RÉDACTION N° 186

COTE NBR 089

TITRE ALGEBRE
REEDITION DU CHAPITRE III
OBSERVATIONS CHEVALLEY

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 19

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 19

CONSULTABLE ULTERIEUREMENT

ALGEBRE

Réédition du Chap. III

OBSERVATIONS CHEVALLEY

TRANSFERT D'ANNEAU DE BASE.

Soit h un homomorphisme d'un anneau A dans un anneau B . L'homomorphisme h définit sur B des structures de A-module gauche et droite B_g et B_d , au moyen des lois de composition externes $(a,b) \to h(a)b$ et $(b,a) \to bh(a)$ $(a \in A$, $b \in B)$. Les multiplications à gauche (resp.: à droite) dans B sont des endomorphismes de la structure de module de B_d (resp.: B_g) .

Soit maintenant M un A-module gauche ; on peut former le produit tensoriel $B_d \otimes M$, qui est un groupe additif. Si $b \in B$, soit L_b la multiplication à gauche par b dans B ; puisque L_b est un endomorphisme de B_d , on peut lui associer un endomorphisme du groupe additif $B_d \otimes M$, soit L'_b , tel que $L'_b(b' \otimes x) = bb' \otimes x$ si $b, b' \in B$, $x \in M$. Si b, b' sont des éléments de B , il est clair que $L'_{b+b'} = L'_b + L'_{b'}$, $L'_{bb'} = L'_b L'_{b'}$. Les opérations L'_b définissent donc sur $B_d \otimes M$ une structure de module à gauche sur B . Nous dirons que ce module se déduit de M par <u>transfert à B de l'anneau de base</u>. Procédant de manière analogue, on définit aussi la notion de transfert de l'anneau de base pour les modules à droite. Nous noterons M^B le module qui se déduit d'un module M par transfert à B de l'anneau de base (h étant supposé fixé une fois pour toutes).

Désignant par 1 l'élément unité de B , $m \to 1 \otimes m$ est une représentation du groupe additif de M dans celui de M^B ; nous appellerons cette application l'<u>application canonique</u>, et nous la désignerons par χ . On a, pour $a \in A$, $\chi(am) = h(a)\chi(m)$. L'ensemble $\chi(M)$ est un ensemble de générateurs de la structure de module de M^B .

Le module M^B peut être caractérisé par la propriété d'universalité suivante : soit N un B-module gauche, et soit f une application de M dans N qui est une représentation du groupe additif de M et qui est telle que $f(am) = h(a)f(m)$ $(a \in A$, $m \in M)$. Il y a alors une application linéaire bien déterminée f' de M^B dans N telle que $f = f' \circ \chi$. En effet, considérons l'application $g : (b,m) \rightarrow bf(m)$ de $B_d \times M$ dans N ; on a $g(bh(a),m) = g(b,am)$, d'ou' il résulte que g donne lieu à une représentation f' du groupe additif $B_d \otimes M$ dans le groupe additif N , telle que $f'(b \otimes m) = bf(m)$. Il résulte tout de suite de cette formule que f' est en fait une application linéaire de M^B dans N , ce qui démontre notre assertion. L'unicité de f' est évidente.

Si M est un module libre avec une base $(x_i)_{i \in I}$, M^B est libre avec la base $(\chi(x_i))_{i \in I}$. Si M est somme (resp.: somme directe) des modules M_i, $i \in I$, M^B est somme (resp.: somme directe) des modules engendrés par les $\chi(M_i)$ (lesquels ne sont pas nécessairement isomorphes aux M_i^B , sauf si la somme est directe).

Soit L une application linéaire de M dans un module M' ; soient χ et χ' les applications canoniques de M, M' dans M^B, M'^B . Il existe alors une application L' linéaire de M^B dans M'^B et une seule telle que $\chi' \circ L = L' \circ \chi$. En effet, $\chi' \circ L = f$ est une application additive de M dans M'^B telle que $f(am) = h(a)f(m)$ si $a \in A$, $m \in M$, et il suffit d'appliquer le résultat indiqué plus haut. Nous désignerons L' par L^B et nous l'appellerons l'<u>application associée à</u> L . Si L_1 est une application linéaire de M' dans un troisième module, $(L_1 \circ L)^B = L_1^B \circ L^B$. Si L est "sur", il en est de même de L^B ; si L est univalente, il n'en est pas nécessairement de même de L^B .

Soient M un module à gauche sur A , N un module à droite sur A et β une forme bilinéaire sur $M \times N$. Soient χ_M et χ_N les applications

canoniques de M,N dans M^B,N^B. Il existe alors une forme bilinéaire β^B et une seule sur $M^B \times N^B$ telle que $\beta^B(\chi_M(m), \chi_N(n)) = h(\chi(m,n))$ $(m \in M$, $n \in N)$. L'unicité est évidente. Pour établir l'existence, désignons, si $n \in N$, par f_n la forme linéaire $m \rightarrow \beta(m,n)$ sur M . Considérant A comme A-module à gauche, on a $A^B = B$; f_n^B est donc une forme linéaire sur M^B , et on a $f_n^B(\chi_M(m)) = h(\chi(m,n))$, car h est l'application canonique de A dans B . Considérons maintenant l'application φ : $n \rightarrow f_n^B$ de N dans le dual de M^B . Elle est évidemment additive.
Si $a \in A$, on a $f_{na}^B(\chi_M(m)) = h(\beta(m,na)) = h(\chi(m,n)a) = f_n^B(\chi_M(m))h(a)$; comme $\chi_M(M)$ engendre M^B , il en résulte que $\varphi(na) = \varphi(n)h(a)$; φ donne donc lieu à une application linéaire φ' de N^B dans le dual de M^B telle que $\varphi' \circ \chi_N = \varphi$. On pose $\beta^B(m',n') = \langle m', \varphi'(n') \rangle$ pour $m' \in M^B$, $n' \in N^B$; il est clair que β^B possède les propriétés requises. Nous dirons que β^B est la forme qui se déduit de β par transfert d'anneau de base.

<u>Supposons désormais les anneaux</u> A <u>et</u> B <u>commutatifs</u>. Si M est une algèbre sur A , on peut définir sur M^B une structure d'algèbre sur B telle que l'application canonique χ soit multiplicative, et ceci d'une seule manière. L'unicité est évidente. Pour établir l'existence, soit L_x l'opérateur de multiplication à gauche dans M par un élément $x \in M$, L_x^B est alors un endomorphisme de M^B . Considérant l'anneau des endomorphismes de M^B comme une algèbre à gauche sur A , $x \rightarrow L_x^B$ est une application additive de M dans cet anneau $\mathbb{L}(M^B)$. Si $a \in A$, on a $L_{ax}^B(\chi(y)) = \chi((ax)y) = \chi(a(xy)) = h(a)\chi(xy) = h(a)L_x^B(\chi(y))$. Comme $\chi(M)$ engendre M^B , on a $L_{ax}^B = h(a)L_x^B$, et on peut associer à $x \rightarrow L_x^B$ une application linéaire $x' \rightarrow L'_{x'}$ de M^B dans $\mathbb{L}(M^B)$.

On définit donc une loi de composition dans M^B par $x'y' = L'_{x'}(y')$, et on a $\chi(x)\chi(y) = \chi(xy)$. Comme $\chi(M)$ engendre M^B, l'associativité de la multiplication dans M entraîne l'associativité de la multiplication dans M^B. Le module M^B, muni de la multiplication que nous venons d'y définir, s'appelle <u>l'algèbre déduite de</u> M <u>par transfert de l'anneau de base</u>.

Si r est une représentation de M dans une autre algèbre M' sur A, r^B est une représentation de M^B dans M'^B. Soit maintenant P une algèbre sur B, et soit f une représentation de l'anneau sous-jacent de M dans celui de P ; supposons que l'on ait $f(am) = h(a)f(m)$ si $a \in A$, $m \in M$. On déduit alors de f une application linéaire f' de M^B dans P. Cette application est une représentation. On a en effet

$f'(\chi(x)\chi(y)) = f'(\chi(xy)) = f(xy) = f(x)f(y) = f'(\chi(x)).$
$f'(\chi(y))$ si x, y sont dans M, et notre assertion résulte de ce que $\chi(M)$ engendre M^B.

<u>Si</u> T <u>est l'algèbre tensorielle d'un module</u> M <u>sur</u> A, T^B <u>s'identifie à l'algèbre tensorielle de</u> M^B. Soit en effet T' cette dernière. On peut munir M_B et T' de structures de modules sur A en posant $a.x' = h(a)x'$, $a.t' = h(a)t'$ si $a \in A$, $x' \in M^B$, $t' \in T'$; soient M^B_A et T'_A ces structures. Donc T'_A est une algèbre sur A, et M'^B_A en est un sous-module. L'application χ de M dans M'^B_A est linéaire ; elle se prolonge donc en une représentation f de T dans T'_A. Si $a \in A$, $t \in T$, on a $f(at) = a.f(t) = h(a)f(t)$; f donne donc lieu à une représentation f' de T^B dans T' ; si χ_T est l'application canonique de T dans T^B, on a $f'(\chi_T(t)) = f(t)$. Par ailleurs, l'application identique i de M dans T définit une application linéaire i^B de M^B

dans T^B telle que $i^B(\chi(m)) = \chi_T(m)$ $(m \in M)$, et i^B se prolonge en une représentation g de T' dans T^B. Si $m \in M$, on a $f'(\chi_T(m)) = f(m) = \chi(m)$ et $g(\chi(m)) = i^B(\chi(m)) = \chi_T(m)$, d'où $(g \circ f')(\chi_T(m)) = \chi_T(m)$. Or, il est clair que $\chi_T(M)$ engendre T^B ; $g \circ f'$ est donc l'application identique. De même, $f'(g(\chi(m))) = f'(\chi_T(m)) = \chi(m)$, et $f' \circ g$ est l'application identique ; f' est donc un isomorphisme de T^B sur T', ce qui démontre notre assertion.

De même, <u>si E est l'algèbre extérieure sur M, E^B s'identifie à l'algèbre extérieure sur M^B</u>. Le raisonnement est analogue, tenant compte du fait que toute application linéaire d'un module dans une algèbre qui applique les éléments du module sur des éléments de carré nul se prolonge en une représentation de l'algèbre extérieure du module.

Soient M un module à gauche, N un module à droite sur A et β une forme bilinéaire sur $M \times N$. Soient $T(M), T(N)$ les algèbres tensorielles de M, N, $E(M), E(N)$ leurs algèbres extérieures, β^T et β^E les extensions canoniques de β à $T(M) \times T(N)$ et $E(M) \times E(N)$. Les extensions canoniques de β^B à $T(M^B) \times T(N^B)$, $E(M^B) \times E(N^B)$ sont alors $(\beta^T)^B$, $(\beta^E)^B$. Soient en effet $x_1, \dots, x_m$ des éléments de M, $y_1, \dots, y_m$ des éléments de N, x_i' l'image de x_i dans M^B et y_i' l'image de y_i dans N^B. On a

$$(\beta^T)^B(x_1' \otimes \dots \otimes x_m', y_1' \otimes \dots \otimes y_m') = h(\beta^T(x_1 \otimes \dots \otimes x_m, y_1 \otimes \dots \otimes y_m)) =$$

$$\prod_{i=1}^{m} h(\beta(x_i, y_i)) = \prod_{i=1}^{m} \beta^B(x_i', y_i')$$

et de même

$$(\beta^E)^B(x_1 \wedge \dots \wedge x_m, y_1 \wedge \dots \wedge y_m) = \det(\beta^B(x_i', y_j')),$$

ce qui démontre nos assertions.

ALGEBRES EXTERIEURES.

Soit A un anneau commutatif.

Antidérivations à gauche et à droite.

Soit E une algèbre graduée à gauche sur A , et soit J son involution principale. On appelle <u>antidérivation à gauche</u> (resp.: <u>à droite</u>) de E une application linéaire d de la structure de module de E dans elle-même telle que l'on ait $d(xy) = d(x)y + J(x)d(y)$ (resp.: $d(xy) = d(x)J(y) + xd(y)$) quels que soient x et y dans E . Une antidérivation à gauche (resp.: à droite) applique 1 sur 0 et est uniquement déterminée quand on connaît son effet sur les éléments d'un système de générateurs. Son carré est une dérivation. Si d est une antidérivation (à gauche ou à droite) et si $a \in A$, il en est de même de l'application $da : x \to d(ax)$. On définit exactement de la même manière les notions d'antidérivation à gauche et à droite pour une algèbre à droite.

<u>Lemme 1</u>.- <u>Soient M un module à gauche sur A , T son algèbre tensorielle et l une application linéaire de M dans T . Il existe alors une dérivation D , une antidérivation à gauche D'_g et une antidérivation à droite D'_d qui prolongent l ; ces opérations sont uniquement déterminées. Si l applique M dans l'espace T^{h+1} des éléments homogènes de degré h+1 de T (où h est un entier), D, D'_g et D'_d sont homogènes de degré h .</u>

Soit a un élément de A . Posons, si m est un entier >0 et si $x_1,\dots,x_m$ sont dans M ,

$$L'_m(x_1,\dots,x_m) = \sum_{i=1}^{m} a^{i+1}\, x_{1i}\otimes\dots\otimes x_{mi}$$

où $x_{ki} = x_k$ si $k \neq i$, $x_{kk} = l(x_k)$. L'application L'_m est m-linéaire ; il y a donc une application linéaire L_m de T^m dans T telle que $L_m(x_1\otimes\dots\otimes x_m) = L'_m(x_1,\dots,x_m)$. Si m,n sont >0, et si t,t' sont des éléments décomposables de T^m, T^n respectivement, on a $L_{m+n}(t\otimes t') = L_m(t)\otimes t' + a^m t\otimes L_n(t')$. Il existe une application linéaire L de T dans lui-même qui prolonge toutes les L_n $(n > 0)$ et qui applique 1 sur 0. Il est clair, par linéarité, que l'on a $L(t\otimes t') = L(t)\otimes t' + a^m t\otimes L(t')$ si $t\in T^m$, $t'\in T^*$. On a $L_1=1$. Si $a=1$, L est une dérivation ; si $a=-1$, L est une antidérivation à gauche et $t\to -L(J(t))$ est une antidérivation à droite. L'unicité des opérations D, D'_g et D'_d est évidente. Si l applique M dans T^{h+1}, il est clair que, pour tout m, L_m applique T^m dans T^{m+h}, ce qui démontre la dernière assertion.

<u>Lemme 2</u>. <u>Soient</u> M <u>un module à gauche sur</u> A, E <u>son algèbre extérieure</u>, E^h <u>l'espace des éléments homogènes de degré</u> h <u>de</u> E. <u>Si</u> h <u>est impair</u>, <u>toute application linéaire</u> l <u>de</u> M <u>dans</u> E^{h+1} <u>se prolonge, d'une manière et d'une seule, en une antidérivation à gauche</u> d_g (<u>resp.: à droite</u> d_d) <u>de</u> E ; d_g <u>et</u> d_d <u>sont homogènes de degré</u> h. <u>Si</u> $h=-1$, $d_g^2 = d_d^2 = 0$.

Considérons d'abord le cas où M est un module libre, et soit alors T l'algèbre tensorielle de L. Soit I l'idéal engendré dans T par les $x\otimes x$, $x\in M$, d'où $E = T/I$; soit p l'application canonique de T sur E. Puisque M est libre, il y a une application linéaire l' de M dans T^{h+1} telle que $p\circ l' = l$; cette application se prolonge en des antidérivations à gauche et à droite D_g et D_d de T. Si $x\in M$, on a $D_g(x\otimes x) = l'(x)\otimes x - x\otimes l'(x)$, $D_d(x\otimes x) = -l'(x)\otimes x + x\otimes l'(x)$. Or, $h+1$ étant pair, $p(l'(x))$ est dans le centre de E, d'où $p(D_g(x\otimes x)) = p(D_d(x\otimes x)) = 0$, ou $D_g(x\otimes x)\in I$, $D_d(x\otimes x)\in I$. Puisque D_g et D_d sont des antidérivations à gauche et à droite, elles appliquent I dans lui-même et définissent par passage aux quotients des antidérivations à gauche et à droite d_g et d_d de E. On sait que D_g et et D_d sont homogènes de degré h ; il en est donc de même de d_g et d_d. Passons maintenant au cas général. On peut représenter M comme l'image d'un module libre P par une application linéaire f de P dans M. Soit E(P) l'algèbre extérieure de P ; l'application f se prolonge en une représentation $\bar{f}$ de E(P) sur E. Puisque P est libre, il y a une application linéaire l' de P dans l'espace $E^{h+1}(P)$ des éléments homogènes de degré h+1 de E(P) telle que $\bar{f} \circ l' = l$. L'application l' se prolonge en des antidérivations à gauche et à droite d'_g et d'_d de E(P), homogènes de degré h. Soit R le noyau de l'application linéaire f de P sur M. Le noyau de $\bar{f}$ est donc l'idéal I_R engendré par R dans E(P). L'application $\varphi = \bar{f} \circ d'_g$ de E(P) dans E possède la propriété que $\varphi(u \wedge v) = \varphi(u) \wedge \bar{f}(v) + \bar{f}(J(u)) \wedge \varphi(v)$ $(u, v \in E(P))$; elle est de plus linéaire, et applique R sur $\{0\}$, puisque, si $u \in P$, $\bar{f}(d'_g(u)) = \bar{f}(l'(u)) = l(f(u))$. On a $\bar{f}(J(u)) = J(\bar{f}(u))$ (J désigne aussi bien l'involution principale de E(P) que celle de E). Il résulte de l'identité écrite ci-dessus que, si u est tel que $\bar{f}(u) = \varphi(u) = 0$, et $v \in E(P)$, on a aussi $\bar{f}(u \wedge v) = \varphi(u \wedge v) = 0$, et de même pour $v \wedge u$. On conclut de là et de la linéarité de φ, $\bar{f}$ que φ applique I_R sur $\{0\}$. Il y a donc une application d_g de E dans lui-même telle que $d_g \circ \bar{f} = \varphi$, et on reconnait tout de suite que d_g est une antidérivation à gauche, homogène de degré h, qui prolonge l. L'application $x \to -d_g(J(x))$ est une antidérivation à droite, homogène de degré h, qui prolonge l. L'existence de d_g et d_d est donc démontrée ; leur unicité est évidente. Les opérations d_g^2, d_d^2 sont des dérivations ; si h=-1, elles sont homogènes de degré -2 et appliquent par suite M sur $\{0\}$, ce qui montre qu'elles sont nulles.

<u>Remarque</u>. Dans le cas où h = -1, le seul qui importe pour la suite, le détour par le cas du module libre n'est pas nécessaire.

<u>Les produits intérieurs.</u>

Soient M un module à gauche sur A , N un module à droite et B une forme bilinéaire sur $M \times N$. Soient $E(M)$ et $E(N)$ les algèbres extérieures de M et N . Si $x \in M$, $y \to 1.B(x,y)$ est une application linéaire de N dans l'espace des éléments homogènes de degré 0 de $E(N)$. Cette application se prolonge en une antidérivation <u>à droite</u> $i(x)$ de $E(N)$, homogène de degré -1, et on a $i^2(x)=0$. Nous munirons l'anneau $\mathcal{L}(E(N))$ des endomorphismes du module $E(N)$ d'une structure d'algèbre <u>à gauche</u> en posant $(au)(y) = u(ya)$ pour $a \in A$, $u \in \mathcal{L}(E(N))$, $y \in E(N)$. L'application $x \to i(x)$ de M dans $\mathcal{L}(E(N))$ est alors manifestement linéaire. Puisque $i^2(x)=0$, cette application se prolonge en une représentation de $E(M)$ dans $\mathcal{L}(E(N))$; nous désignerons encore par $i(x)$ cette représentation, et nous poserons

$$x \lrcorner y = i(x).y \qquad (x \in E(M) , \quad y \in E(N) \ ) ;$$

$x \lrcorner y$ s'appelle le <u>produit intérieur gauche</u> de x et y .

Si $y \in N$, l'application linéaire $x \to B(x,y).1$ de M dans $E(M)$ se prolonge en une <u>antidérivation à gauche</u> $i'(y)$ de $E(M)$, homogène de degré -1. On a $i'^2(y) = 0$. Nous considèrerons l'anneau des endomorphismes de $E(M)$ comme une algèbre à droite sur A ; l'application linéaire $y \to i'(y)$ de N dans cette algèbre se prolonge alors en une <u>antireprésentation</u> de $E(N)$ dans $\mathcal{L}(E(M))$, que nous désignerons encore par $y \to i'(y)$. Nous poserons

$$x \llcorner y = i'(y).x \qquad (x \in E(M), \ y \in E(N)) ;$$

$x \llcorner y$ s'appelle le <u>produit intérieur droit</u> de x et y .

Les propriétés suivantes sont évidentes :

1. <u>si</u> $x \in E(M)$, $i(x)$ <u>est un endomorphisme du module</u> $E(N)$; <u>si</u> $x,x' \in E(M)$, $i(x+x') = i(x)+i(x')$, <u>et, si</u> $a \in A$, $i(ax).y =(i(x).y)a$;

si $y \in E(N)$, $i'(y)$ *est un endomorphisme du module* $E(M)$; *si* $y, y' \in E(N)$, $i'(y+y') = i'(y)+i'(y')$, *et, si* $a \in A$, $i'(ya).x = a(i'(y).x)$;

2. *si* $x \in M$, $i(x)$ *est une antidérivation à droite de* $E(M)$; *si* $y \in N$, $i'(y)$ *est une antidérivation à gauche de* $E(M)$;

3. *si* $x \in M$, $y \in N$, $x \lrcorner y = 1.B(x,y)$, $x \llcorner y = B(x,y).1$

4. *si* x *est homogène de degré* p *dans* $E(M)$ *et* y *homogène de degré* q *dans* $E(N)$, $x \lrcorner y$ *est homogène de degré* $q-p$ *et* $x \llcorner y$ *est homogène de degré* $p-q$;

5. *si* $x, x' \in E(M)$, $y, y' \in E(N)$, *on a*

$$(x \wedge x') \lrcorner y = x \lrcorner (x' \lrcorner y) \ ; \quad x \llcorner (y \wedge y') = (x \llcorner y) \llcorner y' \ .$$

Soient maintenant P un module à gauche sur A , Q un module à droite sur A , f une application linéaire de P dans M , g une application

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "f"'] & C \arrow[l] \arrow[r] & Q \arrow[d, "g"] \\ M & B \arrow[l] \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

linéaire de N dans Q . La formule $C(u,v) = B(f(u),g(v))$ définit une forme bilinéaire C sur $P \times Q$, et C définit des produits intérieurs entre éléments de $E(P)$ et $E(Q)$. Nous désignerons encore par f et g les représentations de $E(P)$ dans $E(M)$ et de $E(Q)$ dans $E(N)$ qui prolongent les applications linéaires données f de P dans M et g de Q dans N . Nous allons établir les formules

$$\boxed{g(u \lrcorner v) = f(u) \lrcorner g(b) \ ; \quad f(u \llcorner v) = f(u) \llcorner g(v)}$$

$$(u \in E(P) \ , \quad v \in E(Q)) \ .$$

Pour démontrer la première formule, considèrons d'abord le cas où $u \in P$. Soient φ et φ' les applications $g \circ i(u)$ et $i(f(u)) \circ g$ de $E(Q)$ dans $E(N)$. Si $v \in Q$, on a $\varphi(v)=g(1.C(u,v)) = 1.C(u,v) =$ $= 1.B(f(u),g(v)) = \varphi'(v)$; φ et φ' ont donc même restriction à Q . Désignons par J les involutions principales des diverses algèbres considérées. On a, pour v, v' dans $E(N)$,

$\varphi(v \wedge v') = \varphi(v) \wedge J(g(v')) + g(v) \wedge \varphi(v')$

$\varphi'(v \wedge v') = \varphi'(v) \wedge J(g(v') + g(v) \wedge \varphi'(v')$

comme il résulte de ce que $i(u)$, $i(f(u))$ sont des antidérivations à droite et de ce que $g(J(v)) = J(g(v))$ pour tout $v \in E(N)$. Les applications φ et φ' sont linéaires et appliquent 1 sur 0. Il résulte des formules écrites plus haut et de la linéarité de φ, φ' que l'ensemble des v tels que $\varphi(v) = \varphi'(v)$ est une sous-algèbre de $E(Q)$; cette sous-algèbre, contenant 1 et Q, est identique à $E(Q)$, ce qui démontre la première formule dans le cas où $u \in P$. Soit maintenant $E_1(P)$ l'ensemble des $u \in E(P)$ tels que $g \circ i(u) = i(f(u)) \circ g$. Il est clair que $E_1(P)$ est un sous-groupe du groupe additif de $E(P)$. Soient u et u' des éléments de $E_1(P)$; on a, pour $v \in E(Q)$, $g((u \wedge u') \lrcorner v) = g(u \lrcorner (u' \lrcorner v)) =$ $= f(u) \lrcorner g(u' \lrcorner v) = f(u) \lrcorner (f(u') \lrcorner g(v)) = (f(u) \wedge f(u')) \lrcorner g(v) =$ $= f(u \wedge u') \lrcorner g(v)$, d'où $u \wedge u' \in E_1(P)$. Si $a \in A$, on a, pour $v \in E(Q)$, $(a,1) \lrcorner v = va$, d'où $g((a.1) \lrcorner v) = g(v)a = f(a.1) \lrcorner g(v)$, et $a.1 \in E_1(P$. On a donc $E_1(P) = E(P)$, et la première formule est démontrée. La seconde se démontre d'une manière analogue.

Soient maintenant p un entier > 0, $x_1, \dots, x_p$ des éléments de M, $y_1, \dots, y_p$ des éléments de N. Posons $X = x_1 \wedge \dots \wedge x_p$, $Y = y_1 \wedge \dots \wedge y_p$. Nous nous proposons de calculer $X \lrcorner Y$ et $X \llcorner Y$, qui sont homogènes de degré 0.

1. Considérons d'abord le cas où l'on a $B(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i, j \leqq p)$. Puisque $i(x_k)$ est une antidérivation à droite qui annule $y_1, \dots, y_{k-1}$, on a $i(x_k).(y_1 \wedge \dots \wedge y_k) = y_1 \wedge \dots \wedge y_{k-1}$. Puisque $i(X) = i(x_1) \circ \dots \circ i(x_p)$, il en résulte que $X \lrcorner Y = 1$. De même, on a $i'(y_k).(x_k \wedge \dots \wedge x_p) = x_{k+1} \wedge \dots \wedge x_p$ et, puisque $i'(Y) = i'(y_p) \circ \dots$ $\dots \circ i'(y_1)$, $X \llcorner Y = 1$.

2. Considérons maintenant le cas où M et N sont des modules libres et où $(x_1,\ldots,x_p)$, $(y_1,\ldots,y_p)$ sont des bases de ces modules. Posons $b_{ij} = B(x_i,y_j)$. Introduisons un module libre Q possédant une base $(v_1,\ldots,v_p)$ de p éléments et définissons une forme bilinéaire C sur $M\times Q$ par $C(x_i,v_j) = \delta_{ij}$. Soit f l'application linéaire de N dans Q définie par les formules $f(y_j) = \sum_{k=1}^{p} v_k b_{kj}$; on a $C(x_i,f(y_j)) = b_{ij} = B(x_i,y_j)$, d'où $C(x,f(y)) = B(x,y)$ quels que soient $x\in M$, $y\in N$. Nous désignons encore par f la représentation de $E(N)$ dans $E(Q)$ qui prolonge l'application linéaire f . Si $b = \det(b_{ij})$, $V = v_1\wedge\ldots\wedge v_p$,

$$\begin{tikzcd} M & B \arrow[l] \arrow[r] & N \arrow[d, "f"] \\ & & Q \arrow[ull, leftrightarrow, "C"] \end{tikzcd}$$

on a $f(Y) = Vb$. On a $f(X \lrcorner Y) = X \lrcorner Vb$, $X \llcorner Y = X \llcorner Vb$, $X \lrcorner V = 1$, $X \llcorner V = 1$. Puisque $X \lrcorner Y$ et $X \lrcorner Y$ sont homogènes de degré 0 , on a $X \lrcorner Y = 1.b$, $X \llcorner Y = b.1$.

3. Passons maintenant au cas général. Introduisons des modules libres M' à gauche et N' à droite, avec des bases $(x'_1,\ldots,x'_p)$ et $(y'_1,\ldots,y'_p)$ de p éléments. Soient f et g les applications linéaires de M' dans M et de N' dans N définies par $f(x'_i)=x_i$, $g(y'_j) = y_j$. La formule $C(x',y') = B(f(x'),f(y'))$ définit une forme bilinéaire C sur $M'\times N'$. Posons $b_{ij} = B(x_i,y_j)$, et désignons par b le déterminant de la matrice (b_{ij}). Soit $X' = x'_1\wedge\ldots\wedge x'_p$, $Y' = y'_1\wedge\ldots\wedge y'_p$; utilisant les mêmes notations que plus haut, on a $f(X')=X$, $f(Y')=Y$, $X' \lrcorner Y' = 1.b$, $X' \llcorner Y' = b.1$, d'où $X \lrcorner Y = 1.b$, $X \llcorner Y = b.1$.

On a donc établi la propriété suivante :

<u>Si</u> $x_1,\ldots,x_p$ <u>sont des éléments de</u> M <u>et</u> $y_1,\ldots,y_p$ <u>des éléments de</u> N , <u>on a</u>

$$(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) \lrcorner (y_1 \wedge \dots \wedge y_p) = 1.\ \det\ (B(x_i,y_j))_{1 \leqq i,j \leqq p}$$

$$(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) \llcorner (y_1 \wedge \dots \wedge y_p) = \det\ (B(x_i,y_j))_{1 \leqq i,j \leqq p}\ .$$

Soit maintenant $\underline{A} = (a_{ij})$ une matrice carrée quelconque d'ordre p à coefficients dans A . Posons $x'_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ji}x_j$, d'où $x'_1 \wedge \dots \wedge x'_p = (\det A)\ x_1 \wedge \dots \wedge x_p$. Soit $\underline{B}$ la matrice $(B(x_i,y_j))$ la matrice $(B(x'_i,y_j))$ est alors ${}^t\underline{A}.\underline{B}$, et on a

$$(x'_1 \wedge \dots \wedge x'_p) \lrcorner (y_1 \wedge \dots \wedge y_p) = 1.\det {}^t\underline{A}\ .\ \det \underline{B}\ ,\ \text{d'où}$$

$(\det \underline{A})(\det \underline{B}) = (\det {}^t\underline{A})(\det \underline{B})$. Or, par un choix convenable des modules M,N et de la forme B et de $x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_p$, on peut faire en sorte que $\underline{B}$ soit la matrice unité ; on obtient ainsi une démonstration de la formule $\det {}^t\underline{A} = \det \underline{A}$.

Revenant au cas général, désignons, pour $x \in E(M)$, $y \in E(N)$, par $1.B^E(x,y)$ la composante homogène de degré 0 de $x \lrcorner y$; B^E est donc une forme bilinéaire sur $E(M) \times E(N)$, qui coïncide manifestement avec B sur $M \times N$. Il résulte des formules établies plus haut que, si x,y sont décomposables, la composante homogène de degré 0 de $x \llcorner y$ est $B^E(x,y).1$; il en est donc ainsi par linéarité quels que soient x et y . La forme B^E s'appelle l'<u>extension canonique de</u> B aux algèbres extérieures. Si x,x' sont dans E(M) et y,y' dans E(N), on a

$$B^E(x \wedge x',y) = B^E(x,x' \lrcorner y)$$

$$B^E(x,y \wedge y') = B^E(x \llcorner y,y')\ .$$

__Modules ayant des bases finies.__

Soit M un module à gauche sur A qui possède une base finie $(x_1,\dots,x_p)$; soient M^* le dual de M, et $(x_1^*,\dots,x_p^*)$ la base duale de M^*. La forme bilinéaire $(x,x^*) \to \langle x,x^*\rangle$ sur $M\times M^*$ définit des produits intérieurs entre éléments de $E(M)$ et de $E(M^*)$ et une forme bilinéaire sur $E(M)\times E(M^*)$; ces produits intérieurs et cette forme bilinéaire sont dits __canoniques__. Pour toute partie $H=\{i_1,\dots,i_n\}$ de $\{1,\dots,p\}$, avec $i_1<\dots<i_n$, posons $x(H) = x_{i_1}\wedge\dots\wedge x_{i_n}$, $x^*(H) = x^*_{i_1}\wedge\dots\wedge x^*_{i_n}$. Soient e et e^* les éléments $x(H)$, $x^*(H)$ relatifs au cas où $H=\{1,\dots,p\}$. On a $i(x_i).x_j^* = \delta_{ij}$; il en résulte tout de suite que $x(H)\lrcorner\, x^*(H) = 1$, $x(H)\lrcorner\, x^*(H') = 0$ si H contient un élément qui n'intervient pas dans H'. Notant $(x,x^*)\to\langle x,x^*\rangle$ la forme bilinéaire canonique sur $E(M)\times E(M^*)$, on voit que $\langle x(H),x^*(H')\rangle$ est 1 si $H'=H$, 0 si $H'\neq H$. Il en résulte que, si les a_H sont des éléments de A, la relation $\sum_H a_H x(H) = 0$ entraîne $a_H = \langle \sum_H a_H x(H),\ x(H)\rangle = 0$ pour tout H. Comme tout élément de $E(M)$ est manifestement combinaison linéaire des $x(H)$, on voit que ces éléments forment une base de $E(M)$. De même, les $x^*(H)$ forment une base de $E(M^*)$, et $E(M^*)$ est canoniquement isomorphe au dual de $E(M)$. Calculons maintenant $x(H)\lrcorner\, e^*$. Désignons par H^* le complémentaire de H. Si $i\in H$, $i'\in H^*$, on a $i(x_i).x^*_{i'} = 0$; comme $i(x_i)$ est une antidérivation à droite, on en conclut que cette opération applique tout multiple de $x^*_{i'}$ dans $E(M^*)$ sur un multiple de $x^*_{i'}$. On conclut de là que $x(H)\lrcorner\, e^*$ est un multiple de $x^*(H^*)$; mais, si m est le nombre d'éléments de H, $x(H)\lrcorner\, e^*$ et $x^*(H^*)$ sont homogènes de degré $p-m$, d'où $x(H)\lrcorner\, e^* = a_H x^*(H^*)$, où $a_H\in A$. On a

$$\langle x(H^*),x(H)\lrcorner\, e^*\rangle = \langle x(H^*)\wedge x(H),\ e^*\rangle .$$

Comme $\langle e, e^* \rangle = 1$, a_H est déterminé par la condition que $x(H^*) \wedge x(H) = a_H e$. Un raisonnement entièrement analogue montre que $e \llcorner x^*(H)$ est de la forme $a^*_H x(H^*)$. On a $\langle e \llcorner x^*(H), x^*(H^*) \rangle$ $\langle e, x^*(H) \wedge x^*(H^*) \rangle$, et a^*_H est déterminé par la condition que $x^*(H) \wedge x^*(H^*) = a^*_H e^*$.

On a $x^*(H^*) \wedge x^*(H) = a^*_{H^*} e^*$. Soit $H = \{i_1, \ldots, i_m\}$, $H^* = \{j_1, \ldots, j_{p-m}\}$, $i_1 < \ldots < i_m, j_1 < \ldots < j_{p-m}$. Donc a_H et $a^*_{H^*}$ sont tous deux égaux à la signature de la permutation $j_1 \to 1, \ldots, j_{p-m} \to p_m$, $i_1 \to p-m+1, \ldots, i_m \to p$. En particulier ils sont égaux l'un à l'autre, et on a $e \llcorner (x(H) \lrcorner e^*) = x(H)$. Il en résulte par linéarité que

$$e \llcorner (x \lrcorner e^*) = x \qquad \text{pour tout} \qquad x \in E(M) \quad .$$

On voit de même que

$$(e \llcorner x^*) \lrcorner e^* = x^* \qquad \text{pour tout} \quad x^* \in E(M^*) \ .$$

L'application $x \to x \lrcorner e^*$ est une application biunivoque de $E(M)$ sur $E(M^*)$ dont la réciproque est l'application $x^* \to e \llcorner x^*$.

Désignons par φ l'application

$$x \to \varphi(x) = x \lrcorner e^* = i(x).e^*$$

et par φ^* l'application

$$x^* \to \varphi^*(x^*) = e \llcorner x^* = i'(x^*).e \quad .$$

L'application φ transporte à $E(M^*)$ la structure d'algèbre de $E(M)$; soit $F(M^*)$ l'algèbre ainsi définie. De même, φ^* transporte à $E(M)$ la structure d'algèbre de $E(M^*)$; soit $F(M)$ l'algèbre ainsi définie. Donc $E(M^*)$ et $F(M^*)$ ont même ensemble sous-jacent, et de même pour $E(M)$ et $F(M)$; mais $F(M)$ est une algèbre à droite et $E(M^*)$ est une algèbre à gauche. L'opération de multiplication dans $F(M)$ s'appelle le <u>produit régressif</u> dans $E(M)$; l'opération de multiplication dans $F(M^*)$

s'appelle le <u>produit régressif</u> dans $E(M^*)$; les produits régressifs sont notés par le signe $\vee$.

Si $a \in A$, la multiplication scalaire à gauche (resp. : à droite) par a dans $E(M)$ (resp.: $E(M^*)$) est identique à la multiplication scalaire à droite (resp.: à gauche) par a dans $F(M)$ (resp.: $F(M^*)$). L'ensemble $E^{p-1}(M)$ (resp.: $E^{p-1}(M^*)$) des éléments homogènes de degré p-1 de $E(M)$ (resp.: $E(M^*)$) est un sous-module de $F(M)$ (resp.: $F(M^*)$), et $F(M)$ (resp.: $F(M^*)$) peut être identifié à l'algèbre extérieure de ce sous-module. Pour tout h , l'ensemble $F^h(M)$ (resp.: $F^h(M^*)$) des éléments homogènes de degré h de $F(M)$ (resp.: $F(M^*)$) est identique à l'ensemble $E^{p-h}(M)$ (resp.: $E^{p-h}(M^*)$) des éléments homogènes de degré p-h de $E(M)$ (resp.: $E(M^*)$).

On a l'identité $(x \wedge y) \lrcorner x^* = x \lrcorner (y \lrcorner x^*)$; en y remplaçant x^* par e^* , il vient

$$\varphi(x \wedge y) = x \lrcorner \varphi(y) = i(x).\ \varphi(y) \ ;$$

mais $\qquad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \quad$, d'où

$$\boxed{x \lrcorner y^* = \varphi(x) \vee y^*} \quad (x \in E(M),\ y^* \in E(M^*))$$

On établit de même la formule

$$\boxed{x \llcorner y^* = x \vee \varphi^*(y^*)} \ .$$

Montrons maintenant que, <u>si</u> $x \in M$, <u>l'opération de multiplication à gauche par</u> x <u>dans</u> $E(M)$ <u>est une antidérivation à droite de</u> $F(M)$. Soient y,z des éléments de $E(M)$; leur produit régressif est défini par la formule $i(y \vee z).e^* = i(y).e^* \wedge i(z).e^*$; on a $i(x \wedge (y \vee z)) = i(x) \circ i(y \vee z)$, et $i(x)$ est une antidérivation à droite de $E(M^*)$. Supposons que $z \in F^h(M)$, d'où $i(z).e^* \in E^h(M^*)$; on a alors

$$i(x \wedge (y \vee z)).e^* = (-1)^h i(x).i(y).e^* \wedge (i(z).e^*$$
$$+ i(y).e^* \wedge i(x).i(z).e^* \ .$$

et, puisque $i(x) \circ i(y) = i(x \wedge y)$, $i(x) \wedge i(z) = i(x \wedge z)$,

$$\varphi(x \wedge (y \vee z)) = (-1)^h \varphi(x \wedge y) \wedge \varphi(z) + \varphi(y) \wedge \varphi(x \wedge z) ,$$

d'où $x \wedge (y \vee z) = (-1)^h (x \wedge y) \vee z + y \vee (x \wedge z)$, ce qui démontre notre assertion. On démontre de la même manière que l'<u>opération de multiplication à droite dans</u> $E(M^*)$ <u>par un élément de</u> M^* <u>est une antidérivation à gauche de</u> $F(M^*)$.

Soient maintenant M un module à gauche et N un module à droite sur A ; supposons que M et N aient des bases finies $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ comportant le même nombre p d'éléments. Soit B une forme bilinéaire sur $M \times N$; soient M^* et N^* les duals des modules M et N . A la forme bilinéaire B se trouvent associées une application linéaire f_g de N dans M^* et f_d de M dans N^* : on a, pour $x \in M$, $y \in N$,

$$\langle x, f_g(y) \rangle = \langle f_d(x), y \rangle = B(x,y) \quad .$$

La forme bilinéaire B définit des opérations de produit intérieur entre éléments de $E(M)$ et de $E(N)$; par ailleurs, les formes bilinéaires canoniques définissent des opérations de produit intérieur d'une part entre éléments de $E(M)$, $E(M^*)$, d'autre part entre éléments de $E(N^*)$, $E(N)$. Les applications linéaires f_g, f_d se prolongent en des représentations de $E(N)$ dans $E(M^*)$ et de $E(M)$ dans $E(N^*)$, que nous désignerons encore par f_g et f_d . Posons $e_M = x_1 \wedge \dots \wedge x_p$, $e_N = y_1 \wedge \dots \wedge y_p$; soit $(x_1^*, \dots, x_p^*)$ la base de M^* duale de $(x_1, \dots, x_p)$, et soit $(y_1^*, \dots, y_p^*)$ la base de N^* duale de $(y_1, \dots, y_p)$. Posons $e_M^* = x_1^* \wedge \dots \wedge x_p^*$, $e_N^* = y_1^* \wedge \dots \wedge y_n^*$. Posons $b_{ij} = B(x_i, y_j)$; la matrice (b_{ij}) est donc la matrice qui représente B par rapport aux bases $(x_1, \dots, x_p)$, $(y_1, \dots, y_p)$. Le déterminant de cette matrice s'appelle le <u>discriminant de</u> B par rapport aux bases choisies dans M

et dans N . Soit D ce discriminant. On a $\langle x_i, f_g(y_j)\rangle = b_{ij}$, d'où $f_g(y_j) = \sum_{k=1}^{p} x_k^* b_{kj}$, et $f_g(e_N) = e_M^* D$; on voit de même que $f_d(e_M) = De_N^*$. Faisant usage des formules ( ), on voit que l'on a , pour $x \in E(M)$, $y \in E(N)$,

$$f_g(x \lrcorner y) = x \lrcorner f_g(y) \qquad x \llcorner y = x \llcorner f_g(y)$$

$$x \lrcorner y = f_d(x) \lrcorner y \qquad f_d(x \llcorner y) = f_d(x) \llcorner y .$$

En particulier, on a $e_M \llcorner (x \lrcorner e_N) = e_M \llcorner f_g(x \lrcorner e_N) = e_M \llcorner (x \lrcorner e_M^* D) = Dx$ puisque $e_M \llcorner (x \lrcorner e_M^*) = x$. On a donc

$$\boxed{e_M \llcorner (x \lrcorner e_N) = Dx \qquad (x \in E(M))}$$

et on voit de même que

$$\boxed{(e_M \llcorner y) \lrcorner e_N = yD \qquad (y \in E(N))} .$$

Par ailleurs, l'image par f_g de la composante homogène de degré 0 de $x \lrcorner y$ est celle de $x \lrcorner f_g(y)$. Si donc B^E est l'extension canonique de B à $E(M) \times E(N)$, on a

$$B^E(x,y) = \langle x, f_g(y)\rangle \qquad (x \in E(M), \quad y \in E(N))$$

et on voit de même que

$$B^E(x,y) = \langle f_d(x), y\rangle .$$

Identifiant $E(M^*)$ au dual de $E(M)$ et $E(N^*)$ au dual de $E(N)$, on voit que f_g et f_d sont les applications linéaires associées à la forme bilinéaire B^E .
