme de termes dont l'ordre pour ω'_1 est > 0, où $b_\lambda \in K$

et $\omega'_1(b_\lambda y_{1\lambda}) \geqslant 0$ pour tout λ, ce qui, compte-tenu de la relation $\omega'_1(y_{1\lambda})=0$, entraîne $\omega(b_\lambda) \geqslant 0$ quel que soit λ ; en outre, on a $b_1=1$, d'où $\omega(b_1)=0$. Mais une telle relation est contraire à la définition des $y_{i\lambda}$, et on aboutit ainsi à une contradiction en supposant les $a_{i\alpha\lambda}$ non tous nuls, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> L <u>est une extension algèbrique d'un corps</u> K, <u>et</u> ω <u>une valuation de rang</u> 1 <u>de</u> K, <u>toute valuation de</u> L <u>prolongeant</u> ω <u>est de rang</u> 1.

En effet, si ω' est une telle valuation, la restriction de ω' à toute extension de degré fini de K, contenue dans L, est une valuation de rang 1 en vertu du th.8 ; il est immédiat que dans ces conditions, le groupe des ordres de ω' satisfait à l'axiome d'Archimède, deux éléments quelconques de L étant toujours contenus dans une extension de K de degré fini ; d'où le corollaire.

<u>Remarque</u>.- Lorsque L est une extension algèbrique de K, de degré infini, une valuation ω de K peut avoir une infinité de prolongements qui sont des valuations de L, deux à deux non équivalentes. En outre, pour un tel prolongement ω' le degré résiduel et l'indice de ramification peuvent être infinis ; en particulier, ω peut être discrète sans que ω' le soit.
