RÉDACTION N° 187

COTE : NBR 090

TITRE : THÉORIE ÉLÉMENTAIRE
DES APPLICATIONS CONTINUES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 7

NOMBRE DE FEUILLES : 7

Mr Schwartz
Sept. 53

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES APPLICATIONS LINÉAIRES COMPLÈTEMENT CONTINUES.

Définition. Une application linéaire u d'un espace vectoriel topologique E dans un autre F est dite complètement continue s'il existe un ouvert de E dont l'image par u soit relativement compacte. Une telle application est évidemment continue. Toute application linéaire continue de rang fini est complètement continue.

Une application composée d'un nombre fini quelconque d'applications linéaires continues est complètement continue dès que l'une de ces applications est complètement continue. Dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ des opérateurs continus de E , l'ensemble des opérateurs complètement continus est un idéal bilatère.

Dans la suite tous les espaces vectoriels seront topologiques localement convexes séparés.

Théorème 1.- Soient u et v deux applications linéaires continues d'un espace localement convexe E dans un autre F . Supposons que u soit un isomorphisme de E sur u(E), que u(E) soit fermé, et que v soit complètement continue. Alors $w = u+v$ est un homomorphisme, son noyau N est de dimension finie, et son image est fermée.

L'hypothèse relative à v signifie qu'il existe sur E une semi-norme continue p , telle que l'ensemble V des $x \in E$ satisfaisant à $p(x) \leqslant 1$ ait une image $v(V)$ relativement compacte. Soit $W = V \cap N$; on a $u(W) = -v(W)$ qui est précompact ; u étant un isomorphisme, W est précompact, donc N est de dimension finie. En restreignant u et v à un supplémentaire topologique de N , on est ramené au cas où $N = 0$. Supposons donc w biunivoque, et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur E , tel que $w(\mathcal{U})$ converge dans F . Tout revient à montrer que $\mathcal{U}$ a une limite.

Soit a la limite (finie ou infinie) de $p(x)$ suivant $\mathcal{U}$. Supposons d'abord $a < +\infty$. Alors $(a+1)V \in \mathcal{U}$, donc $v(\mathcal{U})$ converge dans F , et par suite $u(\mathcal{U})$ converge dans F . Comme u(E) est fermé et que u est un isomorphisme, $\mathcal{U}$ converge dans E .

Montrons maintenant que $a = +\infty$ est impossible. Sinon, $w[x/p(x)]$ convergerait vers zéro suivant $\mathcal{U}$, et $v[x/p(x)]$ aurait une limite ; donc $u[x/p(x)]$ aussi, et par suite $x/p(x)$ aurait une limite y_0. On aurait $p(y_0)=1$ et $w(y_0)=0$, ce qui contredit la biunivocité de w . C.Q.F.D.

Théorème 2.- Soient u et v deux applications linéaires continues d'un espace localement convexe E dans un autre F . Supposons que u soit un homomorphisme faible de E sur F , que v soit complètement continue, et que u satisfasse à la condition :

(K) Tout compact convexe de F est contenu dans l'image par u d'un compact convexe de E .

Alors $w = u+v$ est un homomorphisme faible de E sur un sous-espace fermé de codimension finie de F .

Munissons les duals E', resp. F', de la topologie $\mathcal{T}_c$ de la convergence uniforme sur les compacts convexes de E , resp. F . Comme v(V) est relativement compact, la transposée ${}^t v$ transforme le polaire de v(V) en une partie équicontinue, donc relativement compacte, de E' ; il s'ensuit que ${}^t v$ est complètement continue. En vertu de l'hypothèse (K), la convergence de $z' \in F'$ vers zéro équivaut à la convergence de ${}^t u(z')$ vers zéro. Donc ${}^t u$ est un isomorphisme de F' sur ${}^t u(F')$. Or, u étant un homomorphisme faible, ${}^t u(F')$ est faiblement fermé, donc fermé pour $\mathcal{T}_c$.

Ainsi ${}^t u$ et ${}^t v$ vérifient les hypothèses du théorème 1. Donc :

a. ${}^t w(F')$ est fermé pour $\mathcal{C}_c$; mais $\mathcal{C}_c$ est intermédiaire entre les topologies $\sigma(E',E)$ et $\tau(E',E)$, donc ${}^t w(F')$ est aussi faiblement fermé, ce qui prouve que w est un homomorphisme faible.

b. ${}^t w$ est un homomorphisme pour les topologies $\mathcal{C}_c$; pour ces topologies, le dual de E' (resp. F') est E (resp. F), d'après le raisonnement de (a). Donc ${}^t w$ est un homomorphisme pour $\sigma(F',F)$ et $\sigma(E',E)$, et $w(E)$ est fermé.

c. le noyau de ${}^t w$ est de dimension finie, donc $w(E)$, qui est fermé, est de codimension finie.

C.Q.F.D.

Corollaire du Théorème 2.- *Soient* E *et* F *deux espaces de Fréchet,* u *une application linéaire continue de* E *sur* F , v *une application linéaire complètement continue de* E *dans* F . *Alors* $w = u+v$ *applique* E *sur un sous-espace fermé de codimension finie de* F .

En effet, u est un homomorphisme (théorème de Banach), et a fortiori un homomorphisme faible. En outre, on voit aisément que la condition (K) est vérifiée du fait que E et F sont des espaces de Fréchet.

Désormais, v sera un opérateur complètement continu d'un E V T L C S Q , E, dans lui-même ; I sera l'opérateur identique. On déduit alors immédiatement, en prenant $u=I$, des théorèmes 1 et 2 le suivant :

Corollaire.- $w = I+v$ *est un homomorphisme dont le noyau est de dimension finie* k *et dont l'image est fermée et de co-dimension finie* h .

Lemme : Si λ_n est une suite de nombres complexes bornés inférieurement en valeur absolue, $E = \{0\} \subset E_1 \subset E_2 \dots \subset E_n \subset \dots$ une suite de sous-espaces vectoriels tels que $(v-\lambda_n I)\, E_n \subset E_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Alors, tous les E_n sont identiques pour $n \geqslant N$ assez grand.

Démonstration. Supposons d'abord E normé. Si la conclusion était fausse, on pourrait trouver une suite partielle des E_n pour laquelle chacun des sous-espaces serait distinct du suivant ; raisonnons sur cette suite partielle, que nous appellerons encore E_n. On pourrait alors trouver une suite de points $x_n \in E_n$, $\|x_n\| = 1$, tels que la distance de x_n à E_{n-1} soit $\geqslant 1/2$.

Puisque $x_{n+p} - v\left(\frac{x_{n+p}}{\lambda_{n+p}}\right) \in E_{n+p-1}$, la distance de $v\left(\frac{x_{n+p}}{\lambda_{n+p}}\right)$ à E_{n+p}, est la même que celle de x_{n+p}, donc $\geqslant 1/2$; donc $\left\| v\left(\frac{x_{n+p}}{\lambda_{n+p}}\right) - v\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right) \right\| \geqslant 1/2$, ce qui serait contradictoire avec le fait que les $\frac{x_n}{\lambda_n}$ sont bornés et que par suite les $v\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)$ forment un relativement compact.

Supposons maintenant E quelconque.

Soit p une semi-norme continue sur E, telle que l'image par v de l'ouvert $p(x) < 1$ soit relativement compacte. Sur le sous-espace vectoriel G d'équation $p(x)=0$, v est nulle, de sorte qu'elle définit une application linéaire $\tilde{v}$ sur le quotient E/G ; si nous normons ce quotient par la semi-norme p, nous obtenons un espace vectoriel normé $\tilde{E}$ sur lequel $\tilde{v}$ est encore complètement continue, car l'image de la boule unité est relativement compacte. Les sous-espaces E_n définissent dans $\tilde{E}$ des sous-espaces $\tilde{E}_n$, avec $(\tilde{v} - \lambda_n \tilde{I})\,\tilde{E}_n \subset \tilde{E}_{n-1}$.

Alors, d'après ce que nous avons vu, les $\tilde{E}_n$ sont tous identiques à partir de $n \geqslant N$ assez grand. Mais $E_n \cap G = \{0\}$, car sur E_n l'opérateur $(v-\lambda_1 I)\circ(v-\lambda_2 I)\ldots\circ(v-\lambda_n I)$ est nul, or cet opérateur se réduit sur un élément de G à l'homothétie $(-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$, qui n'est pas nulle.

Alors la projection de chaque E_n sur son image $\tilde{E}_n$ dans le quotient est biunivoque, donc les E_n sont aussi tous identiques pour $n \geqslant N$,

C.Q.F.D.

Remarque intéressante. Le lemme a pour corollaire le théorème de Bochner-Weil : tout espace vectoriel sinon localement compact est de dimension finie. Car on peut prendre une suite où E_n a la dimension n, avec $v = I$, $\lambda_n = -1$.

Proposition 1. Dans les conditions précédentes, la dimension k du noyau de $w = I+v$ est au plus égale à la dimension h de l'image.

Démonstration. Soit E_n le noyau $w^{-n}(0)$. On a $E_0=0 \subset E_1 \subset E_2 \dots \subset E_n \dots$, avec $(v+I)E_n \subset E_{n-1}$, donc, d'après le lemme, les E_n sont identiques pour $n \geqslant N$ assez grand.

Soit F un supplémentaire topologique de E_N.

D'abord $w(F) \cap E_N = \{0\}$, car si x est dans cette intersection, on a d'une part $w^N x = 0$, d'autre part $x = wy$, $y \in F$, de sorte que y doit vérifier à la fois $y \in F$, et $w^{N+1} y = 0$ donc $y \in E_N$, ce qui n'est possible que pour $y=0$ donc $x=0$. Cela prouve que la codimension de $v(F)$ est $\geqslant N$. Mais w laisse E_N stable, et dans E_N le noyau de w, qui est aussi le noyau de w dans E, a la dimension k ; alors $w(E_N)$ a exactement la dimension $N-k$, de sorte que $w(E) = w(F) + w(E_N)$ a une codimension $h \geqslant k$, C.Q.F.D.

Proposition 2. $k = h$.

On a vu en effet (démonstration du théorème 1) que ${}^t w$ est complètement continue, si on munit F' et E' de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes connexes de F et E. Alors, on a d'une part $k \leqslant h$, et d'autre part $h = \dim.\left[{}^t w^{-1}(0)\right] \leqslant \text{codim. } {}^t w(F') = k$, donc $k = h$.

<u>Corollaire</u>. Il y a 4 nombres qui sont égaux.

<u>Proposition 3</u> . Les valeurs propres de v sont bornées, et 0 est leur seul "point d'accumulation".

<u>Démonstration</u>. Il faut montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres de valeur absolue $\geqslant \varepsilon > 0$.

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une suite de vecteurs propres $e_1, e_2, \dots e_n \dots$ correspondant à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, bornées inférieurement en module. Ils formeraient un système algèbriquement libre (propriété des endomorphismes des espaces vectoriels de dimension finie), donc le sous-espace E_n engendré par $e_1, e_2, \dots, e_n$, aurait la dimension n . Et on aurait $E_0 = 0 \subset E_1 \subset E_2 \dots \subset E_n \dots$ avec $(v - \lambda_n I) E_n \subset E_{n-1}$, ce qui serait <u>en contradiction</u> avec le lemme.

Le rédacteur universel se chargera de résumer les prop. 1,2,3 et le corollaire des théorèmes 1-2 en un beau et vaste théorème 3 .
