LIVRE VI
INTEGRATION
CHAPITRE V - VI (ETAT 3)

Rédaction n° 190 a

A 190

LIVRE VI. INTEGRATION

CHAPITRES V - VI (Etat 3).

CHAPITRE V . INTEGRATION DES MESURES.

§ 1. Fonctions essentiellement intégrables. 1. Intégrale supérieure essentielle. 2. Fonctions essentiellement intégrables. 3. Familles équimesurables.

§ 2. Fonctions faiblement intégrables. 1. Définition des fonctions faiblement intégrables. 2. Propriétés des fonctions faiblement intégrables. 3. Critères d'intégrabilité faible. 4. Fonctions faiblement mesurables. 5. Exemple : Fonctions à valeurs dans un espace d'applications linéaires. 6. Fonctions faiblement essentiellement intégrables.

§ 3. Intégration des mesures. 1. Fonctions à valeurs dans un espace de mesures. 2. Intégrales superposées de fonctions semi-continues inférieurement. 3. Intégrales superposées de fonctions positives. 4. Intégrales superposées de fonctions à valeurs dans un espace de Banach. 5. Intégrales faibles superposées.

§ 4. Intégration de mesures ponctuelles. 1. Préliminaires. 2. Intégrales supérieures de fonctions positives. 3. Intégration de fonctions à valeurs dans un espace de Banach. 4. Intégrales faibles.

§ 5. Mesures définies par des densités numériques. 1. Fonctions localement intégrables. 2. Mesures définies par des densités numériques. 3. Intégration par rapport à une mesure de base . 4. Propriétés des mesures de base μ . 5. Définition d'une fonction mesurable par des données locales. 6. Le théorème de Lebesgue-Nikodym. 7. Mesures équivalentes. 8. Mesures singulières par rapport à μ . 9. Mesures diffuses, mesures atomiques. 10. Application : I. Dualité des espaces L^p. 11. Application : II. Fonctions de mesures.

§ 6. Image d'une mesure. 1. Définition de l'image d'une mesure. 2. Intégration par rapport à l'image d'une mesure. 3. Propriétés de l'image d'une mesure. 4. Mesures quotients.

§ 7. Mesure induite. 1. Définition de la mesure induite. 2. Intégration par rapport à une mesure induite. 3. Propriétés de la mesure induite. 4. Mesures de Stieltjès.

§ 8. Produits de mesures. 1. Intégration par rapport au produit de deux mesures. 2. Critères de mesurabilité pour le produit de deux mesures. 3. Propriétés du produit de deux mesures. 4. Intégration par rapport à un produit fini de mesures. 5. Intégration par rapport à un produit infini de mesures.

CHAPITRE VI. - DESINTEGRATION DES MESURES.

§ 1. Mesures vectorielles. 1. Définition d'une mesure vectorielle. 2. Exemples de mesures vectorielles. 3. Le théorème de Dunford-Pettis. 4. Application : Dual d'un espace L^1_F (F de type dénombrable). 5. Valeur absolue d'une mesure vectorielle. 6. Mesures complexes.

§ 2. Désintégration des mesures. 1. Désintégration d'une mesure bornée. 2. Désintégration d'une mesure quelconque. 3. Relations d'équivalence mesurables. 4. Désintégration d'une mesure par une relation d'équivalence mesurable.

COMMENTAIRES.

1. La rédaction est conforme à l'idée de Schwartz : tout découle de l'intégration des mesures et spécialement des mesures ponctuelles.

On a fait jouer un rôle primordial à la notion d'intégrale essentielle, introduite au § 1. Grâce à cela, on a des théorèmes sans canulars valables sur des espaces quelconques (au chap.V, il n'est plus question pratiquement de dénombrable à l'infini). Il n'y a plus qu'à regarder dans quel cas l'intégrale essentielle se réduit à l'intégrale ordinaire.

2. Il faudrait alléger un peu les § sur les fonctions faiblement intégrables et sur les mesures vectorielles. La théorie détaillée de ces notions est à rejeter en 4$^{\text{è}}$ partie, et il ne faut pas perdre de vue qu'ici on ne poursuit que deux buts :

a) donner quelques trivialités qui permettent de manipuler les notions en question ;

b) donner ce qui est nécessaire pour l'intégration et la désintégration des mesures.

3. Dans l'Etat 2, les fonctions faiblement intégrables sont traitées au point de vue "espaces en dualité faible". Le Congrès avait été indécis sur ce point, et pour respecter les questions de parité, j'ai adopté le point de vue "espaces localement convexe quelconques". Naturellement, c'est sans importance.

4. Conformément aux ordres du Congrès, le th. de Godement sur la définition locale des fonctions mesurables a été mis sous forme abstraite. Enthousiasmé par l'amélioration obtenue, je propose, à titre de nouveau progrès, d'énoncer le théorème en langage de lattices.

5. Le fidèle adjudant est prié d'harmoniser les quelques exercices avec ceux de l'état précédent.

CHAPITRE V. INTEGRATION des MESURES.

Dans ce chapitre et le suivant, T désigne un espace localement compact, μ une mesure positive sur T . Pour tout ensemble A, on désigne par φ_A la fonction caractéristique de A . Pour tout point a d'un espace localement compact, on désigne par ε_a la mesure définie par la masse unité placée au point a .

§ 1. Fonctions essentiellement intégrables.

1. Intégrale supérieure essentielle.- Définition 1.- Soient T un espace localement compact, μ une mesure positive sur T . Soit f une fonction positive, finie ou non, définie sur T . On appelle intégrale supérieure essentielle, et on désigne par $\int^* f\, d\mu$, ou $\overline{\mu}^*(f)$, la borne supérieure finie ou non, des nombres $\int^* f \varphi_K \, d\mu$, quand K parcourt l'ensemble des parties compactes de T .

Il est évident que $\overline{\mu}^*(f) \leq \mu^*(f)$. On peut avoir $\overline{\mu}^*(f) \neq \mu^*(f)$; en effet, la condition $\mu^*(f)=0$ signifie que f est négligeable, tandis que la condition $\overline{\mu}^*(f)=0$ signifie que f est localement négligeable.

Proposition 1.- Soit f une fonction positive, finie ou non, définie dans T. Si f est semi-continue inférieurement, ou si f est nulle en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles intégrables, on a $\overline{\mu}^*(f) = \mu^*(f)$.

Supposons f semi-continue inférieurement, et soit g une fonction positive de $\mathcal{K}(T)$ telle que $g \leq f$. Si K est le support de g , on a $\mu(g) \leq \mu^*(f \varphi_K) \leq \overline{\mu}^*(f)$. Il en résulte que $\mu^*(f) \leq \overline{\mu}^*(f)$, donc que $\mu^*(f) = \overline{\mu}^*(f)$.

Supposons maintenant f nulle en dehors de la réunion d'une suite $A_0, A_1, A_2, \ldots$ d'ensembles intégrables. Comme chaque A_n est réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite d'ensembles compacts (chap. IV, §4, cor. 2 du th. 4), on peut supposer que A_0 est négligeable, que $A_1, A_2, \ldots$ sont compacts, et en outre que $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ Alors, f est presque partout égale à l'enveloppe supérieure de la suite croissante des fonctions $f\varphi_{A_n}$; on a donc (chap. IV, § 1, th.3) :

$$\mu^*(f) = \lim_{n \to \infty} \mu^*(f\varphi_{A_n}) \leqslant \overline{\mu}^*(f) .$$

Dond $\mu^*(f) = \overline{\mu}^*(f)$.

Proposition 2.- a. <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont deux fonctions positives finies ou non définies dans</u> T <u>et telles que</u> $f \leqslant g$, <u>on a</u> $\overline{\mu}^*(f) \leqslant \overline{\mu}^*(g)$.

b. <u>Pour tout nombre réel fini</u> $\alpha > 0$, <u>on a</u> $\overline{\mu}^*(\alpha f) = \alpha\, \overline{\mu}^*(f)$.

c. <u>Si</u> f_1 <u>et</u> f_2 <u>sont deux fonctions positives finies ou non définies dans</u> T , <u>on a</u> $\overline{\mu}^*(f_1+f_2) \leqslant \overline{\mu}^*(f_1) + \overline{\mu}^*(f_2)$.

Ces propriétés se déduisent aussitôt des propriétés correspondantes de l'intégrale supérieure (chap. IV, § 1, prop.10, 11 et 12).

2. <u>Fonctions essentiellement intégrables</u>.- Soit F un espace de Banach réel. Pour toute application f de T dans F , nous désignerons par $\overline{N}_1(f, \mu)$, ou simplement par $\overline{N}_1(f)$, le nombre positif fini ou non $\overline{\mu}^*(|f|)$. Si f et g sont deux applications de T dans F , et α un scalaire $\neq 0$, on a :

$$\overline{N}_1(\alpha f) = |\alpha|\ \overline{N}_1(f)$$
$$\overline{N}_1(f+g) \leqslant \overline{N}_1(f) + \overline{N}_1(g)$$

comme il résulte aussitôt de la prop.2 . On a $\overline{N}_1(f-g)=0$ si et seulement si f=g localement presque partout.

Soit $\overline{\mathcal{F}}^1_F(T, \mu)$, ou simplement $\overline{\mathcal{F}}^1_F(\mu)$, ou $\overline{\mathcal{F}}^1_F$ (si aucune confusion n'est à craindre) l'ensemble des applications f de T dans F telles que $\overline{N}_1(f) < +\infty$. Il est immédiat que $\overline{\mathcal{F}}^1_F$ contient $\mathcal{F}^1_F$, que $\overline{\mathcal{F}}^1_F$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications de T dans F , et que $\overline{N}_1(f)$ est une semi-norme sur $\overline{\mathcal{F}}^1_F$.

Nous supposerons toujours que $\bar{\mathcal{F}}^1_F$ est muni de la topologie définie par cette semi-norme. L'espace $\bar{\mathcal{F}}^1_F$ n'est pas séparé en général ; l'adhérence de O dans cet espace est le sous-espace $\bar{\mathcal{N}}_F$ des applications localement négligeables de T dans F .

Toute fonction de $\mathcal{F}^1_F$ est nulle en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles intégrables (chap. IV, § 5, lemme 2). Pour $f \in \mathcal{F}^1_F$, on a donc $\bar{N}_1(f) = N_1(f)$.

<u>Proposition 3. On a</u> : $\bar{\mathcal{F}}^1_F = \mathcal{F}^1_F + \bar{\mathcal{N}}_F$ et $\mathcal{F}^1_F \cap \bar{\mathcal{N}}_F = \mathcal{N}_F$ <u>(espace des applications négligeables de</u> T <u>dans</u> F). <u>Autrement dit, pour toute fonction</u> $f \in \bar{\mathcal{F}}^1_F$, <u>il existe une fonction</u> $f' \in \mathcal{F}^1_F$ <u>égale à</u> f <u>localement presque partout</u> ; <u>si</u> f" <u>est une autre fonction de</u> $\mathcal{F}^1_F$ <u>égale à</u> f <u>localement presque partout</u>, f'-f" <u>est négligeable</u>. <u>Enfin</u>, $\bar{N}_1(f) = N_1(f')$.

Soit $f \in \bar{\mathcal{F}}^1_F$. Soit (K_n) une suite d'ensembles compacts dans T tels que $\sup_n \int^* |f| \varphi_{K_n} d\mu = \bar{N}_1(f) < +\infty$. Soient A la réunion des K_n , et $f' = f\varphi_A$. La fonction f' est nulle en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles compacts, donc, d'après la prop. 1, on a $N_1(|f'|) = \bar{N}_1(|f'|) \leq \bar{N}_1(|f|)$, de sorte que $f' \in \mathcal{F}^1_F$. On va montrer que $f - f' = f\varphi_{\complement A}$ est localement négligeable. Dans le cas contraire, il existerait une partie compacte K de T telle que $|f| \varphi_{\complement A} \varphi_K = |f| \varphi_{K \cap \complement A}$ soit non négligeable. Comme $K \cap \complement A$, qui est intégrable, est réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite d'ensembles compacts, on voit qu'on peut supposer $K \subset \complement A$. Soit $a = \int^* |f| \varphi_K d\mu > 0$. Soit n un entier tel que $\int^* |f| \varphi_{K_n} d\mu > \bar{N}_1(f) - a$. Les ensembles compacts K et K_n sont <u>disjoints</u>, donc, pour toute fonction positive semi-continue inférieurement g majorant $|f| \varphi_{K \cup K_n}$, il existe deux fonctions positives semi-continues inférieurement g' et g'', telles que $|f|\varphi_K \leq g'$, $|f|\varphi_{K_n} \leq g''$, $g'+g'' \leq g$. On a alors :

$$\int^* g\,d\mu \geq \int^* g'd\mu + \int^* g''d\mu \geq \int^* |f|\varphi_K\,d\mu + \int^* |f|\varphi_{K_n}\,d\mu > \overline{N}_1(f)$$

donc $\int^* |f|\varphi_{K\cup K_n}\,d\mu > \overline{N}_1(f)$, ce qui est absurde. Ainsi, f est égale à f' localement presque partout. On en déduit que $\overline{N}_1(f) = \overline{N}_1(f') = N_1(f')$. Enfin, si $f \in \mathcal{F}^1_F \cap \overline{\mathcal{N}}_F$, on a $N_1(f) = \overline{N}_1(f) = 0$, donc f est négligeable.

D'après la prop.3, l'espace normé $\overline{\mathcal{F}}^1_F / \overline{\mathcal{N}}_F$ s'identifie canoniquement à l'espace normé $\mathcal{F}^1_F / \mathcal{N}_F$ et est donc complet (chap.IV, § 3, prop.5), de sorte que $\overline{\mathcal{F}}^1_F$ lui-même est complet.

Définition 2. On désigne par $\overline{\mathcal{L}}^1_F(T,\mu)$ (ou simplement $\overline{\mathcal{L}}^1_F(\mu)$, ou $\overline{\mathcal{L}}^1_F$) l'adhérence, dans l'espace localement convexe $\overline{\mathcal{F}}^1_F(T,\mu)$, de l'espace vectoriel $\mathcal{K}_F(T)$ des applications continues à support compact de T dans F . On dit que les fonctions appartenant à $\overline{\mathcal{L}}^1_F$ sont des fonctions essentiellement intégrables pour μ (ou essentiellement μ-intégrables). On dit qu'un ensemble $A \subset T$ est essentiellement intégrable pour μ (ou essentiellement μ-intégrable) si φ_A est essentiellement μ-intégrable.

Proposition 4. On a $\overline{\mathcal{L}}^1_F = \mathcal{L}^1_F + \overline{\mathcal{N}}_F$, et $\mathcal{L}^1_F \cap \overline{\mathcal{N}}_F = \mathcal{N}_F$. Autrement dit, pour toute fonction essentiellement intégrable, il existe une fonction intégrable, f' égale à f localement presque partout, bien déterminée à une fonction négligeable près.

En effet, soit $f \in \overline{\mathcal{L}}^1_F$, et soit f' une fonction de $\mathcal{F}^1_F$ égale à f localement presque partout. Il existe une fonction $g \in \mathcal{K}_F(T)$ telle que $\overline{N}_1(f-g) = N_1(f'-g)$ soit arbitrairement petit. Donc $f' \in \mathcal{L}^1_F$. La proposition est alors immédiate.

L'espace normé $\overline{\mathcal{L}}^1_F / \overline{\mathcal{N}}_F = \overline{L}^1_F$ s'identifie canoniquement à l'espace normé $\mathcal{L}^1_F / \mathcal{N}_F = L^1_F$ et est donc complet, de sorte que $\overline{\mathcal{L}}^1_F$ lui-même est complet.

<u>Proposition 5. Pour qu'une application</u> f <u>de</u> T <u>dans</u> F <u>soit essentiellement intégrable, il faut et il suffit que</u> f <u>soit mesurable et que</u> $\overline{N}_1(f) < +\infty$.

Ceci résulte aussitôt de la prop.4 et du th.5 du chap.IV, §4.

<u>Définition 3.- Soit</u> $f \in \overline{\mathcal{L}}^1_F$. <u>Considérons le prolongement par continuité à</u> $\overline{\mathcal{L}}^1_F$ <u>de l'application</u> $g \to \int g\, d\mu$ <u>de</u> $\mathcal{K}_F$ <u>dans</u> F. <u>La valeur pour</u> f <u>de ce prolongement s'appelle l'intégrale essentielle de</u> f, <u>et se note</u> $\overline{\int} f\, d\mu$, <u>ou</u> $\overline{\mu}(f)$.

Ceci revient à dire qu'on définit $\overline{\int} f\, d\mu$ comme l'intégrale $\int f' d\mu$, f' étant une fonction quelconque de $\mathcal{L}^1_F$ égale à f localement presque partout. Pour $f \in \mathcal{L}^1_F$, on a donc $\overline{\int} f\, d\mu = \int f\, d\mu$. Pour une fonction positive finie essentiellement intégrable, on a $\overline{\int} f\, d\mu = \int^* f\, d\mu$. Si A est un ensemble essentiellement intégrable, $\overline{\mu}(\varphi_A)$ se note aussi $\overline{\mu}(A)$.

<u>Proposition 6. Soit</u> $f \in \overline{\mathcal{L}}^1_F$. <u>L'intégrale</u> $\overline{\int} f\, d\mu$ <u>est la limite des intégrales</u> $\int f \varphi_K\, d\mu$ <u>lorsque</u> K <u>parcourt l'ensemble filtrant</u> (pour $\subset$) <u>des parties compactes de</u> T.

Soit f' une fonction de $\mathcal{L}^1_F$ égale à f localement presque partout. D'après la prop.1, $\int |f'| d\mu$ est la borne supérieure des intégrales $\int |f'| \varphi_K\, d\mu$, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K tel que $\int |f'| \varphi_{\complement K}\, d\mu \leq \varepsilon$. Alors, pour tout ensemble compact $H \supset K$, on a :

$$\left| \overline{\int} f\, d\mu - \int f \varphi_H\, d\mu \right| = \left| \int (f' - f'\varphi_H)\, d\mu \right| \leq \int |f'| \varphi_{\complement H}\, d\mu \leq \varepsilon$$

ce qui démontre la proposition.

On étend aussitôt les définitions et les résultats précédents au cas où les fonctions considérées sont seulement définies localement presque partout, ou sont à valeurs dans $\overline{R}$, définies et finies localement presque partout.

3. Familles équimesurables.- Définition 4. Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout $\alpha \in A$, soit f_α une application de T dans X_α . On dit que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ est équimesurable pour la mesure μ si, pour toute partie compacte K de T , il existe un ensemble μ-négligeable $N \subset K$ et une partition de K-N formée d'une suite (finie ou infinie) (K_n) d'ensembles compacts, tels que la restriction de chaque f_α à chaque K_n soit continue.

Toutes les fonctions d'une famille équimesurable sont évidemment mesurables.

Exactement comme au chap.IV, § 5, n°1, on démontre la proposition suivante.

Proposition 7. Pour que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ soit équimesurable, il faut et il suffit que, pour tout ensemble compact $K \subset T$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $K_1 \subset K$, tel que $\mu(K-K_1) \leq \varepsilon$, et que la restriction de chaque f_α à K_1 soit continue.

La prop.2 du chap.IV, § 5 exprime donc que toute famille dénombrable de fonctions mesurables sur T est équimesurable.

Proposition 8. Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille équimesurable de fonctions numériques positives finies ou non, filtrante pour la relation $\leq$. Soit f l'enveloppe supérieure des f_α . Alors, f est mesurable, et on a :
$\overline{\int}^* f\, d\mu = \sup_\alpha \overline{\int}^* f_\alpha\, d\mu$.

En effet, soient K une partie compacte de T, et ε un nombre > 0 . Il existe une partie compacte K' de K telle que : 1) $\mu(K-K') \leq \frac{\varepsilon}{2}$;

2) les restrictions des f_α à K' sont continues. La restriction de f à K' est semi-continue inférieurement, donc mesurable ; parsuite, il existe une partie compacte $K'' \subset K'$ telle que : 1) $\mu(K'-K'') \leq \frac{\varepsilon}{2}$; 2) la restriction de f à K'' est continue. Ceci prouve que f est mesurable.

D'autre part, si $\mathscr{C}$ désigne l'ensemble des parties compactes de T, on a $\overline{\int}^* f\,d\mu = \sup_{K\in\mathscr{C}} \int^* f\,\varphi_K\,d\mu$, $\overline{\int}^* f_\alpha\,d\mu = \sup_{K\in\mathscr{C}} \int^* f_\alpha\,\varphi_K\,d\mu$. Fixons K, et montrons, ce qui achèvera la démonstration, que $\sup_\alpha \int^* f_\alpha\,\varphi_K\,d\mu = \int^* f\,\varphi_K\,d\mu$. Autrement dit, nous supposons désormais que $f_\alpha(t) = f(t) = 0$ pour $t \notin K$.

Soit $A \subset K$ l'ensemble (mesurable) des points t tels que $f(t) = +\infty$. Supposons d'abord A négligeable. Il existe une suite croissante $K_1, K_2, \ldots$ d'ensembles compacts contenus dans $K-A$ tels que : 1) $K - \bigcup_n K_n$ est négligeable ; 2) pour tout n, les restrictions à K_n des f_α et de f sont continues (et <u>finies</u>). D'après le th. de Dini (Top.gén.,chap.X, § 5,th.1), f_α converge uniformément vers f, sur K_n donc $\int f\,\varphi_{K_n}\,d\mu$ est la borne supérieure des intégrales $\int f_\alpha\,\varphi_{K_n}\,d\mu$. Appliquant le th.3 du chap.IV, § 1, on a :

$$\int^* f\,d\mu = \sup_n \int f\,\varphi_{K_n}\,d\mu = \sup_n \sup_\alpha \int f_\alpha\,\varphi_{K_n}\,d\mu = \sup_n \int^* f_\alpha\,d\mu.$$

Si enfin $\mu(A) > 0$, il existe une partie compacte $B \subset A$ telle que $\mu(B) > 0$ et telle que les restrictions à B des f_α et de f soient continues. Appliquant le théorème de Dini aux f_α^{-1} et à f^{-1}, on voit que, pour tout nombre positif a, il existe un indice α tel que $f_\alpha(t) \geqslant a$ pour tout $t \in B$; donc $\int^* f_\alpha\,d\mu \geqslant \int^* f_\alpha\,\varphi_B\,d\mu \geqslant a\,\mu(B)$, de sorte que $\sup_\alpha \int^* f_\alpha\,d\mu = +\infty = \int^* f\,d\mu$.

12

Commentaires.- On peut essayer de modifier la déf.4 en substituant au mot "continue" le mot "semi-continue inférieurement". Avantages : la prop.7 s'étend, ce qui permet de généraliser certains théorèmes ultérieurs ; et elle contient alors le théorème 1 du chap.IV, §1. Inconvénients : la définition ne s'applique plus qu'aux fonctions numériques ; d'autre part, la démonstration de la prop.8 est différente et sensiblement plus délicate (ce serait immédiat si on pouvait utiliser la mesure induite ; mais la théorie de la mesure induite, dans la présente rédaction, repose en définitive sur la prop.8). En tous cas, ça mérite un exercice.

§ 2. Fonctions faiblement intégrables.

1. Définition des fonctions faiblement intégrables.- Soient F un espace vectoriel sur R localement convexe séparé, F' son dual, F'^* le dual algébrique de F' ; F peut être identifié canoniquement (en tant qu'espace vectoriel non topologique) à un sous-espace de F'^*, tout vecteur $z \in F$ étant identifié à la forme linéaire $z' \rightarrow \langle z,z' \rangle$ sur F (EVT ,chap.IV).

Soit f une application de T dans F telle que, pour tout $z' \in F'$, la fonction numérique $t \rightarrow \langle f(t),z' \rangle$ (que nous noterons simplement $\langle f,z' \rangle$) soit μ-intégrable ; désignons par $\varphi(z')$ son intégrale. L'application $z' \rightarrow \varphi(z')$ est une forme linéaire sur F', donc un élément de F'^*, qu'on appelle l'intégrale de f par rapport à μ et qu'on note $\mu(f)$ ou $\int f\, d\mu$ ou $\int f(t)\, d\mu(t)$. Autrement dit, on a par définition

(1) $$\left\langle \int f\, d\mu,\ z' \right\rangle = \int \langle f,z' \rangle\, d\mu$$

pour tout $z' \in F'$. Cette définition généralise évidemment celle qui a été donnée au chap.III, § 4,n°1, lorsque f est continue à support compact.

Définition 1.- Soit F un espace localement convexe séparé sur R . On dit qu'une application f de T dans F est faiblement intégrable pour μ , (ou faiblement μ-intégrable), lorsque les conditions suivantes sont remplies :

1) *pour tout* $z' \in F'$, *la fonction numérique* $\langle f, z' \rangle$ *est* μ*-intégrable*.

2) *l'intégrale* $\int f \, d\mu$ *appartient à* F.

Il est clair que, dans les définitions précédentes, seule joue un rôle la topologie faible $\sigma(F, F')$ associée à la topologie de F.

Si f est faiblement intégrable, toute fonction f_1 égale presque partout à f est faiblement intégrable, et on a $\int f_1 d\mu = \int f \, d\mu$. En d'autres termes, la valeur de $\mu(f)$ ne dépend que de la classe $\tilde{f}$ de f ; on la note encore $\mu(\tilde{f})$. Si une fonction f, à valeurs dans F, définie presque partout dans T, est équivalente à une fonction faiblement intégrable, on dit encore que f est faiblement intégrable, et on pose : $\mu(f) = \mu(\tilde{f})$.

Si F est un espace de Banach, et si f est intégrable, f est faiblement intégrable, et l'intégrale qu'on vient de définir coïncide avec l'intégrale définie au chap. IV, § 4 (cf. chap. IV, § 4, cor. 1 du th. 1). Par contre, f peut être faiblement intégrable sans être intégrable ni même mesurable (cf. exerc) Cependant, si F est de dimension finie, une fonction faiblement intégrable à valeurs dans F est intégrable (chap. IV, § 3, prop. 9).

Si f_1 et f_2 sont faiblement intégrables, il en est de même de f_1+f_2, et de af_1 pour tout nombre réel a ; et l'on a $\mu(f_1+f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2)$, $\mu(af_1) = a\mu(f_1)$.

2. *Propriétés des fonctions faiblement intégrables*.- *Proposition 1*.- *Soient* F, G *deux espaces localement convexes séparés, et* u *une application linéaire continue de* F *dans* G. *Pour toute fonction* f *définie dans* T *à valeurs dans* F *et faiblement intégrable, la fonction* $u \circ f$ *est faiblement intégrable, et on a* $\int (u \circ f) d\mu = u\left(\int f \, d\mu\right)$.

En effet, pour tout $z' \in G'$, la fonction $\langle u \circ f, z' \rangle = \langle f, {}^t u(z') \rangle$ est intégrable, et on a

$$\left\langle \int (u\circ f)\,d\mu, z' \right\rangle = \int \left\langle f, {}^t u(z') \right\rangle d\mu = \left\langle \int f\,d\mu, {}^t u(z') \right\rangle = \left\langle u\left(\int f\,d\mu\right), z' \right\rangle$$

ce qui montre que $\int (u\circ f)\,d\mu = u\left(\int f\,d\mu\right) \in G$.

Proposition 2.- Soit f une application de T dans l'espace localement convexe séparé F . Soient g et h deux fonctions numériques finies positives telles que fg soit faiblement intégrable et que $0 < \int^* gh\,d\mu < +\infty$. Pour tout ensemble convexe fermé $D \subset F$ tel que $f(t) \in h(t)D$ presque partout dans T, on a $\int fg\,d\mu \in \left(\int^* gh\,d\mu\right)D$.

En effet, D est l'intersection d'une famille de demi-espaces fermés définis par des relations $\langle z, a'_i \rangle \leq \alpha_i$, où $a'_i \in F'$ et $\alpha_i \in R$; on a donc $\langle f(t), a'_i \rangle \leq \alpha_i\, h(t)$ presque partout dans T, d'où $\langle f(t)g(t), a'_i \rangle \leq \alpha_i\, g(t)h(t)$ presque partout ; cela entraîne que $\left\langle \int fg\,d\mu, a'_i \right\rangle \leq \alpha_i \int^* gh\,d\mu$ pour tout indice i , ce qui démontre la proposition.

Corollaire 1.- Soit g une fonction numérique finie positive telle que $0 < \int^* g\,d\mu < +\infty$. Soit f une application de T dans F, telle que fg soit faiblement intégrable. Pour tout ensemble convexe fermé $D \subset F$ tel que $f(t) \in D$ presque partout dans T, le point $\int fg\,d\mu \Big/ \int^* g\,d\mu$ appartient à D .

Corollaire 2.- Soit f une application faiblement intégrable de T dans F . Pour toute semi-norme q de F semi-continue inférieurement, on a $q\left(\int f\,d\mu\right) \leq \int^* q(f)\,d\mu$.

En effet, supposons d'abord que q soit une norme. L'inégalité est évidente si $\int^* q(f)\,d\mu = +\infty$; et, si $\int^* q(f)\,d\mu = 0$, on a $f(t)=0$ presque partout dans T, donc $\int f\,d\mu = 0$. On peut donc supposer $0 < \int^* q(f)\,d\mu < +\infty$, et il suffit alors d'appliquer la prop.2, avec $g=1$, $h=q(f)$, D étant l'ensemble convexe fermé des $z \in F$ tels que $q(z) \leq 1$.

Si maintenant q est quelconque, soit F_o le sous-espace fermé de F formé des $z \in F$ tels que $q(z) = 0$; soit $z \to z^\sim$ l'application canonique de F sur F/F_o : on a $\int f^\sim d\mu = (\int f\, d\mu)^\sim$ (prop.1) ; la formule $q^\sim(z^\sim) = q(z)$ définit une norme $q^\sim$ sur F/F_o, et on a $q^\sim(\int f^\sim d\mu) = q(\int f\, d\mu)$, $\int^* q^\sim(f^\sim) d\mu = \int^* q(f) d\mu$; il suffit donc d'utiliser le résultat obtenu dans la première partie de la démonstration.

On notera que la fonction $q(f)$ n'est pas nécessairement mesurable (exerc.).

La proposition suivante qui généralise le th. de Lebesgue, est à vider en exercice.

Proposition 3.- Soit A un ensemble d'indices, filtré par un filtre $\mathfrak{F}$ à base dénombrable. Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'applications faiblement intégrables de T dans F qui, suivant le filtre $\mathfrak{F}$, convergent presque partout vers une fonction f . On suppose que F est faiblement quasi-complet, et que, pour tout $z' \in F'$, il existe une fonction numérique intégrable $h_{z'} \geqslant 0$ telle que $|\langle f_\alpha , z'\rangle| \leqslant h_{z'}$ presque partout pour tout $\alpha \in A$. Dans ces conditions, f est faiblement intégrable, et $\int f\, d\mu$ est limite faible suivant $\mathfrak{F}$ des intégrales $\int f_\alpha\, d\mu$.

Pour tout $z' \in F'$, les fonctions numériques $\langle f_\alpha , z'\rangle$ tendent presque partout vers $\langle f, z'\rangle$ suivant $\mathfrak{F}$. En vertu du th. de Lebesgue, $\langle f, z'\rangle$ est intégrable, et $\int \langle f, z'\rangle d\mu$ est limite des $\int \langle f_\alpha , z'\rangle d\mu$ suivant $\mathfrak{F}$. Cela signifie que, dans F'^* muni de la topologie $\sigma(F'^*, F')$, $\int f\, d\mu$ est limite faible suivant $\mathfrak{F}$ des intégrales $\int f_\alpha\, d\mu$. Or, ces dernières appartiennent à F , et leur ensemble est borné ; en effet, on a

$$\left|\langle \int f_\alpha\, d\mu , z'\rangle\right| = \left|\int \langle f_\alpha , z'\rangle d\mu\right| \leqslant \int h_{z'} d\mu .$$

Donc les intégrales $\int f_\alpha\, d\mu$ appartiennent à un ensemble faiblement complet de F, de sorte que leur limite $\int f\, d\mu$ appartient à F .

Rappelons que le dual faible d'un espace localement convexe séparé et <u>tonnelé</u> (par exemple d'un espace de Fréchet) est quasi-complet De même, l'espace $F = \mathcal{M}(A)$ des mesures sur un espace localement compact A, muni de la topologie vague (c'est-à-dire de la topologie $\sigma(F,F')$, F' étant l'espace $\mathcal{K}(A)$ des fonctions numériques finies continues dans A et à support compact) est quasi-complet. (D'ailleurs, ce deuxième exemple peut être considéré comme un cas particulier du premier, car $\mathcal{K}(A)$ peut être muni d'une topologie d'espace tonnelé pour laquelle $\mathcal{M}(A)$ est son dual : cf. chap.III § 2,exerc.1, et EVT, chap.II, §4, exerc. ; et chap.III, ?).

3. <u>Critères d'intégrabilité faible</u>.- <u>Proposition 4</u> (à vider en exercice). <u>Soit</u> f <u>une application de</u> T <u>dans l'espace localement convexe séparé</u> F , <u>telle que</u>, <u>pour tout</u> $z' \in F'$, $\langle f,z'\rangle$ <u>soit intégrable et bornée dans</u> T . <u>Si</u> F <u>est faiblement quasi-complet</u>, f <u>est faiblement intégrable</u>.

L'ensemble f(T) est borné dans F , donc son enveloppe convexe fermée C est aussi bornée, et par suite faiblement complète. Considérons f comme une application de T dans F'^*, muni de la topologie $\sigma(F'^*, F')$. L'ensemble C est l'enveloppe convexe fermée de f(T) <u>dans l'espace</u> F'^* . Alors, le cor.1 de la prop.2 montre que, pour toute partie compacte K de T, $\int f \varphi_K \, d\mu \in \mu(K)C$. D'autre part, pour tout $z' \in F'$, $\int \langle f,z'\rangle \varphi_K \, d\mu$ tend vers $\int \langle f,z'\rangle \, d\mu$ suivant l'ensemble filtrant Φ des parties compactes de T (§ 1,prop.5) ; cela signifie que, dans F'^* $\int f \varphi_K \, d\mu$ tend vers $\int f \, d\mu$ suivant Φ ; mais, pour tout $z' \in F'$, on a

$$\left|\left\langle \int f\varphi_K \, d\mu, z'\right\rangle\right| = \left|\int \langle f,z'\rangle \varphi_K \, d\mu\right| \leq \int |\langle f,z'\rangle| \, d\mu$$

ce qui prouve que l'ensemble des points $\int f \varphi_K \, d\mu$ est <u>borné</u> dans F , donc contenu dans une partie de F faiblement complète ; la limite $\int f\,d\mu$ de $\int f\varphi_K\,d\mu$ suivant Φ appartient donc à F .

Corollaire.- Soit f une application de T dans le dual faible G' d'un espace tonnelé G . Si, pour tout $z\in G$, $\langle f,z\rangle$ est intégrable et bornée, f est faiblement intégrable.

Théorème 1 (Gelfand-Dunford).- Soit f une application de T dans le dual faible G' d'un espace G limite inductive d'espaces de Fréchet. Si, pour tout $z\in G$, $\langle f,z\rangle$ est intégrable, f est faiblement intégrable.

Soit $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de sous-espaces vectoriels de G munis de topologies $\mathcal{C}_\alpha$ telles que chaque G_α soit un espace de Fréchet ; et supposons que la topologie $\mathcal{C}$ de G soit la limite inductive des $\mathcal{C}_\alpha$. Pour tout $z\in G$, soit $\tilde{f}_z$ la classe dans $L^1(T)$ de la fonction $f_z(t)=\langle f(t),z\rangle$. Nous allons montrer que l'application linéaire $z\to\tilde{f}_z$ de G dans l'espace de Banach $L^1(T)$ est continue ; il en résultera que $\int\tilde{f}_z d\mu=\langle\int f\,d\mu,z\rangle$ dépend continument de z , donc que $\int f\,d\mu\in G'$.

Pour cela, il suffit de prouver que la restriction à chaque G_α de l'application $z\to\tilde{f}_z$ est continue (Esp.vect.top.,chap.II, § 2,n°3). Donc il suffit de prouver que le graphe de l'application $z\to\tilde{f}_z$ restreinte à G_α est fermé dans l'espace produit $G_\alpha\times L^1(T)$. (Esp.vect.top.,chap.I, § 3, th.1). En d'autres termes, il suffit de montrer que, si la suite (z_n) tend vers z dans G_α , et si la suite $(\tilde{f}_{z_n})$ tend vers $\tilde{h}$ dans $L^1(T)$, alors $\tilde{h}=\tilde{f}_z$. Or, en extrayant une suite partielle de la suite (z_n), on peut supposer que la suite des fonctions f_{z_n} converge presque partout vers une fonction h de la classe $\tilde{h}$; d'autre part, pour tout $t\in T$, $f_{z_n}(t)=\langle f(t),z_n\rangle$ tend vers $\langle f(t),z\rangle=f_z(t)$. Donc $\tilde{f}_z=\tilde{h}$, et le th. est démontré.

<u>Corollaire</u>.- <u>Soit</u> f <u>une application de</u> T <u>dans le dual faible</u> G' <u>d'un espace de Banach</u> G ; <u>soit</u> A <u>un sous-ensemble partout dense de</u> G . <u>On suppose que</u> :

1°- <u>pour tout</u> $a \in A$, <u>la fonction numérique</u> $\langle f(t), a \rangle$ <u>est mesurable</u> ;

2°- <u>l'intégrale supérieure</u> $\int^* |f| d\mu$ <u>est finie</u>.

<u>Alors</u>, f <u>est faiblement intégrable</u>.

En effet, soit $z \in G$, et soit $(a_1, a_2, \ldots)$ une suite d'éléments de A tendant vers z . La suite de fonctions mesurables $\langle f(t), a_n \rangle$ tend vers la fonction $\langle f(t), z \rangle$ pour tout t , donc $\langle f, z \rangle$ est mesurable, et même intégrable puisque $\int^* |\langle f, z \rangle| d\mu \leqslant |z| \int^* |f| d\mu < +\infty$. Il suffit alors d'appliquer le th.1.

On peut donner des exemples d'applications faiblement intégrables f de T dans un espace de Banach réflexif G, telles que $\int^* |f| \, d\mu = +\infty$ (exerc.).

4. <u>Fonctions faiblement mesurables</u>.- Soient F un espace localement convexe, F' son dual. Soit f une application de T dans F . Conformément à la déf.1 du chap.IV, § 5, nous dirons que f est <u>faiblement mesurable</u> pour μ si, pour toute partie compacte K de T, il existe un ensemble μ-négligeable $N \subset K$, et une partition de $K-N$ formée d'une suite (finie ou infinie) (K_n) d'ensembles compacts, tels que la restriction de f à chacun des K_n soit continue pour la topologie faible $\sigma(F, F')$.

Si f est faiblement mesurable, $\langle f, z' \rangle$ est mesurable pour tout $z' \in F'$ (chap.IV, § 5, th.1). La réciproque est vraie si F est un espace de Banach et si, pour toute partie compacte $K \subset T$, il existe une partie dénombrable H de F telle que $f(t) \in \overline{H}$ pour presque tout $t \in K$; dans ce cas, f est même mesurable pour la topologie forte de F (chap. IV, § 5, prop. 10). On a d'autre part le résultat suivant :

<u>Proposition 5.</u>- <u>Soit</u> f <u>une application de</u> T <u>dans le dual faible</u> G' <u>d'un espace</u> G, <u>limite inductive d'une suite d'espaces localement convexes métrisables de type dénombrable</u>. <u>Si, pour tout</u> $z \in G$, $\langle f,z \rangle$ <u>est mesurable</u>, f <u>est faiblement mesurable</u>.

Supposons d'abord que G soit un espace localement convexe métrisable de type dénombrable. Soit $V_1, V_2, \ldots$ une suite fondamentale décroissante de voisinages ouverts de 0 dans G. Soit V_i° le polaire de V_i dans G'. La suite $V_1^\circ, V_2^\circ, \ldots$ est croissante et recouvre G'. Soit T_i l'ensemble des $t \in T$ tels que $f(t) \in V_i^\circ$. La suite $T_1, T_2, \ldots$ est croissante et recouvre T. D'autre part, chaque T_i est mesurable ; en effet, si A est un ensemble dénombrable dense dans G, T_i est l'ensemble des $t \in T$ tels que $|\langle f(t),x \rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in A \cap V_i$, donc T_i est l'intersection d'une suite d'ensembles mesurables. Ceci posé, soient K une partie compacte de T, et ε un nombre > 0. D'après ce qui précède, il existe un entier i et un ensemble compact $K_1 \subset K$ tels que : 1) $\mu(K-K_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; 2) $K_1 \subset T_i$. Puis il existe un ensemble compact $K_2 \subset K$ tel que : 1) $\mu(K_1-K_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; 2) les restrictions à K_2 de toutes les fonctions $\langle f(t),x \rangle$, pour $x \in A$, sont continues. Comme $f(K_2) \subset f(T_i) \subset V_i^\circ$ est équicontinue, la restriction à K_2 de la fonction $\langle f(t),x \rangle$ est continue pour tout $x \in G$. La proposition est donc établie dans ce cas.

Maintenant, soit $(G_1, G_2, \ldots)$ une suite de sous-espaces vectoriels de G, munis de topologies $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots)$ telles que chaque G_i soit un espace localement convexe métrisable ; et supposons que la topologie de G soit la limite inductive des $\mathcal{T}_i$. Soit $f_i(t)$ la restriction à G_i de la forme linéaire $f(t)$ sur G. L'application $t \to f_i(t)$ de T dans le dual faible G_i' de G_i est, d'après la première partie de la démonstration, faiblement mesurable. Pour toute partie compacte K de T et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe donc une partie compacte K_1 de K telle que : 1) $\mu(K-K_1) \leq \varepsilon$; 2) les restrictions à K_1 de <u>toutes</u> les applications $t \to f_i(t)$ sont faiblement continues ; autrement dit, la restriction à K_1 de l'application $t \to f(t)$ est faiblement continue. La proposition est donc complètement démontrée.

5. <u>Exemple</u> : <u>fonctions à valeurs dans un espace d'applications linéaires</u>. Soient G et H deux espaces localement convexes séparés sur R, G' et H' leurs duals. Soit F l'espace vectoriel des applications linéaires de G dans H', continues pour les topologies faibles $\sigma(G,G')$ et $\sigma(H',H)$. Tout élément U de F définit une forme bilinéaire f_U sur $G \times H$ par la formule $f_U(a,b) = \langle b, U_a \rangle$, et l'application $U \to f_U$ est une application linéaire biunivoque de F sur l'espace des formes bilinéaires séparément continues sur $G \times H$ (EVT,...).

Pour a et b fixés, $f_U(a,b)$ est une forme linéaire $\varphi_{a,b}$ sur F, c'est-à-dire un élément du dual algébrique F^* de F ; soit F' le sous-espace de F^* engendré par les $\varphi_{a,b}$; la forme bilinéaire canonique sur $F \times F^*$, restreinte à $F \times F'$, met F et F' en dualité faible. <u>Dans tout ce n°</u>, <u>F est supposé muni de la topologie</u> $\sigma(F,F')$: alors, le dual de F est F' (EVT,...). Dire qu'une application $t \to U_t$ de T dans F est faiblement intégrable signifie donc que :

1) pour tout $a \in G$ et tout $b \in H$, la fonction numérique $\langle b, U_t a \rangle$ est intégrable ;

2) il existe un $U \in F$ tel que $\langle b, U_a \rangle = \int \langle b, U_t a \rangle \, d\mu(t)$ pour tout $a \in G$ et tout $b \in H$: ou, ce qui est équivalent, la forme bilinéaire $(a,b) \to \int \langle b, U_t a \rangle \, d\mu(t)$ est séparément continu sur $G \times H$.

Dans ces conditions, le cor. de la prop.4 et le th.1 entraînent aussitôt les propositions suivantes :

Proposition 6.- Supposons G et H tonnelés. Soit $t \to U_t$ une application de T dans F telle que, pour tout $a \in G$ et tout $b \in H$, la fonction numérique $\langle b, U_t a \rangle$ soit intégrable et bornée. Alors, la fonction $t \to U_t$ est faiblement intégrable.

Proposition 7.- Supposons que G et H soient des limites inductives d'espaces de Fréchet. Soit $t \to U_t$ une application de T dans F telle que, pour tout $a \in G$ et tout $b \in H$, la fonction numérique $\langle b, U_t a \rangle$ soit intégrable. Alors, la fonction $t \to U_t$ est faiblement intégrable.

Rappelons que, lorsque G et H sont des espaces de Fréchet, F est aussi l'espace des applications linéaires fortement continues de G dans H' (EVT...).

Corollaire.- Supposons que G et H soient des espaces de Banach. Soit A (resp.B) un sous-ensemble partout dense de G (resp.H). Soit $t \to U_t$ une application de T dans F satisfaisant aux conditions suivantes :

1°- quels que soient $a \in A$ et $b \in B$, la fonction numérique $t \to \langle b, U_t a \rangle$ est mesurable ;

2°- l'intégrale supérieure $\int^* |U_t| \, d\mu(t)$ est finie.

Alors, la fonction $t \to U_t$ est faiblement intégrable.

En effet, pour tout $a \in G$ et tout $b \in H$, la fonction $t \to \langle b, U_t a \rangle$ est limite en chaque point d'une suite de fonctions $t \to \langle b_n, U_t a_n \rangle$ où $a_n \in A$ et $b_n \in B$, fonctions qui sont mesurables ; et $|\langle b, U_t a \rangle| \leqslant |b| |a| |U_t|$, de sorte que la fonction $t \to \langle b, U_t a \rangle$ est intégrable.

La prop.5 entraîne aussitôt la proposition suivante :

Proposition 8.- Supposons que G (*resp.* H) *soit limite inductive d'une suite d'espaces localement convexes métrisables de type dénombrable. Soit* $t \to U_t$ *une application de* T *dans* F *telle que, pour tout* $a \in G$ *et tout* $b \in H$, *la fonction numérique* $\langle b, U_t a \rangle$ *soit mesurable. Alors, la fonction* $t \to U_t$ *est faiblement mesurable.*

6. *Fonctions faiblement essentiellement intégrables.*- Soit f une application de T dans F telle que, pour tout $z' \in F'$, la fonction numérique $\langle f, z' \rangle$ soit essentiellement intégrable. Alors, la fonction $z' \to \overline{\int} \langle f, z' \rangle \, d\mu$ est une forme linéaire sur F', donc un élément de F'^*, qu'on note $\overline{\int} f \, d\mu$. Si cet élément appartient à F, on dit que f est *faiblement essentiellement intégrable* pour μ , ou faiblement essentiellement μ-intégrable. Si f est faiblement intégrable, f est faiblement essentiellement intégrable, et on a $\overline{\int} f \, d\mu = \int f \, d\mu$. Si F est un espace de Banach, et si f est essentiellement intégrable, f est faiblement essentiellement intégrable, et l'intégrale qu'on vient de définir coïncide avec celle qui a été définie au § 1, n° 2 .

Si f est faiblement essentiellement intégrable, toute fonction f_1 égale à f localement presque partout est faiblement essentiellement intégrable, et on a $\overline{\mu}(f_1) = \overline{\mu}(f)$. En d'autres termes, la valeur de $\overline{\mu}(f)$ ne dépend que de la classe $\dot{f}$ de f pour la relation d'équivalence "f et g sont égales localement presque partout ; on la note encore $\overline{\mu}(\dot{f})$. Si une fonction f , à valeurs dans F , définie localement presque partout dans T , appartient à la classe g d'une fonction g faiblement essentiellement intégrable, on dit encore que f est faiblement essentiellement intégrable, et on pose $\overline{\mu}(f) = \overline{\mu}(g)$.

23

La démonstration du th.1 se transpose immédiatement et fournit le résultat suivant :

Théorème 2.- Soit f une application de T dans le dual faible G' d'un espace G limite inductive d'espaces de Fréchet. Si, pour tout $z \in G$, $\langle f,z \rangle$ est essentiellement intégrable, f est faiblement essentiellement intégrable.

Exercices.

1. Soient F un espace localement convexe séparé sur R, q une semi-norme semi-continue inférieurement sur F, f une application faiblement mesurable de T dans F . Montrer que la fonction numérique q(f) est mesurable.

2. Soit T l'intervalle $[0,1]$, la mesure de Lebesgue sur T , F l'espace vectoriel sur R des fonctions numériques finies μ-mesurables sur T, muni de la topologie de la convergence simple.

a. Montrer que F est un espace localement convexe dans lequel existe un ensemble dénombrable partout dense (considérer une suite partout dense dans l'espace des fonctions numériques finies continues sur T , muni de la topologie de la convergence uniforme).

b. Pour tout $t \in T$, soit f_t l'élément du dual F' de F défini par $\langle f_t,z \rangle = z(t)$ pour tout $t \in T$. Montrer que, pour tout $z \in F$, l'application $t \to \langle f_t,z \rangle$ est mesurable, mais que l'application $t \to f_t$ n'est pas faiblement mesurable (lorsqu'on munit F' de la topologie $\sigma(F',F)$).

3. Soit μ la mesure de Lebesgue sur $T = [0,1]$, et soit F un espace hilbertien ayant une base orthonormale $(e_t)_{t \in T}$ équipotente à T . Soit f l'application $t \to e_t$ de T dans F . Montrer que f est faiblement intégrable, que $\int f \, d\mu = 0$, mais que f n'est pas faiblement mesurable.

§ 3. Intégration des mesures.

1. Fonctions à valeurs dans un espace de mesures.- Nous nous proposons d'intégrer des fonctions à valeurs dans un espace de mesures, ou, comme on dit parfois, d'intégrer "une mesure dépendant d'un paramètre".

Soient X un espace localement compact, $\mathcal{K}(X)$ l'espace des fonctions numériques continues à support compact dans X , $\mathcal{M}(X)$ l'espace des mesures sur X . Les espaces $\mathcal{K}(X)$ et $\mathcal{M}(X)$ sont mis en dualité faible par la forme bilinéaire

$$\langle f, \lambda \rangle = \int f(x)\ d\lambda(x) .$$

Dans tout ce § , $\mathcal{M}(X)$ est muni de la topologie faible correspondante, c'est-à-dire de la topologie vague. Pour les fonctions à valeurs dans $\mathcal{M}(X)$, nous emploierons donc les qualificatifs "vaguement intégrable" , "vaguement mesurable",..., au lieu de "faiblement intégrable", "faiblement mesurable",...

Pour toute partie compacte K de X , l'espace $\mathcal{K}(X,K) \subset \mathcal{K}(X)$ des fonctions numériques continues à support contenu dans K , muni de la norme $\|f\| = \sup |f(x)|$, est un espace de Banach. Si on munit $\mathcal{K}(X)$ de la topologie limite inductive des topologies fortes des $\mathcal{K}(X,K)$, le dual de $\mathcal{K}(X)$ est l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{K}(X)$ dont les restrictions aux $\mathcal{K}(X,K)$ sont continues ; ce dual est donc $\mathcal{M}(X)$. Alors, le th.2 du § 2 admet comme cas particulier la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u>.- <u>Si</u> $t \to \lambda_t$ <u>est une application de</u> T <u>dans</u> $\mathcal{M}(X)$ <u>telle que, pour toute</u> $f \in \mathcal{K}(X)$, <u>la fonction numérique</u> $t \to \langle f, \lambda_t \rangle = \int f(x)\, d\lambda_t(x)$ <u>soit essentiellement</u> μ<u>-intégrable, alors l'application</u> $t \to \lambda_t$ <u>est vaguement essentiellement</u> μ<u>-intégrable</u>.

<u>Remarque</u>.- Si, pour tout $t \in T$, λ_t est une mesure positive, la <u>prop.1</u> est évidente directement, car la forme linéaire $f \to \overline{\int} \langle f, \lambda_t \rangle \, d\mu(t)$ sur $\mathcal{K}(X)$ est évidemment positive.

Par abus de notations, une intégrale telle que $\overline{\int} \langle f, \lambda_t \rangle \, d\mu(t)$ sera aussi notée $\overline{\int} d\mu(t) \int f(x) \, d\lambda_t(x)$. Par définition de l'intégrale $\nu = \overline{\int} \lambda_t \, d\mu(t)$, on a alors, pour toute $f \in \mathcal{K}(X)$

(1) $\int f(x) d\nu(x) = \overline{\int} d\mu(t) \int f(x) d\lambda_t(x)$.

Nous aurons à faire usage du lemme suivant :

<u>Lemme</u>.- <u>Si</u> A <u>est réunion dénombrable de parties compactes de</u> X, <u>il existe une suite</u> (C_n) <u>de parties compactes de</u> T <u>et un ensemble</u> N <u>localement négligeable pour</u> μ <u>dans</u> T, <u>tels que</u> $\lambda_t^*(A) = 0$ <u>pour</u> $t \notin (\bigcup_n C_n) \cup N$. <u>Si l'application</u> $t \to \lambda_t$ <u>est vaguement intégrable</u>, <u>on peut supposer</u> N <u>négligeable pour</u> μ.

Il suffit évidemment de prouver le lemme quand A est compact. Soit alors k une fonction positive de $\mathcal{K}(X)$ telle que $\varphi_A \leq k$. La fonction $t \to \langle k, \lambda_t \rangle$ est essentiellement μ-intégrable, donc égale localement presque partout (pour μ) à une fonction μ-intégrable, de sorte que son support est réunion d'une suite d'ensembles compacts et d'un ensemble localement négligeable pour μ, d'après le lemme 3 du chap. IV, § 5. D'autre part, la relation $\int k(x) d\lambda_t(x) = 0$ entraîne $\lambda^*_t(A) = 0$. Si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement intégrable, le raisonnement se transpose de lui-même.

2. <u>Intégrales superposées de fonctions semi-continues inférieurement</u>.- Dans toute la suite de ce §, on suppose que l'application $t \to \lambda_t$ de T dans $\mathcal{M}(X)$ vérifie les hypothèses suivantes :

1) elle est vaguement essentiellement intégrable et vaguement mesurable ;

2) λ_t est une mesure positive pour tout t.

Alors, $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ est une mesure positive.

[Commentaire.- Si on remplace l'hypothèse que $t \to \lambda_t$ est vaguement ~~essentiellement~~ intégrable par l'hypothèse que $t \to \lambda_t$ est vaguement intégrable, les intégrales essentielles s'introduisent dans la suite exactement de la même manière. D'autre part : 1) Dans la mesure induite et la mesure produit, $t \to \lambda_t$ est, en fait, vaguement intégrable. 2) Dans la mesure définie par une densité $g(t)$ localement intégrable (auquel cas $\lambda_t = g(t)\,\varepsilon_t$), $t \to \lambda_t$ est encore vaguement intégrable, à condition toutefois que g soit partout définie, ce qu'il est d'ailleurs préférable de supposer pour éviter des circonlocutions ; mais lorsque g est définie localement presque partout, $t \to \lambda_t$ ne peut être que vaguement essentiellement intégrable. 3) Dans la mesure image, le point de vue de l'intégrale essentielle présente un avantage, léger mais qui me paraît décisif : on peut démontrer la transitivité sans restrictions (comparer la prop.5 du § 6 à la prop.4 de la p.126 de l'Etat 2, où l'espace intermédiaire F doit être dénombrable à l'infini)] .

Remarque.- Si X est polonais, les espaces de Banach $\mathcal{K}(X,K)$ sont de type dénombrable, et $\mathcal{K}(X)$ est limite inductive d'une suite de sous-espaces $\mathcal{K}(X,K)$. Alors, toute application vaguement essentiellement intégrable de T dans $\mathcal{M}(X)$ est vaguement mesurable en vertu de la prop.5 du § 2 .

Proposition 2.- Soit f une fonction positive finie ou non, semi-continue inférieurement, définie dans X . La fonction $t \to \int^* f(x)\,d\lambda_t(x)$ est μ-mesurable, et on a

$$(2) \qquad \int^* f(x)\,d\nu(x) = \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x)\,d\lambda_t(x) \quad .$$

Si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue, la fonction $t \to \int^* f(x)\,d\lambda_t(x)$ est semi-continue inférieurement (chap.IV, § 1,prop.4) de sorte que l'égalité (2) s'écrit aussi :

$$(2') \qquad \int^* f(x)\,d\nu(x) = \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\,d\lambda_t(x) \ .$$

Soit $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille, filtrant pour la relation $\leqslant$, des fonctions positives de $\mathcal{K}(X)$ majorées par f . Posons : $h(t) = \int^* f(x)\,d\lambda_t(x)$. La fonction h(t) est l'enveloppe supérieure des fonctions $t \to \langle g_\alpha , \lambda_t \rangle$. Pour toute partie compacte C de T et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte C' de C telle que : 1) $\mu(C-C') \leqslant \varepsilon$; 2) les restrictions à C' des fonctions $t \to \langle g_\alpha , \lambda_t \rangle$ sont continues ; (en effet, l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement mesurable) ; autrement dit, la famille des fonctions $t \to \langle g_\alpha , \lambda_t \rangle$ est équimesurable. Alors, d'après la prop.7 du § 1, h(t) est mesurable, et on a :

$$\overline{\int}^* h(t)\,d\mu(t) = \sup_\alpha \overline{\int}^* \langle g_\alpha , \lambda_t \rangle\,d\mu(t) = \sup_\alpha \int \langle g_\alpha , \lambda_t \rangle\,d\mu(t)$$

$$= \sup_\alpha \nu(g_\alpha) = \int^* f(x)\,d\nu(x) \ .$$

<u>Remarques</u>.- 1. Si l'application $t \to \int^* f(x)\,d\lambda_t(x)$ est nulle en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles -intégrables, la formule (2) se réduit à la formule (2'), d'après la prop.1 du § 1. Il en est notamment ainsi dans les cas suivants :

A) L'application $t \to \lambda_t$ est nulle en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles μ-intégrables (par exemple, T est dénombrable à l'infini).

B) L'application $t \to \lambda_t$ est vaguement intégrable et le support de f est contenu dans une réunion dénombrable de parties compactes de X (par exemple, X est dénombrable à l'infini) ; il suffit en effet, dans ce cas, d'appliquer le lemme 1 .

2. La formule (2') est en général inexacte même si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement intégrable (§ 5, exerc.8) de sorte que l'introduction des intégrales supérieures essentielles dans cette étude est inévitable.

3. <u>Intégrales superposées de fonctions positives quelconques</u>.-

<u>Proposition 3</u>.- <u>Soit</u> f <u>une fonction numérique positive finie ou non définie dans</u> X . <u>On a</u>

$$(3) \qquad \int^* f(x)d\nu(x) \geqslant \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x) \; .$$

<u>Si l'application</u> $t \rightarrow \lambda_t$ <u>est vaguement continue</u>, <u>on a</u>

$$(3') \qquad \int^* f(x)d\nu(x) \geqslant \int^* d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x)$$

En effet, soit g une fonction semi-continue inférieurement dans X majorant f . Pour tout $t \in T$, on a $\int^* f(x)d\lambda_t(x) \leqslant \int^* g(x)d\lambda_t(x)$; donc $\overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x) \leqslant \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* g(x)d\lambda_t(x) = \int^* g(x)d\nu(x)$.
Si l'application $t \rightarrow \lambda_t$ est vaguement continue, on a de même

$$\int^* d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x) \leqslant \int^* d\mu(t) \int^* g(x)d\lambda_t(x) = \int^* g(x)d\nu(x) \; .$$

Les inégalités (3) et (3') résultent alors de la définition de $\int^* f(x)d\nu(x)$.

<u>Remarques</u>. 1. La formule (3) se réduit à la formule (3') lorsque l'application $t \rightarrow \int^* f(x)d\lambda_t(x)$ est nulle en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles μ-intégrables, et par exemple dans les cas (A) et (B) du n° 2 .

2. Même lorsque l'application $t \rightarrow \lambda_t$ est vaguement continue, on peut avoir $\int^* d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x) > \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x)$,(exerc.2) de sorte que la formule (3') ne peut se déduire directement de la formule (3).

3. En général, la formule $\int^* f(x)d\nu(x) \geqslant \int^* d\mu(t) \overline{\int}^* f(x)d\lambda_t(x)$ est inexacte (§ 5,exerc.8), et a fortiori la formule (3'). La formule $\overline{\int}^* f(x)d\nu(x) \geqslant \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x)$ est inexacte même si l'application $t \rightarrow \lambda_t$ est vaguement continue (§ 8,exerc.,Etat 2,p.111,ex.2). Enfin, même si T et X sont dénombrables à l'infini et si l'application $t \rightarrow \lambda_t$ est vaguement continue, la fomule $\int^* f(x)d\nu(x) = \int^* d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x)$ est inexacte (§ 8,n°1, Remarque).

Corollaire 1.- *Soit $N \subset X$ un ensemble ν-négligeable. Alors N est λ_t-négligeable, sauf pour un ensemble localement négligeable (resp. négligeable si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue) de valeurs de t.*

Corollaire 2.- *Soit f une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace topologique G, et ν-mesurable. Supposons que, pour toute partie compacte C de T, il existe une partie A de X, réunion dénombrable d'ensembles ν-intégrables, telle que la restriction de f à $\complement A$ soit λ_t-mesurable pour presque tout $t \in C$. Alors, f est λ_t-mesurable sauf pour un ensemble localement négligeable de valeurs de t.*

S'il existe une partie A de X, réunion dénombrable d'ensembles ν-intégrables, telle que la restriction de f à $\complement A$ soit λ_t-mesurable pour presque tout $t \in T$, et si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue, alors f est λ_t-mesurable pour presque tout $t \in T$.

En effet, soit C une partie compacte de T, et montrons que f est λ_t-mesurable pour presque tout $t \in C$. Par hypothèse, il existe une partie A de X, réunion dénombrable d'ensembles ν-intégrables, et une partie H de C négligeable pour μ, telles que la restriction de f à $\complement A$ soit λ_t-mesurable pour $t \in C-H$. Il existe d'autre part une suite $(K_1, K_2, \ldots)$ de parties compactes de X, et une partie ν-négligeable N de X, telles que $A = N \cup \bigcup_n K_n$, et que la restriction de f à chaque K_n soit continue. Soit H' une partie μ-négligeable de C telle que N soit λ_t-négligeable pour $t \in C-H'$ (cor.1). Alors, pour $t \in C-(H \cup H')$, la restriction de f à $\complement A$ est λ_t-mesurable, la restriction de f à chaque K_n est continue, et N est λ_t-négligeable, d'où résulte aussitôt que f est λ_t-mesurable.

Il peut arriver que f soit ν-mesurable, mais que, pour tout $t \in T$, f soit non mesurable pour λ_t, et ceci même si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue (§ 8, exerc.1 ; Etat 2, p.111, ex.2).

4. Intégrales superposées de fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Théorème 1.- *Soit f une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace de Banach F, et intégrable pour la mesure* $\nu = \overline{\int} \lambda_t \, d\mu(t)$. *Alors, f est* λ_t*-intégrable, sauf pour un ensemble N localement négligeable de valeurs de t ; la fonction* $t \to \int f(x) d\lambda_t(x)$, *définie pour* $t \notin N$, *est essentiellement intégrable, et on a*

$$(4) \qquad \int f(x) d\nu(x) = \overline{\int} d\mu(t) \int f(x) d\lambda_t(x)$$

Si l'application $t \to \lambda_t$ *est vaguement continue, N est négligeable, et l'application* $t \to \int f(x) d\lambda_t(x)$ *est intégrable, de sorte que la relation (4) peut s'écrire*

$$(4') \qquad \int f(x) d\nu(x) = \int d\mu(t) \int f(x) d\lambda_t(x)$$

Puisque f est ν-intégrable, f est ν-mesurable et nulle en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles ν-intégrables. D'après le cor.2 de la prop.3, il existe un ensemble $N \subset T$ localement négligeable (resp. négligeable si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue) tel que f soit λ_t-mesurable pour $t \notin N$. D'autre part, on a d'après la prop.3.

$$\overline{\int}^* d\mu(t) \int^* |f(x)| d\lambda_t(x) \leq \int^* |f(x)| d\nu(x) < +\infty$$

donc l'ensemble N' des points $t \in T$ tels que $\int^* |f(x)| d\lambda_t(x) = +\infty$ est localement négligeable ; on voit de même que N' est négligeable si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue. Pour $t \notin N \cup N'$, f est λ_t-intégrable.

La formule (4) est vraie lorsque f est combinaison linéaire de fonctions de $\mathcal{K}(T)$ à coefficients dans F (d'après la formule (1)). En général, il existe une suite f_n de telles fonctions pour lesquelles

$\lim_{n\to\infty} \int^* |f(x)-f_n(x)|\, d\nu(x)$ et $\lim_{n\to\infty} \left|\int f(x)\, d\nu(x) - \int f_n(x)\, d\nu(x)\right| = 0$.

D'après la prop.3, on a $\lim_{n\to\infty} \int^* d\mu(t) \int^* |f(x)-f_n(x)|\, d\lambda_t(x) = 0$, et a fortiori

(5) $\lim_{n\to\infty} \overline{\int}^* \left|\int f(x)\, d\lambda_t(x) - \int f_n(x)\, d\lambda_t(x)\right| d\mu(t) = 0$.

Etant donnée la forme des fonctions f_n, l'application $t \to \int f_n(x)\, d\lambda_t(x)$ appartient évidemment à $\mathcal{L}^1_F(T,\mu)$. Alors, (5) prouve que l'application $t \to \int f(x)\, d\lambda_t(x)$ appartient à $\overline{\mathcal{L}}^1_F(T,\mu)$, et que $\overline{\int} d\mu(t) \int f(x)\, d\lambda_t(x)$ est la limite des intégrales $\int d\mu(t) \int f_n(x)\, d\lambda_t(x) = \int f_n(x)\, d\nu(x)$, c'est-à-dire $\int f(x)\, d\nu(x)$. Si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue, le raisonnement se transpose de lui-même.

<u>Remarque</u>.- Lorsque l'application $t \to \int f(x)\, d\lambda_t(x)$ est définie et nulle en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles μ-intégrables, N est négligeable, la fonction $t \to \int f(x)\, d\lambda_t(x)$ est intégrable, et on a la formule (4'). Il en est ainsi notamment dans les cas (A) et (B) du n° 2 .

<u>Corollaire 1</u>.- <u>Soit</u> $A \subset X$ <u>un ensemble</u> ν-<u>intégrable</u>. <u>Alors</u>, A <u>est</u> λ_t-<u>intégrable sauf pour un ensemble</u> N <u>localement négligeable de valeurs de</u> t ; <u>la fonction</u> $t \to \lambda_t(A)$, <u>définie pour</u> $t \notin N$, <u>est essentiellement intégrable</u>, <u>et on a</u> $\nu(A) = \overline{\int} \lambda_t(A)\, d\mu(t)$. <u>Si l'application</u> $t \to \lambda_t$ <u>est vaguement continue</u>, N <u>est négligeable</u>, <u>l'application</u> $t \to \lambda_t(A)$ <u>est intégrable</u>, <u>et on a</u> $\nu(A) = \int \lambda_t(A)\, d\mu(t)$.

<u>Corollaire 2</u>.- <u>Soit</u> f <u>une fonction positive finie ou non sur</u> X , ν-<u>mesurable</u>, <u>et nulle en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles</u> ν-<u>intégrables</u>. <u>Alors</u>, <u>la fonction</u> $t \to \int^* f(x)\, d\lambda_t(x)$ <u>est mesurable</u>, <u>et on a</u> $\int^* f(x)\, d\nu(x) = \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x)$. <u>Si l'application</u> $t \to \lambda_t$ <u>est vaguement continue</u>, <u>on a</u> $\int^* f(x)\, d\nu(x) = \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x)$.

Soit (A_n) une suite croissante de parties ν-intégrables de X telles que $f(x)=0$ pour $x \notin \bigcup_n A_n$, et soit $f_n = \inf(x, f\varphi_{A_n})$. Chaque fonction f_n est ν-intégrable. Il existe un ensemble localement négligeable $N_n \subset T$ tel que, pour tout $t \notin N_n$, f_n soit λ_t-intégrable. L'ensemble $N = \bigcup_n N_n$ est localement négligeable, et, pour tout $t \notin N$, chacune des fonctions f_n est λ_t-intégrable. D'après le th.3 du chap.IV, §1, la fonction $t \to \int^* f(x)d\lambda_t(x)$ est l'enveloppe supérieure des fonctions $t \to \int^* f_n(x)d\lambda_t(x)$, qui sont des fonctions essentiellement intégrables de t ; donc la fonction $t \to \int^* f(x)d\lambda_t(x)$ est mesurable ; en outre, on a

$$\int^* f(x)d\nu(x) = \sup_n \int^* f_n(x)d\nu(x) = \sup_n \overline{\int} d\mu(t)\int f_n(x)d\lambda_t(x) =$$
$$= \overline{\int^*} d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x) .$$

Si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue, on voit de même que $\int^* f(x)\, d\nu(x) = \int^* d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x)$.

Les conclusions du cor. ne sont plus nécessairement exactes si la fonction f n'est pas nulle en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles ν-intégrables (§ 8, exerc. : Etat 2, p.111, exerc.2).

5. Intégrales faibles superposées.- Proposition 4.- Soit f une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace localement convexe séparé F sur R. Supposons f faiblement ν-intégrable, et faiblement λ_t-intégrable sauf pour des valeurs de t formant un ensemble N localement négligeable. Alors, la fonction $t \to \int f(x)d\lambda_t(x)$, définie pour $t \notin N$, est faiblement essentiellement intégrable, et on a : $\int f(x)d\nu(x) = \overline{\int} d\mu(t)\int f(x)d\lambda_t(x)$.

Si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue, et si N est négligeable, la fonction $t \to \int f(x)d\lambda_t(x)$ est faiblement intégrable, et on a : $\int f(x)d\nu(x) = \int d\mu(t)\int f(x)d\lambda_t(x)$.

En effet, soit F' le dual de F. Pour tout $z' \in F'$, la fonction $\langle f, z' \rangle$ est λ_t-intégrable lorsque $t \notin N$; la fonction $t \to \int \langle f(x) z' \rangle d\lambda_t(x)$, définie pour $t \notin N$, est essentiellement μ-intégrable (th.1), et on a :

$$\left\langle \int f(x)\, d\nu(x), z' \right\rangle = \int \langle f(x), z' \rangle d\nu(x) = \overline{\int} d\mu(t) \int \langle f(x), z' \rangle d\lambda_t(x)$$
$$= \overline{\int} \left\langle \int f(x) d\lambda_t(x), z' \right\rangle d\mu(t) .$$

Donc la fonction $t \to \int f(x) d\lambda_t(x)$, définie pour $t \notin N$, est faiblement essentiellement intégrable, et on a $\int f(x) d\nu(x) = \overline{\int} d\mu(t) \int f(x) d\lambda_t(x)$. On démontre de même la deuxième partie de la proposition.

Il peut arriver que f soit faiblement ν-intégrable, mais ne soit faiblement λ_t-intégrable pour aucune valeur de t (même avec T, X compacts métrisables, et F hilbertien de type dénombrable ; cf. § 8, exerc.: Etat 2, p.118, exerc.15). Lorsque F est un espace de mesures, on a cependant la proposition suivante :

<u>Proposition 5 (transitivité)</u>.- <u>Soit</u> $x \to \rho_x$ <u>une fonction définie dans</u> X, <u>à valeurs dans l'espace</u> $\mathcal{M}(Y)$ <u>des mesures sur un espace localement compact</u> Y . <u>On suppose que</u> :

1) <u>comme précédemment</u>, <u>l'application</u> $t \to \lambda_t$ <u>est vaguement</u> μ-<u>mesurable</u> (resp. <u>vaguement continue</u>) <u>et vaguement essentiellement</u> μ-<u>intégrable</u> ; $\lambda_t \geqslant 0$ <u>pour tout</u> $t \in T$; <u>on pose toujours</u> $\nu = \overline{\int} \lambda_t \, d\mu(t)$;

2) <u>l'application</u> $x \to \rho_x$ <u>est vaguement</u> ν-<u>mesurable et vaguement</u> ν-<u>intégrable</u> ; $\rho_x \geqslant 0$ <u>pour tout</u> $x \in X$;

3) <u>il existe pour toute partie compacte</u> C <u>de</u> T (resp. <u>il existe</u>) :

a) <u>une partie</u> A <u>de</u> X, <u>réunion dénombrable d'ensembles</u> ν-<u>intégrables</u>, <u>telle que la restriction à</u> $\complement A$ <u>de l'application</u> $x \to \rho_x$ <u>soit vaguement</u> λ_t-<u>mesurable pour presque tout</u> $t \in C$ (resp. <u>pour presque tout</u> $t \in T$) ;

b) une partie fermée B de Y , contenue dans une réunion dénombrable d'ensembles compacts, telle que, pour toute fonction numérique h(y) continue à support compact contenu dans $\complement B$, l'application $x \rightarrow \langle \rho_x , h \rangle$ soit λ_t -intégrable pour presque tout $t \in C$ (resp. pour presque tout $t \in T$).

Alors, l'application $x \longrightarrow \rho_x$ est vaguement λ_t -intégrable, sauf pour un ensemble N localement négligeable (resp. négligeable) de valeurs de t . L'application $t \rightarrow \int \rho_x \, d\lambda_t(x)$, définie pour $t \notin N$, est vaguement essentiellement intégrable (resp. vaguement intégrable) pour μ , et on a

$$\overline{\int} d\mu(t) \int \rho_x \, d\lambda_t(x) = \int \rho_x \, d\nu(x)$$

$$(\text{resp. } \int d\mu(t) \int \rho_x \, d\lambda_t(x) = \int \rho_x \, d\nu(x) \quad).$$

D'après la prop.4, tout revient à prouver que l'application $x \longrightarrow \rho_x$ est vaguement λ_t-intégrable sauf pour un ensemble localement négligeable de valeurs de t (resp. négligeable si l'application $t \longrightarrow \lambda_t$ est vaguement continue).

Soit donc C une partie compacte de T . Par hypothèse, il existe une partie fermée B de Y, contenue dans la réunion d'une suite $K_1, K_2, \ldots$ de parties compactes de Y, telle que, pour toute fonction numérique h(y) continue à support compact contenu dans $\complement B$, l'application $x \longrightarrow \langle \rho_x , h \rangle$ soit λ_t-intégrable pour tout $t \in C - H_1$, H_1 étant une partie μ -négligeable de C . Soit $U_1, U_2, \ldots$ une suite de parties ouvertes relativement compactes de Y, telles que $K_n \subset U_n$. Pour $n=1,2,\ldots$, soit $h_n(y)$ une fonction positive continue à support compact sur Y, égale à 1 sur U_n . Les fonctions $x \rightarrow \langle \rho_x , h_n \rangle$ sont ν -intégrables, donc λ_t -intégrables pour $t \in C - H_2$, H_2 étant une partie μ -négligeable de C .

D'autre part, d'après l'hypothèse 3a, l'application $x \longrightarrow \rho_x$ est vaguement λ_t-mesurable pour $t \in C - H_3$, H_3 étant une partie μ -négligeable de C (cor.2 de la prop.3). Ceci posé, nous allons prouver que l'application $x \to \rho_x$ est vaguement λ_t-intégrable pour tout $t \in C-(H_1 \cup H_2 \cup H_3)$. Pour cela, soit h une fonction positive continue à support compact et majoré par 1 sur Y. Le support de h est recouvert par les ensembles ouverts $\complement B, U_1, U_2, \ldots$, et on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini. D'après le lemme 1 du chap.III, §2, il existe un nombre fini de fonctions positives continues à support compact $u_o(x), u_1(x), \ldots, u_p(x)$ telles que : 1) $h(x) = \sum_{i=0}^{p} u_i(x)$; 2) $u_o(x)$ a son support contenu dans $\complement B$; 3) $u_i(x)$, pour $1 \leq i \leq p$, a son support contenu dans un des ensembles U_n, qu'on peut supposer être U_i. Alors, l'application $x \to \langle \rho_x, u_o \rangle$ est λ_t-intégrable pour tout $t \in C-H_1$ puisque u_o a son support contenu dans $\complement B$; pour $1 \leq i \leq p$, la fonction positive $x \to \langle \rho_x, u_i \rangle$ est λ_t-mesurable pour $t \in C-H_3$, et d'intégrale supérieure finie si $t \in C-H_2$ puisque $\int^* \langle \rho_x, u_i \rangle d\lambda_t(x) \leq \int^* \langle \rho_x, h_i \rangle d\lambda_t(x)$. Ceci achève de prouver que l'application $x \to \rho_x$ est λ_t-intégrable sauf pour un ensemble localement négligeable de valeurs de t. Si l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue, le raisonnement se transpose de lui-même sous les hypothèses indiquées à la fin de l'énoncé de la proposition.

Exercices.

1. Soit f une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace topologique, et mesurable pour $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. Supposons que l'application $t \to \lambda_t$ soit vaguement intégrable, et qu'il existe une partie A de X, réunion dénombrable d'ensembles compacts, telle que la restriction de f à $\complement A$ soit λ_t-mesurable pour presque tout $t \in T$. Alors, f est λ_t-mesurable pour presque tout $t \in T$.

2. Si $\lambda_t = \varepsilon_t$ pour tout $t \in T$, et si f est une fonction positive localement négligeable mais non négligeable pour μ sur T, montrer que
$$\int^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x) > \overline{\int}^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x) .$$

§ 4. Intégration de mesures ponctuelles.

1. Préliminaires.- Soient X un espace localement compact, et $t \to \lambda_t$ une application de T dans l'espace $\mathcal{M}(X)$ des mesures sur X . Dans tout ce § , on suppose que

1) $\lambda_t \geqslant 0$ pour tout $t \in T$;

2) l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement essentiellement intégrable on pose $\nu = \overline{\int} \lambda_t \, d\mu(t)$;

3) pour tout $t \in T$, la mesure λ_t est nulle ou a son support réduit à un point.

On a donc $\lambda_t = g(t)\varepsilon_{\pi(t)}$, où g est une fonction numérique finie positive sur T , et π une application de T dans X . La fonction g(t) est déterminée de manière unique par λ_t , et l'application π est déterminée de manière unique sur l'ensemble des points où $\lambda_t \neq 0$, c'est-à-dire $g(t) \neq 0$. Si π et g sont continues, l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement continue, en vertu de la prop.6 du chap.III, § 2 . Il en résulte aussitôt que, si π et g sont μ-mesurables, l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement μ-mesurable. Dans toute la suite de ce § , on fait encore l'hypothèse suivante :

4) π et g sont mesurables.

Pour pouvoir traduire les résultats du § 3, nous aurons besoin des remarques suivantes. Soit t un élément fixé de T .

1) Si f est une fonction positive finie ou non définie dans X , on a
$$\int^* f(x)\, d\lambda_t(x) = \overline{\int}^* f(x)\, d\lambda_t(x) = f(\pi(t))g(t) \quad \text{lorsque } g(t) > 0 ,$$

et $\int^* f(x)d\lambda_t(x) = \overline{\int}^* f(x)d\lambda_t(x)=0$ lorsque $g(t)=0$. Nous conviendrons que $0 \cdot \infty = 0$. On peut donc écrire, dans tous les cas :
$\int^* f(x)d\lambda_t(x) = f(\pi(t))g(t)$.

2) Toute fonction définie dans X est λ_t -mesurable.

3) Soit f une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace de Banach. Alors, f est λ_t -intégrable, et $\int f(x)d\lambda_t(x) = f(\pi(t))g(t)$. Si f est à valeurs dans $\overline{R}$, f est λ_t -intégrable si et seulement si $f(\pi(t))g(t) < +\infty$, et on a alors $\int f(x)d\lambda_t(x) = f(\pi(t)g(t)$.

Enfin, nous aurons à faire usage du lemme suivant :

<u>Lemme 1</u>.- <u>Soient</u> T <u>et</u> X <u>deux espaces localement compacts</u>, <u>et</u> π <u>une application continue propre de</u> T <u>dans</u> X . <u>Soit</u> g <u>une fonction numérique finie ou non</u>, <u>semi-continue inférieurement</u>, <u>définie sur</u> T . <u>Pour</u> $x \in X$, <u>soit</u> f(x) <u>la borne inférieure de</u> g(t) <u>pour</u> $t \in \overset{-1}{\pi}(x)$, <u>cette borne inférieure étant prise égale à</u> $+\infty$ <u>si</u> $\overset{-1}{\pi}(x)=\emptyset$. <u>Alors</u>, f <u>est semi-continue inférieurement</u>.

Observons d'abord que $\pi(T)$ est fermé dans X . En effet, il suffit de prouver que, pour toute partie compacte K de X , $\pi(T)\cap K$ est fermé. Or, $\pi(T)\cap K = \pi(\overset{-1}{\pi}(K))$, et $\overset{-1}{\pi}(K)$ est compact (puisque π est propre).

Comme $f(x) = +\infty$ quand x appartient à l'ensemble ouvert $\complement\pi(T)$, il suffit évidemment de prouver que la restriction de f à $\pi(T)$ est semi-continue inférieurement. Autrement dit, on peut supposer $X = \pi(T)$. D'autre part, pour tout point $x \in X$, x possède un voisinage compact V , et $\overset{-1}{\pi}(V)$ est compact, de sorte qu'on peut supposer en outre X et T compacts.

Ceci posé, soit a un nombre réel fini, et montrons que l'ensemble $A \subset X$ des x tels que $f(x) > a$ est ouvert. Soit $x_0 \in A$. On a $g(t) > a$ pour tout $t \in \overset{-1}{\pi}(x_0)$, donc pour tout t d'un voisinage W de $\overset{-1}{\pi}(x_0)$. On peut supposer W saturé pour la relation d'équivalence "$\pi(y) = \pi(z)$", (Top.gén., 2è éd., chap.I, § 8, prop.7) ; alors, $\pi(W)$ est un voisinage de x_0 dans lequel f majore strictement a, ce qui achève la démonstration.

2. Intégrales supérieures de fonctions positives.- Théorème 1.- Soit f une fonction positive finie ou non définie dans X. On a

$$(1) \qquad \overline{\int}^* f(x)\,d\nu(x) = \overline{\int}^* f(\pi(t))g(t)\,d\mu(t) \;.$$

Si π et g sont continues si $g(t) > 0$ pour tout $t \in T$, et si π est propre on a de plus

$$(1') \qquad \int^* f(x)\,d\nu(x) = \int^* f(\pi(t))g(t)\,d\mu(t) \;.$$

Traitons d'abord le cas plus facile où π et g sont continues, où $g(t) > 0$, et où π est propre. Soit $\ell(t)$ une fonction semi-continue inférieurement sur T majorant la fonction $f(\pi(t))g(t)$. On va montrer que $\int^* \ell(t)\,d\mu(t) \geqslant \int^* f(x)\,d\nu(x)$. Vu l'arbitraire de la fonction ℓ, il en résultera que $\int^* f(\pi(t))g(t)\,d\mu(t) \geqslant \int^* f(x)\,d\nu(x)$, ce qui, avec la formule (3') du § 3 ; achèvera de démonter la formule (1').

Pour cela, nous définissons une fonction $\overline{f}(x)$ sur X de la manière suivante : $\overline{f}(x)$ est la borne inférieure de $\ell(t)/g(t)$ sur l'ensemble $\overset{-1}{\pi}(x)$ (si cet ensemble est vide, la borne inférieure est considérée comm égale à $+\infty$). La fonction $\overline{f}$ possède les propriétés suivantes :

1) $\overline{f} \geqslant f$; 2) $\overline{f}(\pi(t))g(t) \leqslant \ell(t)$; 3) $\overline{f}$ est semi-continue inférieurement (ceci résulte du lemme 1, et du fait que ℓ/g est semi-continue inférieurement). Alors, tenant compte de la prop.1 du § 3, on a

$$\int^* \ell(t)\,d\mu(t) \geqslant \int^* \overline{f}(\pi(t))g(t)\,d\mu(t) = \int^* \overline{f}(x)\,d\nu(x) \geqslant \int^* f(x)\,d\nu(x)$$

ce qui achève de prouver notre assertion.

Passons au cas général où π et g sont mesurables. Nous supposerons d'abord que le support de f est compact, donc contenu dans un ensemble ouvert relativement compact U. Appliquant le lemme 1 du § 3, soient N une partie de T localement négligeable pour μ, et $(C_1, C_2, \ldots)$ une suite de parties compactes de T, telles que $\varphi_V(\pi(t))g(t) = \int^* \varphi_V(x)\,d\lambda_t(x) = 0$ pour $t \notin N \cup (\bigcup_n C_n)$. On peut supposer que la restriction de π et g à chaque C_n est continue que g est strictement positive sur chaque C_n, et que la suite (C_n) est croissante. Posons $A = \bigcup_n C_n$, $A' = N \cup A$.

Soit $\ell(t)$ une fonction semi-continue inférieurement sur T, majorant la fonction $\varphi_A(t) f(\pi(t)) g(t)$. On va montrer que $\int^* \ell(t)\,d\mu(t) \geqslant \int^* f(x)\,d\nu(x)$. Vu l'arbitraire de la fonction ℓ, il en résultera que

$$\int^* \varphi_A(t) f(\pi(t)) g(t)\,d\mu(t) \geqslant \int^* f(x)\,d\nu(x)$$

donc que

$$\overline{\int}^* f(\pi(t)) g(t)\,d\mu(t) \geqslant \int^* f(x)\,d\nu(x)$$

ce qui, avec la formule (3) du § 3, prouvera que

$$(2) \qquad \overline{\int}^* f(\pi(t)) g(t)\,d\mu(t) = \int^* f(x)\,d\nu(x) .$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, définissons une fonction $f_n(x)$ sur X de la manière suivante :

1) Si $x \notin U$, $f_n(x) = 0$

2) Si $x \in U$, $f_n(x)$ est la borne inférieure de $\ell(t)/g(t)$ sur l'ensemble $\overset{-1}{\pi}(x) \cap C_n$ (si cet ensemble est vide, la borne inférieure est considérée comme égale à $+\infty$).

Les fonctions $f_n(x)$ possèdent les propriétés suivantes :

1) $f_n(x) \geqslant f(x)$: c'est immédiat si $x \notin U$, ou si $x \in U$ et $\overset{-1}{\pi}(x) \cap C_n = \emptyset$; si $x \in U$ et $\overset{-1}{\pi}(x) \cap C_n \neq \emptyset$, on a, pour $t \in \overset{-1}{\pi}(x) \cap C_n$,

$\ell(t) \geqslant \varphi_A(t)\, f(\pi(t))g(t) = f(\pi(t))g(t)$, donc $\ell(t)/g(t) \geqslant f(\pi(t)) =$ $= f(x)$, donc $f_n(x) \geqslant f(x)$.

2) $f_n(\pi(t))g(t) \leqslant \ell(t)$ si $t \notin A'-C_n$: en effet, soit $x = \pi(t)$; si $x \notin U$, ou si $x \in U$ et $g(t)=0$, c'est immédiat ; si $x \in U$ et $g(t) \neq 0$, on a $\varphi_U(\pi(t))g(t) \neq 0$, donc $t \in A'$, donc $t \in C_n$, donc $t \in \overset{-1}{\pi}(x) \cap C_n$; par suite, $f_n(x) \leqslant \ell(t)/g(t)$, c'est-à-dire $f_n(\pi(t))g(t) \leqslant \ell(t)$.

3) La fonction f_n est semi-continue inférieurement . Il suffit de le vérifier en un point $x \in U$, et ceci résulte alors du lemme 1, appliqué à la restriction de π à C_n et à la fonction $\ell(t)/g(t)$, qui est semi-continue inférieurement sur C_n .

La suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots$ est évidemment décroissante. Soit $\bar{f}(x)$ son enveloppe inférieure. La fonction $\bar{f}$ possède les propriétés suivantes :

1) $\bar{f}(x) \geqslant f(x)$;

2) $\bar{f}(\pi(t))g(t) \leqslant \ell(t)$ si $t \in A'-A = N$;

3) $\bar{f}$ est ν-mesurable, et évidemment nulle en dehors de U .

Alors, le cor.2 du th.1 du § 3 entraîne :

$$\int^* \ell(t)\,d\mu(t) = \overline{\int}^* \ell(t)\,d\mu(t) \geqslant \overline{\int}^* f(\pi(t))g(t)\,d\mu(t) = \int^* \bar{f}(x)\,d\nu(x)$$
$$\geqslant \int^* f(x)\,d\nu(x)$$

ce qui achève de prouver la formule (2).

Passons au cas où f est quelconque. Pour toute partie compacte K de X, on a, d'après ce qui précède

$$\int^* \varphi_K(x)\, f(x)\, d\nu(x) = \overline{\int}^* \varphi_K(\pi(t))\, f(\pi(t))g(t)\,d\mu(t) \leqslant \int^* f(\pi(t))g(t)\,d\mu(t),$$

donc, vu l'arbitraire de K

$$\overline{\int}^* f(x)\,d\nu(x) \leqslant \overline{\int}^* f(\pi(t))g(t)\,d\mu(t) .$$

D'autre part, soient C une partie compacte de T, et b un nombre quelconque tel que $b < \int^* \varphi_C(t)\, f(\pi(t)) g(t) d\mu(t)$. L'ensemble C est la réunion d'un ensemble négligeable N et d'une suite croissante de parties compactes (C_n) tels que la restriction de π à chaque C_n soit continue ; les ensembles $K_n = \pi(C_n)$ sont compacts ; on a, pour n assez grand

$$b \leqslant \int^* \varphi_{C_n}(t)\, f(\pi(t)) g(t) d\mu(t) \leqslant \overline{\int}^* \varphi_{K_n}(\pi(t)) f(\pi(t)) g(t) d\mu(t) =$$
$$= \overline{\int}^* \varphi_{K_n}(x)\, f(x)\, d\nu(x) \leqslant \overline{\int}^* f(x)\, d\nu(x)$$

donc, vu l'arbitraire de b

$$\int^* \varphi_C(t) f(\pi(t)) g(t) d\mu(t) \leqslant \overline{\int}^* f(x)\, d\nu(x)$$

puis, vu l'arbitraire de C

$$\overline{\int}^* f(\pi(t))\, g(t) d\mu(t) \leqslant \overline{\int}^* f(x)\, d\nu(x)$$

ce qui achève de démontrer la formule (1).

Corollaire.- Soit f une application de X dans un espace topologique G, et soit S l'ensemble des points $t \in T$ tels que $g(t) > 0$. Pour que $f(x)$ soit ν-mesurable, il faut et il suffit que la restriction de $f(\pi(t))$ à S soit μ-mesurable.

Supposons f mesurable pour ν, et soit C une partie compacte de S. Il existe une suite (C_n) de parties compactes de C telles que $C - \bigcup_n C_n$ soit négligeable et que la restriction de π à chaque C_n soit continue. Il suffit de prouver que la restriction de $f(\pi(t))$ à chaque C_n est mesurable. Les ensembles $K_n = \pi(C_n)$ sont compacts, et il existe, pour chaque indice n, une suite (K_{nm}) de parties compactes de K_n telle que $M_n = K_n - \bigcup_m K_{nm}$ soit ν-négligeable et que la restriction de f à chaque K_{nm} soit continue. Posons $C_{nm} = \overset{-1}{\pi}(K_{nm}) \cap C_n$, $B_n = \overset{-1}{\pi}(M_n) \cap C_n$. Les ensembles C_{nm} sont compacts, et la restriction de $f(\pi(t))$ à C_{nm} est continue.

Enfin, la fonction $\varphi_{M_n}(x)\, f(x)$ est ν-négligeable, donc (th.1) $\varphi_{M_n}(\pi(t))\, f(\pi(t))g(t)$ est localement μ-négligeable, donc $\varphi_{B_n}(t)\, f(\pi(t))$ est μ-négligeable, ce qui achève de prouver que $f(\pi(t))$, restreinte à S, est μ-mesurable.

Réciproquement, supposons que la restriction de $f(\pi(t))$ à S soit μ-mesurable. Soit K une partie compacte de X . La fonction $\varphi_K(\pi(t))g(t)$ est nulle en dehors d'un ensemble réunion d'une suite de parties compactes et d'un ensemble localement négligeable (§ 3, lemme 1), donc $\overset{-1}{\pi}(K) \cap S$ est réunion d'une suite (C_n) de parties compactes et d'un ensemble négligeable N . On peut supposer que les restrictions de π et de $f(\pi(t))$ à chaque C_n sont continues. Soit $K_n = \pi(C_n) \subset K$, et $M = K - \bigcup_n K_n$. Les ensembles K_n sont compacts. L'ensemble M est localement négligeable (donc négligeable) en vertu du th.1, car $\varphi_M(\pi(t))g(t)$ est nulle en dehors de N . Enfin, K_n peut être identifié à l'espace quotient de C_n par la relation $\pi(x) = \pi(y)$, et π à l'application canonique de C_n sur cet espace quotient (Top. gén.,2è éd.,chap.I, § 10, cor.1 de la prop.8), donc la restriction de f(x) à K_n est continue, ce qui prouve que f(x) est ν-mesurable.

3. Intégration de fonctions à valeurs dans un espace de Banach.-

Théorème 3.- *Soit f une fonction définie dans X , à valeurs dans un espace de Banach F ou dans R . Pour que f(x) soit essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit que $f(\pi(t))g(t)$ soit essentiellement μ-intégrable, et on a alors*

$$(3) \qquad \overline{\int} f(x)\,d\nu(x) = \overline{\int} f(\pi(t))\; g(t)\,d\mu(t) \quad .$$

Supposons π et g continues, $g(t) > 0$ pour tout $t \in T$, et π propre. Pour que f(x) soit ν-intégrable, il faut et il suffit que $f(\pi(t))g(t)$

soit μ*-intégrable, et on a alors*

$$(3') \qquad \int f(x)\, d\nu(x) = \int f(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t) .$$

Pour que $f(x)$ soit essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit que $f(x)$ soit ν-mesurable et que $\int^* |f(x)|\, d\nu(x) < +\infty$; donc, il faut et il suffit que $f(\pi(t))\, g(t)$ soit μ-mesurable et que $\int^* |f(\pi(t))|\, g(t)\, d\mu(t) < +\infty$ (th.1) ; autrement dit, il faut et il suffit que $f(\pi(t))g(t)$ soit essentiellement μ-intégrable.

Supposons qu'il en soit ainsi. Il existe une suite $(f_n(x))$ de combinaisons linéaires de fonctions de $\mathcal{K}(X)$ à coefficients dans F telle que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\int} |f(x)-f_n(x)|\, d\nu(x)=0 \ : \ \lim_{n\to\infty} \left| \overline{\int} f(x)\, d\nu(x) - \int f_n(x)\, d\nu(x) \right| = 0$$

donc (th.1)

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\int} |f(\pi(t)\, g(t) - f_n(\pi(t))g(t)|\, d\mu(t) = 0$$

et par suite

$$\lim_{n\to\infty} \left| \overline{\int} f(\pi(t))g(t)\, d\mu(t) - \overline{\int} f_n(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t) \right| = 0$$

Or, à cause de la forme des fonctions f_n, on a

$$\int f_n(x)\, d\nu(x) = \overline{\int} f_n(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t)$$

ce qui achève la démonstration de la formule (3). La formule (3') se démontre de manière analogue.

4. Intégrales faibles.- *Proposition 1.*- *Soit* f *une fonction définie dans* X, *à valeurs dans un espace localement convexe séparé* F *sur* R . *Pour que* $f_{(x)}$ *soit faiblement essentiellement* ν*-intégrable, il faut et il suffit que* $f(\pi(t))\, g(t)$ *soit faiblement essentiellement* μ*-intégrable, et on a alors*

$$(4) \qquad \overline{\int} f(x)\, d\nu(x) = \overline{\int} f(\pi(t))g(t)\, d\mu(t) .$$

Supposons π et g *continues*, $g(t) > 0$ *pour tout* $t \in T$, *et* π *propre*.

Pour que f(x) *soit faiblement* ν -*intégrable*, *il faut et il suffit que* $f(\pi(t))g(t)$ *soit faiblement* μ -*intégrable*, *et on a alors*

$$(4') \qquad \int f(x)d\nu(x) = \int f(\pi(t))g(t)d\mu(t) .$$

En effet, soit F' le dual de F . Supposons f faiblement essentiellement ν-intégrable. Alors, pour tout $z' \in F'$, la fonction $\langle f(x), z'\rangle$ est essentiellement ν-intégrable, donc $\langle f(\pi(t)g(t), z'\rangle$ est essentiellement μ-intégrable (th.2), et on a

$$\left\langle \overline{\int} f(x)d\nu(x), z'\right\rangle = \overline{\int}\langle f(x), z'\rangle\, d\nu(x) = \overline{\int}\langle f(\pi(t))g(t), z'\rangle d\mu(t).$$

Donc la fonction $f(\pi(t))\, g(t)$ est faiblement essentiellement μ-intégrable, et on a $\overline{\int} f(x)d\nu(x) = \overline{\int} f(\pi(t))g(t)d\mu(t)$. On voit de même que, si $f(\pi(t))g(t)$ est faiblement essentiellement μ-intégrable f(x) est faiblement essentiellement ν-intégrable. La formule (4') se démontre de manière analogue.

Corollaire.- *Soit* $x \to \rho_x$ *une fonction définie dans* X , *à valeurs dans l'espace* $\mathcal{M}(Y)$ *des mesures sur un espace localement compact* Y . *Pour que l'application* $x \to \rho_x$ *soit vaguement essentiellement* ν -*intégrable*, *il faut et il suffit que l'application* $t \to \rho_{\pi(t)}\, g(t)$ *soit vaguement essentiellement* μ -*intégrable*, *et on a alors*

$$(5) \qquad \overline{\int} \rho_x\, d\nu(x) = \overline{\int} \rho_{\pi(t)}\, g(t)\, d\mu(t) .$$

Supposons π *et* g *continues*, $g(t) > 0$ *pour tout* $t \in T$, *et* π *propre*. *Pour que l'application* $x \to \rho_x$ *soit vaguement* ν -*intégrable*, *il faut et il suffit que l'application* $t \to \rho_{\pi(t)}\, g(t)$ *soit vaguement* μ-*intégrable*, *et on a alors*

$$(5') \qquad \int \rho_x\, d\nu(x) = \int \rho_{\pi(t)}\, g(t)d\mu(t) .$$

Exercice.

Soient g une fonction numérique finie définie sur T, π une application de T dans l'espace localement compact X , S l'ensemble des $t \in T$ tles que $g(t) \neq 0$. Si l'application $t \rightarrow \lambda_t = g(t)\,\varepsilon_{\pi}(t)$ est vaguement continue (resp. vaguement mesurable) les restrictions de g et π à S sont continues (resp. mesurables). (Montrer d'abord que, si l'application $t \rightarrow \lambda_t$ est vaguement continue, π est continue en tout point t_o de l'ensemble ouvert S ; pour cela, considèrer, pour tout voisinage V de $\pi(t_o)$, une fonction positive f de $\mathcal{K}(X)$ nulle hors de V et égale à 1 en $\pi(t_o)$.

§ 5. Mesures définies par des densités numériques.

1. Fonctions localement intégrables.- Définition 1.- On dit qu'une fonction g, définie dans T, à valeurs dans un espace de Banach F, est localement intégrable pour μ , ou localement μ -intégrable si, pour tout point $t \in T$, il existe un voisinage V de t tel que la fonction $g\varphi_V$ soit intégrable pour μ .

La notion de fonction localement intégrable est de caractère local. Plus précisément, soit g une fonction telle que, pour tout $t \in T$, il existe un voisinage V_t de t et une fonction localement intégrable g_t telle que $g(x) = g_t(x)$ localement presque partout dans V_t ; alors, g est localement intégrable. En particulier, une fonction égale localement presque partout à une fonction localement intégrable est localement intégrable. Cela permet de dire qu'une fonction g définie localement presque partout (resp. une fonction numérique définie et finie localement presque partout) est localement intégrable si elle est égale localement presque partout à une fonction définie (resp. définie et finie) partout et localement intégrable ; dans ce cas, on dit aussi que la classe $\dot{g}$ de g modulo la relation d'équivalence "g et g' sont égales localement presque partout" est localement intégrable.

Proposition 1.- Pour qu'une fonction g , définie dans T , à valeurs dans F, soit localement intégrable, il faut et il suffit que g soit mesurable et que, pour tout ensemble compact K , $\int^* |g \varphi_K| \, d\mu < +\infty$.

Les conditions sont suffisantes, car elles entraînent que $g \varphi_K$ est intégrable (chap. IV, § 5, th. 5). Montrons qu'elles sont nécessaires. Si g est localement intégrable, g est mesurable en vertu de la prop. 4 du chap. IV § 5 (principe de localisation). D'autre part, soit K une partie compacte de T ; pour tout $t \in K$, il existe un voisinage V_t de t tel que $g \varphi_{V_t}$ soit intégrable : soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ des points de K tels que $V_{t_1}, V_{t_2}, \ldots, V_{t_n}$ recouvrent K : on a $|g \varphi_K| \leq \sum_{i=1}^{n} |g \varphi_{V_{t_i}}|$, donc $\int^* |g \varphi_K| \, d\mu < +\infty$.

En particulier, toute fonction mesurable g bornée dans chaque ensemble compact est localement intégrable. De même, pour tout nombre p tel que $1 \leq p < +\infty$, toute fonction $g \in \mathcal{L}_F^p$ est localement intégrable, car, pour tout ensemble compact K , φ_K appartient à $\mathcal{L}^q$ (q étant le nombre tel que $p^{-1} + q^{-1} = 1$), donc $g \varphi_K$ est intégrable (chap. IV, § 6, th. 2).

Corollaire 1.- Soient g une fonction positive localement intégrable, et g' une fonction mesurable à valeurs dans F . Si, pour toute partie compacte K de T , existe une constante M_K telle que $|g'(x)| \leq M_K \, g(x)$ pour tout $x \in K$, g' est localement intégrable.

Corollaire 2.- Une fonction localement intégrable à support compact est intégrable.

Corollaire 3.- Soient g une fonction localement intégrable, et f une fonction mesurable bornée à support compact. Alors, fg est intégrable.

C'est une conséquence immédiate des cor. 1 et 2 .

<u>Proposition 2.- Pour qu'une fonction</u> g , <u>définie dans</u> T, <u>à valeurs dans</u> F , <u>soit localement intégrable, il faut et il suffit que, pour toute fonction numérique finie</u> f <u>continue et à support compact,</u> fg <u>soit intégrable</u>.

La condition est nécessaire d'après le cor.3 de la prop.1. Réciproquement, supposons cette condition remplie. Si K est un ensemble compact quelconque, il existe une application continue f de T dans $[0,1]$, égale à 1 dans K et à support compact (chap.III, § 2,lemme 1) ; on a alors $g\varphi_K = (fg)\varphi_K$, et, comme fg est intégrable, il en est de même de $g\varphi_K$.

2. <u>Mesures définies par des densités numériques</u>.- Soit g une fonction numérique finie définie dans T . Posons, pour tout $t \in T$, $\lambda_t = g(t)\varepsilon_t$. Dire que l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement essentiellement intégrable, c'est dire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$, l'application $t \to \langle f, \lambda_t \rangle = f(t)g(t)$ est essentiellement intégrable ; de même, dire que $t \to \lambda_t$ est vaguement intégrable, c'est dire que, pour toute $f \in \mathcal{K}(T)$, $t \to f(t)g(t)$ est intégrable ; ainsi, il revient au même de dire que l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement essentiellement intégrable ou de dire que cette application est vaguement intégrable, et cela signifie encore que g est localement intégrable. En outre, dans ce cas, g est mesurable, de sorte que l'application $t \to \lambda_t$ est vaguement mesurable (§ 4, n°1).

Supposons donc g localement μ-intégrable, et soit $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. Par définition de cette intégrale, on a, pour toute $f \in \mathcal{K}(T)$

$$\int f(t)\,d\nu(t) = \int f(t)g(t)\,d\mu(t)$$

<u>Définition 2.- Si</u> g <u>est localement intégrable, on dit que la mesure</u> $f \to \int fg \, d\mu$ <u>sur</u> T <u>est le produit de la mesure</u> μ <u>par la fonction</u> g ,

ou la mesure de densité g par rapport à μ, et on la note $g.\mu$. Toute mesure produit d'une mesure positive μ par une fonction localement intégrable est appelée mesure de base μ.

Au lieu d'écrire $\nu = g.\mu$, on écrit aussi $d\nu(t)=g(t)d\mu(t)$, ou $g(t) = \dfrac{d\nu(t)}{d\mu(t)}$.

Dans le cas où g est continue, on retrouve la définition donnée au chap. III, § 2, n°4.

3. Intégration par rapport à une mesure de base μ. - Soit g une fonction positive localement intégrable pour μ. Alors, $\nu = g.\mu$ est une mesure positive. Les résultats du § 4 donnent les énoncés suivants :

Proposition 3.- Soit f une fonction positive définie sur T. On a $\overline{\int}^{*} f\, d\nu = \overline{\int}^{*}(fg)\, d\mu$. Si g est continue et strictement positive, on a $\int^{*} f\, d\nu = \int^{*}(fg)\, d\mu$.

Proposition 4.- Pour qu'une application f de T dans un espace topologique G soit ν-mesurable, il faut et il suffit que la restriction de f à l'ensemble des points où $g(t) \neq 0$ soit μ-mesurable.

Théorème 1.- Soit f une fonction définie dans T, à valeurs dans un espace de Banach F ou dans $\overline{R}$. Pour que f(t) soit essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit que f(t)g(t) soit essentiellement μ-intégrable, et l'on a alors $\overline{\int} f\, d\nu = \overline{\int}(fg)\, d\mu$.

Supposons g continue et strictement positive. Alors, pour que f(t) soit ν-intégrable, il faut et il suffit que f(t)g(t) soit μ-intégrable, et l'on a alors $\int f\, d\nu = \int (fg)\, d\mu$.

Corollaire.- Pour que la mesure $g.\mu$ soit bornée, il faut et il suffit que g soit essentiellement μ-intégrable.

En effet, dire que $\nu = g.\mu$ est bornée signifie que la fonction 1 est ν-intégrable, ou, ce qui revient au même, (§ 1,prop.1) essentiellement ν-intégrable.

<u>Proposition 5</u>.- <u>Soit</u> f <u>une fonction définie dans</u> T, <u>à valeurs dans un espace localement convexe séparé</u> F <u>sur</u> R . <u>Pour que</u> f(t) <u>soit faiblement essentiellement</u> ν<u>-intégrable, il faut et il suffit que</u> f(t)g(t) <u>soit faiblement essentiellement</u> μ<u>-intégrable, et on a alors</u> $\int f(t)d\nu(t) = \int f(t)g(t)d\mu(t)$.

<u>Supposons</u> g <u>continue et strictement positive</u>. <u>Alors, pour que</u> f(t) <u>soit faiblement</u> ν<u>-intégrable, il faut et il suffit que</u> f(t)g(t) <u>soit faiblement</u> μ<u>-intégrable, et on a alors</u> $\int f(t)d\nu(t) = \int f(t)g(t)d\mu(t)$.

<u>4</u>. <u>Propriétés des mesures de base</u> μ .- <u>Proposition 6</u>.- <u>Si</u> g_1 <u>et</u> g_2 <u>sont deux fonctions numériques localement intégrables pour</u> μ , g_1+g_2 <u>est localement intégrable pour</u> μ , et $(g_1+g_2).\mu = g_1.\mu + g_2.\mu$.

Cette proposition résulte aussitôt des définitions.

<u>Proposition 7</u>.- <u>Si</u> g <u>est une fonction numérique localement intégrable pour</u> μ , <u>on a</u> $(g.\mu)^+ = g^+.\mu$, $(g.\mu)^- = g^-.\mu$, $|g.\mu| = |g|.\mu$.

Posons $g^+.\mu = \mu_1$, $g^-.\mu = \mu_2$. On a $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Pour prouver que $\mu_1 = \mu^+$, $\mu_2 = \mu^-$, il suffit de prouver que, si une mesure positive ν est telle que $\nu \leq \mu_1$, $\nu \leq \mu_2$, on a $\nu = 0$. Or, soit A_1 (resp. A_2) l'ensemble des points $t \in T$ tels que $g(t) \geqslant 0$ (resp. $g(t) \leqslant 0$). On a $\varphi_{A_2} g^+ = 0$, donc A_2 est localement négligeable pour μ_1 d'après la prop.3, et a fortiori localement négligeable pour ν . De même, A_1 est localement négligeable pour ν . Donc $T = A_1 \cup A_2$ est localement négligeable pour ν , de sorte que $\nu = 0$. Les formules $(g.\mu)^+ = g^+.\mu$, $(g.\mu)^- = g^-.\mu$ sont donc démontrées, et la formule $|g.\mu| = |g|.\mu$ s'en déduit aussitôt .

<u>Corollaire 1.- Pour que la mesure</u> $g.\mu$ <u>soit nulle, il faut et il suffit que</u> g <u>soit nulle localement presque partout</u>.

Supposons g nulle localement presque partout ; alors, pour toute $f \in \mathcal{K}(T)$, fg est négligeable, donc $g.\mu=0$. Réciproquement, supposons $g.\mu=0$, et prouvons que g est localement négligeable. D'après la prop.7, on peut se limiter au cas où $g \geqslant 0$. Alors, comme 1 est négligeable pour $g.\mu$, g est localement négligeable pour μ en vertu de la prop.3 .

<u>Corollaire 2.- Soient</u> g_1 <u>et</u> g_2 <u>deux fonctions numériques localement intégrables. Pour que</u> $g_1.\mu = g_2.\mu$, <u>il faut et il suffit que</u> g_1 <u>et</u> g_2 <u>soient égales localement presque partout</u>.

Ceci résulte aussitôt du cor.1 .

En vertu de ce corollaire, on peut définir la mesure $g.\mu$, lorsque g est une fonction localement intégrable définie localement presque partout (n° 1), comme la mesure $g'.\mu$, où g' est une fonction définie sur tout T et égale à g localement presque partout.

<u>Corollaire 3.- Soit</u> g <u>une fonction numérique localement intégrable pour</u> μ. <u>Pour que</u> $g.\mu$ <u>soit une mesure positive, il faut et il suffit que</u> $g(t) \geqslant 0$ <u>localement presque partout</u>.

En effet, dire que $g.\mu \geqslant 0$ équivaut à dire que $(g.\mu)^- = 0$, c'est-à-dire que $g^-.\mu=0$, c'est-à-dire que $g^-=0$ localement presque partout.

<u>Proposition 8.- Soit</u> g_n <u>une suite de fonctions numériques localement intégrables pour</u> μ, <u>et supposons la suite des mesures</u> $g_n.\mu$ <u>croissante. Pour que cette suite soit majorée dans l'espace</u> $\mathcal{M}(T)$ <u>des mesures sur</u> T, <u>il faut et il suffit que la fonction</u> $g = \sup_n g_n$ <u>soit localement intégrable ; la borne supérieure dans</u> $\mathcal{M}(T)$ <u>des mesures</u> $g_n.\mu$ <u>est alors la mesure</u> $g.\mu$.

Le cor.3 de la prop.6 montre qu'on a $g_n(t) \leqslant g_{n+1}(t)$ localement presque partout ; on peut donc, en modifiant les g_n sur un même ensemble localement négligeable, supposer que la suite g_n est croissante. Supposons les mesures $g_n \cdot \mu$ majorées dans $\mathcal{M}(T)$; alors, pour toute fonction f de $\mathcal{K}(T)$, on a $\sup_n \int fg_n d\mu < +\infty$: il en résulte (chap.IV, §4, prop.4) que la fonction $fg = \sup fg_n$ est intégrable et que $\int fg\, d\mu = \sup_n \int fg_n d\mu$; cela montre que g est localement intégrable (prop.3) et que $g \cdot \mu$ est la borne supérieure des $g_n \cdot \mu$ dans $\mathcal{M}(T)$. Réciproquement, il est clair que, si g est localement intégrable, les mesures $g_n \cdot \mu$ sont majorées par la mesure $g \cdot \mu$.

Proposition 9 (associativité).- Soient g_1 et g_2 deux fonctions positives finies définies dans T. Supposons g_1 localement intégrable pour μ. Pour que g_2 soit localement intégrable pour $g_1 \cdot \mu$, il faut et il suffit que $g_2 g_1$ soit localement intégrable pour μ , et on a alors $g_2 \cdot (g_1 \cdot \mu) = (g_2 g_1) \cdot \mu$.

Considérons l'application $t \to g_2(t)\varepsilon_t$ de T dans $\mathcal{M}(T)$. Pour que g_2 soit localement intégrable pour $g_1 \cdot \mu$, il faut et il suffit que l'application $t \to g_2(t)\varepsilon_t$ soit vaguement essentiellement intégrable pour $g_1 \cdot \mu$; donc (§ 4, cor. de la prop.1) il faut et il suffit que l'application $t \to g_1(t)g_2(t)\varepsilon_t$ soit vaguement essentiellement intégrable pour μ , c'est-à-dire que $g_2 g_1$ soit localement intégrable pour μ. Et on a alors (loc.cit.)

$$g_2 \cdot (g_1 \cdot \mu) = \overline{\int} g_2(t)\varepsilon_t \, d(g_1 \cdot \mu)(t) = \overline{\int} g_1(t) g_2(t)\varepsilon_t \, d\mu(t) = (g_2 g_1) \cdot \mu \; .$$

Proposition 10.- Soient μ et μ' deux mesures positives sur T ; pour qu'une fonction numérique g soit localement intégrable pour la mesure $\rho = \mu + \mu'$, il faut et il suffit que g soit localement intégrable pour μ et μ' : on a alors $g \cdot \rho = g \cdot \mu + g \cdot \mu'$.

Dire que g est localement intégrable pour ρ (resp. μ , μ') revient à dire, en vertu de la prop.2, que, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$, fg est intégrable pour ρ (resp. μ,μ') ; s'il en est ainsi, on a $\int f d(g.\rho) = \int fg\, d\rho$ (resp. $\int fd(g.\mu) = \int fg\, d\mu$, $\int f\, d(g.\mu') = \int fg\, d\mu'$). La proposition sera donc une conséquence du lemme suivant :

Lemme 1.- Soient μ,μ' deux mesures positives sur T, et soit $\rho = \mu + \mu'$. Pour qu'une application f de T dans un espace de Banach F soit ρ intégrable, il faut et il suffit que f soit intégrable pour μ et μ'; on a alors $\int f\, d\rho = \int f\, d\mu + \int f\, d\mu'$.

Si une application f de T dans F est ρ-mesurable, f est μ-mesurable et μ'-mesurable (chap.IV, § 5,n°1). Réciproquement, supposons que f soit μ-mesurable et μ'-mesurable, et montrons que f est ρ-mesurable. Soit K une partie compacte de T ; il existe une partie μ -négligeable N de K , et une partition de K-N formée d'une suite (K_n) de parties compactes, tels que la restriction de f à chaque K_n soit continue ; puis il existe une partie μ'-négligeable N' de N , et une partition de N-N' formée d'une suite (K'_n) de parties compactes, tels que la restriction de f à chaque K'_n soit continue : on a $\mu^*(N') \leq \mu^*(N)=0$, et $\mu'^*(N')=0$, donc $\rho^*(N') \leq \mu^*(N')+\mu'^*(N')=0$ (chap.IV, § 1,prop.15), ce qui établit notre assertion.

Remarquons que $\mu^*(|f|) \leq \rho^*(|f|) \leq \mu^*(|f|) + \mu'^*(|f|)$ et $\mu'^*(|f|) \leq \leq \rho^*(|f|) \leq \mu^*(|f|) + \mu'^*(|f|)$. Or, pour que f soit intégrable pour ρ (resp. μ,μ'), il faut et il suffit que f soit mesurable pour ρ (resp. μ, μ'), et que $\rho^*(|f|) < +\infty$ (resp. $\mu^*(|f|) < +\infty$, $\mu'^*(|f|) < +\infty$). Ainsi, pour que f soit ρ-intégrable, il faut et il suffit que f soit μ-intégrable et ν-intégrable.

Supposons qu'il en soit ainsi. Il existe une suite (f_n) de combinaisons linéaires de fonctions de $\mathcal{K}(T)$ à coefficients dans F telle que $\lim_{n\to\infty} \rho^*(|f-f_n|) = 0$, donc telle que $\lim_{n\to\infty} \mu^*(|f-f_n|) = \lim_{n\to\infty} \mu'^*(|f-f_n|) = 0$. Dans ces conditions, on a $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\rho = \int f\, d\rho$, $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f\, d\mu$, $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu' = \int f\, d\mu'$. D'autre part, il est évident que $\int f_n d\rho = \int f_n d\mu + \int f_n d\mu'$, de sorte que le lemme est démontré.

5. Définition d'une fonction mesurable par des données locales.- Nous allons procéder du général au particulier (Mode d'emploi, n°3).

Soient E un espace topologique, $\mathcal{U}$ l'ensemble des parties ouvertes de E . Supposons donnés :

1) pour tout $U \in \mathcal{U}$, un ensemble F_U et une relation d'équivalence R_U dans F_U , F_U et $F_{U'}$ étant disjoints pour $U \neq U'$

2) pour tout couple (U,V) d'éléments de $\mathcal{U}$ tels que $U \subset V$, une application $\varphi_{U,V}$ de F_V dans F_U

avec les propriétés suivantes :

1) $\varphi_{V,V}$ est l'application identique de F_U ;

2) si $U \subset V \subset W$, $\varphi_{U,V} \circ \varphi_{V,W} = \varphi_{U,W}$; si nous convenons d'écrire, pour deux éléments $f_1 \in F_{U_1}$ et $f_2 \in F_{U_2}$, $f_1 \succ f_2$ lorsque $U_1 \supset U_2$ et $\varphi_{U_2,U_1}(f_1) = f_2$, on voit que la relation $f_1 \succ f_2$ est une relation d'ordre ;

3) si $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{U}$, si U est la réunion des U_α , et si $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille d'éléments tels que $f_\alpha \in U_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$, totalement ordonnée pour la relation "$f \succ g$" , il existe un élément $f \in F_U$ et un seul tel que $f \succ f_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$;

4) si $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{U}$, si U est la réunion des U_α, et si f et g sont des éléments de F_U tels que $\mathcal{C}_{U_\alpha, U}(f) \equiv$ $\equiv \mathcal{C}_{U_\alpha, U}(g) \pmod{R_{U_\alpha}}$ pour tout $\alpha \in A$, on a $f \equiv g \pmod{R_U}$;

5) si $U_1 \in \mathcal{U}$, $U_2 \in \mathcal{U}$, $f_1 \in F_{U_1}$, $f_2 \in F_{U_2}$ et si $\mathcal{C}_{U_1 \cap U_2, U_1}(f_1) \equiv$ $\equiv \mathcal{C}_{U_1 \cap U_2, U_2}(f_2) \pmod{R_{U_1 \cap U_2}}$, il existe un élément f de $F_{U_1 \cup U_2}$ tel que $\mathcal{C}_{U_1, U_1 \cup U_2}(f) \equiv f_1 \pmod{R_{U_1}}$, $\mathcal{C}_{U_2, U_1 \cup U_2}(f) \equiv f_2 \pmod{R_{U_2}}$;

6) si $f_1 \in F_U$, $f_2 \in F_U$, $U' \subset U$, $f_1 \equiv f_2 \pmod{R_U}$, on a $\mathcal{C}_{U', U}(f_1) \equiv \mathcal{C}_{U', U}(f_2) \pmod{R_{U'}}$.

Alors, on a le théorème suivant :

<u>Théorème 2. Soit</u> $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ <u>un recouvrement ouvert de</u> E . <u>Soit</u> $U' \to f_{U'}$ <u>une fonction définie dans</u> $\mathcal{U}'$, <u>telle que</u> $f_{U'} \in F_{U'}$ <u>pour tout</u> $U' \in \mathcal{U}'$. <u>Supposons que, pour tout</u> $U' \in \mathcal{U}'$ <u>et tout</u> $V' \in \mathcal{U}'$, <u>on ait</u> $\mathcal{C}_{U' \cap V', U'}(f_{U'}) \equiv \mathcal{C}_{V', U' \cap V'}(f_{V'}) \pmod{R_{U' \cap V'}}$. <u>Alors, il existe un élément</u> $f \in F_E$ <u>tel que, pour tout</u> $U' \in \mathcal{U}'$, <u>on ait</u> $\mathcal{C}_{E, U'}(f) = f_{U'} \pmod{R_{U'}}$.

Soit $U \in \mathcal{U}$. Désignons par Φ_U l'ensemble des $f \in F_U$ tels que, pour tout $U' \in \mathcal{U}'$, on ait $\mathcal{C}_{U \cap U', U}(f) \equiv \mathcal{C}_{U \cap U', U'}(f_{U'}) \pmod{R_{U \cap U'}}$. Et soit Φ la réunion des Φ_U quand U parcourt $\mathcal{U}$. L'ensemble Φ n'est pas vide, car tous les $f_{U'}$, pour $U' \in \mathcal{U}'$, lui appartiennent. La relation "$f \succ g$" induit sur Φ une relation d'ordre, et nous allons voir que Φ est inductif. Soient $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une partie totalement ordonnée de Φ, $U_\alpha \in \mathcal{U}$ l'ensemble ouvert correspondant à f_α, et U_0 l'ensemble ouvert réunion des U_α. Il existe un $f \in F_U$ et un seul tel que $f \succ f_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$ (hypothèse 3). Montrons que $f \in \Phi$, ce qui prouvera notre assertion. Pour cela, soit $U' \in \mathcal{U}'$; soient $g = \mathcal{C}_{U \cap U', U}(f)$ et $h = \mathcal{C}_{U \cap U', U'}(f_{U'})$; on a

$$\mathscr{C}_{U_\alpha\cap U', U\cap U'}(g) = \mathscr{C}_{U_\alpha\cap U', U}(f) = \mathscr{C}_{U_\alpha\cap U', U_\alpha}(f_\alpha) \equiv \mathscr{C}_{U_\alpha\cap U', U'}(f_{U'}) \quad (\text{mod. } R_{U_\alpha\cap U'})$$

donc $\mathscr{C}_{U_\alpha\cap U', U\cap U'}(g) \equiv \mathscr{C}_{U_\alpha\cap U', U\cap U'}(h)$ (mod.$R_{U_\alpha\cap U'}$) .

En vertu de l'hypothèse 4, on en déduit que $g \equiv h$ (mod.$R_{U\cap U'}$), ce qui prouve que $f \in \Phi$.

En vertu du théorème de Zorn, il existe un élément <u>maximal</u> f de Φ ; nous allons montrer que $f \in F_E$, ce qui démontrera le théorème.

Raisonnons par l'absurde en supposant $f \in F_U$ avec un $U \neq E$. Soient U' un élément de $\mathcal{U}'$ rencontrant $E-U$, et $U_1 = U \cup U'$. Soit $f_1 \in F_{U_1}$, tel que $\mathscr{C}_{U,U_1}(f_1) \equiv f$ (mod.R_U), $\mathscr{C}_{U',U_1}(f_1) = f_{U'}$ (mod.$R_{U'}$).(hypothèse 5).
Si nous prouvons que $f_1 \in \Phi$, nous aboutirons à une contradiction, et le théorème sera démontré. Or, soit $U'' \in \mathcal{U}'$. Posons $\mathscr{C}_{U''\cap U_1, U_1}(f_1) = f_2$ $\mathscr{C}_{U''\cap U_1, U''}(f_{U''}) = f_3$. On a

$$\mathscr{C}_{U''\cap U, U''\cap U_1}(f_2) = \mathscr{C}_{U''\cap U, U_1}(f_1) = \mathscr{C}_{U''\cap U, U}(\mathscr{C}_{U, U_1}(f_1))$$

donc, en vertu de l'hypothèse 6, on a modulo $R_{U''\cap U}$:

$$\mathscr{C}_{U''\cap U, U''\cap U_1}(f_2) \equiv \mathscr{C}_{U''\cap U, U}(f) \equiv \mathscr{C}_{U''\cap U, U''}(f_{U''}) = \mathscr{C}_{U''\cap U, U''\cap U_1}(f_3) .$$

De même, $\mathscr{C}_{U''\cap U', U''\cap U_1}(f_2) \equiv \mathscr{C}_{U''\cap U', U''\cap U_1}(f_3)$ (mod. $R_{U''\cap U'}$).
Donc $f_2 \equiv f_3$ (mod. $R_{U''\cap U_1}$), ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>.- <u>Soient</u> T <u>un espace localement compact</u>, μ <u>une mesure positive sur</u> T, <u>et</u> (U_α) <u>un recouvrement ouvert de</u> T . <u>Pour tout</u> α , <u>soit</u> $f_\alpha(t)$ <u>une fonction numérique</u> μ<u>-mesurable sur</u> T . <u>Supposons que</u>, <u>pour tout couple d'indices</u> (α, β), $f_\alpha(t)$ <u>et</u> $f_\beta(t)$ <u>soient égales localement presque partout dans</u> $U_\alpha \cap U_\beta$. <u>Alors</u>, <u>il existe une fonction mesurable</u> f <u>sur</u> T , <u>telle que</u> $f(t) = f_\alpha(t)$ <u>localement presque partout sur</u> U_α , <u>pour tout</u> α .

En effet, il suffit d'appliquer le th.2 de la manière suivante :

1) Pour tout $U \in \mathcal{U}$, F_U est l'ensemble des fonctions numériques mesurables dans U (pour la mesure induite par μ dans U).

2) Si $f_1 \in F_U$ et $f_2 \in F_U$, la relation $f_1 \equiv f_2$ (mod.R_U) signifie que f et f_1 sont égales localement presque partout dans U .

3) Si $U \subset V$ et $f \in F_V$, $\varphi_{U,V}(f)$ est la restriction de f à U .

4) $\mathcal{U}'$ est le recouvrement de T par les U_α .

5) f_{U_α} est la restriction de f_α à U_α .

Alors, les hypothèses 1 à 6 et les hypothèses du th.2 se vérifient immédiatement, ce qui établit le corollaire.

6. Le théorème de Lebesgue-Nikodym.- Rappelons (chap.III, § 2,th.3) que l'ensemble $\mathcal{M}$(T) des mesures sur T est complètement réticulé.

Théorème 3 (Lebesgue-Nikodym).- Soient μ et ν deux mesures positives sur T . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) ν est une mesure de base μ .

2) tout ensemble localement μ-négligeable est localement ν-négligeabl

3) pour toute fonction numérique $g \geqslant 0$, continue et à support compact, et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta \geqslant 0$ tel que pout toute fonction continue positive h satisfaisant aux conditions $h \leqslant g$, $\int h\, d\mu \leqslant \delta$, on ait $\int h\, d\nu \leqslant \varepsilon$.

4) ν appartient à la bande engendrée par μ dans l'espace complètement réticulé $\mathcal{M}$(T).

Si ν est une mesure de base μ , tout ensemble localement μ-négligeable est localement ν-négligeable, d'après la prop.3 : la condition 1 entraîne la condition 2 .

57

Si la condition 3 n'est pas remplie, il existe une fonction continue $f_o \geqslant 0$, à support compact, et un nombre $\alpha > 0$, ayant la propriété suivante : pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe une fonction continue positive g_n telle que $g_n \leqslant f_o$, $\int g_n d\mu \leqslant \frac{1}{2^n}$, $\int g_n d\nu \geqslant \alpha$. Posons $h_n = \sum_{p=0}^{\infty} g_{n+p}$. On a $\int h_n d\mu \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \int g_{n+p}\, d\mu \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. La suite (h_n) est décroissante, soit h son enveloppe inférieure. On a $\int h\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int h_n d\mu = 0$. D'autre part, $\int h\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int h_n d\nu \geqslant \alpha$. Donc h est négligeable pour μ, non négligeable pour ν, et à support compact. Ainsi, la condition 2 n'est pas remplie. Autrement dit, la condition 2 entraîne la condition 3.

Les conditions 3 et 4 sont équivalentes d'après la prop.4 du chap.II, §2.

Enfin, supposons remplie la condition 4, et prouvons que ν est une mesure de base μ. Nous allons procèder en plusieurs étapes.

a) Supposons d'abord $\nu \leqslant \mu$. Pour tout ensemble ouvert relativement compact U, posons $\mu_U = \varphi_U . \mu$, $\nu_U = \varphi_U . \nu$. On a évidemment $\nu_U \leqslant \mu_U$. La mesure μ_U est bornée. D'après l'inégalité de Hölder, on a, pour toute fonction $g \in \mathcal{K}(T)$

$$(1) \qquad |\nu_U(g)|^2 \leqslant \nu_U(1)\,\nu_U(g^2) \leqslant \nu_U(1)\,\mu_U(g^2) .$$

Cela prouve d'abord que si g est μ_U-négligeable, $\nu_U(g)=0$; en outre, la relation (1) montre que la forme linéaire ν_U sur $\mathcal{K}(T)$ est continue pour la topologie de la convergence en moyenne quadratique définie par μ_U. Par passage au quotient, elle définit une forme linéaire continue $\tilde{g} \longrightarrow \nu_U(\tilde{g})$ sur le sous-espace partout dense $\tilde{\mathcal{K}}(T)$ de l'espace hilbertien $L^2(T, \mu_U)$; donc elle se prolonge par continuité à l'espace $L^2(T, \mu_U)$ tout entier. Il existe alors (esp. vect.top., chap.V, §2) un élément $f_U \in \mathcal{L}^2(T, \mu_U)$ tel que $\nu_U(g) = \mu_U(gf_U)$ pour toute fonction $g \in \mathcal{K}(T)$. Remarquons que f_U est localement intégrable pour μ_U, de sorte qu'on peut écrire : $\nu_U = f_U . \mu_U$.

En vertu de la prop.9 (associativité), $f_U \varphi_V = g_U$ est localement intégrable pour μ, et $\nu_U = g_U . \mu$. Pour tout ensemble ouvert relativement compact $V \subset U$, on a $\nu_V = \varphi_V . \nu = \varphi_V . (\varphi_U . \nu) = \varphi_V (g_U . \mu) = (\varphi_V \, g_U) . \mu$, et d'autre part $\nu_V = g_V . \mu$. Donc $g_V = \varphi_V \, g_U$ localement presque partout pour μ (cor.2 de la prop.7). On déduit aussitôt de ce résultat que, si U_1 et U_2 sont deux ensembles ouverts relativement compacts quelconques, g_{U1} et g_{U_2} sont égales localement presque partout (pour μ) dans $U_1 \cap U_2$. En vertu du th.2, il existe donc une fonction $f \geqslant 0$, localement intégrable pour μ, telle que, pour tout ensemble ouvert relativement compact U, f et g_U soient égales localement presque partout dans U. Soit alors h une fonction de $\mathcal{K}(T)$, et soit U un voisinage ouvert relativement compact du support de h ; on a $\int h \, d\nu = \int h \, \varphi_U \, d\nu = \int h \, d\nu_U = \int h g_U d\mu = \int h \, f \, d\mu$, ce qui prouve que $\nu = f . \mu$.

b) Abordons le cas général. Si ν appartient à la bande engendrée par μ dans $\mathcal{M}(T)$, on a $\nu = \sup_n (\inf(n\mu, \nu))$. Comme $\inf(n\mu, \nu) \leqslant n\mu$, il existe une fonction localement intégrable $f_n \geqslant 0$ telle que $\inf(n\mu, \nu) = f_n . \mu$. Comme la suite des mesures $f_n . \mu$ est croissante et a pour borne supérieure ν dans $\mathcal{M}(T)$, la fonction $f = \sup_n f_n$ est localement intégrable pour μ, et on a $\nu = f . \mu$ (prop.8), ce qui achève la démonstration du th.3 .

<u>Remarque</u>.- Pour qu'une mesure <u>réelle</u> ν appartienne à la bande B engendrée par μ, il faut et il suffit que $\nu^+ \in B$ et $\nu^- \in B$. D'autre part, pour que ν soit une mesure de base μ, il faut et il suffit que ν^+ et ν^- soient des mesures de base μ (prop.7). Donc, pour qu'une mesure réelle ν soit une mesure de base μ, il faut et il suffit que ν appartienne à la bande engendrée par μ .

Scholie.- Soit $\mathcal{J}(T,\mu)$ (ou simplement $\mathcal{J}$) l'ensemble des classes $\dot{f}$ des fonctions numériques finies f localement intégrables pour μ, suivant la relation d'équivalence "f et g sont égales localement presque partout pour μ ". L'ensemble $\mathcal{J}$ est muni d'une structure d'espace de Riesz. Nous avons vu (cor.2 de la prop.7) que la mesure $f.\mu$ ne dépend que de la classe $\dot{f}$ de f dans $\mathcal{J}$. Le th.3, joint à la prop.7, montre que l'application $\dot{f} \to f.\mu$ est un isomorphisme de l'espace de Riesz $\mathcal{J}$ sur la bande engendrée par μ dans l'espace $\mathcal{M}(T)$. On voit en particulier que la borne supérieure de deux mesures de base μ, $f.\mu$ et $g.\mu$, dans l'espace $\mathcal{M}(T)$, est la mesure $(\sup(f,g)).\mu$.

Comme on sait que toute bande dans un espace complètement réticulé est elle-même un espace complètement réticulé, on voit que l'espace $\mathcal{J}$ est complètement réticulé ; mais il convient de rappeler que la borne supérieure dans $\mathcal{J}$ d'une famille non dénombrable $(\dot{f}_\alpha)$ de classes n'est pas nécessairement identique à la classe de l'enveloppe supérieure des fonctions f_α. Toutefois, nous avons vu que, pour une suite croissante de fonctions localement intégrables f_n, dont l'enveloppe supérieure f est localement intégrable, $f.\mu$ est la borne supérieure des mesures $f_n.\mu$ dans $\mathcal{M}(T)$ (prop.8).

Notons encore que $\mathcal{J}$ peut être considéré comme module sur l'anneau $\mathfrak{A}$ des fonctions mesurables bornées sur tout ensemble compact ; il résulte de la prop.9 que ce module est isomorphe à la bande engendrée par dans $\mathcal{M}(T)$, considérée comme module sur $\mathfrak{A}$ pour la loi de composition $(f,\mu) \to f.\mu$ (à vider).

Proposition 11.- Soit ν une mesure positive de base μ . Soit f une fonction positive finie ou non, μ-intégrable et ν-intégrable à support relativement compact. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les conditions $0 \leqslant f' \leqslant f$, $\int^* f' d\mu \leqslant \delta$ entraînent $\int^* f' d\nu \leqslant \varepsilon$ ("continuité absolue" de ν par rapport à μ ").

Soit $\nu = g.\mu$, où g est une fonction positive localement intégrable pour μ . Soit $g_n = \inf(g,n)$. On a $\int fg\, d\mu = \sup_n \int fg_n d\mu < +\infty$. Il existe par suite un entier n tel que $\int f(g-g_n) d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors, si $0 \leqslant f' \leqslant f$

$$\int^* f' d\nu = \int^* f' g\, d\mu \leqslant \int^* f'(g-g_n) d\mu + \int^* f' g_n d\mu$$

$$\leqslant \int f(g-g_n) d\mu + n\int^* f' d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + n\int^* f' d\mu$$

donc $\int^* f' d\nu \leqslant \varepsilon$ dès que $\int^* f' d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2n}$.

7. Mesures équivalentes.- Définition 3.- Sur un espace localement compact T on dit que deux mesures positives μ et ν sont équivalentes si les bandes engendrées par μ et ν dans $\mathcal{M}$ (T) sont identiques.

Proposition 12.- Soient μ et ν deux mesures positives sur T . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) ν est une mesure de base μ et μ une mesure de base ν ;
2) les ensembles localement négligeables sont les mêmes pour μ et ν ;
3) μ et ν sont des mesures équivalentes ;
4) on a $\nu = g.\mu$, où g est localement intégrable pour μ , et $g(t) > 0$ localement presque partout pour μ ; dans ce cas, $\mu = (1/g).\nu$ (1/g étant définie localement presque partout).

Les conditions 1,2,3 sont évidemment équivalentes en vertu du th.3 . Si elles sont remplies, on a $\nu = g.\mu$ et $\mu = g'.\nu$, où g (resp. g') est positive et localement intégrable pour μ (resp. ν). Donc (prop.10) $g'g$ est localement intégrable pour μ, et on a $\mu=(g'g).\mu$. Donc $g'g=1$ localement presque partout pour μ, de sorte que $g(t)>0$ et $g'(t)=1/g(t)$ localement presque partout pour μ. Réciproquement, supposons $\nu=g.\mu$ avec $g(t)>0$ localement presque partout pour μ ; comme $(1/g).g$ est localement μ-intégrable, $1/g$ est localement ν-intégrable, et $(1/g).\nu=\mu$.

Remarque.- Si μ et ν sont deux mesures positives équivalentes, les fonctions mesurables (à valeurs dans un espace topologique) sont les mêmes pour μ et ν, comme il résulte aussitôt de la prop.4.

Proposition 13.- Soit μ une mesure positive sur T. Si T est dénombrable à l'infini, il existe une fonction continue strictement positive h sur T telle que la mesure $\nu=h.\mu$ (équivalente à μ) soit bornée.

Puisque T est dénombrable à l'infini, T est réunion d'une suite $(U_1,U_2,\ldots)$ d'ensembles ouverts relativement compacts tels que $\overline{U_n}\subset U_{n+1}$. Posons $A_n=U_n-U_{n-1}$ (on convient que $U_0=\emptyset$). Soit $(a_1,a_2,\ldots)$ une suite de nombres >0 décroissants. Soit, pour $n=0,1,2,\ldots,h_n(t)$ une application continue de T dans $[a_{n+1},a_{n+2}]$, égale à a_{n+2} dans $\complement U_{2n+2}$, et à a_{n+1} dans $\overline{U}_{2n+1}$; soit $h'_n(t)$ la restriction de $h_n(t)$ à $U_{2n+3}-\overline{U}_{2n}$. Les ensembles $B_n=U_{2n+3}-\overline{U}_{2n}$ forment, pour $n=0,1,2,\ldots$, un recouvrement ouvert de T, et il est immédiat que h'_p et h'_q coïncident dans $B_p\cap B_q$. Il existe donc une fonction numérique continue $h(t)$ définie dans U, égale à $h'_p(t)$ dans chaque B_p, donc strictement positive. On a $h(t)=a_{2n+1}$ pour $t\in A_{2n+1}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, et $a_{n+1}\leqslant h(t)\leqslant a_n$ pour $t\in A_{2n}$ $(n=1,2,\ldots)$. Ceci posé, soit $\nu=h.\mu$. La mesure ν est une mesure positive équivalente à μ (prop.12), et on a :

$$\nu^*(1) = \mu^*(h) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(A_{2n-1} \cup A_{2n}) .$$

Si donc on choisit les a_n de manière que cette série soit convergente, on voit que ν est bornée.

8. Mesures singulières par rapport à μ .- Définition 4.- Etant données deux mesures ρ et σ sur un espace localement compact T, on dit que ρ est singulière par rapport à σ si on a $\inf(|\rho|,|\sigma|)=0$ dans $\mathcal{M}(T)$.

La relation " ρ est singulière par rapport à σ " est donc symétrique par rapport à ρ et σ . Les mesures singulières par rapport à une mesure donnée forment une bande.

Définition 5. Etant donnée une mesure positive μ sur un espace localement compact T , et une partie M de T, on dit que μ est concentrée sur M , ou que M porte μ , si $\complement M$ est localement négligeable pour μ .

Il revient au même de dire que la classe $\dot{\varphi}_M$ de φ_M (pour la relation "f et g sont égales localement presque partout pour μ ") est égale à la classe de 1 . Une condition équivalente est donc que $\mu = \varphi_M . \mu$.

Proposition 14.- Pour qu'une mesure positive ν soit singulière par rapport à μ, il faut et il suffit qu'il existe dans T deux ensembles M,N sans point commun, tels que μ soit concentrée sur M et ν sur N .

Soit λ une mesure telle que $\mu \leq \lambda$ et $\nu \leq \lambda$ (par exemple, $\lambda = \mu + \nu$). On a $\mu = g.\lambda$, $\nu = h.\lambda$, avec des fonctions g,h positives et localement intégrables pour λ . Pour que $\inf(\mu,\nu)=0$, il faut et il suffit que inf(g,h)=0 localement presque partout pour λ (n°6,Scholie), autrement dit qu'il existe deux ensembles disjoints M et N tels que $\varphi_M g = g$ et $\varphi_N h = h$ localement presque partout pour λ . Or, pour que $\varphi_M g = g$ localement presque partout pour λ , il faut et il suffit que $(\varphi_M g).\lambda = g.\lambda$, c'est-à-dire que $\varphi_M . \mu = \mu$ (prop.9), c'est-à-dire que M porte μ. De même, pour que $\varphi_N h = h$ localement presque partout pour λ, il faut et il suffit que N porte ν. Ceci achève la démonstration.

Corollaire.- Pour toute mesure ν sur T, il existe deux ensembles disjoints M, N portant respectivement ν^+ et ν^-.

On aura soin de ne pas confondre la notion de support d'une mesure μ et celle d'ensemble où on peut concentrer μ. Le support S de μ est le plus petit ensemble fermé portant μ (chap. IV, § 2, prop. 5). Mais il existe en général des parties de S, distinctes de S, et portant μ (cf. n° 9). Plus précisément, on peut avoir $\inf(\mu, \nu) = 0$ pour deux mesures positives μ et ν de support T (cf. n° 9, Remarque).

Théorème 4.- Soit μ une mesure sur l'espace localement compact T. Toute mesure ν sur T peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $\nu' + \nu''$, où ν' est une mesure de base μ, et ν'' une mesure singulière par rapport à μ. Si ν est positive, ν' et ν'' sont positives.

Ceci n'est autre que le th. de F. Riesz (chap. II, § 1, th. 1) appliqué à l'espace complètement réticulé $\mathcal{M}(T)$ des mesures sur T, et à la bande engendrée par μ dans cet espace.

9. Mesures diffuses, mesures atomiques.- Définition 6.- On dit qu'une mesure positive μ sur T est diffuse si, pour tout $t \in T$, on a $\mu(\{t\}) = 0$.

Exemple.- La mesure de Lebesgue sur R est diffuse (chap. IV, § 1, n° 3, Remarque).

Dire que μ est une mesure diffuse sur T revient à dire que tout ensemble de complémentaire fini porte μ, ou encore que μ est singulière par rapport à toute mesure ponctuelle. Par conséquent, les mesures μ telles que $|\mu|$ soit diffuse sur T forment une bande dans $\mathcal{M}(T)$.

Soit maintenant α une fonction positive finie définie dans T, telle que, pour toute partie compacte K de T, $\sum_{t\in K}\alpha(t)$ soit fini. Soit N l'ensemble des points $t\in T$ tels que $\alpha(t)\neq 0$. Pour toute partie compacte K de T, $N\cap K$ est dénombrable : nous dirons que N est <u>localement dénombrable</u>. Si, pour toute $f\in\mathcal{K}(T)$, on pose $\mu(f)=\sum_{t\in T}\alpha(t)f(t)$, on sait (chap. III, § 2, Exemple) qu'on définit une mesure positive μ : μ est <u>la mesure définie par les masses</u> $\alpha(t)$ <u>placées aux points</u> $t\in N$.

<u>Définition 7.- On dit qu'une mesure positive sur</u> T <u>est atomique si elle peut être définie par des masses placées aux points d'un ensemble localement dénombrable</u>.

<u>Proposition 15.- Soit</u> μ <u>une mesure positive sur</u> T. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) μ <u>est atomique</u>.

2) μ <u>est portée par un ensemble localement dénombrable</u>.

3) μ <u>est singulière par rapport à toute mesure diffuse</u>.

4) μ <u>appartient à la bande engendrée par les mesures ponctuelles</u>.

Soit μ une mesure atomique positive, définie par les masses $\alpha(t)$ placées aux points d'un ensemble localement dénombrable N. On sait (chap. IV, § 4, n° 1, Exemple) que, pour tout ensemble compact K, on a $\mu(K\cap\complement N)=\sum_{t\in K\cap\complement N}\alpha(t)=0$; donc $\complement N$ est localement négligeabl[e] pour μ. Ainsi, la condition 1 entraîne la condition 2.

Supposons la mesure positive portée par un ensemble localement dénombrable N , et soit ν une mesure positive diffuse. Pour tout ensemble compact K , $K \cap N$ est dénombrable, donc ν-négligeable. Donc N est localement négligeable pour ν , de sorte que μ est singulière par rapport à ν (prop.14). Ainsi, la condition 2 entraîne la condition 3 .

Comme les mesures diffuses ne sont autres que les mesures singulières par rapport aux mesures ponctuelles, les conditions 3 et 4 sont équivalentes d'après le th. de F. Riesz (chap. II, § 1, th.1).

Enfin, soit μ une mesure positive appartenant à la bande engendrée par les mesures ε_t . Les mesures positives majorées par une somme finie de mesures ε_t sont les combinaisons linéaires finies à coefficients positifs de mesures ε_t , c'est-à-dire les mesures atomiques définies par des fonctions $\alpha(t)$ nulles sauf en un nombre fini de points. D'après la prop.5 du chap. II, §1 , μ est borne supérieure d'une famille $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ de telles mesures ; soit α_ι la fonction définissant μ_ι ; on peut supposer la famille (α_ι) filtrante pour la relation $\leqslant$, de sorte qu'on a, pour toute fonction positive f de $\mathcal{K}(T)$:

$$\mu(f) = \sup_{\iota \in I} \left[\sum_{t \in T} \alpha_\iota(t)\, f(t) \right] .$$

Donc, si $\alpha(t)$ désigne l'enveloppe supérieure de la famille $\alpha_\iota(t)$, on a $\sum_{t \in T} \alpha(t)\, f(t) < +\infty$ pour toute fonction positive $f \in \mathcal{K}(T)$, de sorte que α définit une mesure atomique μ' ; et l'on a :

$$\mu(f) = \sum_{t \in T} \alpha(t)\, f(t) = \mu'(f)$$

donc $\mu = \mu'$, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>.- <u>Toute mesure positive</u> μ <u>sur</u> T <u>peut s'écrire d'une seule manière sous la forme</u> $\mu_1 + \mu_2$, <u>où</u> μ_1 <u>est une mesure positive diffuse</u>, <u>et</u> μ_2 <u>une mesure positive atomique</u>.

Ceci résulte aussitôt de la prop.15 et du th. de F. Riesz.

Remarque.- Soit μ une mesure atomique définie par les masses $\alpha(t)$ placées aux points d'un ensemble localement dénombrable N . Pour tout ensemble ouvert U , on sait (chap.IV, § 1,n° 1, Exemple), que $\mu^*(U) = \sum_{t \in U} \alpha(t)$. On voit donc que U est négligeable si et seulement si $U \cap N = \emptyset$; autrement dit, le support de μ est $\overline{N}$. Soient alors α_1 et α_2 deux fonctions positives finies sur T , telles que, pour toute partie compacte K de T , on ait $\sum_{t \in K} \alpha_1(t) < +\infty$, $\sum_{t \in K} \alpha_2(t) < +\infty$. Soit N_1 (resp. N_2) l'ensemble des points $t \in T$ tels que $\alpha_1(t) > 0$ (resp. $\alpha_2(t) > 0$). Soient μ_1 et μ_2 les mesures définies par α_1 et α_2 . Si $\overline{N_1} = \overline{N_2} = T$,et $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, μ_1 et μ_2 ont pour support T , et cependant $\inf(\mu_1, \mu_2) = 0$.

8. Application : I. Dualité des espaces L^p. Soient p et q des exposants conjugués (chap.IV, § 6,n°4), tels que $1 \leq p < +\infty$, $1 < q \leq +\infty$. Toute fonction $g \in \mathcal{L}^q$ définit une forme linéaire continue θ_g sur L^p, déduite par passage au quotient de la forme linéaire $f \to \int fg \, d\mu$; on a en outre $N_q(g) = \|\theta_g\|$ (chap.IV, § 6,cor.1 de la prop.3). Autrement dit, l'application $\tilde{g} \to \theta_g$ (resp. $\dot{g} \to \theta_g$ si $p=1$, $q = +\infty$) est une application linéaire isométrique φ de L^q dans le dual $(L^p)'$ de L^p. Nous allons montrer que φ applique L^q sur $(L^p)'$ (de sorte que nous pourrons désormais identifier l'espace de Banach L^q à l'espace de Banach $(L^p)'$ par l'isomorphisme φ). En d'autres termes :

Théorème 5.- Soient p et q deux exposants conjugués, avec $1 \leq p < +\infty$, $1 < q \leq +\infty$. Toute forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^p(T, \mu)$ est de la forme $f \to \int fg \, d\mu$, où g est une fonction de $\mathcal{L}^q(T, \mu)$ dont la classe dans L^q est bien déterminée.

En effet, soit θ une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^p$; il existe donc un nombre $a \geqslant 0$ tel que $|\theta(f)| \leqslant a\ N_p(f)$ pour toute $f \in \mathcal{L}^p$. Considérons la restriction de θ à l'espace $\mathcal{K}(T)$ des fonctions continues à support compact ; pour toute partie compacte K de T, la topologie induite sur $\mathcal{K}(T,K)$ (espace des fonctions continues à support dans K) par celle de $\mathcal{L}^p$ est moins fine que la topologie de la convergence uniforme ; donc la restriction de θ à chaque $\mathcal{K}(T,K)$ est continue pour cette dernière topologie ; autrement dit, la restriction de θ à $\mathcal{K}(T)$ est une <u>mesure</u> ν.

Montrons que $\big||\nu|(f)\big| \leqslant a\ N_p(f)$ pour toute fonction f de $\mathcal{K}(T)$. Il suffit évidemment de prouver cette formule lorsque $f \geqslant 0$. Or, pour toute fonction f' de $\mathcal{K}(T)$ telle que $|f'| \leqslant f$, on a $|\nu(f')| \leqslant a\ N_p(f') \leqslant a\ N_p(f)$, et notre assertion résulte alors de la formule (3) du chap. II, § 2, n° 2 .

Il en résulte que la mesure $|\nu|$ est <u>de base</u> μ ; en effet, si f_o est une fonction positive de $\mathcal{K}(T)$, et si f est une fonction de $\mathcal{K}(T)$ telle que $0 \leqslant f \leqslant f_o$, on a $|\nu|(f) \leqslant a\mu(f^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant a\ \|f_o\|^{\frac{p-1}{p}}\ \mu(f)^{\frac{1}{p}}$, et la condition 3 du th. 3 est donc satisfaite. Par suite, il existe une fonction positive localement intégrable h telle que $|\nu|(f) = \int f\,h\,d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$. Montrons que h est localement presque partout égale à une fonction de $\mathcal{L}^q$. Soit f une fonction positive de $\mathcal{K}(T)$ telle que $N_p(f) \leqslant 1$. On a $\int f\,h\,d\mu = |\nu|(f) \leqslant a$. Pour toute application continue f_o de T dans $[0,1]$ à support compact, on a donc $\sup \int f(f_o h)\,d\mu \leqslant a$ quand f parcourt l'ensemble des fonctions positives de $\mathcal{K}(T)$ telles que $N_p(f) \leqslant 1$. D'après la formule (11) du chap. IV, § 6, on en déduit que $N_q(f_o h) \leqslant a$. Donc $\sup N_q(\varphi_K h) \leqslant a$ quand K parcourt l'ensemble des parties compactes de T . Ceci prouve notre assertion.

Il existe donc une fonction g de $\mathcal{L}^q$ telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$, on ait $\theta(f) = \nu(f) = \int fg\, d\mu$. Autrement dit, les formes linéaires continues θ et θ_g coïncident sur $\mathcal{K}(T)$ et par suite sur $\mathcal{L}^p$, ce qui achève la démonstration.

On notera par contre que le dual de L^∞ n'est pas L^1 en général.

<u>Corollaire</u>.- <u>Pour tout nombre</u> p <u>tel que</u> $1 < p < +\infty$, <u>l'espace de Banach</u> L^p <u>est réflexif</u>.

Par contre, les espaces L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs en général (cf. exerc.).

Le th.5 permet de complèter le th.2 du chap.IV, § 6 :

<u>Proposition 16</u>.- <u>Soient</u> p <u>et</u> q <u>deux exposants conjugués. Si</u> g <u>est une fonction mesurable numérique finie telle que, pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{L}^p$, <u>la fonction</u> fg <u>soit intégrable, alors</u> g <u>est localement presque partout égale à une fonction de</u> $\mathcal{L}^q$.

Si $p = +\infty$, la proposition est triviale. Supposons désormais $p < +\infty$. L'application $f \to \int fg\, d\mu$ est une forme linéaire θ sur $\mathcal{L}^p$; montrons que θ est continue. Soit $(f_1, f_2, \ldots)$ une suite dans $\mathcal{L}^p$ telle que $N_p(f_n) \to 0$. Il existe (chap.IV, § 3,prop.6) une suite partielle $(f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots)$ telle que :

1) $\sum_{i=1}^{\infty} N_p(f_{n_i}) < +\infty$;

2) la fonction $f_o(t) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_i}(t)|$ est définie presque partout et appartient à $\mathcal{L}^p$;

3) $f_{n_i}(t)$ tend vers 0 presque partout quand $i \to \infty$.

Dans ces conditions, $f_{n_i}(t)g(t)$ tend vers 0 presque partout ; on a $\left|f_{n_i}(t)g(t)\right| \leq \left|f_o(t)g(t)\right|$ presque partout, et la fonction $f_o g$ est intégrable. Donc $\theta(f_{n_i}) = \int f_{n_i} g \, d\mu \to 0$ quand $i \to +\infty$ (chap. IV, § 3, th. 6).

Or, si θ n'était pas continue, il existerait une suite $(f_1, f_2, \ldots)$ dans $\mathcal{L}^p$ telle que $N_p(f_n) \to 0$ et $\underline{\lim} \left|\theta(f_n)\right| > 0$. Ceci contredit le résultat précédent. Par conséquent (th. 5), il existe une fonction $g' \in \mathcal{L}^q$ telle que $\int fg \, d\mu = \int fg' \, d\mu$ pour toute $f \in \mathcal{L}^p$. Il en résulte que $g.\mu = g'.\mu$, donc que $g = g'$ localement presque partout.

<u>10. Application</u> : <u>II. Fonctions de mesures.</u> Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ des mesures sur T, et $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction numérique finie définie sur R^n, positivement homogène, c'est-à-dire telle que $u(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = \alpha u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour tout scalaire $\alpha \geq 0$. Soient λ et λ' deux mesures positives sur T telles que $|\mu_i| \leq \lambda$ et $|\mu_i| \leq \lambda'$ pour $1 \leq i \leq n$. (Il en existe ; on peut prendre par exemple $\lambda = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$). On a : $\mu_i = f_i.\lambda = f'_i.\lambda'$, où f_i (resp. f'_i) est mesurable et essentiellement bornée pour λ (resp. λ'). Nous allons établir le résultat suivant : <u>pour que la fonction numérique</u> $u(f_1; f_2, \ldots, f_n)$ <u>sur</u> T <u>soit localement intégrable pour</u> λ, <u>il faut et il suffit que la fonction</u> $u(f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)$ <u>soit localement intégrable pour</u> λ', <u>et on a alors</u>

$$u(f_1, f_2, \ldots, f_n).\lambda = u(f'_1, f'_2, \ldots, f'_n).\lambda' .$$

Comme on a $|\mu_i| \leq \inf(\lambda, \lambda')$, on peut se borner au cas où $\lambda \leq \lambda'$. On a alors $\lambda = g.\lambda'$, où g est une fonction λ'-mesurable telle que $0 \leq g \leq 1$; d'où $\mu_i = f_i.(g.\lambda') = (f_i g).\lambda'$, $f_i g$ étant donc égale à f'_i

localement presque partout pour λ' . Par suite,
$u(f'_1, f'_2, \dots, f'_n) = u(f_1 g, f_2 g, \dots f_n g) = u(f_1, f_2, \dots, f_n)g$ localement presque partout pour λ' . Pour que $u(f'_1, f'_2, \dots, f'_n)$ soit localement intégrable pour λ' , il faut et il suffit que $u(f_1, f_2, \dots, f_n)g$ soit localement intégrable pour λ', donc que $u(f_1, f_2, \dots, f_n)$ soit localement intégrable pour λ ; et l'on a

$$u(f'_1, f'_2, \dots, f'_n) . \lambda' = u(f_1, f_2, \dots, f_n)g . \lambda' = u(f_1, f_2, \dots, f_n) . \lambda .$$

La mesure $u(f_1, f_2, \dots, f_n) . \lambda$ ne dépend donc en réalité que des mesures $u_1, u_2, \dots, u_n$ et de la fonction u . On la note $u(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$. Cette mesure est donc définie si u est une fonction positivement homogène telle que, f_i désignant la densité de μ_i par rapport à une mesure positive λ majorant les $|\mu_i|$, $u(f_1, f_2, \dots, f_n)$ soit localement intégrable pour λ. Cette dernière condition est toujours remplie lorsque u est continue.

Soient $u_1, u_2, \dots, u_p$ des fonctions numériques positivement homogènes définies dans R^n et telles que les p fonctions $u_k(f_1, f_2, \dots, f_n) = g_k$ soient localement intégrables pour λ ; et soit v une fonction numérique positivement homogène définie dans R^p et telle que $v(g_1, g_2, \dots, g_p)$ soit localement intégrable pour λ . Posons

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_p(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Alors, la fonction w est positivement homogène, $w(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est localement intégrable pour λ , et on a immédiatement

$$w(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = v(u_1(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n), \dots, u_p(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)).$$

Dans le cas particulier des fonctions $u(x) = x^+$, $u(x) = x^-$, $u(x) = |x|$, les mesures μ^+, μ^- , $|\mu|$ définies de cette façon coïncident bien avec celles qui ont été désignées par les mêmes notations au chap. III, § 2, n° 4, en vertu de la prop. 7 .

Exercices.

1. Soit g une fonction positive sur T, mesurable et essentiellement bornée pour μ . Soit $\nu = g.\mu$. Montrer que, si une fonction f sur T , à valeurs dans un espace de Banach ou dans $\overline{R}$, est μ -intégrable, f est ν -intégrable et on a $\int f \, d\nu = \int (fg) d\mu$. (Observer que $\nu \leqslant a\mu$, où a est une constante positive et utiliser la prop.15 du chap.IV, § 1).
2. Soient T et X deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur T , $t \longrightarrow \lambda_t$ une application vaguement essentiellement μ -intégrable de T dans $\mathcal{M}_+(X)$, $\nu = \overline{\int} \lambda_t \, d\mu(t)$. Si une fonction f définie sur X, à valeurs dans un espace de Banach, est localement ν -intégrable, et si X est dénombrable à l'infini, f est localement λ_t -intégrable sauf pour un ensemble localement négligeable de valeurs de t .
3. Soit une mesure positive sur l'espace localement compact T .

   a. Montrer que l'intersection des ensembles portant μ est l'ensemble N des points $t \in T$ tels que $\mu(\{t\}) \neq 0$. Montrer que N est localement dénombrable.

   b. Montrer que $\varphi_N \cdot \mu$ est atomique et $\varphi_{\complement N} \cdot \mu$ diffuse.

   c. Montrer que l'intersection des ensembles portant μ est lui-même un ensemble portant μ si et seulement si μ est atomique.
4. Pour qu'une mesure positive μ sur T soit discrète, il faut et il suffit qu'elle soit portée par un ensemble discret.
5. Soit α une fonction numérique finie définie dans T, telle que, pour toute partie compacte K de T , $\sum_{t\in K} |\alpha(t)|$ soit fini. Soit N_1 (resp. N_2) l'ensemble des points $t \in T$ tels que $\alpha(t) > 0$ (resp. $\alpha(t) < 0$). Soit μ la mesure définie par α . Soit μ_1(resp. μ_2) la mesure positive définie par les masses $\alpha(t)$ (resp. $-\alpha(t)$) placées aux points $t \in N_1$ (resp. $t \in N_2$). Montrer que $\mu_1 = \mu^+$, $\mu_2 = \mu^-$.

6. a) Soit une mesure positive sur T ; si A est une partie non μ-négligeable de T, il existe une mesure positive portée par A telle que $\nu \neq 0$ et $\nu \leqslant \mu$. (Prendre $\nu = \varphi_K \cdot \mu$, K étant une partie compacte de A non μ-négligeable).

   b) Soit M une partie quelconque de T. Pour qu'une mesure positive λ sur T soit portée par M, il faut et il suffit que λ soit singulière par rapport à toute mesure positive portée par $\complement M$. (Utiliser a)).

   c) Déduire de b que les mesures ρ sur T telles que $|\rho|$ soit portée par M forment une bande.

7. Soit une mesure positive sur . Si T est réunion dénombrable d'ensembles μ-intégrables, il existe une fonction continue positive h sur T telle que $\nu = h.\mu$ soit équivalente à μ et bornée. (Adapter la démonstration de la prop.13).

8. Soient l'intervalle $[0,1]$, A un ensemble non dénombrable muni de la topologie discrète, et $T = I \times A$. Si $f(x,a)$ ($x \in I$, $a \in A$) est une fonction continue à support compact sur T, il existe une partie finie B de A telle que $f(x,a)=0$ pour $a \notin B$; on pose $\nu(f) = \sum_{a \in A} \int f(x,a)\, d\mu(x)$, μ désignant la mesure de Lebesgue sur I. Soit $g(x,a)$ la fonction positive sur T définie par $g(0,a)=1$ et $g(x,a)=0$ pour $x \neq 0$. Montrer que g est localement ν-intégrable. Soit $\rho = g.\nu$. Montrer que $\int^* 1.d\nu = 0$ et que $\int^* g.d\mu = +\infty$.

9. Soit T l'espace brésilien. En plaçant en chacun des points $(\frac{1}{n}, \frac{k}{n^2})$ la masse $\frac{1}{n^3}$, on définit une mesure ν. En plaçant en chacun des points $(\frac{1}{n}, \frac{k}{n^2})$ la masse $\frac{1}{n^3 \log n}$, on définit une mesure ν'. Montrer que $\nu' = g.\nu$, où g est une fonction continue définie sur T,

nulle seulement sur la droite $x=0$, mais que, si f est la fonction positive sur T égale à 1 sur la droite $x=0$ et à 0 ailleurs, on a $\int^* fg\, d\nu = 0$, $\int^* f\, d\nu' = 0$.

§ 6. Image d'une mesure.

1. Définition de l'image d'une mesure.- Soient X un espace localement compact, π une application μ-mesurable de T dans X. Posons, pour tout $t \in T$, $\lambda_t = \varepsilon_{\pi(t)}$. L'application $t \rightarrow \lambda_t$ est une application vaguement mesurable de T dans $\mathcal{M}(X)$. Pour tout $t \in T$, λ_t est une mesure positive ponctuelle sur X. Si l'application $t \rightarrow \lambda_t$ est vaguement essentiellement μ-intégrable, c'est-à-dire si, pour toute fonction numérique $f \in \mathcal{K}(X)$, la fonction $t \rightarrow \langle f, \lambda_t \rangle = f(\pi(t)) = (f \circ \pi)(t)$ est essentiellement μ-intégrable, nous pouvons appliquer les résultats du § 4.

Proposition 1.- Pour que l'application $t \rightarrow \varepsilon_{\pi(t)}$ soit vaguement essentiellement intégrable, il faut et il suffit que, pour tout ensemble compact $K \subset X$, $\overset{-1}{\pi}(K)$ soit essentiellement intégrable.

Si l'application $t \rightarrow \lambda_t$ est vaguement essentiellement μ-intégrable la fonction $t \rightarrow \langle \varphi_K, \lambda_t \rangle = \varphi_K(\pi(t)) = \varphi_{\overset{-1}{\pi}(K)}(t)$ est essentiellement μ-intégrable d'après le th.2 du § 4.

Réciproquement, supposons que $\overset{-1}{\pi}(K)$ soit essentiellement μ-intégrable pour toute partie compacte K de X. Soient alors f une fonction de $\mathcal{K}(X)$ et S son support. On a $\overline{\int}^* |f(\pi(t))|\, d\mu(t) \leq \|f\| \overline{\int}^* \varphi_S(\pi(t))\, d\mu(t) =$ $= \|f\| \overline{\int}^* \varphi_{\overset{-1}{\pi}(S)}(t)\, d\mu(t) < +\infty$; comme $f \circ \pi$ est μ-mesurable, on voit que $f \circ \pi$ est essentiellement μ-intégrable.

Définition 1. Soit μ *une mesure positive sur un espace localement compact* T, *et soit* π *une application de* T *dans un espace localement compact* X. *Si* π *est* μ*-mesurable, et si, pour toute partie compacte* K *de* X, $\overset{-1}{\pi}(K)$ *est essentiellement* μ*-intégrable, on dit que* π *est* μ*-propre. La mesure* $\overline{\int} \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$ *sur* X *s'appelle alors l'image de* μ *par* π, *et on la note* $\pi(\mu)$.

Si $\nu = \pi(\mu)$, on a donc par définition, pour $f \in \mathcal{K}(X)$:

$$(1) \qquad \int f(x)\, d\nu(x) = \overline{\int} f(\pi(t))\, d\mu(t) .$$

Remarques.- 1. Si μ est *bornée*, toute application μ-mesurable de T dans X est μ-propre.

2. Si, pour toute partie compacte K de X, $\overset{-1}{\pi}(K)$ est relativement compact, π est μ-propre ; en particulier, toute application continue *propre* de T dans X (Top.gén., 2ᵉ éd., chap. I, § 10, n° [illegible]) est μ-propre.

2. *Intégration par rapport à l'image d'une mesure.*- Soit π une application μ-propre de T dans X, et soit $\nu = \pi(\mu)$. Les énoncés suivants ne sont que des cas particuliers des résultats du § 4.

Proposition 2.- *Soit* f *une fonction positive finie ou non définie dans* X. *On a*

$$(2) \qquad \overline{\int}^{*} f(x)\, d\nu(x) = \overline{\int}^{*} f(\pi(t))\, d\mu(t) .$$

Si π *est continue et propre, on a de plus*

$$(2') \qquad \int^{*} f(x)\, d\nu(x) = \int^{*} f(\pi(t))\, d\mu(t) .$$

Corollaire 1.- *Soit* A *une partie de* X. *On a* $\overline{\nu}^{*}(A) = \overline{\mu}^{*}(\overset{-1}{\pi}(A))$. *Si* π *est continue et propre, on a de plus* $\nu^{*}(A) = \mu^{*}(\overset{-1}{\pi}(A))$.

Corollaire 2.- *Soit* A *une partie de* X. *Pour que* A *soit localement négligeable pour* ν, *il faut et il suffit que* $\overset{-1}{\pi}(A)$ *soit localement négligeable pour* μ.

Supposons π continue et propre. Alors, pour que A soit ν-négligeable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi}(A)$ soit μ-négligeable.

Proposition 3.- Soit f une application de X dans un espace topologique G. Pour que f soit ν-mesurable, il faut et il suffit que $f \circ \pi$ soit μ-mesurable.

Corollaire.- Soit A une partie de X. Pour que A soit ν-mesurable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi}(A)$ soit μ-mesurable.

Par contre, l'image par π d'une partie μ-mesurable de T n'est pas nécessairement ν-mesurable.

Théorème 1.- Soit f une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace de Banach F ou dans $\overline{R}$. Pour que f soit essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit que $f \circ \pi$ soit essentiellement μ-intégrable, et on a alors

$$(3) \qquad \overline{\int} f(x)\,d\nu(x) = \overline{\int} f(\pi(t))\,d\mu(t) .$$

Supposons π continue et propre. Pour que f soit ν-intégrable, il faut et il suffit que $f \circ \pi$ soit μ-intégrable, et on a alors

$$(3') \qquad \int f(x)\,d\nu(x) = \int f(\pi(t))\,d\mu(t) .$$

Corollaire.- Soit A une partie de X. Pour que A soit essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit $\overset{-1}{\pi}(A)$ soit essentiellement μ-intégrable, et on a alors $\overline{\nu}(A) = \overline{\mu}(\overset{-1}{\pi}(A))$. Supposons π continue et propre. Pour que A soit ν-intégrable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi}(A)$ soit μ-intégrable, et on a alors $\nu(A) = \mu(\overset{-1}{\pi}(A))$.

Proposition 4.- Soit f une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace localement convexe séparé F sur R. Pour que f soit faiblement essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit que $f \circ \pi$ soit faiblement essentiellement μ-intégrable, et on a alors

$$(4)\qquad \overline{\int} f(x)\,d\nu(x) = \overline{\int} f(\pi(t))\,d\mu(t)\ .$$

Supposons π continue et propre. Pour que f soit faiblement ν-intégrable, il faut et il suffit que $f\circ\pi$ soit faiblement μ-intégrable, et on a alors

$$(4')\qquad \int f(x)\,d\nu(x) = \int f(\pi(t))\,d\mu(t)\ .$$

3. Propriétés de l'image d'une mesure.- Proposition 5.- Soient T, X, Y trois espaces localement compacts, μ une mesure positive sur T, π une application μ-propre de T dans X. Soient $\mu' = \pi(\mu)$, π' une application de X dans Y, et $\pi'' = \pi'\circ\pi$. Pour que π' soit μ'-propre, il faut et il suffit que π'' soit μ-propre, et on a alors $\pi''(\mu) = \pi'(\mu')$.

En effet, dire que π' est une application μ'-propre de X dans Y revient à dire que l'application $x \longrightarrow \varepsilon_{\pi'(x)}$ de X dans $\mathcal{M}(Y)$ est vaguement mesurable et vaguement essentiellement intégrable pour μ', donc (prop.3 et 4) que l'application $t \longrightarrow \varepsilon_{\pi'(\pi(t))} = \varepsilon_{\pi''(t)}$ est vaguement mesurable et vaguement essentiellement intégrable pour μ, donc que π'' est μ-propre. Et on a alors $\pi'(\mu') = \int \varepsilon_{\pi'(x)}\,d\mu'(x) = \int \varepsilon_{\pi''(t)}\,d\mu(t) = \pi''(\mu)$.

Corollaire.- Soient X et X' deux espaces localement compacts, ν une mesure positive sur X, π une application biunivoque de X sur X', π' l'application réciproque. Supposons que π soit ν-propre, et soit $\nu' = \pi(\nu)$. Alors, π' est ν'-propre, et $\pi'(\nu') = \nu$.

Proposition 6.- Soient T et X deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur T, π une application μ-propre de T dans X, g une fonction positive finie définie sur X et telle que $g\circ\pi$ soit localement intégrable pour μ, $\nu = \pi(\mu)$ et $\rho = (g\circ\pi)\mu$. Pour que g soit

<u>localement intégrable pour</u> ν, <u>il faut et il suffit que</u> π <u>soit</u> ρ <u>propre</u>, <u>et on a alors</u> $\pi(\rho) = g.\nu$.

En effet, dire que g est localement intégrable pour ν revient à dire que l'application $x \to g(x)\varepsilon_x$ de X dans $\mathcal{M}(X)$ est vaguement mesurable et vaguement essentiellement intégrable pour ν , donc (prop.3 et 4) que l'application $t \to g(\pi(t))\varepsilon_{\pi(t)}$ est vaguement mesurable et vaguement essentiellement intégrable pour μ ; et on a alors $g.\nu = \int g(\pi(t))\varepsilon_{\pi(t)} d\mu(t)$. De même, dire que π est ρ-propre revient à dire que l'application $t \to \varepsilon_{\pi(t)}$ est vaguement mesurable et vaguement essentiellement intégrable pour ρ , donc (§ 5,prop.4 et 5) que l'application $t \to g(\pi(t))\varepsilon_{\pi(t)}$ est vaguement mesurable et vaguement essentiellement intégrable pour μ ; et on a alors $\pi(\rho) = \int g(\pi(t))\,\varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$.

4. <u>Mesures quotients</u>.- Soient T et X deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur T, π une application μ-mesurable de T dans X . En général, π n'est pas μ-propre, de sorte que $\pi(\mu)$ n'est pas définie.

<u>Définition 2</u>.- <u>Soient</u> T <u>et</u> X <u>deux espaces localement compacts</u>, μ <u>une mesure positive sur</u> T , π <u>une application</u> μ-<u>mesurable de</u> T <u>dans</u> X . <u>On dit</u> ~~que~~ <u>qu'une mesure positive</u> ν <u>sur</u> X <u>est une mesure quotient de</u> μ <u>relative à</u> π <u>s'il existe une mesure positive</u> μ' <u>sur</u> T <u>équivalente à</u> μ <u>et une mesure</u> ν' <u>sur</u> X <u>équivalente à</u> ν , <u>telles que</u> π <u>soit</u> μ'-<u>propre et que</u> $\nu' = \pi(\mu')$.

<u>Proposition 7</u>.- <u>Si</u> X <u>est dénombrable à l'infini</u>, <u>il existe une mesure quotient de</u> μ <u>par</u> π .

En effet, il existe (§ 5, prop. 13) une mesure positive μ' équivalente à μ et bornée. Alors, π est μ'-propre, et $\nu = \pi(\mu')$ est une mesure quotient de μ .

<u>Proposition 8.- Si μ admet une mesure quotient ν ~~relativement~~ à π , l'ensemble des mesures quotients de μ est l'ensemble des mesures positives équivalentes à ν . Toute mesure positive équivalente à μ admet les mêmes mesures quotients que μ .</u>

Il est clair que toute mesure positive équivalente à μ admet les mêmes mesures quotients que μ , et que toute mesure positive équivalente à ν est une mesure quotient de μ . Soit maintenant ν_1 une mesure quotient de μ . Soient μ' et μ'_1 des mesures positives équivalentes à μ , telles que π soit μ'-propre et μ'_1 -propre, ettelles que ν (resp. ν_1) soit équivalente à $\nu' = \pi(\mu')$ (resp. $\nu'_1 = \pi(\mu'_1)$). Pour qu'une partie A de X soit localement négligeable pour ν , il faut et il suffit qu'elle soit localement négligeable pour ν' , donc que $\overset{-1}{\pi}(A)$ soit localement négligeable pour μ' , c'est-à-dire pour μ . De même, pour que A soit localement négligeable pour ν_1 , il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi}(A)$ soit localement négligeable pour μ . Donc les ensembles localement négligeables pour ν et ν_1 sont les mêmes, ce qui prouve (§ 5,prop.12) que ν et ν_1 sont équivalentes.

Si, dans une classe C de mesures positives équivalentes sur T , il existe une mesure μ admettant une mesure quotient ν , on dira donc que la classe C admet une <u>classe quotient</u>, à savoir la classe des mesures positives sur X équivalentes à ν .

<u>Remarque.</u>- Si ν est une mesure quotient de μ relative à π , ν est porté par l'ensemble $\pi(T)$. En effet, soient μ' et ν' des mesures positives équivalentes respectivement à μ et ν , telles que π soit μ'-propre et que $\nu' = \pi(\mu')$. L'ensemble $\overset{-1}{\pi}(\complement\, \pi(T)) = \emptyset$ est μ'-négligeable, donc $\complement\, \pi(T)$ est localement négligeable pour ν' et par suite pour ν .

§ 7. Mesures induites.

1. Définition de la mesure induite.- Soient T un espace localement compact μ une mesure positive sur T, X un sous-espace localement compact de T. Rappelons (Top.gén., 2è éd., chap. I, § 10, prop.) que X est l'intersection d'un ensemble ouvert et d'un ensemble fermé dans T, donc est μ-mesurable.

Pour toute application f de T dans un ensemble F, nous désignerons par f_X la restriction de f à X. Si F est un espace vectoriel sur R ou si $F = \overline{R}$, et si g est une application de X dans F, nous désignerons par g^X l'application de T dans F égale à g dans X et à 0 dans $\complement X$; on a donc $(g^X)_X = g$, $(f_X)^X = \varphi_X f$.

Définissons une application π de T dans X en posant $\pi(t)=t$ pour $t \in X$, et $\pi(t)=t_0$ pour $t \in \complement X$, t_0 étant un point fixe arbitraire de X. Posons, pour tout $t \in T$, $\lambda_t = \varphi_X(t)\,\varepsilon_{\pi(t)}$, où $\varepsilon_{\pi(t)}$ est considéré comme une mesure sur X. On définit ainsi une application de T dans $\mathcal{M}(X)$, évidemment indépendante du choix de t_0 dans X. L'application $t \to \lambda_t$ est μ-mesurable. Pour toute fonction numérique f continue à support compact sur X, l'application $t \to \langle f, \lambda_t \rangle$ est μ-mesurable, bornée, à support compact, donc μ-intégrable ; donc l'application $t \to \lambda_t$ est μ-intégrable, et nous pouvons appliquer les résultats du § 4. Si f est une fonction numérique continue à support compact sur X, et si on pose $\mu_X = \int \lambda_t \, d\mu(t)$, on a

$$\int f(x)\,d\mu_X(x) = \int \langle f, \lambda_t \rangle \, d\mu(t) = \int f^X(t)\,d\mu(t) .$$

Définition 1.- Etant donné un sous-espace localement compact X d'un espace localement compact T, on appelle mesure induite sur X par une mesure positive μ sur T, et on note μ_X, la mesure positive sur X définie par la formule

$$(1) \int f(x)\,d\mu_X(x) = \int f^X(t)\,d\mu(t)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(X)$.

Si g est une application de T dans un espace vectoriel localement convexe séparé sur R, les intégrales $\int g_X(x)\,d\mu_X(x)$, $\overline{\int} g_X(x)\,d\mu_X(x)$ se notent aussi $\int_X g(t)\,d\mu(t)$, $\overline{\int}_X g(t)\,d\mu(t)$, par abus de notations.

Lorsque X est un sous-espace ouvert de T, la déf. 1 coïncide avec la définition de la mesure induite sur X par μ (ou de la restriction de μ à X) donnée au chap. III, § 3, n° 1, car, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(X)$, la fonction f^X est alors continue dans T.

Proposition 1.- Soit π' l'application identique de X dans T ; π' est μ_X-propre ; soit $\nu = \pi'(\mu_X)$, qui est une mesure positive sur T portée par X. On a : $\nu = \varphi_X \cdot \mu$.

En effet, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$, $f \circ \pi = f_X$ est essentiellement μ_X-intégrable puisque $(f_X)^X = f\varphi_X$ est essentiellement μ-intégrable ; et on a :

$$\int f(t)\,d\nu(t) = \int f(\pi(x))\,d\mu_X(x) = \int f_X(x)\,d\mu_X(x) = \int (f_X)^X(t)\,d\mu(t) =$$
$$= \int f(t)\,\varphi_X(t)\,d\mu(t) .$$

Remarque.- Si $g(t)$ est une fonction numérique finie sur T, localement intégrable pour μ, et telle que $g(t)=1$ pour $t \in X$, la formule (1) et le th. 3 du § 5 montrent aussitôt que $(g\cdot\mu)_X = \mu_X$. En particulier, $\nu_X = \mu_X$. La mesure ν est donc la seule mesure portée par X qui induise sur X la mesure μ.

2. Intégration par rapport à une mesure induite.- Soient X un sous-espace localement compact de T, μ une mesure positive sur T, π' l'application identique de X dans T ; posons encore $\nu = \varphi_X \cdot \mu = \pi'(\mu_X)$. Les énoncés suivants ne sont que des cas particuliers des résultats du § 4 .

Proposition 2.- Soit f une fonction positive finie ou non définie dans X .
On a

(2) $$\overline{\int}^{*} f(x)\, d\mu_X(x) = \overline{\int}^{*} f^X(t)\, d\mu(t) = \overline{\int}^{*} f^X(t)\, d\nu(t)$$

Soit f' une fonction positive finie ou non définie dans T . On a :

(3) $$\overline{\int}^{*} f'(t)\, d\nu(t) = \overline{\int}^{*} f'(t)\varphi_X(t)\, d\mu(t) = \overline{\int}^{*} f'_X(x)\, d\mu_X(x) .$$

Corollaire 1.- Soit A une partie de X . On a $\overline{\mu}_X^*(A) = \overline{\mu}^*(A) = \overline{\nu}^*(A)$.
Soit A' une partie de T . On a $\overline{\nu}^*(A') = \overline{\mu}^*(A' \cap X) = \overline{\mu}_X^*(A' \cap X)$.

Corollaire 2.- Soit A une partie de X . Pour que A soit localement négligeable pour μ_X , il faut et il suffit que A soit localement négligeable pour μ ou pour ν . Soit A' une partie de T . Pour que A' soit localement négligeable pour ν , il faut et il suffit que A' $\cap$ X soit localement négligeable pour μ ou pour μ_X .

Corollaire 3.- Soit M une partie de T . Si μ est concentrée sur M , μ_X est concentrée sur M $\cap$ X .

Remarque.- Si S est le support de μ, S $\cap$ X (qui est fermé dans X) contient le support de μ_X d'après le cor.3, mais peut en être distinct Par exemple, si μ est la mesure de Lebesgue sur R et X le sous-espace de R réduit à un point, la mesure induite μ_X est nulle donc son support est vide.

Corollaire 4.- Pour que μ_X =0, il faut et il suffit que X soit localement négligeable pour μ .

Proposition 3.- Soit f une application de X dans un espace topologique G . Pour que f soit μ_X -mesurable, il faut et il suffit que f , considérée comme application d'une partie mesurable de T dans G , soit μ -mesurable, ou ν -mesurable. Soit f' une application de T dans G . Pour que f' soit ν -mesurable, il faut et il suffit que f'_X soit μ -mesurable ou μ_X -mesurable

Corollaire.- Soit A une partie de X . Pour que A soit μ_X-mesurable, il faut et il suffit que A soit μ-mesurable ou ν-mesurable. Soit A' une partie de T . Pour que A' soit ~~μ~~ ν-mesurable, il faut et il suffit que $A' \cap X$ soit μ-mesurable ou μ_X-mesurable.

Théorème 1.- Soit f une application définie dans X , à valeurs dans un espace de Banach F ou dans $\overline{R}$. Pour que f soit essentiellement μ_X-intégrable, il faut et il suffit que f^X soit essentiellement μ-intégrable ou essentiellement ν-intégrable, et on a alors

$$(4) \qquad \overline{\int} f(x)\,d\mu_X(x) = \overline{\int} f^X(t)\,d\mu(t) = \overline{\int} f^X(t)\,d\nu(t) .$$

Soit f' une application définie dans T, à valeurs dans F ou $\overline{R}$. Pour que f' soit essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit que f'_{φ_X} soit essentiellement μ-intégrable, ou que f'_X soit essentiellement μ_X-intégrable, et on a alors

$$(5) \qquad \overline{\int} f'(t)\,d\nu(t) = \overline{\int} f'(t)\,\varphi_X(t)\,d\mu(t) = \overline{\int} f'_X(x)\,d\mu_X(x) .$$

Corollaire.- Soit A une partie de X . Pour que A soit essentiellement μ_X-intégrable, il faut et il suffit que A soit essentiellement μ-intégrable ou essentiellement ν-intégrable, et on a alors $\overline{\mu_X}(A) = \overline{\mu}(A) = \overline{\nu}(A)$. Soit A' une partie de T . Pour que A' soit essentiellement ν-intégrable, il faut etil suffit que $A' \cap X$ soit essentiellement μ-intégrable ou essentiellement μ_X-intégrable, et on a alors $\overline{\nu}(A') = \overline{\mu}(A' \cap X) = \overline{\mu_X}(A' \cap X)$.

Proposition 4.- Soit f une fonction définie dans X , à valeurs dans un espace localement convexe séparé F sur R . Pour que f soit faiblement essentiellement μ_X-intégrable, il faut et il suffit que f^X soit faiblement essentiellement μ-intégrable, ou faiblement essentiellement ν-intégrable, et on a alors

(6) $\overline{\int} f(x)d\mu_X(x) = \overline{\int} f^X(t)d\mu(t) = \overline{\int} f^X(t)d\nu(t)$.

<u>Soit</u> f' <u>une application définie dans</u> T, <u>à valeurs dans</u> F . <u>Pour que</u> f' <u>soit faiblement essentiellement</u> ν<u>-intégrable, il faut et il suffit que</u> $f'\varphi_X$ <u>soit faiblement essentiellement</u> μ<u>-intégrable, ou que</u> f'_X <u>soit faiblement essentiellement</u> μ_X<u>-intégrable, et on a alors</u>

(7) $\overline{\int} f'(t)d\nu(t) = \overline{\int} f'(t)\varphi_X(t)d\mu(t) = \overline{\int} f'_X(x)d\mu_X(x)$.

Voici maintenant une série de propriétés qui sont des conséquences un peu moins immédiates des résultats généraux.

<u>Lemme</u>.- <u>Si une partie</u> A <u>de</u> X <u>est</u> μ_X<u>-négligeable</u>, A <u>est</u> ν<u>-négligeable</u>.

En effet, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une partie ouverte U de X telle que $A \subset U$ et $\mu_X(U) \leqslant \varepsilon$. Soit U' une partie ouverte de T telle que $U' \cap X = U$. On a : $\nu(U') = \bar{\nu}(U') = \bar{\mu}_X(U) = \mu_X(U) \leqslant \varepsilon$. Donc A est ν-négligeable.

<u>Proposition 5</u>.- <u>Soit</u> f <u>une fonction positive finie ou non définie dans</u> X. <u>On a</u> : $\int^* f(x)d\mu_X(x) = \int^* f^X(t)d\nu(t)$.

D'après la formule (3') du § 3, on a $\int^* f^X(t)d\nu(t) \geqslant \int^* f(x)d\mu_X(x)$. La proposition est donc immédiate si $\int^* f(x)d\mu_X(x) = +\infty$. Si $\int^* f(x)d\mu_X(x) < +\infty$, il existe une suite (K_n) de parties compactes de X et une partie μ_X-négligeable N de X telle que f soit nulle en dehors de $(\bigcup_n K_n) \cup N$. L'ensemble N est ν-négligeable. On a donc :

$$\int^* f(x)d\mu_X(x) = \overline{\int}^* f(x)d\mu_X(x) = \overline{\int}^* f^X(t)d\nu(t) = \int^* f^X(t)d\nu(t) .$$

Si f' est une fonction positive définie dans T , on n'a pas en général $\int^* f'(t)d\nu(t) = \int^* f'_X(x)d\mu_X(x)$, même si X est ouvert (ex.1) Toutefois, si X est fermé, $\complement X$, qui est localement ν-négligeable, est alors ν-négligeable, de sorte que $\int^* f'(t)d\nu(t) = \int^* f'(t)\varphi_X(t) d\nu(t) = \int^* f'_X(x)d\mu_X(x)$ en vertu de la prop.5 .

Ce résultat peut aussi s'obtenir en remarquant que, quand X est fermé, l'application π' est propre.

Proposition 6.- Soit f une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace de Banach ou dans $\overline{R}$. Pour que f soit μ_X-intégrable, il faut et il suffit que f^X soit ν-intégrable, et on a alors

$$(8) \qquad \int f(x)\,d\mu_X(x) = \int f^X(t)\,d\mu(t) \quad .$$

En effet, pour que f soit μ_X-intégrable, il faut et il suffit que f soit μ_X-mesurable et que $\int^* |f(x)|\,d\mu_X(x) < +\infty$, donc que f^X soit ν-mesurable et que $\int^* |f^X(t)|\,d\nu(t) < +\infty$, donc que f^X soit ν-intégrable. Et la formule (4) se réduit alors à la formule (8).

Lorsque X est fermé, on peut, comme plus haut, complèter la proposition : soit f' une application de T dans un espace de Banach ou dans $\overline{R}$: pour que f' soit ν-intégrable, il faut et il suffit que f'_X soit μ_X-intégrable, et on a $\int f'(t)\,d\nu(t) = \int f'_X(x)\,d\mu_X(x)$.

Proposition 7.- Soit f une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace localement convexe séparé F sur R. Pour que f soit faiblement μ_X-intégrable, il faut et il suffit que f^X soit faiblement ν-intégrable, et on a alors $\int f(x)\,d\mu_X(x) = \int f^X(t)\,d\nu(t)$.

Supposons f faiblement intégrable pour μ_X. Alors, pour tout élément z' du dual F' de F, la fonction $\langle f, z'\rangle$ est μ_X-intégrable, donc la fonction $\langle f^X, z'\rangle$ est ν-intégrable, et on a

$$\left\langle \int f(x)\,d\mu_X(x),\, z'\right\rangle = \int \langle f(x), z'\rangle\,d\mu_X(x) = \int \langle f^X(t), z'\rangle\,d\nu(t)$$

donc f^X est faiblement ν-intégrable, et on a $\int f(x)\,d\mu_X(x) = \int f^X(t)\,d\nu(t)$. La réciproque se démontre de la même façon.

Lorsque X est fermé, on peut compléter cette proposition comme les précédentes.

Enfin, si X est ouvert, on peut compléter les propositions 5,6,7 dans une autre direction, grâce au résultat suivant :

Proposition 8.- Supposons X ouvert. Alors, si f est une fonction positive finie ou non définie dans X , on a $\int^* f(x)d\mu_X(x) = \int^* f^X(t)d\mu(t)$.

D'après la prop.5, il suffit de prouver que $\int^* f^X(t)d\nu(t) = \int^* f^X(t)d\mu(t)$. Or, comme $\nu \leqslant \mu$, on a d'abord $\int^* f^X(t)d\nu(t) \leqslant \int^* f^X(t)d\mu(t)$. Puis, si g est une fonction positive semi-continue inférieurement sur T majorant f^X , on a :

$$\int^* g(t)d\nu(t) = \overline{\int}^* g(t)d\nu(t) = \overline{\int}^* g(t)\varphi_A(t)d\mu(t) = \int^* g(t)\varphi_X(t)d\mu(t)$$
$$\geqslant \int^* f^X(t)\varphi_X(t)d\mu(t) = \int^* f^X(t)d\mu(t)$$

et par suite, vu l'arbitraire de g , $\int^* f^X(t)d\nu(t) \geqslant \int^* f^X(t)d\mu(t)$.

Proposition 9.- Supposons X ouvert. Soit f une fonction définie sur X , à valeurs dans un espace de Banach ou dans $\overline{R}$. Pour que f soit μ_X -intégrable, il faut et il suffit que f^X soit μ -intégrable, et on a alors

$$\int f(x)d\mu_X(x) = \int f^X(t)d\mu(t)$$

Proposition 10.- Supposons X ouvert. Soit f une fonction définie sur X , à valeurs dans un espace localement convexe réel séparé. Pour que f soit faiblement μ_X -intégrable, il faut et il suffit que f^X soit faiblement μ -intégrable, et on a alors

$$\int f(x)d\mu_X(x) = \int f^X(t)d\mu(t) .$$

Ces deux propositions se démontrent à partir de la prop.8 exactement comme les prop.6 et 7 ont été déduites de la prop.5 .

3. <u>Propriétés des mesures induites</u>.- <u>Proposition 11</u>.- (<u>transitivité</u>) <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux sous-espaces localement compacts de</u> T , <u>tels que</u> $Y \subset X$. <u>La mesure induite par</u> μ_X <u>sur</u> Y <u>est identique à</u> μ_Y .

En effet, on a $\mu_Y = \overline{\int} \lambda_t \, d\mu(t)$, où $\lambda_t = \varepsilon_t$ pour $t \in Y$, et $\lambda_t = 0$ pour $t \in T-Y$. Donc (prop.4) $\mu_Y = \int \lambda'_x \, d\mu_X(x)$, où $\lambda'_x = \varepsilon_x$ pour $x \in Y$, et $\lambda'_x = 0$ pour $x \in X-Y$. Autrement dit, μ_Y est la mesure induite par μ_X sur Y .

<u>Proposition 12</u>.- <u>Soit</u> g <u>une fonction positive finie définie dans</u> T <u>et localement intégrable pour</u> μ . <u>Alors, la fonction</u> g_X <u>est localement intégrable pour</u> μ_X , <u>et on a</u> : $g_X . \mu_X = (g.\mu)_X$.

En effet, posons $\nu = g.\mu$. On a : $(g.\mu)_X = \int \lambda_t \, d\nu(t)$, où $\lambda_t = \varepsilon_t$ pour $t \in X$ et $\lambda_t = 0$ pour $t \notin X$. Donc (§ 5,prop.5) l'application $t \longrightarrow \lambda_t g(t)$ de T dans $\mathcal{M}(X)$ est vaguement essentiellement μ-intégrable, et on a : $(g.\mu)_X = \int \lambda_t g(t) d\mu(t)$. Donc (prop.4) l'application $x \longrightarrow \varepsilon_x g_X(x)$ de X dans $\mathcal{M}(X)$ est vaguement essentiellement μ-intégrable (autrement dit, g_X est localement intégrable pour μ_X), et on a $g_X . \mu_X = \overline{\int} \varepsilon_x g_X(x) d\mu_X(x) = \overline{\int} \lambda_t g(t) d\mu(t) = (g.\mu)_X$.

Une mesure sur X n'est pas nécessairement induite par une mesure sur T . De façon précise :

<u>Proposition 13</u>. <u>Soit</u> λ <u>une mesure positive sur</u> X . <u>Pour qu'il existe une mesure sur T induisant sur</u> X <u>la mesure</u> λ , <u>il faut et il suffit que, pour toute partie compacte</u> K <u>de</u> T , $K \cap X$ <u>soit</u> λ -<u>intégrable</u>.

La condition est évidemment nécessaire, en vertu de la prop.9 . Inversement, supposons la remplie. Alors, l'injection π' de X dans T est λ-propre ; soit $\nu = \pi'(\lambda)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(X)$, on a $\overline{\int} f(x)d\lambda(x) = \overline{\int} f^X(t)d\nu(t)$ (§ 6, th. 1), ce qui prouve que $\lambda = \nu_X$.

Corollaire.- Si X est fermé, toute mesure sur X est induite par une mesure sur T.

En effet, pour toute partie compacte K de T, $K \cap X$ est fermé dans T, donc compact, et par suite λ-intégrable.

4. Mesure de Stieltjès.- Nous allons étudier dans ce n° les mesures sur un intervalle de R, mesures qu'on appelle mesures de Stieltjès.

Soit I un intervalle de R. Pour toute fonction numérique f définie dans I, continue et à support compact S, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ prend la même valeur quel que soit l'intervalle compact $[a,b]$ tel que $S \subset [a,b] \subset I$. Il est immédiat qu'on définit ainsi une mesure positive λ sur I. (Lorsque I est compact, cf. chap. III, § 1, n°2, exemple III ; lorsque I = R, cf. chap. III, § 2, n°2, exemple II). D'autre part, soit $f^R(x)$ la fonction définie dans R, égale à f(x) dans I et à 0 dans $\complement I$; $f^R(x)$ est une fonction règlée dans R et à support compact ; son intégrale dans R est égale à $\int_a^b f(x)dx$ (cf. chap. IV, § 4, n°4, exemple) ; ainsi, la mesure λ n'est autre que la mesure μ_I induite sur I par la mesure de Lebesgue μ sur R, et on l'appelle la mesure de Lebesgue sur I. Si g est une fonction définie dans I, à valeurs dans un espace de Banach, et λ-intégrable, l'intégrale $\int g(x)d\lambda(x)$ se note donc ~~ainsi~~ aussi $\int_I g(x)dx$, ou encore $\int_c^d g(x)dx$ si c est l'origine et d l'extrémité de I.

Nous allons voir que toute mesure de Stieltjès positive peut se construire simplement à partir d'une mesure de Lebesgue sur un intervalle.

Proposition 14. Soit φ une fonction numérique finie définie dans un intervalle I de R , croissante et continue à droite. Il existe une mesure de Stieltjès positive ν_{φ} sur I et une seule telle que $\nu_{\varphi}(]u,v]) = \varphi(v) - \varphi(u)$ quels que soient $u \in I$, $v \in I$ $(u \leqslant v)$. Réciproquement, si ν est une mesure de Stieltjès positive sur I , ilexiste une fonction numérique finie φ définie dans I , croissante et continue à droite, telle que $\nu = \nu_{\varphi}$, et φ est déterminée à une constante additive près.

Soit φ une fonction numérique finie définie dans I, croissante et continue à droite. Soit J l'ensemble des nombres réels y pour lesquels il existe deux nombres x_1, x_2 de I tels que $\varphi(x_1) < y \leqslant \varphi(x_2)$. L'ensemble J est évidemment un intervalle de R . Pour tout $y \in J$, l'ensemble des $x \in I$ tels que $y \leqslant \varphi(x)$ est non vide, et sa borne inférieure $\psi(y)$ appartient à I . Si $x \in I$ et $y \in J$, les relations $y \leqslant \varphi(x)$ et $x \geqslant \psi(y)$ sont équivalentes : en effet, dire que $x \geqslant \psi(y)$ signifie qu'il existe des nombres x' supérieurs à x et aussi voisins qu'on veut de x dans I tels que $y \leqslant \varphi(x')$, et notre assertion en résulte à cause de la continuité à droite de φ .

Ceci entraîne d'abord aussitôt que ψ est une application croissante de J dans I . En outre, l'image réciproque par ψ d'un intervalle $]u,v[$, où $u \in I$ et $v \in I$ $(u \leqslant v)$ est l'intervalle $]\varphi(u), \varphi(v)]$, puisque la condition $u < \psi(y) \leqslant v$ équivaut à $\varphi(u) < y \leqslant \varphi(v)$. Montrons que l'application ψ est μ_J -propre ; d'abord, ψ , étant règlée, est μ_I -mesurable : ensuite, pour tout intervalle compact $[u,v]$ contenu dans I , $\overset{-1}{\psi}([u,v])$ est μ_I -intégrable ; ceci résulte aussitôt de ce qui précede si u n'est pas l'extrémité inférieure de I ; et, si u est l'extrémité inférieure de I, il suffit d'observer que $\overset{-1}{\psi}(\{u\})$ se réduit à $\{\varphi(u)\}$ à cause de la continuité à droite de φ .

Ainsi, l'image ν de μ_J par ψ existe ; et, d'après ce qui précède

$$\nu(]u,v]) = \mu_J(\overset{-1}{\psi}(]u,v])) = \mu_J(]\varphi(u), \varphi(v)]) = \varphi(v) - \varphi(u) .$$

Réciproquement, soit ν une mesure de Stieltjès positive sur I. Soit $a \in I$, et posons : $\varphi(u) = \nu([a,u])$ pour $u > a$, $u \in I$; $\varphi(a) = \nu(\{a\})$; et $\varphi(u) = -\nu(]u,a[)$ pour $u < a$, $u \in I$. Il est clair que φ est une fonction numérique finie définie dans I, croissante, et que $\nu(]u,v]) = \varphi(v) - \varphi(u)$ quels que soient $u \in I$ et $v \in I$ $(u \leqslant v)$; cette égalité prouve de plus que φ est continue à droite, puisque l'intersection des ensembles $]u, u + \frac{1}{n}]$, pour $n = 1,2,\ldots$, est vide. Enfin, pour qu'une fonction numérique finie φ' définie dans I soit telle que $\varphi'(v) - \varphi'(u) = \nu(]u,v])$ quels que soient $u \in I$ et $v \in I$, il faut et il suffit évidemment que $\varphi' - \varphi$ soit une constante.

Définition 2.- Si φ est une fonction numérique finie définie dans I, croissante et continue à droite, on dit que la mesure ν_φ est associée à φ. Une intégrale telle que $\int f(x)\, d\nu_\varphi(x)$ s'écrit aussi $\int f(x)\, d\varphi(x)$.

En démontrant la prop.14, nous avons établi en même temps la proposition suivante :

Proposition 15.- Soit ν une mesure de Stieltjès positive sur un intervalle I de R. Il existe un intervalle J de R et une application croissante ψ de J dans I, μ_J-propre, telle que $\psi(\mu_J) = \nu$.

Théorème 2 (changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue).- Soient I et J des intervalles de R, φ une application continue strictement croissante de I sur J : on suppose qu'il existe une fonction positive θ sur I, localement intégrable pour μ_I, telle que $\varphi(v) - \varphi(u) = \int_u^v \theta(x)\, dx$

quels que soient $u \in J$, $v \in I$ $(u \leq v)$. Alors, pour qu'une fonction $f(y)$, définie dans J, à valeurs dans un espace de Banach ou dans $\overline{R}$, soit μ_J-intégrable, il faut et il suffit que la fonction $f(\varphi(x))\,\theta(x)$, définie dans I, soit μ_I-intégrable, et on a

$$\int_J f(y)dy = \int_I f(\varphi(x))\,\theta(x)dx\ .$$

Soit ν la mesure de densité θ par rapport à μ_I sur I ; on a $\nu(]u,v]) = \int_u^v \theta(x)dx = \varphi(v) - \varphi(u) = \nu_\varphi(]u,v])$ quels que soient $u \in I$, $v \in I$ $(u \leq v)$, de sorte que $\nu = \nu_\varphi$. Ceci posé, pour que $f(y)$ soit μ_J-intégrable, il faut et il suffit que $f(\varphi(x))$ soit ν_φ-intégrable, donc que $f(\varphi(x))\,\theta(x)$ soit μ_I-intégrable, et on a

$$\int_J f(y)dy = \int_I f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int_I f(\varphi(x))\,\theta(x)dx\ .$$

Exercice.

Soient T l'espace brésilien, X le sous-espace ouvert des points de T d'abscisse > 0. Soit μ une mesure positive définie par des masses placées aux points de X et telles que la droite $\complement X$ soit localement négligeable et non négligeable. Soit f la fonction égale à 1 sur $\complement X$, à 0 sur X. Montrer que $\int^* f_X(x)d\mu_X(x) = 0$ et que $\int^* f(t)d\mu(t) = \int^* f(t)d\nu(t) = 0$ (si $\nu = \varphi_X \cdot \mu$).

§ 9. Produits de mesures.

1. Intégration par rapport au produit de deux mesures.- Soient T, T' deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur T, μ' une mesure positive sur T', $\nu = \mu \otimes \mu'$ la mesure produit sur $X = T \times T'$ (chap. III, § 5).

Pour tout $t \in T$, l'application $t' \longrightarrow (t,t')$ de T' dans X est une application continue propre. Soit μ'_t l'image de μ' par cette application ;

μ'_t est une mesure positive sur X : si $f \in \mathcal{K}(X)$, et si f_t désigne l'application partielle $t' \to f(t,t')$, on a, par définition de μ'_t

$$\mu'_t(f) = \int f_t(t')\, d\mu'(t') .$$

L'application $t \to \mu'_t(f)$ est continue à support compact (chap.III, § 5, lemme 3), donc l'application $t \to \mu'_t$ de T dans $\mathcal{M}(X)$ est vaguement continue et vaguement intégrable. En outre, l'intégrale de f par rapport à $\int \mu'_t\, d\mu(t)$ est par définition $\int \langle f, \mu'_t \rangle\, d\mu(t) = \int d\mu(t) \int f_t(t')\, d\mu'(t')$. On a donc $\int \mu'_t\, d\mu(t) = \nu$ (cf. chap.III, § 5, n°1, Remarque 2).

De même, pour tout élément $t' \in T'$, soit $\mu_{t'}$ l'image de μ par l'application $t \to (t,t')$ de T dans X. L'application $t' \to \mu_{t'}$ est une application vaguement continue et vaguement intégrable de T' dans $\mathcal{M}(X)$, et on a $\int \mu'_t\, d\mu'(t') = \nu$.

Nous nous proposons d'utiliser, dans le cas des applications $t \to \mu'_t$ et $t' \to \mu_{t'}$, les résultats du § 3. Pour cela, nous aurons besoin des remarques suivantes, qui sont conséquences des résultats du § 6 :

1) Soit f une fonction positive finie ou non sur X. On a

$$\int^* f_t(t')\, d\mu'(t') = \int^* f(t,t')\, d\mu'_t(t,t') .$$

L'égalité de ces deux nombres permet de les noter, sans risques de confusions, $\int^* f(t,t')\, d\mu'(t')$.

2) Soit f une fonction définie sur X, à valeurs dans un espace topologique G. Pour que f soit μ'_t-mesurable, il faut et il suffit que f_t soit μ'-mesurable.

3) Soit f une fonction définie sur X, à valeurs dans un espace de Banach ou dans $\overline{R}$. Pour que f soit μ'_t-intégrable, il faut et il suffit que f_t soit μ'-intégrable, et on a alors

$$\int f_t(t')\, d\mu'(t') = \int f(t,t')\, d\mu'_t(t,t') .$$

L'égalité de ces deux intégrales permet de les noter, sans risques de confusions, $\int f(t,t')d\mu'(t')$.

Naturellement, on a des résultats analogues pour les mesures μ'_t.

Nous utiliserons, à la place des notations $\int^* f(t,t')d\nu(t,t')$, $\int f(t,t')d\nu(t,t')$, les notations $\iint^* f(t,t')d\mu(t)d\mu'(t')$, $\iint f(t,t')d\mu(t)d\mu'(t')$, en accord avec les notations adoptées au chap. III, § 5, n° 1. Alors, les résultats du § 3 se traduisent de la ~~même~~ manière suivante :

Proposition 1.- Soit f une fonction positive finie ou non, semi-continue inférieurement dans X. Alors, la fonction $t \to \int^* f(t,t')d\mu'(t')$ est semi-continue inférieurement dans T, et on a

$$\int^* d\mu(t) \int^* f(t,t')d\mu'(t') = \iint^* f(t,t')d\mu(t)\, d\mu'(t') .$$

Proposition 2.- Soit f une fonction positive finie ou non dans X. On a :

$$\iint^* f(t,t')d\mu(t)\, d\mu'(t') \geqslant \int^* d\mu(t) \int^* f(t,t')d\mu'(t') .$$

Corollaire 1.- Soit N un ensemble ν-négligeable dans $T \times T'$. Pour presque tout $t \in T$, la coupe de N suivant t est μ'-négligeable.

Corollaire 2.- Soit f une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace topologique G, et ν-mesurable. Supposons qu'il existe une partie A de X, réunion dénombrable d'ensembles ν-intégrables, telle que la restriction de f à $\complement A$ soit μ_t-mesurable pour presque tout $t \in T$. Alors, pour presque tout $t \in T$, l'application $t' \to f(t,t')$ est μ'-mesurable.

Théorème 1 (Lebesgue-Fubini).- Soit f une fonction définie dans $T \times T'$, à valeurs dans un espace de Banach ou dans $\overline{R}$, et intégrable pour la mesure produit $\mu \otimes \mu'$. Alors, pour presque tout $t \in T$ (resp. $t' \in T'$), la fonction $t' \to f(t,t')$ (resp. $t \to f(t,t')$) est μ'-intégrable (resp. μ-intégrable) ; la fonction $t \to \int f(t,t')\,d\mu'(t')$ (resp. $t' \to \int f(t,t')\,d\mu(t)$), définie presque partout, est μ-intégrable (resp. μ'-intégrable), et on a

$$\iint f(t,t')\,d\mu(t)\,d\mu'(t') = \int d\mu'(t') \int f(t,t')\,d\mu(t) =$$
$$= \int d\mu(t) \int f(t,t')\,d\mu'(t') .$$

Corollaire 1.- Si un ensemble $A \subset X$ est ν-intégrable, alors, pour presque tout $t \in T$, la coupe $A(t)$ de A suivant t est μ'-intégrable, la fonction $t \to \mu'(A(t))$ est μ-intégrable, et on a

$$\nu(A) = \int \mu'(A(t))\,d\mu(t) .$$

Corollaire 2.- Soit f une fonction positive finie ou non définie dans X, ν-mesurable, et nulle en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles ν-intégrables. Alors, les fonctions $t \to \int^* f(t,t')\,d\mu'(t')$, $t' \to \int^* f(t,t')\,d\mu(t)$ sont mesurables respectivement pour μ et μ', et on a

$$\iint^* f(t,t')\,d\mu(t)\,d\mu'(t') = \int^* d\mu(t) \int^* f(t,t')\,d\mu'(t') =$$
$$= \int^* d\mu'(t') \int^* f(t,t')\,d\mu(t) .$$

Remarque.- Une fonction f définie dans $T \times T'$ peut être telle que, pour tout $t \in T$, la fonction $t' \to f(t,t')$ soit μ'-négligeable, et que, pour tout $t' \in T'$, la fonction $t \to f(t,t')$ soit μ-négligeable sans que f soit ν-mesurable (*).

Proposition 3.- Soit f une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace localement convexe séparé F sur R. Supposons f faiblement ν-intégrable, et faiblement μ'_t-intégrable sauf pour des valeurs de t

---

(*) Sierpinski, ...

<u>formant un ensemble</u> N <u>négligeable pour</u> μ . <u>Alors la fonction</u>
$t \to \int f(t,t')d\mu'(t')$, <u>définie pour</u> $t \notin N$, <u>est faiblement intégrable,</u>
<u>et on a :</u> $\int f(t,t')d\mu(t)d\mu'(t') = \int d\mu(t)\int f(t,t')d\mu'(t')$.

2. <u>Critères de mesurabilité pour le produit de deux mesures.</u>- Convenons toujours que $0.(+\infty)=0$. Cette convention a en particulier la conséquence suivante : si f est une fonction positive finie ou non sur un espace localement compact muni d'une mesure positive μ , on a $\mu^*(af) = a\mu^*(f)$ pourt toute constante a telle que $0 \leq a \leq +\infty$. C'est évident si $a=0$; si $a = +\infty$, on a $\mu^*(af)=a\mu^*(f) = 0$ ou $\mu^*(af) = a\mu^*(f) = +\infty$ suivant que f est μ -négligeable ou non μ -négligeable ; si $0 < a < +\infty$, on a $\mu^*(af) = a\mu^*(f)$ d'après la prop.15 du chap.IV, § 1 .

<u>Proposition 4.- Pour tout couple de fonctions positives</u> f,f' <u>finies ou non définies respectivement sur</u> T <u>et</u> T' , <u>on a :</u>

$$\iint^* f(t)f'(t')d\mu(t)d\mu'(t') = \left(\int^* f(t)d\mu(t)\right)\left(\int^* f'(t')d\mu'(t')\right) ,$$

<u>sauf lorsqu'un des facteurs du second membre est nul et l'autre égal à $+\infty$.</u>

D'après la remarque qui précède l'énoncé, la prop.2 entraîne que

$$\iint^* f(t)f'(t')d\mu(t)d\mu'(t') \geqslant \int^* d\mu(t)\int^* f(t)f'(t')d\mu'(t') =$$
$$= \int^* f(t)\left[\int^* f'(t')d\mu'(t')\right]d\mu(t) = \left(\int^* f'(t')d\mu'(t')\right)\left(\int^* f(t)d\mu(t)\right).$$

Il suffit donc de prouver que

$$(1) \quad \iint^* f(t)f'(t')d\mu(t)d\mu'(t') \leq \left(\int^* f(t)d\mu(t)\right)\left(\int^* f'(t')d\mu'(t')\right).$$

Ceci est évident lorsque le second membre vaut $+\infty$. Il reste donc seulement à examiner le cas où $\int^* f(t)d\mu(t)$ et $\int^* f'(t')d\mu'(t')$ sont finis. Dans ce cas, le seond membre de (1) peut être approché arbitrairement par des expressions de la forme $\left(\int^* f_1(t)d\mu(t)\right)\left(\int^* f_1'(t')d\mu'(t')\right)$, où $f_1(t)$ et $f'_1(t')$ sont des fonctions semi-continues inférieurement dans T et T' respectivement telles que $f(t) \leqslant f_1(t)$, $f'(t') \leqslant f'_1(t')$. Or $f_1(t)\, f'_1(t')$ est semi-continue inférieurement dans $T \times T'$; c'est évident en un point (t,t') tel que $f_1(t)=0$ ou $f'_1(t')=0$ (car alors $f_1(t)f'_1(t')=0$) ; pour les autres points (t,t'), c'est une propriété immédiate des fonctions semi-continues inférieurement. On a donc, en vertu de la prop.1 :

$$\Big(\int^* f_1(t)d\mu(t)\Big)\Big(\int^* f'_1(t')d\mu'(t')\Big) = \iint^* f_1(t)f'_1(t')d\mu(t)d\mu'(t')$$
$$\geqslant \iint^* f(t)f'(t')d\mu(t)d\mu'(t')$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1.- Soient A une partie μ -négligeable de T , A' une partie de T' telle que $\mu'^*(A') < +\infty$. Alors $A \times A'$ est négligeable pour $\mu \otimes \mu'$.

Corollaire 2.- Pour tout couple de fonctions positives f,f' finies ou non définies respectivement sur T et T', on a

$$\overline{\iint}^* f(t)f'(t')d\mu(t)d\mu'(t') = \Big(\overline{\int}^* f(t)d\mu(t)\Big)\Big(\overline{\int}^* f'(t')d\mu'(t')\Big)$$

En effet, soient K et K' des parties compactes de T et T' respectivement. On a :

$$(2)\quad \iint^* f(t)\varphi_K(t)\; f'(t')\varphi_{K'}(t')d\mu(t)d\mu'(t') = \int^* f(t)\varphi_K(t)d\mu(t))$$
$$\Big(\int^* f'(t')\varphi_{K'}(t')d\mu'(t')\Big)$$

sauf si l'un des facteurs du second membre est nul et l'autre égal à $+\infty$. Mais, si par exemple $\int^* f(t)\varphi_K(t)d\mu(t)=0$, $f(t)\varphi_K(t)f'(t')\varphi_{K'}(t')$ est nulle en dehors d'un ensemble négligeable pour $\mu \otimes \mu'$, en vertu du cor.1 . L'égalité (2) est donc valable sans exception. Ceci posé, on a

$$\overline{\iint}^* f(t)f'(t')d\mu(t)d\mu'(t') = \sup \iint^* f(t)f'(t')\varphi_{K\times K'}(t,t')d\mu(t)d\mu'(t') =$$
$$= \sup \Big(\int^* f(t)\varphi_K(t)d\mu(t)\Big)\Big(\int^* f'(t')\varphi_{K'}(t')d\mu'(t')\Big)$$

lorsque K (resp. K') parcourt l'ensemble des parties compactes de T (resp. T'), ce qui établit le corollaire.

Corollaire 3.- Soit f une application μ-mesurable de T dans un espace topologique G. Alors, l'application $(t,t') \rightarrow f(t)$ de $T \times T'$ dans G est mesurable pour $\mu \otimes \mu'$.

En effet, soient K et K' des parties compactes de T et T' respectivement. Soient N une partie μ-négligeable de K, et (K_n) une suite de parties compactes de K telles que : 1) $K = N \cup (\bigcup_n K_n)$; 2) la restriction de f à chaque K_n est continue. Alors, la restriction de l'application $(t,t') \rightarrow f(t)$ à chaque ensemble $K_n \times K'$ est continue, et $N \times K'$ est négligeable pour $\mu \otimes \mu'$ d'après le cor.1, ce qui prouve le cor.3 .

Corollaire 4.- Soit g une application de $T \times T'$ dans un espace topologique G. On suppose que les applications partielles $t \rightarrow g(t,t')$ sont continues, et que les applications partielles $t' \rightarrow g(t,t')$ sont μ'-mesurables. Alors, si toute partie compacte de T est métrisable, g est mesurable pour $\mu \otimes \mu'$.

Soient K une partie compacte de T et d une distance sur K compatible avec la topologie de K. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $(U_1^n, U_2^n, \ldots U_{p_n}^n)$ un recouvrement fini ouvert de K tel que tous les U_i^n aient un diamètre inférieur à $\frac{1}{n}$. On en déduit aussitôt un recouvrement fini plus fin $(V_1^n, V_2^n, \ldots, V_{q_n}^n)$ dont les ensembles sont μ-mesurables et deux à deux disjoints. Choisissons un point t_j^n dans chaque V_j^n, et posons $g_n(t,t') = g(t_j^n, t')$ pour $t \in V_j^n$ et $t' \in T'$. La restriction de g_n à $V_j^n \times T'$ est mesurable pour $\mu \otimes \mu'$ en vertu du cor.3, donc g_n est mesurable pour $\mu \otimes \mu'$. Enfin, si $t \in V_j^n$, on a $d(t,t_j^n) \leq \frac{1}{n}$, donc, pour tout couple $(t,t') \in K \times T'$, $g_n(t,t') \to g(t,t')$ quand $n \to \infty$. Par conséquent, la restriction de g à $K \times T'$ est mesurable pour $\mu \otimes \mu'$, de sorte que g est mesurable pour $\mu \otimes \mu'$.

<u>Corollaire 5</u>.- <u>Soient F, F' et G trois espaces topologiques, et soit $(x,y) \to u(x,y)$ une application continue de $F \times F'$ dans G. Soient $f(t)$ (resp. $f'(t')$) une fonction définie dans T (resp. T'), à valeurs dans F (resp. F') et mesurable pour μ (resp. μ'). Alors, la fonction $(t,t') \to u(f(t),f'(t'))$ est mesurable pour $\nu = \mu \otimes \mu'$.</u>

En effet, les applications $(t,t') \to f(t)$ et $(t,t') \to f'(t')$ sont mesurables pour $\mu \otimes \mu'$ en vertu du cor.3 . Le corollaire est alors conséquence du th.1 du chap.IV, §5 .

<u>Corollaire 6</u>.- <u>Si $A \subset T$ et $A' \subset T'$ sont mesurables (pour μ et μ' respectivement), $A \times A'$ est ν-mesurable.</u>

Ceci résulte aussitôt du cor. 5 .

<u>Corollaire 7</u>.- <u>Soient F, F' et G trois espaces de Banach, et soit $(x,y) \to [x.y]$ une application bilinéaire continue de $F \times F'$ dans G. Soient $f(t)$ (resp. $f'(t')$) une fonction définie dans T (resp. T'), à valeurs dans F (resp. F') et intégrable pour μ (resp. μ'). Alors, la fonction $(t,t') \to [f(t).f'(t')]$ est intégrable pour $\nu = \mu \otimes \mu'$, et on a</u>

$$(8) \quad \iint [f(t).f'(t')]\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left[\left(\int f(t)\, d\mu(t)\right).\left(\int f'(t')\, d\mu'(t')\right)\right]$$

La fonction $[f(t).f'(t')]$ est ν-mesurable d'après le cor.5. D'autre part, si b désigne la norme de l'application bilinéaire $(x,y) \to [x.y]$, on a:

$$\iint^* \left|[f(t).f'(t')]\right| d\mu(t)\, d\mu'(t') \leqslant b \iint^* |f(t)|\,|f'(t')|\, d\mu(t)\, d\mu'(t') =$$
$$= b \left(\int^* |f(t)|\, d\mu(t)\right)\left(\int^* |f'(t')|\, d\mu'(t')\right)$$

en vertu de la prop.4. Cela prouve que $[f(t).f'(t')]$ est ν-intégrable. La formule (8) résulte alors du théorème de Lebesgue-Fubini et de la linéarité de l'intégrale (chap.IV, § 4, th.1).

Corollaire 8.- Si $A \subset T$ et $A' \subset T'$ sont intégrables (pour μ et μ' respectivement), $A \times A'$ est intégrable pour $\nu = \mu \otimes \mu'$, et on a $\nu(A \times A') = \mu(A)\, \mu'(A')$.

Ceci résulte aussitôt du cor.7 .

Corollaire 9.- Soient F, F' et G trois espaces de Banach, et soit $(x,y) \longrightarrow [x.y]$ une application bilinéaire continue de $F \times F'$ dans G. Soient $f(t)$ (resp. $f'(t')$) une fonction définie dans T (resp. T'), à valeurs dans F (resp. F'), et essentiellement intégrable pour μ (resp. μ'). Alors, la fonction $(t,t') \longrightarrow [f(t) . f'(t')]$ est essentiellement intégrable pour $\nu = \mu \otimes \mu'$, et on a

$$\iint [f(t).f'(t')]\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left[\left(\int f(t)\, d\mu(t)\right).\left(\int f'(t')\, d\mu'(t')\right)\right]$$

En effet, la fonction $(t,t') \longrightarrow [f(t).f'(t')]$ est ν-mesurable d'après le cor.5 . D'autre part, $\overline{\iint}^{*} \left|[f(t).f'(t')]\right| d\mu(t)\, d\mu'(t') \leqslant b \left(\overline{\int}^{*} |f(t)|\, d\mu(t)\right) \left(\overline{\int}^{*} |f'(t')|\, d\mu'(t')\right)$ en désignant par b la norme de l'application bilinéaire $(x,y) \longrightarrow [x.y]$, en vertu du cor.2 . Donc $[f(t).f'(t')]$ est essentiellement ν-intégrable. Alors

$$\begin{aligned}\iint [f(t).f'(t')]\, d\mu(t)\, d\mu'(t') &= \lim \iint [f(t).f'(t')]\, \varphi_{K \times K'}(t,t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \\ &= \lim \left[\left(\int f(t)\, \varphi_K(t)\, d\mu(t)\right).\left(\int f'(t')\, \varphi_{K'}(t')\, d\mu'(t')\right)\right] \\ &= \left[\left(\lim \int f(t)\, \varphi_K(t)\, d\mu(t)\right).\left(\lim \int f'(t')\, \varphi_{K'}(t')\, d\mu'(t')\right)\right]\end{aligned}$$

lorsque K (resp. K') parcourt l'ensemble des parties compactes de T (resp.T'). Ceci établit le corollaire.

A 19°

Corollaire 10.- Si $A \subset T$ et $A' \subset T'$ sont essentiellement intégrables (pour μ et μ' respectivement), $A \times A'$ est essentiellement intégrable pour $\nu = \mu \otimes \mu'$, et on a $\bar{\nu}(A \times A') = \bar{\mu}(A)\,\bar{\mu}'(A')$.

Ceci résulte aussitôt du cor.9 .

3. Propriétés du produit de deux mesures.- Proposition 5.- Soit g (resp. g') une fonction positive finie définie sur T (resp. T'), localement intégrable pour μ (resp. μ'). Alors, la fonction $(t,t') \to g(t)g'(t')$ est localement intégrable pour $\nu = \mu \otimes \mu'$, et on a

$(g.\mu) \otimes (g'.\mu') = (gg').(\mu \otimes \mu')$.

En effet, si K et K' sont des parties compactes de T et T' respectivement, la fonction $\varphi_{K \times K'}(t,t')g(t)g'(t') = (\varphi_K(t)g(t))(\varphi_{K'}(t')g'(t'))$ est ν-intégrable en vertu du cor.7 de la prop.4. D'autre part, si $f \in \mathcal{K}(T)$ et $f' \in \mathcal{K}(T')$, on a, en posant $\mu_1 = g.\mu$, $\mu'_1 = g'.\mu$, $\nu_1 = (gg').\nu$:

$$\iint f(t)f'(t')d\nu_1(t,t') = \iint f(t)f'(t')g(t)g'(t')d\nu(t,t')$$
$$= \left(\int f(t)g(t)d\mu(t)\right)\left(\int f'(t')g'(t')d\mu(t')\right) = \left(\int f(t)d\mu_1(t)\right)\left(\int f'(t')\right.$$
$$\left.d\mu'_1(t')\right) = \iint f(t)f'(t')d(\mu_1 \otimes \mu'_1)(t,t')$$

donc $\nu_1 = \mu_1 \otimes \mu'_1$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 6.- Soit π (resp. π') une application μ-propre (resp. μ'-propre) de T (resp. T') dans un espace localement compact T_1 (resp. T'_1). Alors, $\pi \times \pi'$ est ν-propre, et on a

$(\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu') = \pi(\mu) \otimes \pi'(\mu')$.

En effet, $\pi \times \pi'$ est ν-mesurable en vertu du cor.5 de la prop.4. D'autre part, si K (resp. K') est une partie compacte de T_1 (resp. T'_1), $\overset{-1}{\pi}(K)$ et $\overset{-1}{\pi'}(K')$ sont essentiellement intégrables pour μ et μ' respectivement, donc $\overset{-1}{\pi}(K) \times \overset{-1}{\pi'}(K')$ est essentiellement intégrable pour ν

(cor. 10 de la prop.4). Ceci prouve que $\pi\times\pi'$ est ν-propre. En outre, si $f\in\mathcal{K}(T_1)$ et $f'\in\mathcal{K}'(T_1')$, on a, en posant $\mu_1=\pi(\mu)$, $\mu_1'=\pi'(\mu')$, $\nu_1=\mu_1\otimes\mu_1'$:

$$\iint f(t_1)f'(t_1')d\mu_1(t)d\mu_1'(t') = \left(\int f(t_1)d\mu_1(t_1)\right)\left(\int f'(t_1')d\mu_1'(t_1')\right) =$$
$$=\left(\int f(\pi(t))d\mu(t)\right)\left(\int f'(\pi'(t'))d\mu'(t')\right)=\iint f(\pi(t))f'(\pi'(t'))d\mu(t)d\mu'(t')$$

ce qui prouve que $\mu_1\otimes\mu_1' = (\pi\times\pi')(\mu\otimes\mu')$.

<u>Proposition 7.- Soit</u> A (resp.A') <u>un sous-espace localement compact de</u> T (resp.T'). <u>Alors</u>, $A\times A'$ <u>est un sous-espace localement compact de</u> $X = T\times T'$, <u>et on a</u> $(\mu\otimes\mu')_{A\times A'} = \mu_A\otimes\mu'_{A'}$.

En effet, si $f\in\mathcal{K}(A)$ et $f'\in\mathcal{K}'(A')$, on a :

$$\iint f(a)f'(a')d\mu_A(a)d\mu'_{A'}(a')=\left(\int f(a)d\mu_A(a)\right)\left(\int f'(a')d\mu'_{A'}(a')\right) =$$
$$=\left(\int f^T(t)d\mu(t)\right)\left(\int f'^{T'}(t')d\mu'(t')\right)=\iint f^T(t)f'^{T'}(t')d\mu(t)d\mu'(t')$$

ce qui prouve que $\mu_A\otimes\mu'_{A'} = (\mu\otimes\mu')_{A\times A'}$.

<u>4. Intégration par rapport à un produit fini de mesures</u>.- Les résultats précédents s'étendent sans peine à un produit d'un nombre fini de mesures. Par exemple, soient T_1,T_2,T_3 trois espaces localement compacts, une mesure positive sur T_i $(i=1,2,3)$, et soit $\nu=\mu_1\otimes\mu_2\otimes\mu_3$ la mesure produit sur $X = T_1\times T_2\times T_3$. Soit f une fonction ν-intégrable à valeurs dans un espace de Banach ou dans $\overline{R}$; une première application du théorème de Lebesgue-Fubini montre que, sauf en des points $(t_1,t_2)\in T_1\times T_2$ formant un ensemble négligeable (pour $\mu_1\otimes\mu_2$), la fonction $t_3\to f(t_1,t_2,t_3)$ est μ_3-intégrable, que la fonction $(t_1,t_2)\to\int f(t_1,t_2,t_3)d\mu_3(t_3)$, définie presque partout dans $T_1\times T_2$, est intégrable pour $\mu_1\otimes\mu_2$, et qu'on a

$$\iiint f(t_1,t_2,t_3)d\nu(t_1,t_2,t_3)=\iint d\mu_1(t_1)d\mu_2(t_2)\int f(t_1,t_2,t_3)\,d\mu_3(t_3) .$$

Une seconde application du même théorème montre que, pour presque tout $t \in T_1$, la fonction $t_2 \longrightarrow \int f(t_1,t_2,t_3)d\mu_3(t_3)$ est définie presque partout dans T_2 et est μ_2-intégrable : en outre, la fonction $t_1 \rightarrow \int d\mu_2(t_2)\int f(t_1,t_2,t_3)d\mu_3(t_3)$, définie presque partout dans T_1, est μ_1-intégrable, et on a

$$\iiint f(t_1,t_2,t_3)d\nu(t_1,t_2,t_3)=\int d\mu_1(t_1)\int d\mu_2(t_2)\int f(t_1,t_2,t_3)d\mu_3(t_3) .$$

On prouve de même que, pour presque tout $t_1 \in T_1$, la fonction $(t_2,t_3) \rightarrow \int f(t_1,t_2,t_3)$ est intégrable pour $\mu_2 \otimes \mu_3$, que la fonction $t_1 \rightarrow \iint f(t_1,t_2,t_3)d\mu_2(t_2)d\mu_3(t_3)$, définie presque partout, est μ_1-intégrable, et qu'on a

$$\iiint f(t_1,t_2,t_3)d\nu(t_1,t_2,t_3)=\int d\mu_1(t_1)\iint f(t_1,t_2,t_3)d\mu_2(t_2)d\mu_3(t_3) .$$

Nous laissons au lecteur le soin de généraliser de la même manière les autres résultats démontrés ci-dessus pour le produit de deux mesures.

5. Intégration par rapport à un produit infini de mesures.- Soit $(T_\iota)_{\iota\in I}$ une famille quelconque d'espaces compacts, et soit $T = \prod_{\iota\in I} T_\iota$. On pose $T_J = \prod_{\iota\in J} T_\iota$ pour toute partie J de I . Pour toute partie finie J de I , soit μ_J une mesure positive sur T_J. On suppose que si J et K sont deux parties finies de I telles que $J \subset K$, on a $pr_{J;K}(\mu_K) = \mu_J$, en désignant par $pr_{J,K}$ la projection de T_K sur T_J. Soit μ la mesure positive sur T limite projective des μ_J (chap. III, § 5, n° 6).

Proposition 8.- Soient K une partie compacte de T , et $K_J = pr_J(K)$ (pr_J désignant la projection de T sur T_J). Alors, $\mu(K)$ est la limite de $\mu_J(K_J)$ suivant l'ensemble, filtrant pour $\subset$, des parties finies J de I .

Pour toute partie finie J de I, posons $K'_J = K_J \times T_{\complement J}$. Les ensembles K'_J sont compacts, contiennent K, et forment une famille filtrante pour la relation $\supset$. Montrons que $\bigcap K'_J = K$. Soient k un élément de $\bigcap K'_J$, et V un voisinage de k dans T. Il existe une partie finie J_0 de I telle que $\{pr_{J_0} k\} \times T_{\complement J_0} \subset V$. Comme $k \in K'_{J_0}$, on a $pr_{J_0} k \in K_{J_0}$, donc il existe un élément $k' \in K$ tel que $pr_{J_0} k = pr_{J_0} k'$. Alors, $k' \in V$, de sorte que V rencontre K. Comme V est un voisinage quelconque de k dans T, on en déduit que $k \in K$, ce qui prouve notre assertion. D'autre part, $\mu_J(K_J) = \mu(K'_J)$, parce que $\mu_J = pr_J(\mu)$ et $K'_J = \overset{-1}{pr_J}(K_J)$. La proposition est alors conséquence du cor. de la prop.11 du chap.IV, § 4.

Corollaire.- Pour tout $\iota \in I$, soient μ_ι une mesure positive sur T_ι de masse totale égale à 1, et K_ι une partie compacte de T_ι. Soient $\mu = \bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ et $K = \prod_{\iota \in I} K_\iota$. Alors, $\mu(K) = \prod_{\iota \in I} \mu_\iota(K_\iota)$.

En effet, si μ_J désigne la mesure $\bigotimes_{\iota \in J} \mu_\iota$ pour toute partie finie J de I, on sait que μ est la limite projective des μ_J. Et d'autre part $\mu_J(pr_J K) = \mu_J(\prod_{\iota \in J} K_\iota) = \prod_{\iota \in J} \mu_\iota(K_\iota)$ en vertu du th. de Lebesgue-Fubini.

Proposition 9.- Soit (T_n) une suite d'espaces compacts. Soit, pour chaque indice n, μ_n une mesure positive de masse totale 1 sur T_n. Soit $\mu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$ la mesure produit sur $T = \prod_{n=1}^{\infty} T_n$. Si, pour chaque n, A_n est une partie μ_n-intégrable de T_n, $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ est μ-intégrable, et on a $\mu(A) = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)$.

En effet, A est l'intersection de la suite décroissante des ensembles $B_n = (\prod_{k=1}^{n} A_k) \times (\prod_{k=n+1}^{\infty} T_k)$: or, d'après le cor.2 de la prop.4, chaque ensemble B_n est μ-intégrable, et on a $\mu(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mu_k(A_k)$. Par suite (chap. IV, § 4, prop.7 et corollaire), A est μ-intégrable, et on a $\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$, ce qui démontre la proposition.

Par contre, si $(T_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille non dénombrable d'espaces compacts, si μ_ι est une mesure positive de masse totale 1 sur T_ι, et si $A_\iota \subset T_\iota$ est μ_ι-intégrable, $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ n'est pas nécessairement μ-mesurable (exerc.) .

Plutôt que ces demi-trivialités, ne pourrait-on pas faire les théorèmes de Jessen (Etat 2, exerc. 11 et 12b , p. 116-117).

Exercice.

a) Soient T un espace localement compact, μ une mesure positive sur T , I un intervalle de R , ν une mesure positive sur I . Soit A une partie du produit $T \times I$, telle que : 1) pour tout $x \in I$, la coupe $A(x) \subset T$ de A est μ-mesurable ; 2) $A(x) \subset A(y)$ si $x \leq y$. Montrer que A est mesurable pour $\rho = \mu \otimes \nu$. (Se ramener au cas où T et I sont compacts et où ν est diffuse ; considérer une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de I telle que $\nu([x_i, x_{i+1}]) \leq \varepsilon$ pour $0 \leq i \leq n-1$; et former deux ensembles B et C de $T \times I$, ρ-mesurables, tels que $B \subset A \subset C$ et $\rho(C-B) \leq \varepsilon\, \mu(T)$).

b) Déduire de a) que, si $f(t,x)$ est une fonction numérique sur $T \times I$, μ-mesurable en t pour chaque $x \in I$, et croissante en x pour chaque $t \in T$, alors f est ρ-mesurable.

c) Déduire de b) que, si $g(t,x)$ est une fonction numérique sur $T \times I$, μ-mesurable en t pour chaque $x \in I$, et monotone en x pour chaque $t \in T$, alors f est ρ-mesurable.

c) Déduire de b) que, si $g(t,x)$ est une fonction numérique sur $T \times I$, μ-mesurable en t pour chaque $x \in I$, et monotone en x pour chaque $t \in T$, alors f est ρ-mesurable. (Montrer que l'ensemble $T_1 \subset T$ des points $t \in T$ tels que $f(t,x)$ soit croissante en x est μ-mesurable ; pour cela, désignant par D_{r_1, r_2}, pour deux nombres rationnels r_1, r_2 de I, l'ensemble des points $t \in T$ tels que $f(t,r_1) \geqslant f(t,r_2)$, exprimer T_1 comme intersection d'ensembles D_{r_1, r_2}).

CHAPITRE VI.- Désintégration des mesures.

§ 1. Mesures vectorielles.

1\. Définition d'une mesure vectorielle.- Les mesures étudiées dans les chapitres précédents permettent d'associer à certaines fonctions numériques une intégrale qui est un nombre réel. Nous nous proposons de généraliser la notion de mesure de telle sorte que l'intégrale d'une fonction numérique puisse prendre des valeurs vectorielles.

Définition 1.- Soit F un espace localement convexe séparé sur R. On appelle mesure vectorielle sur T, à valeurs dans F, toute application linéaire $f \to m(f)$ de l'espace $\mathcal{K}(T)$ dans l'espace F, telle que, pour toute partie compacte K de T, la restriction de m à l'espace $\mathcal{K}(T,K)$ des fonctions continues à support dans K, soit continue pour la topologie de la convergence uniforme.

Définition 2.- Soit F un espace localement convexe séparé sur R. Soient g une application de T dans F, et une mesure positive sur T. Si, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$, la fonction fg (à valeurs dans F) est

105

faiblement μ-intégrable, et si l'application $f \to \int fg\, d\mu$ de $\mathcal{K}(T)$ dans F est une mesure vectorielle m sur T , on dit que m est la mesure de densité g par rapport à μ , et on la note $g.\mu$.

Lorsque F = R , cette définition coïncide avec la déf.2 du chap.V, § 5 .

Proposition 1.- Soient g et g_1 deux fonctions définies sur T, à valeurs dans F , telles que les mesures vectorielles $m = g.\mu$, $m_1 = g_1.\mu$ soient définies. Si g et g_1 sont égales localement presque partout pour μ , on a $m = m_1$. Réciproquement, si $m = m_1$, et s'il existe dans le dual faible F' de F un ensemble A dénombrable partout dense, g et g_1 sont égales localement presque partout pour μ .

Supposons g et g_1 égales localement presque partout pour μ . Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$, les fonctions fg et fg_1 sont égales presque partout pour μ , donc $m(f)=m_1(f)$, de sorte que $m=m_1$. Réciproquement, supposons $m=m_1$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$ et tout élément z' de F', on a $\int f(t)\langle g(t),z'\rangle\, d\mu(t) = \langle \int fg\, d\mu, z'\rangle = \langle \int fg_1 d\mu, z'\rangle = \int f(t)\langle g_1(t),z'\rangle\, d\mu(t)$. Donc (chap.V, § 5,cor.2 de la prop.7), pour tout $z' \in F'$, il existe un ensemble $N_{z'} \subset T$ localement négligeable pour μ , tel que $\langle g(t),z'\rangle = \langle g_1(t),z'\rangle$ pour $t \notin N_{z'}$. Alors, $N = \bigcup_{z' \in A} N_{z'}$ est localement négligeable pour μ , et, pour $t \notin N$, on a $\langle g(t),z'\rangle = \langle g_1(t),z'\rangle$ pour tout $z' \in A$, et par suite $g(t)=g_1(t)$.

S'il n'existe pas dans F' d'ensemble dénombrable partout dense, on peut avoir $m=m_1$ sans que g et g_1 soient égales localement presque partout.

2. Exemples de mesures vectorielles (à alléger).- 1. Soit F un espace localement convexe séparé dans lequel l'enveloppe convexe fermée de tout ensemble compact est compacte (condition (EC) du chap.III, § 4). Pour toute fonction continue g définie dans T, à valeurs dans F, l'application $f \longrightarrow \int fg\, d\mu$ de $\mathcal{K}(T)$ dans F est une mesure vectorielle sur T. En effet, soient q une semi-norme continue sur F, et K une partie compacte de T. Soit a_K la borne supérieure dans K de la fonction numérique continue $q(g)$; pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T,K)$, on a $q(fg) = |f|\, q(g) \leqslant a_K |f|$, et par suite $q(\int fg\, d\mu) \leqslant \int q(fg) d\mu \leqslant$ $\leqslant a_K\, \mu(K) \| f \|$, ce qui établit notre assertion.

Par exemple, si F est l'espace $\mathcal{M}(T)$ des mesures sur T, muni de la topologie vague, et si g est l'application $t \longrightarrow \varepsilon_t$, la mesure vectorielle précédente est celle qui associe, à toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$, la mesure $f.\mu$.

2. Soient F un espace de Banach, et g une fonction localement intégrable définie dans T et à valeurs dans F (chap.V, § 5, déf.1). L'application $f \longrightarrow \int fg\, d\mu$ de $\mathcal{K}(T)$ dans F est une mesure vectorielle sur T, car, pour toute partie compacte K de T et toute fonction $f \in \mathcal{K}(T,K)$, on a
$$\left| fg\, d\mu \right| = \left| \int f\, \varphi_K g\, d\mu \right| \leqslant \| f \| \int |g \varphi_K| d\mu .$$

3. Soit F un espace localement convexe séparé. Soient F' son dual faible, F'_1 son dual fort. Soit g une application de T dans F'. Supposons que, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$, la fonction fg soit faiblement μ-intégrable (considérée comme application de T dans F'). Il est immédiat que l'application $f \longrightarrow \int fg\, d\mu$ de $\mathcal{K}(T)$ dans F' est une mesure vectorielle sur T. Mais on va montrer que si F est limite inductive d'espaces de Fréchet cette application est encore une mesure vectorielle quand on la considère comme une application de $\mathcal{K}(T)$ dans F'_1. Soit K une partie compacte de T. D'après ce qu'on a vu

dans la démonstration du th.1 du chap.V, § 2, l'application de F dans $\mathcal{L}^1(T)$ qui, à tout élément $z \in F$, fait correspondre la fonction $\langle z, \varphi_K g \rangle$, est continue. Donc, si B est une partie bornée de F, on a $\sup_{z \in B} \int |\langle z, \varphi_K g \rangle| \, d\mu < +\infty$. Or, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T,K)$, on a

$$|\langle z, \int fg \, d\mu \rangle| = |\int \langle z, f\varphi_K g \rangle \, d\mu| \leqslant \|f\| \int |\langle z, \varphi_K g \rangle| \, d\mu$$

ce qui prouve que, quand $\|f\| \to 0$, $\langle z, \int fg \, d\mu \rangle \to 0$ uniformément quand z parcourt B ; autrement dit, $\int fg \, d\mu \to 0$ dans F'_1, ce qui établit notre assertion.

* 4. Soient H un espace hilbertien, A un opérateur hermitien défini dans H. L'application $f \to f(A)$ de $\mathcal{K}(R)$ dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs continus de H est une mesure vectorielle, telle que $\|f(A)\| \leqslant \|f\|$. *

3. <u>Le théorème de Dunford-Pettis</u>.- Toute mesure vectorielle ne peut pas être définie par une densité (exerc.). Mais on a le résultat suivant :

<u>Théorème 1</u> (<u>Dunford-Pettis</u>).- <u>Soient</u> F <u>un espace localement convexe dans lequel existe un ensemble dénombrable partout dense</u> A, <u>et</u> F' <u>son dual faible</u>. <u>Soient</u> μ <u>une mesure positive sur</u> T, <u>et</u> $f \to m(f)$ <u>une application linéaire de</u> $\mathcal{K}(T)$ <u>dans</u> F' <u>possédant la propriété suivante</u> :

<u>Quand</u> $\mu(|f|)$ <u>reste borné</u>, m(f) <u>décrit une partie équicontinue de</u> F'. (<u>Cette condition entraîne évidemment que</u> m <u>est une mesure vectorielle à valeurs dans</u> F' <u>et même à valeurs dans le dual fort de</u> F). <u>Alors, il existe une fonction</u> g, <u>définie dans</u> T, <u>à valeurs dans</u> F', <u>telle que</u> m <u>soit la mesure de densité</u> g <u>par rapport à</u> μ. <u>Si</u> g_1 <u>est une seconde fonction possédant ces propriétés</u>, g <u>et</u> g_1 <u>sont égales localement presque partout pour</u> μ.

La dernière affirmation du th. résulte aussitôt de la prop.1. Montrons l'existence de g.

L'hypothèse entraîne que m est une application continue de $\mathcal{K}(T)$, muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{L}^1(T,\mu)$, dans F'. Donc (chap.V, § 5, th.5), pour tout $z \in F$, il existe une <u>classe</u> $\dot{g}_z \in L^\infty(T,\mu)$, bien déterminée, et telle que, pour toute fonction g_z de la classe $\dot{g}_z$, on ait :

$$\langle z, m(f)\rangle = \int f(t)g_z(t)d\mu(t)$$

quelle que soit $f \in \mathcal{K}(T)$. En outre, on a

$$N_\infty(g_z) = \sup\left|\int f(t)g_z(t)d\mu(t)\right| = \sup|\langle z, m(f)\rangle|$$

quand f varie de façon que $N_1(f) \leqslant 1$. Par hypothèse, m(f) décrit alors une partie équicontinue de F'. Donc, quand $z \to 0$, $N_\infty(g_z) \to 0$. Ainsi, l'application $z \to \dot{g}_z$ est une application linéaire continue de F sur un sous-espace H de $L^\infty(T,\mu)$. Comme A est partout dense dans F, son image est partout dense dans H, qui est donc de type dénombrable.

Cela étant, supposons qu'on ait défini une application linéaire $\dot{g} \to g^*$ de H dans $\mathcal{L}^\infty(T,\mu)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1°- pour toute classe $\dot{g} \in H$, g^* appartient à la classe $\dot{g}$;

2°- on a $|g^*(t)| \leqslant N_\infty(\dot{g})$ pour <u>tout</u> $t \in T$.

Alors, pour tout $t \in T$, l'application $z \to g_z^*(t)$ est une forme linéaire continue sur F ; autrement dit, c'est un élément g(t) de F'. Ainsi, on a par définition $\langle z, g(t)\rangle = g_z^*(t)$ quels que soient $t \in T$ et $z \in F$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$, on a

$$\langle z, (fg)(t)\rangle = f(t)g_z^*(t)$$

donc $\langle z, (fg)(t)\rangle$ est une fonction numérique intégrable ; en outre

$$\langle z, m(f)\rangle = \int f(t)g_z^*(t)d\mu(t) = \int \langle z, (fg)(t)\rangle d\mu(t)$$

ce qui prouve que l'application $t \to f(t)g(t)$ est faiblement intégrable, et que

$$m(f) = \int fg\, d\mu$$

109

donc que m est la mesure de densité g par rapport à μ. Donc tout revient à prouver le lemme suivant :

<u>Lemme 1.- Soit H un sous-espace de type dénombrable de</u> $L^{\infty}(T,\mu)$. <u>Il existe une application</u> $\dot{g} \to g^{*}$ <u>de</u> H <u>dans</u> $\mathcal{L}^{\infty}(T,\mu)$ <u>possédant les propriétés 1° et 2° ci-dessus</u>.

Soit $(\dot{g}_n)$ une suite partout dense d'éléments de H ; pour chaque indice n ; désignons par g_n une fonction de la classe $\dot{g}_n$. Pour tout système fini $(r_1, r_2,\ldots,r_n)$ de nombres rationnels, on a $\left|\sum_i r_i g_i(t)\right| \leq N_{\infty}(\sum_i r_i g_i)$ dans le complémentaire d'un ensemble localement négligeable $P_{r_1 r_2 \ldots r_n}$. Soit P la réunion, localement négligeable, de la famille dénombrable des ensembles $P_{r_1 r_2 \ldots r_n}$. Désignons par g_n^{*} la fonction égale à g_n dans $\complement P$, à 0 dans P ; il est clair que $g_n^{*} \in \dot{g}_n$ et que

$$(1) \qquad \left|\sum_i r_i\, g_i^{*}(t)\right| \leq N_{\infty}\left(\sum_i r_i\, \dot{g}_i\right)$$

pour <u>tout</u> $t \in T$ et tout système (r_i) de nombres rationnels. Soient D le sous-ensemble de H formé des combinaisons linéaires des $\dot{g}_n$ à coefficients rationnels, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}^{\infty}$ le sous-espace de $\mathcal{L}^{\infty}$ formé des fonctions bornées, muni de la norme $\|f\| = \sup|f(t)|$. La relation (1) montre en premier lieu que si on a $\sum_i r_i \dot{g}_i = 0$ dans L^{∞} , on a aussi $\sum_i r_i\, g_i^{*} = 0$ dans $\mathcal{B}$. On définit donc une application Q-linéaire $\dot{g} \to g^{*}$ de D dans $\mathcal{B}$ (et non pas débandé) en associant à la combinaison linéaire $\sum_i r_i\, \dot{g}_i$ la fonction $\sum_i r_i g_i^{*}(t)$, et la relation (1) montre que cette application est continue. Elle se prolonge donc en une application continue (que nous noterons encore $\dot{g} \to g^{*}$) de $\overline{D} = H$ dans $\mathcal{B}$. En vertu du prolongement des identités, l'application prolongée est R-linéaire, et on a $\|g^{*}\| \leq N_{\infty}(\dot{g})$. Enfin, si $(\dot{h}_n)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers un élément $\dot{h}$ de H , $h_n^{*}(t)$ tend vers $h^{*}(t)$ pour tout t ; comme $h_n^{*} \in \dot{h}_n$, on en déduit que $h^{*} \in \dot{h}$. L'application $\dot{g} \to g^{*}$ a donc toutes les propriétés voulues.

Remarque.- Le théorème de Lebesgue-Nikodym vient d'être généralisé aux mesures vectorielles sous une forme affaiblie ; il est impossible d'obtenir une généralisation complète (cf. exerc.) .

Corollaire.- Soient F un espace de Banach de type dénombrable, F' son dual faible. Soient μ une mesure positive sur T , et $f \to m(f)$ une application linéaire de $\mathcal{K}(T)$ dans F', telle que $|m(f)| \leqslant \mu(|f|)$ pour $f \in \mathcal{K}(T)$. Alors, il existe une fonction g , définie dans T , à valeurs dans F', faiblement mesurable telle que $|g| \leqslant 1$ et telle que m soit la mesure de densité g par rapport à μ .

Pour tout $z \in F$ et toute $f \in \mathcal{K}(T)$, la fonction $\langle fg, z\rangle$ est intégrable ; donc la fonction $\langle g, z\rangle$ est mesurable, de sorte que (Chap.V, § 2, prop.5) g est faiblement mesurable.

Le seul point qui reste à démontrer est qu'on peut choisir g de façon que $|g| \leqslant 1$. Or, en reprenant les notations de la démonstration précédente, on a :

$$N_\infty(\dot{g}_z) = \sup |\langle z, m(f)\rangle| \leqslant |z| \cdot \sup |m(f)|$$

quand f varie de façon que $N_1(f) \leqslant 1$. L'hypothèse sur m entraîne donc que $N_\infty(\dot{g}_z) \leqslant |z|$. Donc $|\langle z, g(t)\rangle| = |g_z^*(t)| \leqslant |z|$ pour tout $t \in T$, de sorte que $|g(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in T$.

4. Application : dual d'un espace L_F^1 (F de type dénombrable).-

Proposition 2 - Soient F un espace de Banach de type dénombrable, F' son dual faible, g une application faiblement mesurable de T dans F' telle que $|g|$ soit bornée en mesure. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_F^1(T,\mu)$, la fonction numérique $\langle f, g\rangle$ est intégrable, et l'application $f \to \int \langle f, g\rangle \, d\mu$ est une forme linéaire θ_g continue sur $\mathcal{L}_F^1(T,\mu)$; la forme linéaire sur L_F^1 déduite de θ_g par passage au quotient a pour norme $N_\infty(|g|)$.

Réciproquement, soit θ une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1_F(T,\mu)$. Il existe une application faiblement mesurable g de T dans F', telle que $|g|$ soit bornée en mesure, et telle que $\theta(f) = \int \langle f,g\rangle \, d\mu$ pour toute $f \in \mathcal{L}^1_F(T,\mu)$. Si g_1 est une autre application de T dans F' possédant les mêmes propriétés, on a $g=g_1$ localement presque partout pour μ.

Si $f \in \mathcal{L}^1_F(T,\mu)$, f est limite presque partout d'une suite de combinaisons linéaires à coefficients dans F de fonctions numériques intégrables ; donc, si g, à valeurs dans F', est faiblement mesurable, $\langle f,g\rangle$ est mesurable. Si en outre $|g|$ est bornée en mesure, on a $|\langle f,g\rangle| \leqslant |f| \, N_\infty(|g|)$ presque partout ; donc $\langle f,g\rangle$ est intégrable, et l'on a $\left|\int \langle f,g\rangle \, d\mu\right| \leqslant N_1(f) \, N_\infty(|g|)$, ce qui prouve que l'application $f \to \theta_g(f) = \int \langle f,g\rangle d\mu$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1_F(T,\mu)$; en outre, la forme linéaire sur L^1_F déduite de θ_g par passage au quotient a une norme inférieure à $N_\infty(|g|)$. (Cette partie du raisonnement ne suppose pas F de type dénombrable).

Réciproquement, soit θ une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1_F(T,\mu)$, et soit a la norme de la forme linéaire sur L^1_F déduite de θ par passage au quotient. Soient z un élément de F, et h une fonction *numérique* continue à support compact sur T ; on a $hz \in \mathcal{L}^1_F$, et $|\theta(hz)| \leqslant a|z| \, N_1(h)$. L'application $z \to \theta(hz)$ est donc une forme linéaire continue sur F, c'est-à-dire un élément de F' que nous désignerons par $m(h)$. Par définition, on a donc : $\theta(hz) = \langle z,m(h)\rangle$, donc $|m(h)| \leqslant a \, N_1(h)$. On peut alors appliquer le cor. du th.1 : il existe une fonction g à valeurs dans F', faiblement mesurable, telle que $|g| \leqslant a$, et telle que $m(h)=\int hg \, d\mu$ pour toute $h \in \mathcal{K}(T)$. Ainsi, pour toute $h \in \mathcal{K}(T)$ et tout $z \in F$, on a :

$$\theta(hz) = \left\langle z, \int hg \, d\mu\right\rangle = \int \langle z,hg\rangle \, d\mu = \int \langle hz, g\rangle \, d\mu = \theta_g(hz) .$$

Ainsi, les formes linéaires continues θ et θ_g sur $\mathcal{L}^1_F$ coïncident sur un sous-ensemble total de $\mathcal{L}^1_F$. Donc $\theta=\theta_g$. D'après la première partie de la démonstration, on a en outre $a \leqslant N_\infty(|g|)$. Donc $a = N_\infty(|g|)$.

A 190

Enfin, soient g et g_1 deux applications faiblement mesurables de T dans F', telles que $|g|$ et $|g_1|$ soient bornées en mesure, et telles que $\theta_g = \theta_{g_1}$. Pour tout $z \in F$ et toute $h \in \mathcal{K}(T)$, on a

$$< z, \int hg\, d\mu > = \int < hz, g > d\mu = \theta_g(hz) = \theta_{g_1}(hz) = < z, \int hg_1\, d\mu >$$

donc $\int hg\, d\mu = \int hg_1 d\mu$, de sorte que $g = g_1$ d'après la prop. 1.

5. <u>Valeur absolue d'une mesure vectorielle</u> (à vider).- Soient F un <u>espace de Banach</u>, m une mesure vectorielle sur T, à valeurs dans F. Supposons qu'il existe des mesures positives ν sur T telles que $|m(f)| \leq \nu(|f|)$ pour toute fonction f de $\mathcal{K}(T)$. Comme $\mathcal{M}(T)$ est une espace complètement réticulé, l'ensemble de ces mesures admet <u>un plus petit élément</u>, qu'on note $|m|$ et qu'on appelle la <u>valeur absolue</u> de la mesure vectorielle m. Lorsque m est une mesure réelle, on retrouve la notion de valeur absolue déjà définie, comme il résulte aussitôt des formules (4) et (5) du chap. III, § 2.

<u>Proposition 3</u>.- <u>Supposons que la mesure vectorielle</u> m <u>admette une valeur absolue</u> $|m|$. <u>Alors, pour toute fonction positive</u> f <u>de</u> $\mathcal{K}(T)$, <u>on a</u> :

$$|m|(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} |m(f_i)|$$

<u>pour tous les systèmes</u> $f_1, f_2, \ldots, f_n$ <u>de fonctions de</u> $\mathcal{K}(T)$ <u>telles que</u> $\sum_{i=1}^{n} |f_i| \leq f$.

Pour toute fonction positive f de $\mathcal{K}(T)$, posons $\nu(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} |m(f_i)|$ pour tous les systèmes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de fonctions de $\mathcal{K}(T)$ telles que $\sum_{i=1}^{n} |f_i| \leq f$. On a :

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n} |m(f_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |m|(|f_i|) = |m|(\sum_{i=1}^{n} |f_i|) \leq |m|(f)$$

donc $\nu(f) < +\infty$. Soient maintenant f, f' deux fonctions positives de $\mathcal{K}(T)$, et montrons que $\nu(f+f') = \nu(f) + \nu(f')$. Soient $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $(f'_1, f'_2, \ldots, f'_p)$ deux systèmes de fonctions de $\mathcal{K}(T)$

telles que $\sum_{i=1}^{n}|f_i|\leqslant f$, $\sum_{i=1}^{p}|f'_i|\leqslant f'$, $\sum_{i=1}^{n}|m(f_i)|\geqslant \nu(f)-\varepsilon$, $\sum_{i=1}^{p}|m(f'_i)|\geqslant \nu(f')-\varepsilon$; on a $\sum_{i=1}^{n}|f_i|+\sum_{i=1}^{p}|f'_i|\leqslant f+f'$, et $\sum_{i=1}^{n}|m(f_i)|+\sum_{i=1}^{p}|m(f'_i)|\geqslant \nu(f)+\nu(f')-2\varepsilon$, donc $\nu(f+f')\geqslant \nu(f)+\nu(f')-2\varepsilon$, et par suite $\nu(f+f')\geqslant \nu(f)+\nu(f')$. Soit maintenant $(g_1,g_2,\dots,g_q)$ un système de fonctions de $\mathcal{K}(T)$ telles que $\sum_{i=1}^{q}|g_i|\leqslant f+f'$. On a $f+f'=\sum_{i=1}^{q}|g_i|+h$ avec une fonction positive h de $\mathcal{K}(T)$. D'après le lemme de décomposition (chap. II, § 1, n°1), il existe des fonctions positives g_i^1, g_i^2 $(1\leqslant i\leqslant q)$, h^1, h^2 de $\mathcal{K}(T)$ telles que $|g_i|=g_i^1+g_i^2$, $h=h^1+h^2$, $f=\sum_{i=1}^{q}g_i^1+h^1$, $f'=\sum_{i=1}^{q}g_i^2+h^2$. Définissons des fonctions $\bar g_i^1$, $\bar g_i^2$ de la manière suivante : $\bar g_i^1(t)=g_i^1(t)$ et $\bar g_i^2(t)=g_i^2(t)$ si $g_i(t)\geqslant 0$; $\bar g_i^1(t)=-g_i^1(t)$ et $\bar g_i^2(t)=-g_i^2(t)$ si $g_i(t)\leqslant 0$. On vérifie aussitôt que $\bar g_i^1$ et $\bar g_i^2$ appartiennent à $\mathcal{K}(T)$, que $g_i=\bar g_i^1+\bar g_i^2$, $\sum_{i=1}^{q}|\bar g_i^1|\leqslant f$, $\sum_{i=1}^{q}|\bar g_i^2|\leqslant f'$. Donc $\sum_{i=1}^{q}|m(g_i)|=\sum_{i=1}^{q}|m(\bar g_i^1)+m(\bar g_i^2)|\leqslant \sum_{i=1}^{q}|m(\bar g_i^1)|+\sum_{i=1}^{q}|m(\bar g_i^2)|\leqslant \nu(f)+\nu(f')$. Par suite, $\nu(f+f')\leqslant \nu(f)+\nu(f')$ et finalement $\nu(f+f')=\nu(f)+\nu(f')$.

Alors, ν peut être prolongé d'une manière unique en une mesure positive sur T , que nous noterons encore ν . Pour toute $f\in\mathcal{K}(T)$, on a :

$$|m(f)|=|m(f^+)-m(f^-)|\leqslant |m(f^+)|+|m(f^-)|\leqslant \nu(f^+)+\nu(f^-)=\nu(|f|)$$

donc $\nu\geqslant|m|$. D'autre part, la relation (2) montrer que $\nu\leqslant|m|$. Donc $\nu=|m|$.

6. <u>Mesures complexes</u>.- On appelle <u>mesure complexe</u> une mesure vectorielle prenant ses valeurs dans le corps C des nombres complexes. Il est clair qu'une telle mesure peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $f\to\mu_1(f)+i\mu_2(f)$, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures réelles sur T , qu'on appelle respectivement <u>partie réelle</u> et <u>partie imaginaire</u> de μ .

On a évidemment $|\mu(f)| \leqslant |\mu_1|(|f|)+|\mu_2|(|f|)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(T)$, donc μ possède une valeur absolue $|\mu| \leqslant |\mu_1|+|\mu_2|$. D'autre part, comme $|\mu_1(f)| \leqslant |\mu(f)|$ pour toute $f \in \mathcal{K}(T)$, on a $|\mu_1| \leqslant |\mu|$, et de même $|\mu_2| \leqslant |\mu|$.

Soit F un espace de Banach sur le corps C ; on dit qu'une fonction f à valeurs dans F est <u>intégrable</u> (resp. <u>négligeable</u>) pour la mesure complexe μ si elle est intégrable (resp. négligeable) pour la mesure positive $|\mu|$, ou, ce qui revient au même, pour les mesures $|\mu_1|$ et $|\mu_2|$, ou, ce qui revient au même, pour les mesures μ_1^+, μ_1^-, μ_2^+, μ_2^-. On définit alors l'<u>intégrale</u> $\int f\, d\mu$ par la formule

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\mu_1^+ - \int f\, d\mu_1^- + i\int f\, d\mu_2^+ - i\int f\, d\mu_2^- .$$

<u>Exercices</u>.

1.a. Soient F un espace de Banach, g une application de T dans F, localement μ-intégrable. Soit m la mesure vectorielle $g.\mu$, à valeurs dans F. Montrer que m admet une valeur absolue, égale à $|g|.\mu$. (Soit $\nu = |g.\mu|$; il est immédiat que $\nu \leqslant |g|.\mu$; posant $\nu = h.\mu$, on a $h \leqslant |g|$ localement presque partout ; montrer que, pour tout élément z' du dual F' de F, on a $|\langle g,z'\rangle| \leqslant h|z'|$ localement presque partout ; en raisonnant par l'absurde, en déduire que $|g| \geqslant h$ localement presque partout). Déduire de là que, si g' est une autre application de T dans F localement μ-intégrable, l'égalité $g.\mu = g'.\mu$ entraîne $g=g'$ localement presque partout.

b. Soit g_1 une application de T dans F', faiblement mesurable (F' étant muni de la topologie faible), et telle que $|g_1|$ soit localement μ-intégrable. Montrer que la mesure vectorielle $g_1.\mu$ admet une valeur absolue, et que $|g_1.\mu| = |g_1|.\mu$. (Raisonner comme dans a).

2. Soit $\mu = \mu_1+i\mu_2$ une mesure complexe. On a : $|\mu| = \sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}$.

---

2. Désintégration des mesures.

1. Désintégration d'une mesure bornée.- Théorème 1.- Soient X et B deux espaces polonais localement compacts, μ une mesure positive bornée sur X, p une application μ-mesurable (donc μ-propre) de X dans B , $\nu = p(\mu)$ l'image de μ par p . Il existe alors une application vaguement intégrable $t \to \lambda_t$ de B dans l'espace $\mathcal{M}_+(X)$ des mesures positives sur X, ayant les propriétés suivantes :

1) $\lambda_t = 0$ pour $t \notin p(X)$;

2) $\|\lambda_t\| = 1$ pour $t \in p(X)$;

3) λ_t est concentrée sur l'ensemble $\overset{-1}{p}(t)$;

4) on a $\mu = \int \lambda_t \, d\nu(t)$.

En outre, si $t \to \lambda'_t$ est une seconde application vaguement intégrable de B dans $\mathcal{M}_+(X)$ ayant les propriétés 3,4 précédentes, on a $\lambda'_t = \lambda_t$ presque partout (pour la mesure ν).

Prouvons d'abord la propriété d'unicité. Soient $t \to \lambda_t$ et $t \to \lambda'_t$ deux applications vaguement intégrables de B dans $\mathcal{M}_+(X)$ telles que $\mu = \int \lambda_t \, d\nu(t) = \int \lambda'_t \, d\nu(t)$, les mesures λ_t et λ'_t étant concentrées sur $\overset{-1}{p}(t)$ pour tout $t \in B$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(B)$ et toute fonction $g \in \mathcal{K}(X)$, la fonction $g(x)f(p(x))$ est μ-intégrable (chap.V, § 6, th.1), donc λ_t -intégrable pour presque tout $t \in B$ (chap.V, § 3, th.1), et on a (loc.cit.)

$$\int g(x)f(p(x))d\mu(x) = \int d\nu(t) \int g(x)f(p(x))d\lambda_t(x) .$$

Mais, puisque λ_t est concentrée sur $\overset{-1}{p}(t)$, on a $f(p(x))=f(t)$ presque partout pour λ_t , donc l'expresssion précédente est égale à $\int f(t)d\nu(t) \int g(x)d\lambda_t(x) = \langle \int \lambda_t f(t)d\nu(t), g \rangle$, et de même à $\langle \int \lambda'_t f(t)d\nu(t), g \rangle$. Donc $\int \lambda_t f(t)d\nu(t) = \int \lambda'_t f(t)d\nu(t)$, et par suite (§ 1, prop.1) $\lambda_t = \lambda'_t$ pour presque tout t .

Reste à prouver l'existence de l'application $t \to \lambda_t$. Supposons ce point établi lorsque B et X sont compacts métrisables. On peut passer de là au cas général. En effet, il existe dans tous les cas des espaces compacts métrisables B' et X' et des points $\omega \in X'$, $\omega_0 \in B'$ tels qu'on puisse identifier B et X à $B' - \{\omega_0\}$ et $X' - \{\omega\}$ respectivement ; on peut de plus définir une mesure positive μ' sur X' qui induit sur X la mesure μ et telle que $\mu(\{\omega\})=0$; (parce que μ est bornée) ; soit de même ν' une mesure positive sur B' telle que $\nu'_B = \nu$, $\nu'(\{\omega_0\})=0$; si on prolonge p à X en posant $p(\omega)=\omega_0$, on vérifie immédiatement que $p(\mu')= \nu'$. Soit $t \to \lambda_t$ l'application de B' dans $\mathcal{M}_+(X')$, possédant les propriétés du théorème, qui existe par hypothèse ; on voit aussitôt que la restriction de cette application à B possède les propriétés requises.

Nous supposons donc désormais X et B compacts métrisables. Soit $f \in \mathcal{C}(B)$ une fonction numérique continue dans B . La fonction $f \circ p$ est μ-intégrable. Associons à f la mesure (réelle) m_f sur X définie par :

(1) $$m_f = (f \circ p) \circ \mu \quad .$$

L'application $f \to m_f$ est une application linéaire de $\mathcal{C}(B)$ dans le dual $\mathcal{M}(X)$ de l'espace de Banach $\mathcal{C}(X)$; en outre, on a

(2) $$\| m_f \| = | m_f |(1) = \int |f \circ p| \, d\mu = \nu(|f|) \ .$$

Comme $\mathcal{C}(X)$ est de type dénombrable, le th. de Dunford-Pettis montre qu'il existe une application $t \to \lambda_t$ de B dans $\mathcal{M}(X)$, vaguement intégrable, et telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(B)$, on ait

(3) $$m_f = \int f(t) \, \lambda_t \, d\nu(t)$$

En particulier, si $f=1$, on a :

(4) $$\mu = \int \lambda_t \, d\nu(t)$$

Montrons que la mesure λ_t est <u>positive</u> pour presque tout $t \in B$. Soit g une fonction positive de $\mathcal{C}(X)$, et posons $h(t)=\int g(x) d\lambda_t(x)$. La fonction h(t) est ν-intégrable, et on a $m_f(g)=\int f(t) \, h(t) d\nu(t)$.

Si $f \geqslant 0$, $m_f \geqslant 0$; donc $\int f(t)\, h(t)\, d\nu(t) \geqslant 0$ pour toute fonction $f \geqslant 0$ de $\mathscr{C}(B)$, ce qui signifie que la mesure $h.\nu$ est positive. Par suite (chap.V, § 5, cor.3 de la prop.7) il existe un ensemble ν-négligeable $N(g)$ tel que $h(t) \geqslant 0$ pour $t \notin N(g)$. Cela étant, comme $\mathscr{C}(X)$ est de type dénombrable, il existe une suite partout dense (g_n) dans l'ensemble $\mathscr{C}_+(X)$ des fonctions continues positives dans X ; l'ensemble $N = \bigcup_n N(g_n)$ est ν-négligeable ; pour $t \notin N$, on a $\int g_n(x) d\lambda_t(x)$ pour tout n, et comme λ_t est une forme linéaire continue dans $\mathscr{C}(X)$, cela entraîne que $\int g(x) d\lambda_t(x) \geqslant 0$ pour toute fonction $g \in \mathscr{C}_+(X)$; autrement dit, $\lambda_t \geqslant 0$ pour $t \notin N$. Nous pouvons donc, en modifiant λ_t sur N, supposer désormais $\lambda_t \geqslant 0$ pour tout $t \in B$

Montrons que, pour presque tout $t \in B$, λ_t est concentrée sur $\overset{-1}{p}(t)$ et de masse totale 1. Soit f une fonction de $\mathscr{C}(B)$. L'application $t \rightarrow f(t)\varepsilon_t$ est vaguement continue, donc l'application $x \rightarrow (f\circ p)(x)\varepsilon_{p(x)}$ est vaguement μ-intégrable ; par suite, l'application $x \rightarrow \varepsilon_{p(x)}$ est vaguement m_f-intégrable et en particulier μ-intégrable ; en vertu de la prop.5 du § 3, l'application $x \rightarrow \varepsilon_{p(x)}$ est vaguement λ_t-intégrable pour presque tout t, l'application $t \rightarrow \int \varepsilon_{p(x)} d\lambda_t(x)$ est vaguement ν-intégrable, et on a

$$\int f(t)\varepsilon_t d\nu(t) = \int (f\circ p)(x)\varepsilon_{p(x)} d\mu(x) = \int \varepsilon_{p(x)} dm_f(x) =$$
$$= \int f(t) d\nu(t) \int \varepsilon_{p(x)} d\lambda_t(x) .$$

Comme $\mathscr{C}(B)$ est de type dénombrable, la prop.1 du § 1 entraîne alors que $\varepsilon_t = \int \varepsilon_{p(x)} d\lambda_t(x) = p(\lambda_t)$ sauf pour t appartenant à un ensemble ν-négligeable N_1. Pour $t \notin N_1$, on a donc $\|\lambda_t\| = \int d\lambda_t = \int d\varepsilon_t = 1$; de plus, comme $\complement\{t\}$ est ε_t-négligeable, $\complement\overset{-1}{p}(t)$ est λ_t-négligeable, ce qui prouve notre assertion.

En modifiant au besoin λ_t sur N_1, on peut supposer que, pour tout $t \in p(X)$, λ_t est une mesure positive de masse totale 1 concentrée sur $\overset{-1}{p}(t)$. Comme $\complement p(X)$ st ν-négligeable, une nouvelle modification de λ_t sur un ensemble ν-négligeable permet de supposer de plus $\lambda_t = 0$ pour $t \notin p(X)$. Les mesures λ_t satisfont alors à toutes les conditions du th.1 .

2. Désintégration d'une mesure quelconque.- Théorème 2.- Soient X et B deux espaces polonais localement compacts, μ une mesure positive sur X , p une application μ-mesurable de X dans B , ν une mesure quotient de μ relativement à p . Il existe une application vaguement ν-intégrable $t \longrightarrow \lambda_t$ de B dans l'espace $\mathcal{M}_+(X)$ des mesures positives sur X , ayant les propriétés suivantes :

1) $\lambda_t = 0$ pour $t \notin p(X)$;

2) $\lambda_t \neq 0$ pour $t \in p(X)$;

3) λ_t est concentrée sur l'ensemble $\overset{-1}{p}(t)$;

4) $\mu = \int \lambda_t \, d\nu(t)$.

En outre, si $\nu' = f.\nu$ est une autre mesure quotient de μ relativement à p , et si $t \longrightarrow \lambda'_t$ est une application vaguement ν'-intégrable de B dans $\mathcal{M}_+(X)$ vérifiant les propriétés 3 et 4 ci-dessus (avec ν remplacée par ν'), on a, pour presque tout $t \in B$, $\lambda_t = f(t)\lambda'_t$.

En effet, soit f^1 une fonction continue strictement positive sur X telle que la mesure $\mu^1 = f^1.\mu$ soit bornée (chap.V, § 5,prop.13). Soit $\nu^1 = p(\mu^1)$, qui est équivalente à ν , et posons $\nu^1 = g^1.\nu$; on peut supposer g^1 strictement positive en tout point de B . D'après le th.1, il existe une application $t \longrightarrow \lambda^1_t$ de B dans $\mathcal{M}_+(X)$, vaguement ν_1-intégrable, telle que : 1) $\lambda^1_t = 0$ pour $t \notin p(X)$; 2) $\|\lambda^1_t\| = 1$ pour $t \in p(X)$; 3) λ^1_t est concentrée sur $\overset{-1}{p}(t)$; 4) $\mu^1 = \int \lambda^{-1}_t \, d\nu^1(t)$.

Pour tout $t \in B$, définissons une mesure positive λ_t sur X par la formule : $d\lambda_t(x) = \frac{g^1(t)}{f^1(x)} d\lambda^1_t(x)$. L'application $t \to \lambda_t$ possède évidemment les propriétés 1,2,3 du théorème. D'autre part, l'application $t \to g^1(t)\lambda^1_t$ est vaguement intégrable pour la mesure $(1/g^1).\nu^1 = \nu$, et on a : $\mu = (1/f^1).\mu^1 = (1/f^1).\int \lambda^1_t \, d\nu^1(t) = (1/f^1).\int g^1(t)\lambda^1_t \, d\nu(t)$

L'application $x \to (1/f_1(x))\varepsilon_x$ est vaguement intégrable pour les mesures $g1(t)\lambda^1_t$ et $\int g^1(t)\lambda^1_t \, d\nu(t)$; la prop.4 du § 3 entraîne donc que:

$$\mu = \int g^1(t)(1/f^1).\lambda^1_t \, d\nu(t) = \int \lambda_t \, d\nu(t) .$$

Soient maintenant $\nu' = f.\nu$ une autre mesure quotient de μ relative à p , et $t \to \lambda'_t$ une application vaguement ν'-intégrable de B dans $\mathcal{M}_+(X)$, telle que $\mu = \int \lambda'_t \, d\nu'(t)$, et telle que λ'_t soit concentrée sur $\overset{-1}{p}(t)$ pour tout $t \in T$. Posons : $\lambda'^1_t = g^1(t)^{-1} f(t) (f^1 . \lambda'_t)$. Pour tout $t \in B$, λ'^1_t est une mesure positive portée par $\overset{-1}{p}(t)$. L'application $t \to f(t)\lambda'_t$ est vaguement ν-intégrable, donc l'application $t \to g^1(t)^{-1} f(t)\lambda'_t$ est vaguement ν^1-intégrable ; comme plus haut, on en déduit que l'application $t \to \lambda'^1_t$ est vaguement ν^1-intégrable et que :

$$\int \lambda'^1_t \, d\nu_1(t) = f^1.\int g^1(t)^{-1} f(t)\lambda'_t \, d\nu^1(t) = f^1.\int \lambda'_t \, d\nu'(t) =$$
$$= f^1.\mu = \mu^1 .$$

Le th.1 entraîne alors, pour presque tout $t \in T$, $\lambda'^1_t = \lambda^1_t$, donc $\lambda_t = f(t)\lambda'_t$.

Définition 1.- Etant données une mesure positive μ sur X , une application μ-mesurable p de X dans B , une mesure quotient ν de μ relative à p , toute application vaguement ν-intégrable $t \to \lambda_t$ de B dans $\mathcal{M}_+(X)$ possédant les propriétés 1,2,3,4 du th.2 sera appelée une désintégration de μ correspondant à ν .

Il résulte du th.2 que deux désintégrations de μ correspondant à ν sont égales presque partout (pour ν).

3. Relations d'équivalence mesurables.- Étant donné un espace topologique X et une relation d'équivalence R dans X, nous dirons que R est séparée si l'espace quotient X/R est séparé.

Définition 2.- Soient X un espace localement compact, μ une mesure positive sur X. On dit qu'une relation d'équivalence R sur X est mesurable pour μ (ou μ-mesurable) si, pour toute partie compacte K de X, il existe un ensemble μ-négligeable $N \subset K$ et une partition de $K-N$ formée d'une suite (finie ou infinie) (K_n) d'ensembles compacts, tels que, pour tout indice n, la relation R_{K_n} induite par R sur K_n soit séparée.

Si R est séparée, R est mesurable ; car, si φ désigne l'application canonique de X sur X/R, la relation d'équivalence induite par R dans une partie compacte K de X est la relation $\varphi(x) = \varphi(y)$, et il suffit d'appliquer le cor.1 de la prop.8 du § 10 du chap.I de la 2è éd. de Top.gén. De même, si le saturé pour R de tout ensemble compact dans X est fermé (en particulier si R est fermée), R est mesurable, car, pour toute partie compacte K de X, la relation R_K est fermée, donc séparée (Top.gén., 2è éd., chap.I, §10, prop.)

Proposition 1. Pour qu'une relation d'équivalence R dans X soit μ-mesurable, il faut et il suffit que, pour toute partie compacte K de X et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K_1 \subset K$, telle que $\mu(K-K_1) \leqslant \varepsilon$, et que R_{K_1} soit séparée.

La démonstration suit exactement celle de la prop.1 du chap.IV, §5. Il suffit d'observer que, si les relations induites par R sur des parties compactes $K^1, K^2, \ldots, K^n$ de X sont séparées, alors la relation induite par R sur $K^1 \cup K^2 \cup \ldots \cup K^n$ est séparée, en vertu de la prop. de Top.gén...

<u>Proposition 2.- Soit R une relation d'équivalence dans un espace localement compact</u> X <u>muni d'une mesure positive</u> μ .

a) <u>Si, pour toute partie compacte</u> K <u>de</u> X , <u>il existe un espace localement compact</u> B <u>et une application</u> μ-<u>mesurable</u> p <u>de</u> K <u>dans</u> B <u>telle que</u> R_K <u>soit équivalente à</u> $p(x) = p(y)$, R <u>est</u> μ-<u>mesurable</u>.

b) <u>Réciproquement, si</u> R <u>est</u> μ-<u>mesurable, il existe, pour toute partie</u> A <u>de</u> X <u>réunion dénombrable d'ensembles compacts, un espace localement compact</u> B <u>et une application</u> μ-<u>mesurable</u> p <u>de</u> A <u>dans</u> B <u>telle que</u> R_A <u>soit équivalente à</u> $p(x) = p(y)$.

Soient K une partie compacte de X , B un espace localement compact, p une application μ-mesurable de K dans B telle que R_K soit équivalente à $p(x)=p(y)$. Il existe une partie compacte K_1 de K telle que $\mu(K-K_1) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de p à K_1 soit continue. La restriction à K_1 de la relation $p(x)=p(y)$ est donc séparée, ce qui prouve le a de la proposition.

Supposons maintenant R mesurable, et soit A la réunion d'une suite $(H_1, H_2, \ldots)$ de parties compactes de X . En vertu de la déf.2, il existe une suite croissante $(K_1, K_2, \ldots)$ de parties compactes de A telles que $N = A - \bigcup\limits_n K_n$ soit négligeable et telle que chaque R_{K_n} soit séparée. L'espace quotient $B_n = K_n/R_{K_n}$ est compact. Soit B_n' l'espace compact somme topologique de B_n et d'un point x_n . Soit q_n l'application canonique de K_n sur B_n . On prolonge q_n en une application p_n de A dans B_n' de la manière suivante : si $x \in A$ est congru modulo R à un élément $y \in K_n$, on pose $p_n(x)=q_n(y)$; dans le cas contraire, on pose $p_n(x)=x_n$. Ceci posé, soient $\overline{B}$ l'espace produit $\prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n'$, qui est compact, et $\overline{p}$ l'application de A dans $\overline{B}$ produit des p_n . Montrons que $\overline{p}$ est μ-mesurable. Il suffit (chap.IV, § 5, th.1) de montrer que chaque p_n est μ-mesurable ;

nous allons montrer, ce qui établira le résultat annoncé, que la restriction de p_n à chaque K_m est μ-mesurable ; c'est évident si $m \leq n$; supposons désormais $m > n$; soit K_{nm} le saturé de K_n dans K_m, qui est une partie compacte de K_m ; comme $p_n(x)$ est constant dans $K_n - K_{nm}$, il suffit de prouver que la restriction de p_n à K_{nm} est continue, ce qui est évident à cause de l'isomorphisme canonique de $K_{nm}/R_{K_{nm}}$ sur K_n/R_{K_n}. Ainsi, l'application $\overline{p}$ de A dans $\overline{B}$ est bien μ-mesurable. Si x et y sont deux éléments de A tels que $R\{x,y\}$, on a $p_n(x) = p_n(y)$ quel que soit n, donc $\overline{p}(x) = \overline{p}(y)$. Etudions la réciproque. Soient $A' \subset A$ le saturé de $\bigcup_n K_n$ pour R_A, et $N' = A - A' \subset N$. Si x et y sont deux éléments de A' non congrus modulo R, il existe un indice n, un élément $x' \in K_n$ congru à x modulo R, un élément $y' \in K_n$ congru à y modulo R, tels que x' ne soit pas congru à y' modulo R_{K_n} ; on a donc $p_n(x) \neq p_n(y)$ et par suite $\overline{p}(x) \neq \overline{p}(y)$. Si $x \in N'$ et $y \in A'$, on a $p_n(y) \in B_n$ pour n assez grand, et $p_n(x) = x_n$ pour tout n, donc $\overline{p}(x) \neq \overline{p}(y)$. Si $x \in N'$ et $y \in N'$, on a $p_n(x) = p_n(y) = x_n$ pour tout n, donc $\overline{p}(x) = \overline{p}(y)$. Bref, la relation $\overline{p}(x) = \overline{p}(y)$ est équivalente, pour deux éléments x, y de A, à la relation "$R\{x,y\}$, ou $x \in N'$ et $y \in N'$". Considérons enfin l'ensemble quotient $B_o = N'/R_{N'}$; supposons l'ensemble B_o plongé dans un espace localement compact B'_o (on peut prendre par exemple pour B'_o l'ensemble B_o muni de la topologie discrète). Soit q_o l'application canonique de N sur B_o, et prolongerons-la en une application p_o de A sur B_o constante sur A'. Soit p l'application produit de $\overline{p}$ et p_o, qui est une application de A dans $\overline{B} \times B_o = B$. L'application p est évidemment mesurable, et la relation $R\{x,y\}$ est équivalente à $p(x) = p(y)$ pour $x \in A$ et $y \in A$.

Proposition 3.- Soit R une relation d'équivalence dans un espace polonais localement compact X muni d'une mesure positive μ . Si R est μ-mesurable, il existe un espace polonais localement compact B et une application μ-mesurable p de X dans B telle que $R\{x,y\}$ soit équivalente à $p(x) = p(y)$.

En effet, reprenons les notations de la démonstration précédente. On peut supposer ici $A = X$. Les espaces B_n sont métrisables puisque les K_n sont métrisables ; il en est donc de même des B'_n et par suite de $\overline{B}$. En outre, X a une puissance inférieure à la puissance du continu ; il en est donc de même de N et par suite de B_o ; on peut donc prendre pour B'_o l'intervalle $[0,1]$ muni de la topologie usuelle. L'espace B est alors polonais.

Proposition 4.- Soient X un espace polonais localement compact, μ une mesure positive sur X , R une relation d'équivalence dans X . Pour que R soit μ-mesurable, il faut et il suffit qu'il existe une suite (A_n) d'ensembles μ-mesurables saturés pour R , tels que, pour tout $x \in X$, la classe de x suivant R soit l'intersection des A_n contenant x .

Supposons la condition vérifiée. Soient I l'intervalle $[0,1]$, et B le cube I^N, qui est un espace compact métrisable. Pour $x \in X$, posons $p(x) = (\varphi_{A_n}(x))_{n \in N}$. L'application p de X dans B est μ-mesurable (chap.IV, §5,th.1), et la relation $R\{x,y\}$ est équivalente à $p(x)=p(y)$. La relation R est donc μ-mesurable d'après la prop.2 (cette partie de la démonstration ne suppose pas X polonais). Réciproquement, supposons que R soit μ-mesurable. Soit B un espace polonais localement compact et p une application μ-mesurable de X dans B tels que les relations $p(x)=p(y)$ et $R\{x,y\}$ soient équivalentes (prop.2). Soit (B_n) une base dénombrable de la topologie de B ; les ensembles $A_n = \overset{-1}{p}(B_n)$ sont μ-mesurables (chap.IV, §5,prop.8) ; ils sont saturés pour R ; et, si x et y sont des éléments de X tels que $p(x) \neq p(y)$, il existe un indice n tel que $p(x) \in B_n$ et $p(y) \notin B_n$, ce qui signifie que $x \in A_n$ et $y \notin A_n$.

<u>Remarque</u>.- Si X est un espace polonais localement compact muni d'une mesure μ, et R une relation d'équivalence μ-mesurable sur X, le saturé d'une partie compacte de X n'est pas nécessairement μ-mesurable (exerc.).

4. <u>Désintégration d'une mesure par une relation d'équivalence mesurable</u>.-

Soient X un espace polonais localement compact, μ une mesure positive sur X, R une relation d'équivalence μ-mesurable sur X. Il existe alors (prop.3) un espace polonais localement compact B et une application μ-mesurable p de X dans B tels que la relation $R\{x,y\}$ soit équivalente à $p(x)=p(y)$. Toute mesure quotient ν de μ relative à p sera dite une <u>mesure quotient de</u> μ <u>par la relation</u> R ; si $t \rightarrow \lambda_t$ est une désintégration de μ correspondant à la mesure ν, on dira que $t \rightarrow \lambda_t$ est une <u>désintégration de</u> μ <u>par la relation</u> R. En vertu des propriétés de λ_t et de p, chaque mesure λ_t est concentrée sur une classe d'équivalence, et deux mesures λ_t distinctes sont concentrées sur des classes distinctes.

L'espace B, l'application p, et la mesure ν sur B peuvent en général être choisis d'une infinité de façons. Toutefois, les diverses désintégrations de μ par R peuvent toutes se déduire de l'une d'entre elles, comme il résulte du théorème suivant :

<u>Théorème 3</u>.- <u>Soient</u> X <u>un espace polonais localement compact</u>, μ <u>une mesure positive sur</u> X, R <u>une relation d'équivalence</u> μ-<u>mesurable dans</u> X. <u>Soient</u> B <u>et</u> B' <u>deux espaces polonais localement compacts</u>, p <u>et</u> p' <u>deux applications</u> μ-<u>mesurables de</u> X <u>dans</u> B <u>et</u> B' <u>respectivement, tels que la relation</u> $R\{x,y\}$ <u>soit équivalente à</u> $p(x)=p(y)$ <u>ainsi qu'à</u> $p'(x)=p'(y)$.

Soient ν et ν' des mesures quotients de μ sur B et B' respectivement, relatives aux applications p et p' ; soient $t \rightarrow \lambda_t$ et $t' \rightarrow \lambda_{t'}$ des désintégrations de μ correspondant à ν et ν' .

Alors, il existe dans B et B' des ensembles N et N', négligeables pour ν et ν' respectivement, et une application biunivoque f de $\complement N$ sur $\complement N'$, tels qu'on ait les propriétés suivantes :

a) l'application f (définie presque partout dans B) est ν-mesurable, et son application réciproque g est ν'-mesurable ; toute mesure quotient de ν (resp. ν') relative à l'application f (resp. g) est équivalente à ν' (resp. ν) ;

b) pour tout $t \in \complement N$, la mesure λ_t (sur X) est proportionnelle à la mesure $\lambda'_{f(t)}$.

En vertu du th.2, on peut se limiter au cas où ν et ν' sont des mesures bornées. Soit N_0 (resp. N'_0) le complémentaire de p(X) (resp. p'(X)) dans B (resp. B') ; on sait que N_0 (resp. N'_0) est négligeable pour ν (resp. ν'). Il existe une application biunivoque f de $\complement N_0$ sur $\complement N'_0$, définie par la condition $f(p(x)) = p'(x)$ pour tout $x \in X$; soit g l'application réciproque de f . Pour toute partie M de B , la relation "M est ν-mesurable" équivaut à " $\overset{-1}{p}(M)$ est μ-mesurable", c'est-à-dire à " $\overset{-1}{p'}(f(M))$ est μ-mesurable", donc enfin à "f(M) est ν'-mesurable". On voit donc que f (resp. g) transforme tout ensemble ν-mesurable (resp. ν'-mesurable) en un ensemble ν'-mesurable (resp. ν-mesurable) ; comme B et B' sont métrisables et de type dénombrable, on en déduit (chap.IV, § 5,th.4) que f et g sont mesurables (pour ν et ν' respectivement). En outre, si $M \subset B$ est ν-négligeable, $\overset{-1}{p}(M) = \overset{-1}{p'}(f(M))$ est μ-négligeable, donc f(M) est ν'-négligeable ; de même, g transforme tout ensemble ν'-négligeable en un ensemble ν-négligeable. Par suite, l'image de ν par f (qui est définie puisque ν est bornée) est équivalente à ν', et l'image de ν' par g est équivalente à ν.

Reste à montrer que, pour presque tout $t \in B$, λ_t et $\lambda'_{f(t)}$ sont proportionnelles. En vertu du th.2, on peut se limiter au cas où ν' est l'image de ν par f. Alors, on a $\mu = \int \lambda_t \, d\nu(t) = \int \lambda'_{t'} \, d\nu'(t') =$ $= \int \lambda'_{f(t)} d\nu(t)$. Comme, pour tout $t \in \complement N_0$, λ_t et $\lambda'_{f(t)}$ sont portées par $\overset{-1}{p}(t)$, le th.2 entraîne que $\lambda'_{f(t)} = \lambda_t$ pour presque tout $t \in \complement N_0$ et par suite pour presque tout $t \in B$.

Exercices.

1. Pages 134-156 de l'Etat 2.
2. Soient X un espace polonais localement compact, μ une mesure positive sur X, R une relation d'équivalence μ-mesurable sur X, ν une mesure quotient de μ par la relation R sur un espace polonais localement compact B, $t \rightarrow \lambda_t$ une désintégration de μ par R. Soit C_t la classe d'équivalence suivant R qui porte λ_t, bien définie si $\lambda_t \neq 0$. Montrer que $\varphi_{C_t} \cdot \mu$ est proportionnelle à λ_t.