RÉDACTION N° 184

COTE : NBR 087

TITRE : OBSERVATIONS SUR LA RÉDACTION DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

NOMBRE DE PAGES : 12

NOMBRE DE FEUILLES : 12

Dixmier

NBR 087 183[2]

OBSERVATIONS SUR LA RÉDACTION DES ALGEBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

par C. CHEVALLEY

Au moment d'écrire ces observations, je me demande si ce ramassis des méthodes les plus éculées et les plus pisseuses, ces résultats les moins généraux possibles établis de la manière la plus incompréhensible possible, ne sont pas un canular intrabourbachique monté par le rédacteur. Même s'il en est ainsi, je me laisse prendre au canular et présente les observations suivantes.

1. Le théorème d'Engel se voit déduit de celui de Lie, de sorte que le seul, l'unique, théorème de la théorie qui est valable sur tout corps de base sans exception n'est établi que dans le cas d'un corps de base algèbriquement clos de carac. 0. C'est d'autant plus regrettable qu'il n'est nullement évident que l'algèbre déduite par extension du corps de base d'une algèbre de Lie linéaire à éléments nilpotents possède la même propriété, de sorte que l'on n'est pas en mesure de prouver qu'un groupe linéaire nilpotent réel invarie au moins un vecteur. Par ailleurs, on n'a pas non plus le fait que toute représentation simple d'une algèbre de Lie résoluble sur les réels annulle l'algèbre dérivée et est par suite de dimension 1 ou 2 .

2. Il est également inadmissible de ne faire les algèbres de Cartan que sur un corps algèbriquement clos ; les algèbres semi-simples réelles en ont aussi, et elles sont fort importantes (sous-groupes abéliens maximaux des compacts, par exemple). Je signale à ce propos la définition suivante des algèbres de Cartan : ce sont les sous-algèbres nilpotentes qui sont leurs propres normalisateurs. Même si le corps de base est algèbriquement clos, on aurait pu dire qu'une algèbre de Cartan est nilpotente maximale, au lieu de ne dire que plus tard que,

dans le cas des semi-simples, les algèbres de Cartan sont abéliennes maximales.

3. Le rédacteur définit "semi-simple" à la p.12, dans un contexte où il ne s'agit que d'algèbre sur un corps algèbriquement clos ; il utilise ensuite la définition pour des algèbres réelles. Mais sa démonstration du critère de Cartan n'est valable que si le corps est algèbriquement clos. Si on veut procèder ainsi, il faut se livrer à des contorsions d'extensions du corps de base qui n'apparaissent pas dans la rédaction.

4. L'omission de Levi-Malcev, ainsi que de la notion d'algèbre réductive, est-elle intentionnelle ?

5. Le plus invraisemblable canular de la rédaction est la manière dont sont traités le théorème d'unicité (détermination d'une algèbre semi-simple par ses entiers de Cartan) et l'existence de la forme compacte. Le rédacteur se trouvait en présence de deux méthodes possibles : a) utiliser la démonstration de H. Weyl (citée H.W. dans ce qui suit), qui donne les deux choses en même temps ; b) utiliser la démonstration Harisch- Chandra - Chevalley (citée H.C. dans ce qui suit) qui donne les deux choses en même temps en fournissant également des démonstrations d'existence des algèbres et de leurs représentations. Voici ce qu'il a fait. Il a donné (substantiellement 2 fois) la démonstration H.C. pour obtenir l'existence des représentations et l'unicité des algèbres ; ceci fait, il a repris tous les calculs de la démonstration H.W. pour obtenir la forme compacte. Il ne s'est probablement pas aperçu que, si l'on a l'unicité de l'algèbre de Lie par la méthode H.C., il est entièrement trivial qu'il existe un automorphisme d'ordre 2 qui conserve une algèbre de Cartan et change toute racine en son opposée, d'où la forme réelle compacte.

6. Je n'ai pas vérifié la nature de la démonstration "élémentaire" donnée par H. Weyl du fait que les opérations du groupe de Weyl conservent les multiplicités des poids, démonstration qui inquiète le rédacteur. En tous cas je me rappelle la démonstration suivante, également donnée par H. Weyl, et qui ne laisse rien à désirer. Soit α une racine ; à cette racine est associée une sous-algèbre à 3 dimensions qui définit un sous-groupe à 3 dimensions, lequel contient un élément qui opère dans tout espace de représentation et dont l'image dans la représentation adjointe produit la symétrie par rapport à la racine α ; il en résulte immédiatement que cette dernière conserve les multiplicités des poids. Si on veut rendre cela algèbrique, il faut bien entendu se servir des groupes algèbriques.

7. Le rédacteur considère comme un canular le théorème d'existence d'une algèbre de Lie ayant des entiers de Cartan donnés, parce que la classification conduit à des constructions explicites de ces algèbres. Dans ces conditions, on ne comprend pas qu'il prenne au sérieux la question de l'unicité, vu que les dites constructions explicites assurent aussi bien l'unicité que l'existence (cf. thèse Cartan). Par ailleurs, le rédacteur se propose-t-il à rédiger ultérieurement une démonstration du fait que les identités de Jacobi sont satisfaites pour les formules explicites données par Cartan ? Si oui, je lui souhaite de grandes jouissances.

Arrêtant là ces commentaires, je désire informer Bourbaki que mon point de vue a quelque peu change au cours de la rédaction du vol. III de mon livre, où sont traitées les algèbres semi-simples. Il m'a en effet semblé de plus en plus net qu'il était assez scurrile de de développer les algèbres de Lie indépendamment des groupes. Dans mon livre, j'ai fait marcher les groupes algèbriques de front avec leurs algèbres de Lie, avec des compléments quand c'était nécessaire relatifs aux groupes de Lie non algèbriques. Je suis d'avis que l'on ferait bien d'opèrer de même dans Bourbaki, soit que l'on introduise les groupes algèbriques, soit qu'on se limite aux groupes de Lie. Par exemple, il est vrai que, si G est de Lie semi-simple et n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, toute représentation de G est semi-simple ; mais cela ne se déduit pas trivialement du théorème pour les algèbres de Lie (*). Par ailleurs, les groupes de Lie ont non seulement des algèbres de Cartan mais des groupes de Cartan, qu'il faudra bien définir quelque part. Enfin, il est un peu ridicule de détacher les résultats sur les formes réelles de leurs applications topologiques.

(*) Si ! Voir Ex. 3 e) du § 5 des "Anneaux Primitifs", Etat 3, qui est là pour çà. J.P.S.

RÉPONSE AUX OBSERVATIONS PRÉCÉDENTES

par R. GODEMENT.

Les adjectifs "pisseuses" et "éculées" utilisés par Chevalley n'étant pas définis en Mathématiques, ni même en Métamathématique, il serait vain d'engager une discussion à leur sujet.

En ce qui concerne l'asertion suivant laquelle j'aurais démontré les résultats "les moins généraux possibles", je sais - et savais - parfaitement bien que 1° Engel marche sans hypothèse sur le corps de base 2° le théorème suivant lequel deux sous-algèbres de Cartan sont conjuguées est vrai aussi pour des algèbres de Lie non semi-simples ; cette confession publique étant acquise, je prie Chevalley de dire explicitement quels sont, parmi les autres résultats démontrés dans ma rédaction, ceux qui sont valables dans des circonstances plus générales (j'espère qu'il m'accordera que la substitution de "corps complexe" à "corps algèbriquement clos de caractéristique 0" est, non une restriction de la généralité, mais une simple abréviation ...). Je ferai aussi remarquer que, si la démonstration d'Engel est triviale dans le cas général, il n'en est pas de même pour le résultat concernant les sous-algèbres de Cartan (et Chevalley doit être bien placé pour le savoir ...)

Ceci dit, examinons les objections de Chevalley.

1 - Engel. Je suis tout à fait d'accord sur le fait que "ma" démonstration ne marche pas en caractéristique $\neq 0$; je ne tiens d'ailleurs pas du tout à ladite démonstration, et aurais même tendance, au risque de choquer Chevalley, à me foutre d'Engel (donc à adopter avec la plus grande indifférence ses desiderata à cet égard), vu qu'on ne l'utilise vraiment que pour la caractéristique 0, auquel cas le théorème de Lie

fait l'affaire presque aussi bien. Quant à prétendre que ma démonstration ne marche pas sur les réels, c'est être inconsciemment de mauvaise foi, car en la modifiant de façon triviale on la fait fort bien marcher.

A titre documentaire, il peut être utile de rappeler que, dans son rapport, Chevalley n'avait pas fait la moindre allusion au théorème de Lie. Peut-être avait-il l'intention, dans une rédaction ultérieure, de le déduire d'Engel ? Ou peut-être le considère-t-il comme négligeable?

2 - "Il est inadmissible de ne faire les algèbres de Cartan que sur un corps algèbriquement clos". En effet, c'est pourquoi, si Chevalley avait lu ma rédaction il aurait pu constater que contrairement à ce qui se passe dans la sienne les sous-algèbres de Cartan des semi-simples REELS sont définies, nommées, étudiées et utilisées aux pages 66, 67, 71, 77, 80, 81, 82, 84 de ma rédaction.

Il est par ailleurs évident que Chevalley continue à faire preuve d'une mauvaise foi inconsciente en me reprochant de ne pas dire que les sous-algèbres de Cartan sont nilpotentes maximales ; car ce résulte <u>trivialement</u> de la définition que j'en donne, et de plus le théorème d'existence des dites sous-algèbres consiste précisément à les construire comme nilpotentes maximales ...

3 - Critères de Cartan dans le cas non algèbriquement clos. Ma démonstration du 1er critère (Thm 5 p.10) marche trivialement en passant à une clôture algèbrique. Dans la démonstration du 2d critère (Thm.6) la démonstration du fait que (I) implique (II) subsiste sans changement, celle de (II) implique (I) s'obtient trivialement en complexifiant. Il n'y a vraiment pas de "contorsions" à faire, ou alors c'est que Chevalley est bien fatigué !

Pour les algèbres semi-simples réelles, je n'ai du reste jamais eu à utiliser autre chose que le critère "forme de Killing non dégénérée", et l'ai pris comme définition des dites algèbres. Je ne vois donc pas ce que Chevalley me reproche à cet égard.

4 - L'omission de Levi-Malcev, d'Ado, de Birkoff-Witt, de la cohomologie, etc... n'est pas intentionnelle ; elle résulte d'un simple oubli, dont le rédacteur s'excuse humblement.

Espérons que les deux rédactions antérieures et l'infinité potentielle des rédactions ultérieures de ces sujets suffiront à consoler Chevalley.

Pour les algèbres réductives, on s'est borné à une allusion (P.85) que bien entendu Chevalley n'a pas vue ; le rédacteur commencait à en avoir marre.

5 - Théorème d'unicité, forme compacte, etc... Tout d'abord, je n'aime pas des injonctions telles que "le rédacteur se trouvait en présence de deux méthodes possibles" ; avec un pareil style, on verra bientôt dans La Tribu des listes de punition du genre suivant : "Chevalley, z'aurez quat'jours. Motif : avoir démontré Riemann-Roch sans passer à la diagonale".

Cela dit, je reconnais volontiers que la méthode HCC , qui donne à la fois l'existence de l'algèbre, de ses représentations, son unicité, et sa forme compacte, est séduisante ainsi présentée - aussi séduisante qu'un programme électoral. Toutefois, si l'on se préoccupe de rendre les choses compréhensibles, comme Chevalley le dit à peu près au début de ses observations, il n'est pas évident à priori que démontrer quatre théorèmes vaches d'un seul coup soit la meilleure solution (sans parler du fait que la notion de démonstration "compréhensible", étant subjective, n'est pas nécessairement la même pour Chevalley et pour le reste du monde).

A mon avis, le principal inconvénient de la méthode HCC est de reposer sur l'étude d'une algèbre associative canulée, qui ne semble pas avoir d'interprétation <u>topologique</u> simple, et qui n'est jusqu'à nouvel ordre d'aucune utilité pour l'étude des représentations <u>infinies</u> - alors que l'algèbre enveloppante, que j'utilise pour les représentations finies et que Harish-Chandra utilise, à l'exclusion de toute autre, pour les représentations infinies, a été faite exprès pour l'étude des représentations. Il me paraît au contraire intéressant d'insister, comme je l'ai fait, sur le fait assez miraculeux qu'une algèbre <u>beaucoup plus grande</u> que l'algèbre enveloppante conduit néanmoins aux mêmes représentations de dimension <u>finie</u> que celle-ci - quitte à recommencer la démonstration, comme me le reproche Chevalley (d'ailleurs à tort, car la partie pénible du théorème d'existence (§ 9) n'est pas reproduite au § 11 dans la démonstration du théorème d'unicité).

Concernant ma démonstration de l'existence d'une forme compacte (pp. 72 à 76), toute personne de bonne foi pourra constater qu'elle utilise environ le tiers des calculs de H.Weyl, et qu'en particulier la démonstration de $N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$ (qui tient une page et demie dans l'article bien connu de H. Weyl) est ici trivialisée en utilisant l'automorphisme involutif de l'existence duquel Chevalley imagine que je ne me suis "probablement pas aperçu".

Au lieu de se livrer à des conjectures plus ou moins flatteuses sur les connaissances des rédacteurs, Chevalley ferait beaucoup mieux de lire leurs rédactions ; c'est plus fatigant, mais cela lui permettrait au moins d'en parler en connaissance de cause.

Quant à la phrase "d'où la forme réelle compacte" qui termine l'observation 5 de Chevalley, j'aimerais en voir la matérialisation sous forme d'une rédaction complète. J'espère en effet que, pour l'avoir écrite, Chevalley est capable de construire trivialement (i.e. sans faire usage des lemmes 32, 33 et 34 de ma rédaction) la forme compacte en question.

Je précise, à l'intention de Chevalley et pour éviter toute confusion, que le § précédant la démonstration du théorème d'existence des formes compactes n'est pas utilisé dans ladite démonstration ; ce § a pour seuls buts de montrer que la méthode de démonstration conduit effectivement à toutes les formes compactes (ce que, j'espère, Chevalley ne me reprochera pas), et d'étudier les sous-algèbres de Cartan des algèbres compactes (ce que Chevalley me reproche de n'avoir pas fait...)

6 - Pas de commentaires.

7 - Chevalley ne comprend pas que, tout en me désintéressant de la classification, je m'intéresse à l'unicité de l'algèbre ayant des entiers de Cartan donnés. Etant donné que toute la 4ème partie de ma rédaction repose sur l'unicité, et se fout de l'existence, c'est pourtant facile à comprendre ...

Il va de soi, en ce qui concerne l'existence et la classification des algèbres semi-simples, qu'il serait tout à fait nécessaire d'en parler ; mais comme on peut raisonnablement supposer que beaucoup de lecteurs s'intéressent d'abord aux propriétés des algèbres directement données par le Bon Dieu, et sont suffisamment canulés avec celles-ci, il pourrait être raisonnable de réserver la classification pour un Appendice, ainsi que plusieurs membres de Bourbaki l'ont déjà suggéré.

Il me paraît par contre infiniment plus important de donner la classification des formes réelles des groupes simples classiques (unimodulaire, orthogonal et symplectique), et d'expliciter en détail pour ces groupes les résultats - tous les résultats - de la théorie générale. Un tel travail ne saurait d'ailleurs être séparé de théories telles que groupes de Lie, mesure de Haar, espaces homogènes, géomètrie différentielle (et probablement aussi algèbrique) etc... - c'est dire que ce n'est pas ici le lieu ...

En ce qui concerne les théorèmes d'invariance de la $4^{ème}$ partie, je n'en ai démontré qu'une forme affaiblie, à savoir, par exemple, que deux sous-algèbres de Cartan sont conjuguées dans le groupe de tous les automorphismes, alors que c'est encore vrai avec la composante connexe (ou irréductible) de ce groupe. Il existe du résultat complet une démonstration purement algèbrique dûe à Chevalley (Amer. Journal, 1941) - mais elle semble requérir trop de géomètrie algèbrique pour être à sa place ici.

Noter qu'une fois le résultat complet acquis pour les sous-algèbres de Cartan, le résultat analogue pour les sous-algèbres compactes maximale s'ensuit trivialement.

J'avais l'intention de développer beaucoup plus la $5^{ème}$ partie (conséquences de la complète réductibilité) et d'y inclure en particulier certains résultats importants de Harish-Chandra sur les représentations irréductibles infinies. Après avoir rédigé plus de 100 pages, j'ai atteint un degré de saturation suffisamment élevé pour m'ôter toute envie de me lancer dans cette question.

A propos du théorème de complète réductibilité (dont je donne - modulo un canular, d'ailleurs sans importance, et que Chevalley n'a bien entendu pas vu - la démonstration classique de Whitehead) il n'entre pas dans mes intentions de pousser systématiquement le Congrès à adopter ladite démonstration plutôt que celle de Chevalley, Koszul et autres pédérastes. "Ma" démonstration présente l'inconvénient d'utili- les résultats "profonds" sur les sous-algèbres de Cartan - mais aussi l'avantage, pour cette raison même, d'être plus simple. Par contre, une fois la complète réductibilité démontrée comme dans Chevalley, on peut l'utiliser pour simplifier - fort peu, et seulement dans le cas des algèbres semi-simples - la théorie des sous-algèbres de Cartan. Finalement, je n'ai pas d'opinion précise sur la méthode à adopter ; peut-être ne serait-il pas complètement stupide de donner les deux démonstrations ?

Par ailleurs, il me paraît au plus haut point nécessaire de démontrer le théorème des invariants - fût-ce par des méthodes pisseuses et éculées, avec ou sans indices, avec ou sans algèbres graduées associées, l'essentiel étant de ne pas perdre de vue le fait que le théorème en question ne sert pas <u>seulement</u> aux spécialistes de topologie ....
