RÉDACTION N° 185

TITRE : DEUXIÈME PARTIE : ANALYSE ALGÉBRIQUE
LIVRE I : ALGÈBRE COMMUTATIVE
CHAPITRE V (ANCIEN III) :
ALGÈBRE LOCALE ÉLÉMENTAIRE (ÉTAT 2)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 24

NOMBRE DE FEUILLES : 24

NBR 088 n°185 2

Archives M^r Samuel Sept. 53

DEUXIEME PARTIE.

ANALYSE ALGEBRIQUE.

LIVRE I

ALGÈBRE COMMUTATIVE

CHAPITRE V (ancien III).

ALGEBRE LOCALE ELEMENTAIRE (Etat 2).

N-B .- Certains passages (vers la fin surtout) n'ayant subi aucun changement par rapport à l'état 1, il a été jugé inutile de les recopier.

Le th. de Krull (chap.II, anneaux noethériens, § 3, n°1) est supposé démontré pour les modules (la généralisation est triviale) :

Soient A un anneau, E un A-module noethérien, M un idéal de A . Pour que $\bigcap M^n E = (0)$, il faut et il suffit que, pour tout $a \in 1+M$ et tout $x \neq 0 \in E$, on ait $ax \neq 0$.

---

§ 1 - Anneaux et modules gradués associés.

1 - Définitions et exemples.

On appelle anneau filtré un anneau A muni de la structure définie par une suite décroissante $(A_n))(n \in Z)$ de sous-groupes additifs satisfaisant aux conditions :

(1) $A_p A_q \subset A_{p+q}$

(2) $\bigcup_{-\infty}^{+\infty} A_n = A$.

Nous dirons que A est filtré par les sous-groupes A_n . Remarquons que $\bigcap_{-\infty}^{+\infty} A_n$ est un idéal de A .

Exemples - 1) Soit A un anneau de polynomes. Prenons pour A_{-n} $(n \geqslant 0)$ l'ensemble des polynomes de degré $\leqslant n$, et $A_n = (0)$ pour $n < 0$.

2) Lorsque $A_o=A$, alors $A_{-q}=A$ pour $q \geqslant 0$, et les A_n sont des <u>idéaux</u> de A . En particulier, étant donnés un anneau A et un idéal M de A , on peut prendre $A_n=M^n$ pour $n \geqslant 0$ et $A_{-q}=A$ pour $q \leqslant 0$; on dit en ce cas que A est filtré par les puissances de M .

Etant donné un anneau A filtré par des sous-groupes (A_n), on appelle A-<u>module filtré</u> un A-module E muni de la structure définie par une suite décroissante $(E_n)(n \in Z)$ de sous-groupes additifs satisfaisant aux conditions :

$$(1)' \qquad A_p E_q \subset E_{p+q}.$$
$$(2)' \qquad \bigcup E_n = E.$$

Nous dirons que E est filtré par les sous-groupes E_n . Remarquons que $\bigcap E_n$ est un sous-module de E .

<u>Exemples</u> - 1) Lorsque $A_o=A$, les E_n sont des <u>sous-modules</u>.

2) Etant donnés un anneau A , filtré par des sous-groupes A_n , et un A-module quelconque E , le module E est filtré par les sous-groupes $(A_n E)$; cette filtration de E est dite <u>canonique</u>.

2 - <u>Construction des anneaux et modules gradués associés</u>.

Soient A un anneau filtré par les sous-groupes (A_n) et E un A-module filtré par les sous-groupes (E_n). On considère les sommes directes $G(A) = \sum A_n/A_{n+1}$ et $G(E) = \sum E_n/E_{n+1}$. Ce sont des groupes <u>gradués</u>, les éléments de A_n/A_{n+1} (resp. E_n/E_{n+1}) étant de degré n .

Nous allons définir une <u>multiplication</u> entre éléments de G(A) et éléments de G(E). Par linéarité il suffit de définir $\bar{a}.\bar{x}$ pour des éléments homogènes $\bar{a} \in A_p/A_{p+1}$ et $\bar{x} \in E_q/E_{q+1}$. Prenons des représentants $a \in A_p$ de $\bar{a}$ et $x \in E_q$ de $\bar{x}$. D'après (2)' (n°1) on a $ax \in E_{p+q}$, et, d'après (2)' encore, la classe de ax mod.E_{p+q+1} ne dépend que de $\bar{a}$ et $\bar{x}$. Nous noterons cette classe a.x. On a $d^o(\bar{a}.\bar{x}) = d^o(\bar{a}) + d^o(\bar{x})$.

Si l'on prend $E=A$, ceci définit une multiplication sur $G(A)$. L'on vérifie comme l'âne qui trotte que celle-ci est associative, distributive par rapport à l'addition, et commutative (si A est commutatif),. Elle fai de $G(A)$ un <u>anneau gradué</u>, appelé l'<u>anneau gradué associé</u> à l'anneau filtré A .

D'autre part l'on vérifie aussi que la multiplication $(\bar{a},\bar{x}) \to \bar{a}.\bar{x}$ $(\bar{a} \in G(A), \bar{x} \in G(E))$ définit sur $G(E)$ une structure de $G(A)$-<u>module gradué</u>. Muni de cette structure $G(E)$ est appelé le <u>module gradué associé</u> au module filtre E .

<u>Exemples</u> - 1) Un anneau gradué $A = \sum_{-\infty}^{+\infty} T_n$ $(T_pT_q \subset T_{p+q})$ est filtré par les $A_n = \sum_{q \geq n} T_q$. Alors $G(A)$ est isomorphe à A . C'est le cas pour $A = C[X_1,\ldots,X_n]$ filtré par les puissances de $M =(X_1,\ldots,X_n)$

2) Lorsque $A = C[[X_1,\ldots,X_n]]$ filtré par les puissances de $M = (X_1,\ldots,X_n)$, $G(A)$ est isomorphe à $C[X_1,\ldots,X_n]$.

3) Soit p un nombre premier. L'anneau Z , filtré par les puissances (p^n), admet pour anneau gradué associé l'anneau de polynomes $F_p[X]$ à une indéterminée sur le corps à p éléments F_p .

4) Plus généralement soit A un anneau, filtré par les puissances d'un idéal M , et soit (m_j) une base de M ; alors $G(A)$ est engendré sur A/M par les classes $\bar{m}_j$ des m_j mod.M^2 : $G(A) = (A/M)[(\bar{m}_j)]$. Autrement dit $G(A)$ est un quotient d'un anneau de polynomes sur A/M par un idéal homogène.

<u>Remarque</u>.- Soient A un anneau filtré par des idéaux (A_n) et E un A-module muni de la filtration canonique (A_nE). Le module gradué associé $G(E)$ est, en tant que $G(A)$-module, engendré par E/A_1E .

3 - Fonction d'ordre et forme initiale.

Soient A un anneau, filtré par les sous-groupes (A_n), et E un A-module filtré par les sous-groupes (E_n). Pour $a \in A$ (resp. $x \in E$) nous noterons $v(a)$ (resp. $v(x)$) le plus grand entier n tel que $a \in A_n$ (resp. $x \in E_n$). Pour $a \in \bigcap A_n$ (resp. $x \in \bigcap E_n$) on pose $v(a)$ (resp. $v(x)) = +\infty$. Les formules (2) et (2)' ($n^o 1$) montrent que $v(a)$ et $v(x)$ sont partout définies sur A et E. La fonction v est appelée la fonction d'ordre sur l'anneau (resp. module) filtré A (resp. E). Il est clair que v est compatible avec le passage au quotient $A/(\bigcap A_n)$ (resp. $E/(\bigcap E_n)$). Comme les A_n (resp. E_n) forment une suite décroissante de sous-groupes, on a :

$$(3) \qquad v(a+b) \geqslant \min(v(a),v(b)), \qquad v(x+y) \geqslant \min(v(x),v(y)).$$

Enfin les formules (1) et (1)' ($n^o 1$) montrent que :

$$(4) \qquad v(ab) \geqslant v(a)+v(b), \qquad v(a.x) \geqslant v(a)+v(x).$$

Exemples - Pour un anneau de polynomes A, filtré comme dans l'ex.1 ($n^o 1$), on a $v(a) = -d^o(a)$. Pour un anneau de séries formelles filtre par les puissances de $(X_1,\dots,X_n)$ (ex.2, $n^o 2$), $v(a)$ est l'ordre de la série formelle a ;

Avec les mêmes notations, pour un élément a de A ($a \notin \bigcap A_n$) (resp. x de E ($x \notin \bigcap E_n$)), on appelle forme initiale de a (resp. x) et on note $G(a)$ (resp. $G(x)$) la classe de a (resp. x) dans $A_{v(a)}/A_{v(a)+1}$ (resp. $E_{v(x)}/E_{v(x)+1}$) ; pour $a \in \bigcap A_n$ (resp. $x \in \bigcap E_n$) on pose $G(a)$ (resp. $G(x)) = 0$.

Remarquons que G n'est pas un homomorphisme de A sur G(A).

Par définition de la multiplication dans G(A) ($n^o 2$), les relations "$ab \in A_{v(a)+v(b)+1}$", "$v(ab) > v(a)+v(b)$", "$G(a).G(b)=0$" sont équivalentes. Donc :

<u>Proposition 1</u> - <u>Soit</u> A <u>un anneau commutatif filtré par les sous-groupes</u> (A_n). <u>Si son anneau gradué associé</u> G(A) <u>est intègre, alors</u> $A/\bigcap A_n$ <u>est intègre et la fonction d'ordre</u> v <u>en est une valuation</u>.

4 - <u>Sous-modules et modules quotients</u>.

Le cas des idéaux et anneaux quotients en est un cas particulier.

Soit E un A-module filtré par les sous-groupes (E_n) et soit F un sous-module de E , filtré par les sous-groupes $F\cap E_n$. Comme $F\cap E_n/F\cap E_{n+1}$ est un sous-groupe de E_n/E_{n+1} , le module gradué associé G(F) est un sous-groupe de G(E), et c'en est même un <u>sous-module</u>. L'image par G de F est l'ensemble des éléments homogènes de G(F) (notation à moitié contradictoire).

Considérons maintenant le module quotient E/F filtré par les sous-groupes $(E_n+F)/F$. Comme $(E_n/E_{n+1})/(F\cap E_n/F\cap E_{n+1})$ est canoniquement isomorphe à $(E_n+F)\ (E_{n+1}+F)$, on a :

(5) $\quad G(E/F) = G(E)/G(F)$ (comme c'est joli et fonctoriel !).

Dans le cas d'un anneau et d'un idéal la prop.1 (n°3) donne :

<u>Proposition 2</u> - <u>Soient</u> A <u>un anneau filtré et</u> I <u>un idéal de</u> A . <u>Si</u> G(I) <u>est un idéal premier de</u> G(A), $\bigcap(I+A_n)$ <u>est un idéal premier de</u> A .

Réciproque fausse : prendre $A=K[[X,Y]]$ filtré par les puissances de $M = (X,Y)$, et $I = (X^2-Y^3)$.

5 - <u>Sous-anneaux</u>.

Soit A un anneau filtré par les sous-groupes A_n et soit B un sous-anneau de A . Filtrons B par les $(B\cap A_n)$. Comme $B\cap A_n/B\cap A_{n+1}$ est un sous-groupe de A_n/A_{n+1}, G(B) est un sous-groupe de G(A) dont on vérifie aussitôt que c'est un <u>sous-anneau</u>. L'image de B par G dans G(A) est l'ensemble des éléments homogènes de G(B).

6 - Une propriété des anneaux complètement intégralement clos.

On dit qu'un anneau A est complètement intégralement clos s'il est d'intégrité et si tout élément x du corps des fractions K de A pour lequel existe $d \in A^*$ tel que $dx^n \in A$ pour tout $n \geqslant 0$ est dans A. L'existence du dénominateur commun d exprime, que $A[x]$ est contenu dans un A-module de type fini ; ceci a lieu, en particulier, lorsque x est entier sur A ; ainsi un anneau complètement intégralement clos est intégralement clos ; la réciproque est vraie lorsque A est noethérien.

Exemple important : une intersection d'anneaux de valuations de rang 1. On conjecture que tous les anneaux complètement intégralement clos sont de ce type.

Proposition 3.- Soit A un anneau commutatif filtré par les sous-groupes A_n et tel que, pour tout $c \in A$, on ait $\bigcap (Ac + A_n) = Ac$ (c'est-à-dire que tout idéal principal de A soit fermé ; cf. § 2). Si l'anneau gradué associé G(A) est complètement intégralement clos, il en est de même de A.

Comme $\bigcap A_n = (0)$ (faire $c=0$ dans l'hippothèse), et comme G(A) est intègre, A est intègre et v en est une valuation (prop.1, n°3). Soit x un élément du corps des fractions K de A pour lequel existe d non nul dans A tel que $dx^n \in A$ pour tout n. Ecrivons $x = a/b$ $(a, b \in A)$. On doit montrer que $a \in Ab$. D'après l'hypothèse il suffit de montrer que $a \in Ab + A_n$ pour tout n. Or, comme $\bigcup A_q = A$, il existe q tel que $a \in Ab + A_q$. Donc, par récurrence, il suffit de montrer que $a \in Ab + A_n$ implique $a \in Ab + A_{n+1}$.

Soit alors $a = bu + v$ $(u \in A, v \in A_n)$. Comme $dx^s \in A$ pour tout $s \geqslant 0$, on a $d(x-u)^s \in A$, c.à.d. $d(v/b)^s \in A$, ou $dv^s \in Ab^s$; soit $dv^s = w_s b^s$. Comme la fonction d'ordre dans A est une valuation, le passage aux formes initiales conserve les produits, et l'on a $G(d).G(v)^s = G(w_s).G(b)^s$. Comme $G(A)$ est complètement intégralement clos ceci implique $G(v)/G(b) = G(A)$ c.à.d. $G(v) = G(b)G(u')$ $(u' \in A)$, ou $v \equiv bu' \bmod. A_{n+1}$. Donc $a \equiv b(u+u') \bmod. A_{n+1}$. C.Q.F.D.

Exemples - 1) Un anneau de séries formelles sur un anneau noethérien intégralement clos est intégralement clos : en effet tout idéal en est fermé (cf. § 2) et son anneau gradué associé est complètement intégralement clos en tant qu'anneau de polynomes.

2) L'anneau local d'un point simple est intégralement clos : en effet son anneau gradué associé est (par définition ou presque) un anneau de polynomes sur un corps.

7 - Anneaux noethériens gradués (petits caractères ou encre sympathique). Soit $A = \sum_{n=0}^{\infty} T_n$ un anneau gradué (avec seulement des degrés positifs). Si A est noethérien, alors T_o est un anneau noethérien et A est engendré sur T_o par un nombre fini d'éléments homogènes : on considère l'idéal $I = \sum_{n=0}^{\infty} T_n$; on a $T_o \simeq A/I$, donc noethérien ; et toute base finie de I engendre A sur T_o (récurrence sur le degré).

Un anneau noethérien filtré par les puissances d'un idéal admet un anneau gradué associé qui est noethérien (cf.ex.4,n°2). Ceci n'est pas vrai d'un anneau noethérien à filtration quelconque (même par des idéaux). Détails et contre-exemple dans mon cours de Cornell.

----

§ 2 - Topologie et complétion d'anneaux et modules filtrés.

1 - Topologie déduite d'une filtration.

Soient A un anneau filtré par les (A_n) et E un A-module filtré par les (E_n). Prenons la suite (A_n) (resp. (E_n)) comme système fondamental de voisinages de 0 ; ceci définit une topologie sur A (resp.E). Celle-ci peut être aussi définie par l'écart $d(a,b) = e^{-v(a-b)}$ (resp. $d(x,y) = e^{-v(x-y)}$), où v désigne la fonction d'ordre sur A (resp.E) (§ 1, n°3) ; en vertu de l'inégalité (3) cet écart vérifie :

$$(1) \qquad d(x,z) \leqslant \max(d(x,y),d(y,z))$$

et fait de A (resp.E) un espace ultramétrique s'il est séparé.

Comme les voisinages A_n, E_n sont des sous-groupes, les additions sont continues dans A et E . L'inclusion $A_p E_q \subset E_{p+q}$ montre que la multiplication $(a,x) \rightarrow a.x$ $(a \in A,\ x \in E)$ est, elle aussi continue ; en particulier la multiplication dans A est continue. Ainsi E est un module topologique sur l'anneau topologique A .

Lorsque A est donné, avec la filtration (A_n), la topologie sur E déduite de la filtration canonique $(A_n E)$ est appelée la topologie canonique. Quand E est le module produit A^q , sa topologie canonique n'est autre que sa topologie produit.

Les sous-groupes A_n, E_n sont ouverts. Ils sont donc aussi fermés.

Pour qu'un sous-groupe F de E soit fermé, il faut et il suffit que l'on ait $\bigcap_{n=0}^{+\infty} (F+E_n)=F$. Donc, pour que A (resp.E) soit séparé, il faut et il suffit que l'on ait $\bigcap A_n = (0)$ (resp. $\bigcap E_n = (0)$).

L'inégalité (1) montre que les suites de Cauchy (x_n) dans E sont celles pour lesquelles $x_n - x_{n-1}$ tend vers 0. Donc, quand E est complet, les séries convergentes $\sum x_n$ sont celles dont le terme général tend vers zéro.

Soit F un sous-module de E. La *topologie quotient* sur E/F est définie par la filtration $(F+E_n/F)$. Lorsque E a la topologie canonique, la topologie quotient sur E/F est la topologie canonique, puisque $A_n.(E/F) = F+A_n\, E/F$.

La *topologie induite* sur le sous-module F est définie par la filtration $(F \cap E_n)$. Lorsque E a la topologie canonique, la topologie induite sur F est *moins fine* que la topologie canonique de F, puisque $A_nF \subset A_nE \cap F$. Un cas où ces topologies coincident est celui où A est filtré par les par les puissances d'un idéal M et où E est un A-module noethérien : en effet le lemme au th. de Krull montre l'existence d'un entier $s(n)$ tel que $M^nF \supset M^{ns(n)}E \cap F$ (chap. II).

2 - Complétions d'anneaux et modules filtrés.

Rappelons (Top. Géné. III), cum grano salis) que, étant donné un module topologique sur l'anneau topologique A, le complété $\hat{A}$ de A est un anneau topologique et le complété E de E est un module topologique sur $\hat{A}$.

Proposition 1 - Soient A un anneau filtré par les puissances d'un idéal M et E un module de type fini sur A, séparé pour la topologie canonique. Le complété $\hat{E}$ est engendré par E sur $\hat{A}$: $\hat{E} = \hat{A}.E$.

Posons $E = \sum_i Ax_i$. Les éléments de $\hat{E}$ sont les limites des suites de Cauchy dans E, ou, ce qui revient au même, les sommes des séries d'éléments de E dont le terme général tend vers 0. Par groupement de termes une telle série s'écrit $y = \sum_n y_n$, où $y_n \in M^nE$. Ecrivons $y_n = \sum_i a_{ni}x_i$, où $a_{ni} \in M^n$. La série $\sum_n a_{ni}$ converge dans $\hat{A}$; notons a_i l'une de ses sommes. Comme, dans l'égalité, $y - \sum_i a_ix_i = y-y_n + \sum_i (a_{ni}-a_i)x_i$, le second membre tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on a $y = \sum_i a_ix_i$ puisque $\hat{E}$ est séparé.

<u>Corollaire 1</u> - <u>Les notations étant celles de la prop.1</u>, <u>soit</u> F <u>un sous-module de type fini de</u> E <u>ayant la topologie canonique pour topologie induite</u>. <u>Alors l'adhérence de</u> F <u>dans</u> $\hat{E}$ <u>est</u> $\hat{A}F$, <u>et l'adhérence de</u> F <u>dans</u> E <u>est</u> $\hat{A}F \cap E$.

Ceci résulte de la prop.1 et de résultats classiques de topologie.

Voici deux cas où les topologies induite et canonique coïncident sur F :

1) E est noethérien (cf. n°1)

2) F est ouvert (car $F \supset M^sE$, et $M^{n+s}E \cap F \subset M^nF \subset M^nE \cap F$). Alors F est fermé dans E et on a $F \subset \hat{A}F \cap E$. D'où en particulier (en utilisant le fait que, dans un complété, un système fondamental de voisinages ...) :

<u>Corollaire 2</u> - <u>Supposons, dans les hypothèses de la prop.1, que</u> M <u>admette une base finie, et que</u> A <u>et</u> E <u>soient séparés</u>. <u>Alors l'adhérence de</u> M^nE <u>dans</u> $\hat{E}$ (resp. <u>de</u> M^n <u>dans</u> $\hat{A}$) <u>est</u> $\hat{A}M^nE = (\hat{A}M)^nE$ (resp. $\hat{A}M^n = (\hat{A}M)^n$), <u>et l'on a</u> $M^nE = (\hat{A}M)^nE \cap E$, $M^n = (\hat{A}M)^n \cap A$. <u>La topologie de</u> $\hat{E}$ (resp. $\hat{A}$) <u>est définie par la filtration</u> $(\hat{A}M)^nE$ (resp. $(\hat{A}M)^n$).

3 - <u>Complété d'un module quotient</u>.

<u>Proposition 2</u> - <u>Soient</u> A <u>un anneau filtré par les puissances d'un idéal</u> M <u>admettant une base finie</u>, E <u>un</u> A-<u>module de type fini et</u> F <u>un sous-module de type fini de</u> E , <u>fermé pour la topologie canonique de</u> E <u>et admettant la top. induite pour top. canonique</u> ; <u>supposons</u> A <u>et</u> E <u>séparés</u>. <u>Alors le complété de</u> E/F (<u>filtré par les</u> $M^n(E/F) = M^nE + F/F$) <u>est isomorphe à</u> $\hat{E}/\hat{A}F$ (<u>filtré par les</u> $M^n(\hat{E}/\hat{A}F) = \hat{A}M^nE + \hat{A}F/\hat{A}F$) .

Comme F est fermé et admet la topologie induite pour topologie canonique, on a $F = \hat{A}F \cap E$ (cor.1 de la prop.1), et E/F est un sous-groupe de $\hat{E}/\hat{A}F$. Comme M^nE+F est fermé (puisqu'ouvert), on a on a $\hat{A}(M^nE+F)\cap E = M^nE+F$, et la topologie canonique de E/F est induite par celle de $\hat{E}/\hat{A}F$. D'autre part $\hat{E}/\hat{A}F$ est complet (Top.Géné.IX). Enfin E/F est évidemment dense dans $\hat{E}/\hat{A}F$. C.Q.F.D.

Corollaire 1 - Les hypothèses sur A,M et E étant celles de la prop.2, les modules filtrés E et $\hat{E}$ (resp. anneaux filtrés A et $\hat{A}$) ont des modules (resp. anneaux) gradués, associés isomorphes.

En effet M^nE est de type fini, fermé (puisqu'ouvert), et admet la topologie induite pour topologie canonique (car il est ouvert ; cf.n°2). Donc $\hat{A}M^nE/\hat{A}M^{n+1}E$ est le complété de $M^nE/M^{n+1}E$, et lui est identique car celui-ci est discret.

Corollaire 2 - Soit A un anneau local d'idéal maximal M à base finie, et tel que $\bigcap M^n=(0)$. Alors A est un anneau local dont $\hat{A}M$ est l'idéal maximal.

Comme M est ouvert, on a $\hat{A}/\hat{A}M = A/M$, et ce quotient est un corps. D'autre part tout élément de $1+\hat{A}M$ est inversible dans $\hat{A}$ (développement de $1/1-T$). Donc, si $a\notin\hat{A}M$, il existe $b\in\hat{A}$ tel que $ab \equiv 1$ (mod.$\hat{A}M$) ; ainsi ab est inversible, et par conséquent aussi a .

Remarque - Certaines hypothèses faites dans ce n° (bases finies, identité de topologies) sont automatiquement vérifiées lorsque A est noethérien.

4 - Idéaux et sous-modules fermés.

Proposition 3 - Soient A un anneau filtré par les puissances d'un idéal M E un A-module noethérien et F un sous-module de E . Pour que F soit fermé dans E (pour la topologie canonique) il faut et il suffit que l'on ait $P_i+M \neq A$ pour tout idéal premier de F .

Le fait que F est fermé s'écrit $\bigcap_n (F+M^nE)=F$. En appliquant, dans E/F le th. de Krull et la caractérisation des "diviseurs de zéro" (Noethériens, § 3,th.2,b), on voit que cette relation équivaut à "$(1+M)\cap\bigcap_i P_i = \emptyset$", c.à.d. à "$P_i+M \neq A$ pour tout P_i ".

Corollaire 1 - Adhérence d'un sous-module. Recopier (en le modulant) cor.1, p.8 de l'état 1 .

Corollaire 2 - Soit A un anneau noethérien filtré par les puissances d'un idéal M . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout module de type fini E sur A et tout sous-module F de E , F est fermé dans E pour la topologie canonique (c.à.d. $\bigcap_n (M^nE+F)=F$).

b) L'idéal M est contenu dans l'intersection des idéaux maximaux de A .

c) Tout élément de $1+M$ est inversible dans A .

Comme tout idéal premier P de A est l'idéal premier associé d'un A-module primaire (P par exemple), la prop.3 montre que a) équivaut à "$M+P \neq A$ pour tout idéal premier P de A" , c.à.d. à "$M+V \neq A$ pour tout idéal maximal V de A" puisque tout idéal premier est contenu dans un idéal maximal ; ceci s'écrit "$M+V = V$" ou "$M \subset V$" puisque V est maximal, et équivaut à b). Enfin b) et c) sont équivalentes puisque les éléments inversibles de A sont ceux qui ne sont contenus dans aucun idéal maximal, et que les relations "$M \subset V$" et "$(1+M)\cap V = \emptyset$" sont équivalentes pour un idéal maximal V .

Définition 1 - On dit qu'un anneau A filtré par les puissances d'un idéal M est un anneau de Zariski s'il est noethérien et s'il satisfait aux conditions énoncées dans le cor.2, prop.3.

Exemples d'anneaux de Zariski :

1) Un anneau local noethérien (filtré par les puissances de son idéal maximal).

2) Un anneau noethérien A n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux maximaux dont M est l'intersection. Un tel anneau est dit semi-local.

3) Un anneau noethérien filtré par les puissances d'un idéal M et complet (tout élément $1-m$ de $1+M$ est inversible car il admet $1+m+m^2$ ... pour inverse).

4) Un quotient d'un anneau de Zariski.

Dans le cas d'un anneau de Zariski le cor.1 de la prop.1 (no2) donne :

Proposition 4 - Soient A un anneau de Zariski, E un A-module de type fini et F un sous-module de E . On a $F = \hat{A}F \cap E$.

Exemple - On démontrera que les fonctions de n variables complexes qui sont holomorphes dans un voisinage de l'origine (dépendant de la fonction) forment un anneau local noethérien A (cf. §4). Son complété $\hat{A}$ est l'anneau des séries formelles à n variables. Donc, si une fonction holomorphe $f \in A$ est combinaison linéaire de fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_q$ à coefficients séries formelles (c.à.d. si $f \in \hat{A}I \cap A$, I désignant l'idéal de A engendré par $f_1, \ldots, f_q$), elle est aussi combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_q$ à coefficients holomorphes (c.à.d. $f \in I$).

5 - Produits tensoriels, homomorphismes, suites exactes.

Proposition 5 - Soit A un anneau, filtré par les puissances d'un idéal M dont le complété $\hat{A}$ est un anneau de Zariski (c.à.d. noethérien, cf. n°4), et soit E un A-module de type fini. Alors le complété $\hat{E}$ est le module étendu $(E)_{\hat{A}} = \hat{A} \otimes E$.

Soit F un $\hat{A}$-module, et soit f une application A-linéaire de E dans F. Comme $\hat{A}f(E)$ est un $\hat{A}$-module de type fini, il est complet en tant que quotient séparé d'un produit fini $\hat{A}^q$ ($\hat{A}$ étant un anneau de Zariski). Donc l'application f, qui est uniformément continue, se prolonge en une application $\hat{f}$ de $\hat{E}$ dans $\hat{A}f(E) \subset F$, qui est $\hat{A}$-linéaire par prolongement des identités. Comme E est engendré par E sur $\hat{A}$ (prop.1, n°2), un fameux scholie montre qu'il est isomorphe à $\hat{A} \otimes E$.

L'hypothèse que $\hat{A}$ est noethérien est vérifiée lorsque A est noethérien (cf. § 3).

<u>Proposition 6</u> - <u>Soient</u> E, E' <u>des modules de type fini sur un anneau noethérien</u> A <u>filtré par les puissances d'un idéal</u> M, <u>soit</u> f <u>une application</u> A-<u>linéaire de</u> E <u>sur</u> E' <u>et soit</u> F' <u>un sous-module fermé de</u> E'. <u>Alors</u> f <u>peut être étendue, et de façon unique, en une application</u> $\hat{A}$-<u>linéaire</u> $\hat{f}$ <u>de</u> $\hat{E}$ <u>sur</u> $\hat{E}'$, <u>et l'on a</u> $\hat{f}^{-1}(\hat{A}F') = \hat{A}.f^{-1}(F')$ <u>(adhérence de</u> $f^{-1}(F')$ <u>dans</u> $\hat{E}$).

Comme $f(M^nE) = M^nE'$, f est uniformément continue et peut donc être prolongée, et de façon unique, aux complétés. Comme $\hat{f}(\hat{A}M^n\hat{E}) = \hat{A}M^n\hat{E}'$, $\hat{f}$ est une application continue et ouverte. Par passage aux quotients $\hat{f}$ définit donc un isomorphisme (bicontinu) g de $\hat{E}/\hat{f}^{-1}(\hat{A}F')$ sur $\hat{E}'/\hat{A}F'$. Cet isomorphisme applique $E/E \cap \hat{f}^{-1}(\hat{A}F')$ sur $E'/E' \cap \hat{A}F'$, c'est-à-dire, puisque F' est fermé et admet la topologie canonique pour topologie induite (A étant noethérien ; cf. n°1), applique $E/f^{-1}(F')$ sur E'/F' (cor.1 de la prop.1, § 2). Comme $\hat{E}'/\hat{A}F'$ est le complété de E'/F' (prop.2), $\hat{E}/\hat{f}^{-1}(\hat{A}F')$ est le complété de $E/f^{-1}(F')$. Comme F' est fermé et f continue, $f^{-1}(F')$ est fermé, et le complété de $E/f^{-1}(F')$ est $\hat{E}/\hat{A}f^{-1}(F')$ (prop.2). Donc on a $\hat{f}^{-1}(\hat{A}F') = \hat{A}f^{-1}(F')$. C.Q.F.D.

<u>Exemple</u> - Soit A l'anneau des fonctions de n variables complexes qui sont holomorphes au voisinage de l'origine, et soient $f_1,\dots,f_q$ des éléments de A . On appelle <u>module des relations linéaires</u> à coefficients holomorphes (resp. formels) entre $f_1,\dots,f_q$ l'ensemble des éléments (a_i) A^q , (resp. $\hat{A}^q$) tels que $\sum_i a_i f_i = 0$. Notons f (resp. $\hat{f}$) l'application de A^q (resp. $\widehat{A^q}$) dans A (resp. $\hat{A}$) définie par $f((a_i)) = \sum_i a_i f_i$. La prop.6 montre que le module des relations à coefficients formels est engendré par des relations à coefficients holomorphes.

<u>Corollaire 1</u> - <u>Soient</u> A <u>un anneau noethérien filtré par les puissances d'un idéal</u> M , <u>et</u> $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ <u>une suite exacte de</u> A-<u>modules de type fini telle que</u> G <u>soit séparé</u>. <u>Alors la suite</u> $\hat{A}\otimes E \to \hat{A}\otimes F \to \hat{A}\otimes G$ <u>est exacte</u>.

D'après la prop.5 la seconde suite est $\hat{E} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{F} \xrightarrow{\hat{g}} \hat{G}$ (on a à se servir du fait que $\hat{A}$ est noethérien, qui sera démontré au § 3 ; ça canule le plan). Le noyau $\hat{g}^{-1}(0)$ est $\hat{A}g^{-1}(0)$ puisque G est séparé (prop.6), c'est-à-dire $\hat{A}f(E)$ puisque $E \to F \to G$ est exacte, ou encore $\hat{f}(\hat{E})$. C.Q.F.D.

<u>Corollaire 2</u> - <u>Si</u> A <u>est un anneau de Zariski, on a</u> $\mathrm{Tor}_A(\hat{A},E)$ 0 <u>pour tout</u> A-<u>module</u> E .

Ceci résulte du cor.1 quand E est de type fini, et l'on passe aussitôt de là à un module quelconque.

<u>Corollaire 3</u> - <u>Soient</u> A <u>un anneau de Zariski</u>, I <u>un idéal de</u> A , c <u>un élément de</u> A . <u>On a</u> $(\hat{A}I : \hat{A}c) = \hat{A}(I : Ac)$ <u>et</u> $\hat{A}I \cap \hat{A}c = \hat{A}(I \cap Ac)$.

Par application de la prop.6 à l'application $x \to cx$ on obtient la première formule. La seconde s'en déduit par multiplication par c .

Corollaire 4 - Soit A un anneau de Zariski. Si $c \in A$ n'est pas diviseur de zéro dans A , il n'est pas diviseur de zéro dans le complété $\hat{A}$.

On prend $I = (0)$ dans la première formule du cor.3 .

Proposition 7 - Soient A un anneau de Zariski, I et J deux idiots de A . On a $\hat{A}I \cap \hat{A}J = \hat{A}(I \cap J)$.

Soit $I = (a_1, \dots, a_n, I \cap J)$; nous procèderons par induction sur le nombre n d'éléments à adjoindre à $I \cap J$ pour engendrer I . Le résultat est vrai pour $n=1$, comme on le voit en appliquant le cor.3 de la prop.6 aux idéaux $I/I \cap J$ et $J/I \cap J$ de $A/I \cap J$ et en utilisant la structure du complété d'un quotient (prop.2, n°3). Supposons le résultat démontré pour $n-1$, et soit $I = (a_1, \dots, a_n, I \cap J)$. Posons $J' = (a_n, J)$; on a (AQT) $I \cap J' = (a_n, I \cap J) = (a_n, I \cap J' \cap J)$. Le cas $n=1$ donne alors $\hat{A}(I \cap J) = \hat{A}(I \cap J' \cap J) = \hat{A}(I \cap J') \cap \hat{A}J$. D'autre part, d'après le cas $n-1$, on a $\hat{A}(I \cap J') = \hat{A}I \cap \hat{A}J'$, ce qui démontre le résultat annoncé.

6 - Extensions finies d'anneaux filtrés.

Proposition 8 - Soient A un anneau noethérien filtré par les puissances d'un idéal M et B un anneau contenant A et qui soit un A-module de type fini ; munissons B de la filtration $(MB)^n$.

a) La filtration $(MB)^n$ est la filtration canonique de B (considéré comme A-module) et la topologie canonique de A est induite par celle de B .

b) Pour que B soit séparé, il faut et il suffit qu'aucun élément de $1 \cap M$ ne soit diviseur de zéro dans B .

c) Si A est un anneau de Zariski, il en est de même de B .

d) Si A est complet, il en est de même de B .

e) Si A est semi-local, il en est de même de B .

a) résulte de $(MB)^n = M^nB$ et d'une remarque faite au n°1. b) n'est qu'une traduction du th. de Krull. Pour c) on remarque que tout B-module de type fini E est aussi un A-module de type fini, que les topologies canoniques de E , considéré comme A- et comme B-module, coincident ; donc, comme A est anneau de Zariski, E est séparé, ce qui montre que B est aussi un anneau de Zariski. Pour d) on remarque que B est un quotient d'un A-module libre à base finie par un sous-module fermé (Top.Géné.IX). Enfin, si A est semi local, B est un anneau de Zariski et tous ses idéaux maximaux contiennent MB ; comme B/MB est un (A/M)-module de type fini, c'est un anneau de longueur finie qui n'a donc qu'un nombre fini d'idéaux maximaux, dont une puissance de l'intersection est (0) ; donc B n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux, qui contiennent tous MB , et dont une puissance de l'intersection est contenue dans MB, ceci démontre d) .

Proposition 9.- Soient A un anneau noethérien, filtré par les puissances d'un idéal M , et B un anneau contenant A , filtré par les $(MB)^n$, et qui soit un A-module de type fini. Alors :

a) L'adhérence de A dans $\hat{B}$ est le complété $\hat{A}$ de A ; $\hat{B}$ est un $\hat{A}$-module de type fini, engendré par B ; et les anneaux B et $\hat{A}$ sont linéairement disjoints sur A .

b) Si aucun élément non nul de A n'est diviseur de zéro dans $\hat{B}$, alors tout élément a de $\hat{A}$ qui est diviseur de zéro dans $\hat{B}$ est déjà diviseur de zéro dans $\hat{A}$.

Les assertions de a) résultent de ce que la topologie canonique de A est induite par celle de B (prop.8), de la prop.1 et de la prop.6 (on utilise encore ici le fait que $\hat{A}$ est noethérien). Dans les hypothèses de b) les anneaux $A,B,\hat{A},\hat{B}$ sont séparés ; il existe un élément non nul c de A et des éléments (b_i) de B linéairement indépendants sur A tels que

$cB \subset \sum_i Ab_i$; alors $c\widehat{B} \subset \sum_i \widehat{A}b_i$; ainsi $ab = 0$ ($b \in \widehat{B}$, non nul) s'écrit $0 = acb = \sum_i ad_ib_i$ $(d_i \in \widehat{A})$, d'où $ad_i=0$ d'après la disjonction linéaire ; or les d_i ne sont pas tous nuls, puisque c n'est pas diviseur de zéro dans $\widehat{B}$ par hypothèse ; ceci démontre b).

(NB : ce n° couvre (fort largement) les n^{os} 2 et 3 du § 3 de l'état 1 ; grâce à la "modulation" effectuée plus haut, le n°1 de ce § (relatif à certaines propriétés d'un anneau entier sur un autre) est devenu inutile, et les deux résultats qui y sont démontrés (et qui sont intéressants) seraient avantageusement transférés au chapitre des Entiers).

---

§ 3 - Propriétés des anneaux complets.

1 - Propriétés de génération finie.

Proposition 1 - Soient A un anneau filtré complet, E un A-module filtré et séparé, (x_i) un système fini d'éléments d'un sous-module F de E tel que leurs formes initiales $(G(x_i))$ engendrent le sous-module G(F) du module gradué G(E) associé à E . Alors les (x_i) engendrent F .

Soit (E_n) la filtration de E . Considérons x F . Comme $\bigcup E_n = E$, il existe un entier n tel qu'une relation de la forme $x \equiv \sum_i a_{ni}x_i$ (mod. E_n) ($a_{ni} \in A$) soit vraie. D'une telle relation nous allons déduire une relation de la forme $x \equiv \sum_i a_{n+1,i}x_i$ (mod. E_{n+1}) ($a_{n+1,i} \in A$) . Si $x - \sum_i a_{ni}x_i \in E_{n+1}$, on prend $a_{n+1,i} = a_{ni}$. Sinon $G(x-\sum_i a_{ni}x_i)$ est un élément de degré n de G(F) qui peut s'écrire $\sum_i G(c_{ni})G(x_i)$, où $c_{ni} \in A$ et où $G(c_{ni})$ est un élément de degré $n-d_o(G(x_i))$ de G(A). On a alors $x - \sum_i a_{ni}x_i \equiv \sum_i c_{ni}x_i$ (E_{n+1}), et l'on peut prendre $a_{n+1,i} = a_{ni} + c_{ni}$. Le choix des c_{ni} montre que (a_{ni}) est une suite de Cauchy pour tout i ; comme A est complet, elle admet au moins une limite $a_i \in A$. Alors, dans l'égalité $x - \sum_i a_i x_i = x - \sum_i a_{ni} x_i + \sum_i (a_{ni} - a_i) x_i$, le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini ; comme E est séparé, ceci implique $x - \sum_i a_i x_i = 0$.

Corollaire 1 - Soient A un anneau filtré par les puissances d'un idéal M et complet, B un anneau contenant A , filtré par les $(MB)^n$, et séparé. Si (b_i) est un système fini d'éléments de B dont les classes mod. MB engendrent le (A/M)-module B/MB , alors on a $B = \sum_i Ab_i$.

En effet (§ 1, n°2, remarque) le $G(A)$-module $G(B)$ est engendré par B/MB , et est donc de type fini.

Corollaire 2 - Soit E un module filtré séparé sur un anneau filtré complet A ; si $G(E)$ est un $G(A)$-module noethérien, E est un A-module noethérien.

Corollaire 3 - Soit A un anneau filtré par les puissances d'un idéal M , séparé et complet. Si A/M est un anneau noethérien et si l'idéal M admet une base finie, A est noethérien.

En effet $G(A)$ est noethérien (§ 1, n°2, exemple 4), et on applique le cor. 2 .

Corollaire 4 - Soit A un anneau noethérien, filtré par les puissances d'un idéal M , et séparé. Son complété $\hat{A}$ est noethérien.

En effet $G(A)$ est noethérien (§ 1, n°2, ex. 4) et $G(\hat{A}) = G(A)$ (§ 2, n°3, cor. 1 de la prop. 2) ; on applique alors le cor. 2 .

Corollaire 5 - Soit A un anneau noethérien ; l'anneau de séries formelles $A[[X_1, \ldots, X_s]]$ est noethérien.

C'est en effet le complété de l'anneau de polynomes $A[X_1, \ldots, X_s]$ qui est noethérien et séparé ; on applique alors le cor. 4 .

2 - Le lemme de Hensel.

Lemme - Soient A un anneau filtré par les puissances d'un idéal M et complet, E, E', F des A-modules de type fini, F étant séparé pour sa topologie canonique, et f une application bilinéaire de $E \times E'$ dans F ; notons $\bar{f}$ l'application de (E/ME) (E'/ME') dans F/MF déduite de f par passage aux quotients. Supposons donnés des éléments $y \in F$, $\alpha \in E/ME$, $\alpha' \in E'/ME'$ tels que

1) La classe $\bar{y}$ de y mod. MF soit $\bar{f}(\alpha, \alpha')$

2) On ait $F/MF = \bar{f}(\alpha, E'/ME') + \bar{f}(E/ME, \alpha')$.

Alors il existe des éléments $a \in E$, $a' \in E'$ admettant α, α' pour classes mod. ME, ME', et tels que $y = f(a,a')$.

Nous allons démontrer par récurrence sur n l'existence d'éléments a_n de E et a'_n de E', de classes α et α', et tels que $y \equiv f(a_n, a'_n)(M^nF)$. Le cas $n=1$ est couvert par l'hypothèse 1). Passons maintenant de n à $n+1$. Comme $y - f(a_n, a'_n) \in M^nF$, on a $y - f(a_n, a'_n) = \sum_j m_j z_j$ où $m_j \in M^n$, $z_j \in F$. D'après l'hypothèse 2) il existe $w_j \in E$, $w'_j \in E'$ tels que $z_j \equiv f(a_n, w'_j) + f(w_j, a'_n)$ (mod. MF). Ainsi $y - f(a_n + \sum_j m_j w_j, a'_n + \sum_j m_j w'_j) =$
$= y - f(a_n, a'_n) - \sum_j m_j z_j + \sum_j m_j (z_j - f(a_n, w'_j) - f(w_j, a'_n)) - \sum_{i,j} m_i m_j f(w_i, w'_j)$
est élément de $M^{n+1}F + M^{2n}F = M^{n+1}F$ puisque $n \geqslant 1$. Il suffit alors de poser $a_{n+1} = a_n + \sum_j m_j w_j$, $a'_{n+1} = a'_n + \sum_j m_j w'_j$. Ce choix montre que les suites $(a_n), (a'_n)$ sont des suites de Cauchy dans E, E' ; comme E et E' sont complets en tant que modules de type fini sur A, ces suites ont des limites a, a'. Il est clair que les classes de a, a' sont α et α'. D'autre part, comme $y - f(a_n, a'_n)$ tend vers zéro, on a $y = f(a,a')$ puisque F est séparé.

C.Q.F.D.

22

Théorème 1 (Hensel) - Soient A un anneau local complet, M son idéal maximal, $f(X) \in A[X]$ un polynome unitaire de degré n sur A . Pour ~~que~~ tout $h(X) \in A[X]$ notons $\bar{h}(X)$ le polynome (dans $(A/M)[X]$) obtenu par réduction mod. M des coefficients de $h(X)$. Supposons qu'il existe des polynomes unitaires et étrangers $\alpha(X)$ et $\alpha'(X)$ de degrés r et n-r dans $(A/M)[X]$ tels que $\bar{f}(X) = \alpha(X)\,\alpha'(X)$. Il existe alors des polynomes unitaires $g(X), g'(X)$ de degrés r,n-r sur A tels que $\bar{g}(X) = \alpha(X)$, $\bar{g}'(X) = \alpha'(X)$, et que $f(X) = g(X)g'(X)$.

Nous utiliserons le lemme, en prenant pour F (resp. E,E') le module des polynomes de degré $\leqslant n$ (resp. r,n-r) sur A , et pour application bilinéaire f la multiplication dans $A[X]$. La condition 1) du lemme est évidemment satisfaite par $f(X)$, $\alpha(X)$, $\alpha'(X)$; la condition 2) également puisque $\alpha(X)$ et $\alpha'(X)$ sont étrangers (Bezout). Il existe donc des polynomes $a(X)$, $a'(X)$ de degrés $\leqslant r, n-r$ tels que $a(X)a'(X) = f(X)$, $\bar{a}(X) = \alpha(X)$, $\bar{a}'(X) = \alpha'(X)$. Il nous reste à les rendre unitaires. Comme $\bar{a}(X)$ est unitaire de degré r , le terme de plus haut degré de $a(X)$ est de la forme $(1+m)X^r$ où $m \in M$; or $1+m$ est inversible dans A et son inverse est de la forme $1+m'$ $(m' \in M)$; il suffit alors de prendre $g(X) = (1+m')a(X)$ et $g'(X) = (1+m)a'(X)$.

Les corollaires et exemples sont à recopier sur l'état 1 (page 17). Ajouter l'exemple où A/M est un corps fini à q éléments et où on le relève (équation $X^q - X = 0$).

3 - Le théorème de décomposition.

Proposition 2 - Soit A un anneau filtré par les puissances d'un idéal M , séparé et complet. Supposons que A/M soit composé direct de deux idéaux V/M et V'/M (c.à.d. que $V+V' = A$ et $V \cap V' = M$). Alors A est composé

<u>direct des idéaux</u> $N = \bigcap V^n$ <u>et</u> $N' = \bigcap V'^n$. <u>On a</u> $N \cap M^n = M^n N$, $N' \cap M^n = N'M^n$. <u>L'anneau</u> N (resp. N') <u>filtré par les</u> $N \cap M^n = M^n N$ (resp. $N' \cap M^n = M^n N'$) <u>est séparé et complet</u>. <u>Et</u> N/MN (resp. N'/MN') <u>est isomorphe à</u> A/V' <u>et</u> V/M (resp. A/V <u>et</u> V'/M).

Soient ε et ε' ($\varepsilon \in V/M$, $\varepsilon' \in V'/M$) les idempotents correspondant à la décomposition de A/M : $\varepsilon+\varepsilon' = 1$, $\varepsilon\varepsilon'=0$. Nous allons utiliser le lemme du n°2 avec $E=E'=F=A$, avec la multiplication dans A pour application bilinéaire f, et avec $y=0$; les conditions 1) et 2) sont satisfaites. Il existe alors a, a' dans A, admettant ε, ε' pour classes mod.M, et tels que $aa'=0$. Comme $a+a' \in 1+M$, et comme A est complet, $a+a'$ est inversible, et son inverse est de la forme $1+m$ ($m \in M$). Alors les éléments $e=(1+m)a$, $e'=(1+m)a'$ satisfont à $e+e'=1$, $ee'=0$, sont des idempotents orthogonaux, et donnent lieu à la décomposition directe $A = Ae + Ae'$. Notons que $e \in V$ et $e' \in V'$. Comme $e \in V$, on a $e = e^n \in V^n$, d'où $Ae \subset N = \bigcap V^n$; de même $Ae' \subset N' = \bigcap V'^n$. De $A = Ae + Ae' = Ae^n + Ae'^n$ on déduit $A = V^n + V'^n$; d'où $V^n \cap V'^n = (V^n \cap V'^n)(V^n + V'^n) = V^n V'^n$; en particulier on a $VV' = M$, et donc $V^n \cap V'^n = M^n$. Par conséquent, comme $\bigcap M^n = (0)$, on a $N \cap N' = (0)$, d'où $Ae=N$ et $Ae'=N'$. L'inclusion $M^n N \subset N \cap M^n$ est évidente ; réciproquement, si un élément xe de N appartient à M^n, on a $xe = xe.e \in M^n N$; d'où $M^n N = N \cap M^n$. Ainsi la topologie canonique de N coïncide avec sa topologie induite ; comme c'est un idéal fermé de A (en tant qu'intersection d'idéaux ouverts et donc fermés), c'est un anneau complet, et évidemment séparé. Enfin, $N/MN = N/M \cap N$ est isomorphe à $M+N/M = M+Ae/M = V/M$ c.à.d. à A/V'. C.Q.F.D.

Corollaires 1 et 2 comme dans l'état 1 (p.14) ; je suis d'avis de vider le corollaire 3 .

4 - Linéaire compacité.

Recopier ici la prop.8 (p.12) de l'état 1, avec ses trois corollaires. Je n'ai rien à dire d'original sur la linéaire compacité des anneaux semi locaux complets, sinon qu'elle vient de ce que ce sont des limites projectives d'anneaux d'Artin.

---

§ 4 - Le Vorbereitungssatz.

La proposition préliminaire 6 (p.24 de l'état 1) est déjà faite (cor.1 de la prop.1, n°1, § 3). A part cà je n'ai rien d'original à dire, et juge inutile de recopier l'état 1 à partir du milieu de la p.24.
