RÉDACTION N° 182

COTE : NBR 085

TITRE : LIVRE V. E.V.T.
FASCICULE DE RÉSULTATS (ÉTAT 2)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 40

NOMBRE DE FEUILLES : 40

Archives N° ... mai 1953

NBR 085 182 2

LIVRE V.

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

Fascicule de Résultats (Etat 2)

Sommaire.

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

Fascicule de Résultats (Etat 2).

§ 1. Espaces vectoriels topologiques ; définition, voisinages ...

Définitions.

1. Etant donné un corps topologique K, on appelle espace vectoriel topologique à gauche sur K un ensemble E muni d'une structure d'espace vectoriel à gauche sur K et d'une topologie compatible avec la structure de groupe additif de E et satisfaisant en outre à l'axiome suivant :

(EVT) L'application $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de $K \times E$ dans E est continue.

On dit alors que la structure vectorielle et la structure topologique de E sont compatibles.

Si K' est un sous-corps de K, la restriction du corps des scalaires à K' fait de E un espace vectoriel topologique sur K'.

Dans toute la suite, nous supposerons que K est commutatif, valué, complet et non discret. Alors tout espace vectoriel topologique séparé de dimension finie n sur K, est isomorphe à l'espace produit K^n ; tout espace vectoriel topologique localement compact est de dimension finie.

2. Une partie A de E est dite équilibrée si $\lambda A \subset A$ pour tout λ tel que $|\lambda| \leqslant 1$. On appelle enveloppe équilibrée d'une partie quelconque A de E le plus petit ensemble équilibré contenant A : c'est la réunion des λA, $|\lambda| \leqslant 1$; si K est un corps localement compact l'enveloppe équilibrée d'un compact est compacte.

Une partie A de E absorbe une partie B s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda A \supset B$ pour $|\lambda| \geqslant \alpha$. Une partie A est dite absorbante si elle absorbe tout point de E ; elle engendre alors E. Un voisinage de 0 est absorbant.

3. Il existe un système fondamental $\mathfrak{S}$ de voisinages fermés de 0 tel que :

(EV_I) Tout $V \in \mathfrak{S}$ est équilibré et absorbant.

(EV_{II}) $\mathfrak{S}$ est invariant par les homothéties de rapport $\neq 0$.

(EV_{III}) Pour tout $V \in \mathfrak{S}$, il existe $W \in \mathfrak{S}$ tel que $W+W \subset V$.

Réciproquement, toute base de filtre $\mathfrak{S}$ sur un espace vectoriel E, ayant les propriétés (EV_I), (EV_{II}), (EV_{III}) définit sur E, d'une manière unique, une structure d'espace vectoriel topologique ayant $\mathfrak{S}$ comme système fondamental de voisinages de 0.

Pour que E soit <u>séparé</u> il faut et il suffit que l'intersection des ensembles de $\mathfrak{S}$ soit réduite à $\{0\}$.

4. Puisque la topologie de E est compatible avec la structure de groupe de E, elle définit sur E une structure uniforme. Soit $\hat{E}$ le complété de E, supposé séparé ; l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $K \times E$ dans E se prolonge par continuité en une application de $K \times \hat{E}$ dans $\hat{E}$; $\hat{E}$ est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel topologique sur K, et est appelé le <u>complété</u> de E.

5. Pour qu'un espace vectoriel topologique soit <u>métrisable</u>, il faut et il suffit qu'il soit séparé et qu'il possède un système fondamental dénombrable de voisinages de l'origine.

<u>Bornés</u>.

6. Une partie d'un espace vectoriel topologique E est dite <u>bornée</u> si elle est absorbée par tous les voisinages de 0. Toute réunion finie de parties bornées, toute partie d'une partie bornée, tout homothétique d'une partie bornée sont des parties bornées.

On appelle <u>système fondamental</u> $\mathfrak{S}$ de parties bornées tout ensemble de parties bornées tel que toute partie bornée de E soit contenue dans une partie λA, $A \in \mathfrak{S}$. Dans un espace normé, la boule $\|x\| \leqslant 1$ forme un système fondamental de parties bornées.

7. Toute partie précompacte est bornée. Toute suite de Cauchy est bornée. Pour qu'une partie A soit bornée, il faut et il suffit que toute suite (x_n) d'éléments de A soit bornée. Pour qu'une suite (x_n) soit bornée il faut et il suffit que, pour toute suite (λ_n) de scalaires convergeant vers 0, la suite $(\lambda_n x_n)$ converge vers 0.

8. Pour qu'une partie A d'un sous-espace vectoriel E d'un espace F soit bornée dans E il faut et il suffit qu'elle soit bornée dans F. Pour qu'une partie d'un produit direct soit bornée il faut et il suffit que chacune de ses projections soit bornée.

L'image d'une partie bornée par une application linéaire continue, ou d'un produit de parties bornées par une application multilinéaire continue, sont des parties bornées.

9. Soit E un espace localement convexe dont la topologie est définie par une famille Γ de semi-normes. Pour qu'une partie A de E soit bornée il faut et il suffit que toute semi-norme $p \in \Gamma$ soit bornée sur A, et il suffit que toute forme linéaire continue sur E soit bornée sur A (pas trivial !), autrement dit que A soit borné pour la topologie <u>affaiblie</u> de la topologie donnée.

10. Dans un espace localement convexe l'enveloppe convexe fermée équilibrée d'une partie bornée est bornée et il existe un système fondamental de parties bornées formé de parties convexes fermées équilibrées.

11. Soit E un espace localement convexe, limite inductive <u>stricte</u> d'une suite E_n d'espaces localement convexes. Si les E_n sont fermés dans E,

 6

pour qu'une partie A de E soit bornée, il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans l'un des E_n bornée dans E_n .

12. Un espace vectoriel topologique E est dit <u>quasi-complet</u> si toute partie fermée bornée de E est complète ; dans un espace quasi-complet toute suite de Cauchy est convergente. Tout espace complet est quasi-complet, et tout espace métrisable quasi-complet est complet. Tout produit direct d'espaces quasi-complets est quasi-complet.

<u>Espaces localement convexes</u>.

13. Un espace vectoriel topologique E (sur R ou C) est dit <u>localement convexe</u> s'il possède un système fondamental de voisinages de 0 qui soient convexes. Il a alors un système fondamental $\mathfrak{S}$ de voisinages de 0 qui sont convexes, équilibrés, fermés, et absorbants. Si E est métrisable, $\mathfrak{S}$ peut être choisi dénombrable.

Réciproquement, si $\mathfrak{S}$ est une base de filtre sur E , invariante par les homothéties de rapport $\neq 0$, et formée d'ensembles convexes équilibrés et absorbants, il existe une topologie et une seule sur E , compatible avec sa structure vectorielle, et pour laquelle $\mathfrak{S}$ soit un système fondamental de voisinages de 0 ; muni de cette topologie, E est localement convexe.

14. Soit E un espace vectoriel sur R ou C ; on appelle <u>semi-norme</u> sur E toute fonction numérique finie p vérifiant les conditions suivantes :

(SN_I) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$.

(SN_{II}) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Si p est une semi-norme, on a $p(0)=0$ et $p(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$.

Soit Γ un ensemble de semi-normes sur E ; soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble des parties de E définies par une relation de la forme $p(x) \leqslant \lambda$, $p \in \Gamma$,

$\lambda \in R_+^*$, et soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des intersections finies d'ensembles de $\mathcal{C}$. Il existe une topologie sur E et une seule, compatible avec sa structure vectorielle, pour laquelle $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de 0 . On dit que cette topologie est <u>définie par l'ensemble Γ de semi-normes</u>.

Toute topologie définie par un ensemble de semi-normes est localement convexe et réciproquement toute topologie localement convexe peut être définie par un ensemble de semi-normes.

15. Soit E un espace localement convexe dont la topologie est définie par une famille Γ de semi-normes. La structure uniforme de E est définie par les écarts $p(x-y)$, $p \in \Gamma$; les semi-normes $p \in \Gamma$ se prolongent par continuité au complété $\hat{E}$ de E et définissent la topologie de $\hat{E}$. Pour que E soit séparé il faut et il suffit que la relation "$p(x)=0$ quel que soit $p \in \Gamma$ " entraîne $x=0$.

Pour qu'un espace localement convexe E soit métrisable il faut et il suffit que l'on puisse définir sa topologie par une famille dénombrable de semi-normes. Une topologie d'espace <u>normé</u> est définie par un ensemble réduit à une seule semi-norme, à savoir la norme donnée.

§ 2. Applications linéaires et multilinéaires.

Applications linéaires continues.

1. Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques, u une application linéaire de E dans F. Pour que u soit continue, il faut et il suffit que u soit continue au point 0.

2. Si les topologies de E et de F sont définies par des familles Γ et Γ' de semi-normes il faut et il suffit que, pour tout $p' \in \Gamma'$ il existe $a \geqslant 0$ et $p \in \Gamma$ tels que $p'(u(x)) \leqslant a.p(x)$ pour tout $x \in E$.

3. En particulier si E et F sont normés il faut et il suffit qu'il existe $a \geqslant 0$ tel que $\| u(x) \| \leqslant a \| x \|$. La borne inférieure des nombres a vérifiant l'inégalité précédente est appelée la norme de u, et notée $\| u \|$; elle définit sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F une structure d'espace vectoriel normé.

4. Si u est une forme linéaire sur un espace vectoriel topologique E, pour que u soit continue il faut et il suffit que $u^{-1}(0)$ soit fermé dans E. Si E est localement convexe, il faut et il suffit qu'il existe une semi-norme p continue sur E telle que

$$|u(x)| \leqslant p(x) \quad .$$

5. Soient E, E', F trois espaces vectoriels topologiques, E étant un sous-espace partout dense de E' et F étant séparé. Toute application linéaire continue de E dans F peut être prolongée par continuité à E' lorsque l'une des deux conditions suivantes est remplie :

a) F est complet.

b) F est quasi-complet et tout point de E' est adhérent à une partie bornée de E.

6. Soient E un espace vectoriel sur R ou C , p une semi-norme sur E , V un sous-espace vectoriel de E , u une forme linéaire sur V telle que $|u(x)| \leqslant p(x)$ pour tout $x \in V$. Il existe alors une forme linéaire $\overline{u}$ sur E , prolongeant u , et telle que $|\overline{u}(x)| \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$ (<u>Théorème de Hahn-Banach</u>).

En particulier toute forme linéaire continue sur un sous-espace d'un espace localement convexe peut être <u>prolongée</u> en une forme linéaire continue sur l'espace entier. Si l'espace est normé, on peut choisir ce prolongement de telle sorte qu'il ait <u>même norme</u> que la forme linéaire donnée.

<u>Homomorphismes</u>.

7. Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques, u une application linéaire de E dans F . On dit que u est un <u>homomorphisme</u> si l'application de $E/u^{-1}(0)$ sur $u(E)$ qu'elle définit est un isomorphisme (pour les structures topologiques) ; pour cela il faut et il suffit que u soit continue et que l'image par u de tout ouvert de E soit un ouvert de F . Si F est de dimension finie, ou bien si E et $u(E)$ sont métrisables et complets, <u>il suffit que</u> u <u>soit continue</u>.

En particulier, toute application linéaire continue, biunivoque, d'un espace métrisable et complet E <u>sur</u> un espace métrisable et complet F est un <u>isomorphisme</u>.

8. Soient E et F deux espaces métrisables et complets, u une application linéaire de E dans F . Si le <u>graphe</u> de u est fermé (c'est-à-dire si o les relations $\lim . x_n = 0$, $\lim . u(x_n) = y$ entraînent $y=0$), alors u est <u>continue</u> (<u>théorème du grafferm</u>é).

<u>Remarque</u>. Les n^{os} <u>7,8</u> valent sous des hypothèses plus larges (prière à Schwartz d'en communiquer une liste aussi complète que possible !).

Applications bilinéaires.

9. Soient E_1, E_2, F trois espaces vectoriels topologiques, u une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F. Pour que u soit continue il faut et il suffit que u soit continue au point $(0,0)$.

10. Pour $x \in E_1$ notons $u_{x.}$ l'application linéaire $y \to u(x,y)$ de E_2 dans F ; définition analogue pour $u_{.y}$, avec $y \in E_2$.

On dit que u est séparément continue si $u_{x.}$ et $u_{.y}$ sont continues quels que soient $x \in E_1$, $y \in E_2$. Pour cela, il faut et il suffit que $u_{.y}$ soit continu pour tout $y \in E_2$ et que l'application $y \to u_{.y}$ soit continue lorsque on munit $\mathcal{L}(E_1,F)$ de la topologie de la convergence simple.

Toute application bilinéaire continue est séparément continue.

11. Soient u une application bilinéaire séparément continue de $E_1 \times E_2$ dans F, $\mathfrak{S}_1$ un recouvrement de E_1 par des parties bornées et équilibrées. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout voisinage W de 0 dans F et tout $M_1 \in \mathfrak{S}_1$ il existe un voisinage V_2 de 0 dans E_2 tel que $u(M_1 \times V_2) \subset W$.

b) Pour tout $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, l'image de M_1 par $x \to u_{x.}$ est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E_2,F)$.

c) L'application $y \to u_{.y}$ est une application continue de E_2 dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_1}(E_1,F)$.

Une application bilinéaire séparément continue u vérifiant les propriétés précédentes est dite $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue. Une application bilinéaire continue est $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue quel que soit $\mathfrak{S}_1$.

12. Si E_2 est un espace tonnelé toute application bilinéaire séparément continue de $E_1 \times E_2$ dans F est $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue quel que soit $\mathfrak{S}_1$. Si en outre E_1 et E_2 sont métrisables, une telle application est continue.

13. Si u est $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue, $u(M_1 \times B_2)$ est borné dans F si $M_1 \in \mathfrak{S}_1$ et si B_2 est bornée dans E_2.

14. En échangeant dans ce qui précède les rôles de E_1 et E_2, on définit la notion de $\mathfrak{S}_2$-hypocontinuité, $\mathfrak{S}_2$ étant un recouvrement de E_2 par des parties bornées et équilibrées. Une application bilinéaire u qui est à la fois $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue et $\mathfrak{S}_2$-hypocontinue est dite $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-<u>hypocontinue</u>. Une telle application est uniformément continue sur tout produit $M_1 \times M_2$ où $M_1 \in \mathfrak{S}_1$ et $M_2 \in \mathfrak{S}_2$.

15. Supposons que E_1 et E_2 soient des sous-espaces partout denses d'espaces vectoriels topologiques $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$; soient $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ deux recouvrements de E_1 et E_2 par des parties bornées et équilibrées, tels que tout point de $\overline{E}_1$ et de $\overline{E}_2$ soit adhérent à un ensemble de $\mathfrak{S}_1$ et de $\mathfrak{S}_2$. Soient $\overline{\mathfrak{S}}_1$ et $\overline{\mathfrak{S}}_2$ l'ensemble des adhérences dans $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ des éléments de $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. Alors, si F est <u>séparé</u> et <u>quasi-complet</u>, toute application bilinéaire $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue de $E_1 \times E_2$ dans F se prolonge d'une seule manière en une application bilinéaire séparément continue de $\overline{E}_1 \times \overline{E}_2$ dans F et cette application est $(\overline{\mathfrak{S}}_1, \overline{\mathfrak{S}}_2)$-hypocontinue.

16. Le lecteur s'exercera tout seul sur les ensembles

$$(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n)\text{-équihypocontinus}$$

d'applications multilinéaires de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F.

17. Soient R,S,T trois espaces localement convexes. L'application $(A,B) \to B\circ A$ de $\mathcal{L}(R,S) \times \mathcal{L}(S,T)$ dans $\mathcal{L}(R,T)$ est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue lorsque :

a) $\mathfrak{S}_1$ est l'ensemble des enveloppes équilibrées de parties finies (resp. l'ensemble des parties compactes et équilibrées, resp. bornées et équilibrées) de $\mathcal{L}(R,S)$.

b) $\mathfrak{S}_2$ est l'ensemble des parties équicontinues et équilibrées de $\mathcal{L}(S,T)$.

c) Les espaces $\mathcal{L}(R,S)$, $\mathcal{L}(S,T)$, $\mathcal{L}(R,T)$ sont munis de la topologie de la convergence simple (resp. compacte, resp. bornée).

En particulier, cette application bilinéaire est <u>continue</u> sur tout produit $\mathcal{L}(R,S) \times H$ où H est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(S,T)$.

18. Si S est <u>tonnelé</u>, si la suite A_n converge dans $\mathcal{L}(R,S)$ vers A et si la suite B_n converge dans $\mathcal{L}(S,T)$ vers B, la suite $B_n \circ A_n$ converge dans $\mathcal{L}(R,T)$ vers $B \circ A$, les trois espaces $\mathcal{L}(R,S)$, $\mathcal{L}(S,T)$, $\mathcal{L}(R,T)$ étant munis de la topologie de la convergence simple (ou de la topologie de la convergence compacte, ou de la topologie de la convergence bornée).

§ 3. Sous-espaces, espaces quotients, espaces produits, etc..

Sous-espaces.

1. Soient E un espace vectoriel topologique, M un sous-espace vectoriel de E ; la topologie induite par E sur M fait de M un espace vectoriel topologique, dit sous-espace vectoriel topologique de E . Si E est séparé, métrisable, localement convexe, M est séparé, métrisable, localement convexe. Si la topologie de E est définie par une famille de semi-normes, celle de M est définie par les restrictions de ces semi-normes à M .

2. L'adhérence de M dans E est un sous-espace vectoriel de E ; si M est de dimension finie, et si E est séparé, M est fermé dans E . Tout hyperplan est soit fermé, soit partout dense. Pour qu'il soit fermé il faut et il suffit qu'il soit le noyau d'une forme linéaire continue.

Si A est une partie de E , on appelle sous-espace vectoriel fermé engendré par A l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par A ; c'est le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant A . Si E est localement convexe, c'est aussi l'intersection des hyperplans fermés de E contenant A ou encore l'ensemble des zéros communs à toutes les formes linéaires continues sur E qui s'annulent sur A .

Une partie A est dite totale si le sous-espace vectoriel fermé qu'elle engendre est A tout entier ; pour cela il faut et il suffit, si E est localement convexe, que toute forme linéaire continue nulle sur A soit identiquement nulle.

3. Une famille $\{x_i\}$, $i \in I$, de points de E est dite topologiquement libre si, pour tout $j \in I$, le sous-espace vectoriel fermé engendré par les x_i , $i \neq j$, ne contient pas x_j . Une famille topologiquement libre

est algèbriquement libre ; une famille <u>finie</u> algèbriquement libre est topologiquement libre si E est séparé. Si E est localement convexe, pour qu'une famille $\{x_i\}$ soit topologiquement libre, il faut et il suffit qu'il existe une famille $\{f_i\}$ de formes linéaires continues sur E telle que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. Dans un espace préhilbertien toute famille orthonormale est topologiquement libre.

<u>Espaces quotients</u>.

4. Soient E un espace vectoriel topologique, M un sous-espace vectoriel de E . La topologie quotient fait de E/M un espace vectoriel topologique, dit <u>espace vectoriel topologique quotient de</u> E <u>par</u> M . Pour que E/M soit séparé il faut et il suffit que M soit fermé dans E . Si E est localement convexe, E/M est localement convexe ; si la topologie de E est définie par une famille Γ de semi-normes, celle de E/M est définie par les semi-normes $\dot{p}(\dot{x}) = \inf_{z \in \dot{x}} . p(z)$, $p \in \Gamma$. Si E est métrisable et complet et M fermé, E/M est métrisable et complet.

<u>Espaces produits</u>.

5. Soit E_i, $i \in I$, une famille d'espaces vectoriels topologiques sur K. La topologie produit fait de $\prod_{i \in I} E_i$ un espace vectoriel topologique dit <u>espace produit</u> des E_i . Pour que $\prod_{i \in I} E_i$ soit séparé (resp. quasi-complet, resp. complet) il faut et il suffit que chaque E_i le soit. Un produit d'espaces localement convexes est localement convexe.

Si la topologie de chaque E_i est définie par une famille Γ_i de semi-normes, celle du produit $\prod_{i \in I} E_i$ est définie par les semi-normes $p_i \circ f_i$, $p_i \in \Gamma_i$, où f_i désigne la projection canonique de $\prod_{i \in I} E_i$ sur E_i .

6. Tout produit <u>dénombrable</u> d'espaces métrisables est métrisable. Tout espace localement convexe est isomorphe à un sous-espace d'un produit d'espaces de Banach (en abrégé : sous-produit).

<u>Sommes directes finies.</u>

7. Soit E un espace vectoriel topologique, somme directe (au point de vue algèbrique) d'une famille finie M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de sous-espaces vectoriels. Si l'application $(x_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i$ de $\prod_i M_i$ sur E est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques, on dit que E est <u>somme directe topologique</u> des M_i. Les M_i sont alors <u>fermés</u> dans E ; réciproquement si les M_i sont fermés E est somme directe topologique des M_i pourvu que l'une des deux conditions suivantes soit remplie :

a) Tous les M_i sauf un au plus sont de dimension finie.

b) E est métrisable et complet.

8. Soit k_i l'application qui à tout $x \in E$ fait correspondre son composant dans M_i. Les applications linéaires k_i vérifient les relations :

$$k_i \circ k_j = \delta_{ij} k_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 1 .$$

Pour que E soit somme directe topologique des M_i, il faut et il suffit que les k_i soient continus. Inversement, si k_i est une famille d'applications linéaires de E dans lui-même, continues, et vérifiant les relations précédentes, E est somme directe des $M_i = k_i(E)$.

9. Si E est somme directe topologique de deux sous-espaces vectoriels M et N, on dit que N est un <u>supplémentaire topologique</u> de M. Inversement soit M un sous-espace vectoriel fermé de E supposé séparé ; M possède un supplémentaire topologique dans chacun des trois cas suivants :

a) E est un espace de Hilbert.

b) M est de codimension finie (dans ce cas tout supplémentaire algèbrique est un supplémentaire topologique).

c) E est localement convexe et M de dimension finie.

10. Une application linéaire continue u de E dans E telle que $u^2=u$ est appelée un projecteur. Pour qu'un sous-espace vectoriel M de E admette un supplémentaire topologique il faut et il suffit qu'il existe un projecteur u tel que $u(E) = M$; on peut alors prendre comme supplémentaire topologique $u^{-1}(0) = (1-u)(E)$.

11. Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques, f une application linéaire continue de E dans F . Pour que f soit inversible à droite (c'est-à-dire pour qu'il existe une application linéaire continue g de F dans E vérifiant $f\circ g = 1$) il faut et il suffit que f soit un homomorphisme de E sur F et que $f^{-1}(0)$ ait un supplémentaire topologique dans E . Pour que f soit inversible à gauche (c'est-à-dire pour qu'il existe g avec $g\circ f = 1$) il faut et il suffit que f soit un isomorphisme de E sur u(E) et que u(E) ait un supplémentaire topologique dans F .

Divers modes de définition de topologies.

12. Soient f_i, $i\in I$, une famille d'applications linéaires d'un espace vectoriel E dans des espaces vectoriels topologiques E_i, $i\in I$. La moins fine des topologies sur E qui rendent continues les f_i est compatible avec la structure vectorielle de E . Si les E_i sont localement convexes et ont leur topologie définies par des familles Γ_i de semi-normes, la topologie de E est localement convexe et est définie par les semi-normes $p_i\circ f_i$, $p_i\in\Gamma_i$.

13. Soient g_i, $i\in I$, une famille d'applications linéaires des espaces vectoriels topologiques E_i, $i\in I$, dans un espace vectoriel E (le corps K étant soit R , soit C). Parmi toutes les topologies localement convexes sur E rendant continues les g_i , il y en a une plus fine que toutes les autres. Pour qu'une application linéaire h de E , muni de

cette topologie, dans un espace localement convexe, soit continue, il faut et il suffit que les $h \circ g_i$ soient continues pour tout $i \in I$.

14. Soient E un espace vectoriel sur R ou C, E_i $(i \in I)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, filtrante pour la relation $\subset$, chaque E_i étant muni d'une topologie localement convexe $\mathcal{T}_i$ de telle sorte que, si $E_i \subset E_j$, $\mathcal{T}_i$ soit plus fine que la topologie induite par $\mathcal{T}_j$ sur E_i. La plus fine des topologies localement convexes de E qui induisent sur chaque E_i une topologie moins fine que $\mathcal{T}_i$ est appelée la <u>limite inductive</u> des $\mathcal{T}_i$. C'est la plus fine des topologies localement convexes rendant continues les applications canoniques g_i des E_i dans E. Pour qu'une application linéaire h de E dans un espace localement convexe soit continue il faut et il suffit que les restrictions de h aux E_i soient continues. [Dans cette topologie un système fondamental de voisinages de 0 est formé par les ensembles <u>convexes</u> qui coupent chaque E_i suivant un voisinage de 0 dans $\mathcal{T}_i$.

15. Soit (E_n) une suite croissante de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E (sur R ou C), avec $\bigcup E_n = E$. Sur chaque E_n, soit $\mathcal{T}_n$ une topologie localement convexe telle que, pour tout n, $\mathcal{T}_n$ soit la topologie induite par $\mathcal{T}_{n+1}$ sur E_n. La limite inductive des $\mathcal{T}_n$ induit alors $\mathcal{T}_n$ sur chaque E_n. On dit que E est limite inductive <u>stricte</u> des (E_n).

16. Soit E un espace vectoriel somme directe d'une famille M_i de sous-espaces. Supposons chaque M_i muni d'une topologie d'espace localement convexe. Pour toute partie finie H de I munissons l'espace $M_H = \sum_{i \in H} M_i$ de la topologie produit des topologies des M_i, $i \in H$. Soit $\mathcal{T}$ la topologie sur E, limite inductive des topologies des M_H, lorsque H parcourt

l'ensemble des parties finies de I. L'espace E , muni de la topologie $\mathcal{C}$ est appelé <u>somme directe topologique</u> des M_i . (Ne pourrait-on vider ce bel exercice ? Même question pour les n^{os} 12, 13).

<u>Somme hilbertienne d'espaces hilbertiens</u>.

17. Soit (E_i) une famille d'espaces hilbertiens, et E le sous-espace de l'espace produit $\prod_{i\in I} E_i$ formé des points $x = (x_i)$ tels que $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < +\infty$. Si $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ sont deux points de E , la famille des produits scalaires $(x_i|y_i)$ est sommable ; si l'on pose alors $(x|y) = \sum_{i\in I} (x_i|y_i)$, $(x|y)$ est une forme sesquilinéaire hermitienne qui fait de E un espace hilbertien, appelé <u>somme hilbertienne externe des</u> E_i ; on écrit $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$. Si I est <u>fini</u>, E est aussi somme directe topologique des E_i .

18. Soit E un espace hilbertien, E_i , $i\in I$, une famille de sous-espaces vectoriels fermés de E . Supposons que E_i et E_j soient orthogonaux pour $i\neq j$. Alors le sous-espace vectoriel fermé engendré par les E_i est isomorphe à la somme hilbertienne externe des E_i . En particulier, si ce sous-espace est E , on dit que E est <u>somme hilbertienne</u> des E_i .

§ 4. Convexité.

Dans ce § et les suivants, le corps des scalaires est soit R soit C. Toutes les notions concernant la convexité sont relatives à la structure vectorielle sur R .

Variétés linéaires.

1. Rappelons que dans un espace vectoriel une variété linéaire est la transformée d'un sous-espace vectoriel par une translation. Si le sous-espace est de dimension 1 (resp. de codimension 1) la variété linéaire est appelée droite (resp. hyperplan) .

Ensembles convexes.

2. Une partie A d'un espace vectoriel E est dite convexe si, quels que soient $x, y \in A$, le segment d'extrémité x et y est contenu dans A ; autrement dit, si $\lambda A + (1-\lambda)A \subset A$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Un ensemble convexe A contient tout barycentre de points de A affectés de masses positives.

3. L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble convexe par une application linéaire affine sont convexes ; un produit, une intersection d'ensembles convexes sont convexes ; si A et B sont convexes et si α et β sont des scalaires, $\alpha A + \beta B$ est convexe ; une variété linéaire est convexe ; un parallélotope de R^n est convexe ; si p est une semi-norme, l'ensemble des x tels que $p(x) \leqslant r$ (resp. $p(x) < r$) est convexe.

4. Dans un espace vectoriel topologique l'adhérence d'un ensemble convexe est convexe ; l'intérieur $\mathring{A}$ d'un ensemble convexe A est convexe ; si $\mathring{A} \neq \emptyset$, on a $\mathring{A} = \mathring{\overline{A}}$ et $\overline{A} = \overline{\mathring{A}}$.

Un ensemble convexe fermé d'intérieur non vide est appelé un corps convexe.

5. On appelle enveloppe convexe d'une partie A de E le plus petit ensemble convexe contenant A ; c'est l'ensemble des barycentres de points de A affectés de coefficients tous positifs.

6. Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle <u>enveloppe convexe fermée</u> de A l'adhérence de l'enveloppe convexe de A ; c'est le plus petit ensemble convexe fermé contenant A . Si E est localement convexe c'est l'intersection des demi-espaces fermés qui contiennent A .

7. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux topologies localement convexes sur E ; si les formes linéaires continues sont les mêmes pour ces deux topologies, les ensembles convexes fermés sont aussi les mêmes.

Ceci s'applique en particulier lorsque $\mathcal{C}'$ est la topologie <u>affaiblie</u> associée à la topologie $\mathcal{C}$.

<u>Séparation des ensembles convexes</u>.

8. Soient E un espace vectoriel topologique, A un ensemble convexe, V une variété linéaire ne rencontrant pas A ; il existe alors un hyperplan fermé H contenant V et ne rencontrant pas A , pourvu que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite (et moi donc !) :

a) A est ouvert.

b) A est compact, V est fermée, E est localement convexe.

9. Deux parties A et B d'un espace vectoriel topologique E sont dites <u>séparées</u> (resp. <u>strictement séparées</u>) par un hyperplan fermé H si A est contenue dans l'un des demi-espaces fermés (resp. ouverts) déterminés par H , et B dans l'autre. (La Bible ajoute A , B $\neq \emptyset$ - on s'en fout !).

10. Soient A et B deux parties convexes non vides de l'espace vectoriel topologique E , A étant ouverte, et $A \cap B = \emptyset$. Il existe un hyperplan fermé H qui sépare A et B .

11. Soient A et B deux parties convexes et fermées de l'espace localement convexe E , A étant compacte, et $A \cap B = \emptyset$. Il existe un hyperplan fermé H qui sépare strictement A et B .

12. Dans un espace vectoriel E on appelle <u>hyperplan d'appui</u> d'une partie A de E tout hyperplan H tel que $H \cap A \neq \emptyset$ et que A soit tout entier d'un même côté de H .

Dans un espace vectoriel topologique (resp. localement convexe), tout corps convexe A (resp. tout ensemble convexe compact A non vide) est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent et qui sont déterminés par les hyperplans d'appui de A .

13. Dans un espace localement convexe, tout ensemble convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent ; toute variété linéaire fermée est l'intersection des hyperplans fermés qui la contiennent.

<u>Ensembles convexes compacts</u>.

14. Dans un espace vectoriel topologique séparé E , l'enveloppe convexe de la réunion d'un nombre fini de compacts convexes est compacte. Si E est localement convexe séparé, l'enveloppe convexe d'une partie précompacte est précompacte ; si en outre E est quasi-complet l'enveloppe convexe fermée d'une partie précompacte est compacte.

15. Si A est un compact convexe d'un espace vectoriel topologique séparé E et H un hyperplan fermé de E , il existe un ou deux hyperplans d'appui de A parallèles à H suivant que A est ou n'est pas contenu dans un hyperplan parallèle à H . (A balancer !).

16. Un point x d'un ensemble convexe A est dit <u>point extrémal</u> de A s'il n'existe aucun segment ouvert contenu dans A et contenant x .

17. Soit A un ensemble convexe compact d'un espace localement convexe séparé. Tout d'hyperplan d'appui de A contient un point extrémal de A ; A est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble F de ses points extrémaux (<u>Théorème de Krein-Milman</u>) et réciproquement toute partie compacte de A dont l'enveloppe convexe fermée est A contient F .

Projection dans un espace préhilbertien.

18. Soient E un espace préhilbertien, A une partie convexe séparée complète et non vide de E , x un point de E . Il existe un point $y \in A$ et un seul, appelé projection de x sur A , dont la distance à x est égale à la distance de x à A . Ce point est aussi caractérisé par l'inégalité :

$$\mathcal{R}(x-y|z-y) \leqslant 0 \qquad \text{quel que soit } z \in A .$$

Lorsque A est fixe, la projection de x sur A est une fonction continue de x .

19. Soit Φ un ensemble filtrant pour la relation $\supset$ (resp. $\subset$) de parties convexes séparées complètes et non vides de l'espace préhilbertien E, et soit M l'intersection des ensembles $A \in \Phi$, supposée non vide (resp. l'enveloppe convexe fermée des ensembles $A \in \Phi$, supposée séparée et complète). Si x est un point de E , la projection de x sur $A \in \Phi$ tend vers la projection de x sur M , suivant le filtre des sections de Φ .

Fonctions convexes.

20. Une fonction numérique f , définie dans une partie convexe A d'un espace vectoriel E , est dite convexe (resp. strictement convexe) si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

a) Pour toute droite D de E , la restriction de f au segment $D \cap A$ est une fonction convexe (resp. strictement convexe) d'une variable réelle.

b) Pour $x,y \in A$, $0 < \lambda < 1$, on a $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$, (resp. $f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$).

c) Quels que soient $x,y \in A$, tout point du segment ouvert $M_x M_y$ (M_t désignant le point $(t,f(t))$ de $E \times R$) est au-dessus (resp. strictement au-dessus) du graphe de f .

Si f est convexe (resp. strictement convexe) et si g est le centre de gravité de points $x_i \in A$ affectés de masses $\lambda_i > 0$, le point M_g est au-dessous (resp. strictement au-dessous) du centre de gravité des M_{x_i}, affectés des mêmes masses λ_i.

21. Une semi-norme est une fonction convexe.

22. Soit f une fonction convexe définie dans une partie ouverte convexe A d'un espace vectoriel topologique. Si f est majorée dans une partie ouverte non vide de A, f est <u>continue</u> dans tout A.

<u>Cônes</u>.

23. Une partie C d'un espace vectoriel E est appelée <u>cône de sommet l'origine</u> si elle est stable par les homothéties de rapport >0.
Si x est un point de E, x+C est appelé cône de sommet x.
Un cône de sommet 0 est dit <u>pointé</u> si $0 \in C$, <u>épointé</u> si $0 \notin C$, <u>saillant</u> s'il ne contient aucune droite passant par 0.

24. Pour qu'une partie C de E soit un <u>cône convexe</u> il faut et il suffit que $C+C \subset C$ et $\lambda C \subset C$ pour tout $\lambda > 0$; le sous-espace vectoriel engendré par C est alors $C-C$; le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans C est $C \cap (-C)$.

Une intersection de cônes convexes, un produit direct de cônes convexes, l'image directe et l'image réciproque d'un cône convexe par une application linéaire, sont des cônes convexes.

25. Soit P un cône convexe pointé saillant de sommet 0 dans un espace vectoriel E. La relation $y-x \in P$ est une relation d'ordre dans E ; si on la note $x \leqslant y$, elle vérifie les propriétés :

(EO_I) $x \leqslant y$ entraîne $x+z \leqslant y+z$ pour tout $z \in E$.

(EO_{II}) $x \geqslant 0$ entraîne $\lambda x \geqslant 0$ pour tout scalaire $\lambda \geqslant 0$.

Réciproquement, si E est muni d'une structure d'ordre vérifiant (EO_I) et (EO_{II}), l'ensemble P des éléments $\geqslant 0$ de E est un cône convexe pointé saillant de sommet 0 ; E , muni de sa structure vectorielle et de sa structure d'ordre, est alors appelé <u>espace vectoriel ordonné</u>.

26. Soit P un cône convexe de sommet 0 ; une demi-droite D , d'origine 0, contenue dans D et dite <u>génératrice extrémale</u> de P si tout segment ouvert contenu dans P et rencontrant D est contenu dans D ; pour cela il faut et il suffit que les relations $x+y \in D$, $x \in P$, $y \in P$ entraînent $x \in D$ et $y \in D$.

27. Dans un espace vectoriel topologique l'intérieur et l'adhérence d'un cône convexe de sommet 0 sont des cônes convexes de sommet 0 .

28. Soient E un espace localement convexe séparé, P un cône convexe **pointé saillant dans E , d'intérieur non vide. Toute forme linéaire sur E , positive sur P , est continue. Si M est un sous-espace vectoriel de E rencontrant l'intérieur de P , et si f est une forme linéaire sur M , positive sur $P \cap M$, il existe une forme linéaire F sur E ,** positive sur P , et prolongeant f .

§ 5. Espaces d'applications linéaires continues.

Dans ce § , E et F désignent deux espaces vectoriels topologiques localement convexes (sur R ou C) et $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F .

Si F est le corps des scalaires, $\mathcal{L}(E,F)$ est appelé dual topologique (ou simplement dual) de E , et est noté E'.

Les $\mathfrak{S}$-topologies dans $\mathcal{L}(E,F)$.

1. Soient X un ensemble, F un espace vectoriel topologique, $\mathfrak{S}$ une famille de parties de X. Sur l'espace F^X des applications de X dans F on appelle $\mathfrak{S}$-topologie la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$. Si L est un sous-espace vectoriel de F^X , pour que la $\mathfrak{S}$-topologie soit compatible avec la structure vectorielle de L , il faut et il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout $u \in L$, u(A) soit borné dans F .

En particulier, si X = E , espace vectoriel topologique localement convexe, la $\mathfrak{S}$-topologie est compatible avec la structure vectorielle de $\mathcal{L}(E,F)$ si $\mathfrak{S}$ est une famille de parties bornées de E . Muni de cette topologie $\mathcal{L}(E,F)$ sera noté $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. C'est un espace localement convexe.

2. Soit Γ un ensemble de semi-normes définissant la topologie de F et posons $p_M(u) = \sup_{x \in M} p(u(x))$ pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $M \in \Gamma$. Les fonctions p_M forment une famille de semi-normes définissant la topologie de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. En particulier, si E et F sont normés, la norme $\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$ définit sur $\mathcal{L}(E,F)$ la topologie de la convergence bornée.

3. Si la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$ est totale dans E , et si F est séparé, $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est séparé (réciproque vraie si E est séparé et $F \neq 0$, mais ce n'est qu'une curiosité).

4. Les $\mathfrak{S}$-topologies les plus importantes sont les suivantes :

a) $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties finies de E ; la $\mathfrak{S}$-topologie est dite topologie de la convergence simple (topologie faible dans le cas du dual E').

b) $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties compactes de E ; la $\mathfrak{S}$-topologie est dite topologie de la convergence compacte.

c) $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de E ; la $\mathfrak{S}$-topologie est dite topologie de la convergence bornée (topologie forte dans le cas du dual E').

Chacune de ces topologies est moins fine que la suivante.

5. La $\mathfrak{S}$-topologie ne change pas lorsque l'on sature $\mathfrak{S}$ par rapport aux homothéties, à la réunion finie, et à l'opération "enveloppe convexe équilibrée fermée".

6. Supposons E et F séparés et F complet ; soit $\hat{E}$ le complété de E, $\hat{\mathfrak{S}}$ l'ensemble des adhérences dans $\hat{E}$ des ensembles de $\mathfrak{S}$. En associant à tout élément de $\mathcal{L}(E,F)$ son prolongement par continuité à $\hat{E}$ on obtient un isomorphisme de l'espace vectoriel topologique $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ sur l'espace vectoriel topologique $\mathcal{L}_{\hat{\mathfrak{S}}}(\hat{E},F)$. (Faut-il énoncer la propriété analogue des quasi-complets ?).

7. Si la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$ est totale dans E, si E est tonnelé et si F est quasi-complet, alors $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est quasi-complet.

Parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$.

8. Pour qu'une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ soit bornée pour la $\mathfrak{S}$-topologie il faut et il suffit que, pour tout $M \in \mathfrak{S}$, l'ensemble des u(x) ($x \in M$, $u \in H$) soit borné dans F.

9. Si E et F sont séparés et si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties convexes bornées équilibrées et complètes de E, toute partie de $\mathcal{L}(E,F)$ bornée

pour la topologie de la convergence simple est bornée pour la $\mathfrak{S}$-topologie

10. Si E est quasi-complet, ou tonnelé, les parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$ sont les mêmes pour toutes les $\mathfrak{S}$-topologies, pourvu que la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$ soit totale dans E.

Parties équicontinues de $\mathcal{L}(E,F)$.

11. Soit H une partie de $\mathcal{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) H est équicontinu au point 0 de E.

b) H est équicontinu ~~en~~ tout point de E.

c) H est uniformément équicontinu sur E.

d) Pour tout voisinage V de 0 dans F il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $u(x) \in V$ pour $x \in U$ et $u \in H$.

Un ensemble H vérifiant ces conditions est dit équicontinu.

12. Supposons F séparé, et soit H une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble $\bar{H}$ des limites simples d'applications $u \in H$ est alors une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$. Les structures uniformes suivantes coïncident sur H : 1) celle de la convergence simple sur une partie totale de E, 2) celle de la convergence simple sur E, 3) celle de la convergence uniforme sur toute partie précompacte de E.

13. Toute partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$ est bornée pour toute $\mathfrak{S}$-topologie. Réciproquement, si E est tonnelé et si la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$ est totale dans E, toute partie de $\mathcal{L}(E,F)$ bornée pour la $\mathfrak{S}$-topologie est équicontinue ; si en outre F est séparé et si un filtre Φ, sur $\mathcal{L}(E,F)$ borné ou à base dénombrable, converge simplement vers une application u_0 de E dans F, u_0 est une application linéaire continue et Φ converge vers u_0 uniformément sur toute partie précompacte de E (Théorème de Banach-Steinhaus).

14. Supposons que F soit quasi-complet, et que la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$ soit totale dans E. Alors toute partie équicontinue et faiblement fermée de $\mathcal{L}(E,F)$ est complète pour la $\mathfrak{S}$-topologie.

§ 6. Dualité.

Espaces vectoriels en dualité.

1. Soit B une forme bilinéaire sur le produit de deux espaces vectoriels F et G . On dit que B met F et G en dualité si l'on a :

(D_I) Pour tout $x \neq 0$ de F il existe $y \in G$ tel que $B(x,y) \neq 0$.

(D_{II}) Pour tout $y \neq 0$ de G il existe $x \in F$ tel que $B(x,y) \neq 0$.

Si l'on fait correspondre à tout élément $y \in G$ la forme linéaire $x \longrightarrow B(x,y)$ sur F , on obtient un isomorphisme de G dans le dual algèbrique F^* de F ; si l'on identifie G à son image par l'isomorphisme précédent, la forme $B(x,y)$ s'identifie alors à la forme bilinéaire canonique $\langle x,y \rangle$.

De même, F peut être identifié à un sous-espace de G^* .

2. La topologie de la convergence simple sur G définit sur F une topologie notée $\sigma(F,G)$, et appelée topologie faible définie par la dualité donnée. Cette topologie est localement convexe et séparée ; elle est définie par la famille de semi-normes $x \rightarrow |\langle x,y \rangle|$ où y parcourt G ; c'est la moins fine rendant continues les formes linéaires $x \rightarrow \langle x,y \rangle$, $y \in G$. Réciproquement, toute forme linéaire sur F , continue pour $\sigma(F,G)$, est de la forme $x \rightarrow \langle x,y \rangle$, avec $y \in G$. Le dual de F , muni de $\sigma(F,G)$, est donc G .

En échangeant les rôles de F et G , on définit la topologie $\sigma(G,F)$ sur G ; le dual de G , muni de $\sigma(G,F)$, est F .

3. Inversement, soit E un espace vectoriel topologique dont la topologie $\mathcal{C}$ est localement convexe et séparée, et soit E' le dual topologique de E . La forme bilinéaire canonique $\langle x,y \rangle$ met E et E' en dualité ; la topologie $\sigma(E,E')$ correspondante est moins fine que $\mathcal{C}$

et on l'appelle la <u>topologie affaiblie</u> de $\mathcal{E}$; la topologie $\sigma(E',E)$ est dite topologie <u>faible</u> de E' .

4. Si des couples d'espaces (F_i,G_i), $i \in I$, sont en dualité, la somme directe F des F_i est en dualité avec le produit direct G des G_i et la topologie $\sigma(F,F)$ est la topologie produit des $\sigma(G_i,F_i)$.

<u>Polaires</u>.

5. Si F et G sont deux espaces vectoriels en dualité, on appelle <u>polaire</u> d'une partie M de F l'ensemble M^o des $y \in G$ tels que $\mathcal{R} \langle x,y \rangle \leqslant 1$ pour tout $x \in M$.

M^o contient 0, est convexe et est faiblement fermé (c'est-à-dire fermé pour $\sigma(G,F)$). Si M est équilibré, M^o est équilibré et se compose des éléments $y \in G$ tels que $|\langle x,y \rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in M$. Si $M \subset N$, $M^o \supset N^o$ et si M absorbe N , M^o est absorbé par N^o . Le polaire d'une réunion est l'intersection des polaires.

6. Si M est une partie de F , on note M^{oo} le polaire de M^o ; c'est l'enveloppe convexe fermée (pour $\sigma(F,G)$) de M et de 0 . On a $M^{ooo}=M^o$, d'où $M^{oooo}= M^{oo}$, etc. La polarité met donc en correspondance biunivoque les parties convexes faiblement fermées contenant l'origine de F et de G.

7. Si M est un sous-espace vectoriel de F , son polaire M^o est un sous-espace vectoriel faiblement fermé de G, appelé <u>orthogonal</u> de M ; c'est l'ensemble des $y \in G$ tels que $\langle x,y \rangle = 0$ pour tout $x \in M$. Alors M^{oo} est l'adhérence faible de M .

Par passage au quotient, la forme bilinéaire $\langle x,y \rangle$ met en dualité M et G/M^o ; la topologie $\sigma(M,G/M^o)$ est la restriction à M de $\sigma(F,G)$; si M est faiblement fermé, la topologie $\sigma(G/M^o,M)$ est la topologie quotient de $\sigma(G,F)$ par M^o .

Topologies compatibles avec une dualité.

8. Soient F et G deux espaces en dualité. On dit qu'une topologie loca - lement convexe séparée $\mathcal{C}$ sur F est compatible avec la dualité entre F et G si les formes linéaires sur F , continues pour $\mathcal{C}$, sont les formes $x \to \langle x,y \rangle$, $y \in G$, autrement dit si le dual de F , muni de la topologie $\mathcal{C}$, est G , ou encore si la topologie affaiblie de $\mathcal{C}$ est $\sigma(F,G)$.

9. Dans F , les ensembles bornés et les ensembles convexes fermés sont les mêmes pour toutes les topologies compatibles avec la dualité entre F et G .

10. Si $\mathcal{C}$ est une topologie localement convexe séparée sur F , les trois propriétés suivantes sont équivalentes (théorème de Mackey) :

a) $\mathcal{C}$ est compatible avec la dualité entre F et G .

b) $\mathcal{C}$ est plus fine que $\sigma(F,G)$ et moins fine que la topologie $\tau(F,G)$ de la convergence uniforme sur les parties convexes équilibrées et faiblement compactes de G .

c) $\mathcal{C}$ est la topologie de la convergence uniforme sur un recouvrement de G formé de parties convexes équilibrées et faiblement compactes.

La topologie $\tau(F,G)$ est appelée topologie de Mackey de F ; c'est la plus fine des topologies sur F qui sont compatibles avec la dualité entre F et G . Toute topologie métrisable, ou tonnelée, compatible avec la dualité entre F et G, coïncide avec $\tau(F,G)$.

11. Soit $\mathcal{C}$ une topologie sur F, compatible avec la dualité entre F et G . Pour qu'une partie N de G soit équicontinue par rapport à $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que N^0 soit un voisinage de 0 dans E , pour la topologie $\mathcal{C}$; une telle partie N est faiblement compacte et si l'on

désigne par $\mathfrak{S}$ l'ensemble de ces parties, $\mathcal{C}$ est identique à la $\mathfrak{S}$-topologie, ce qui précise 10.c).

Pour qu'une forme linéaire sur G soit faiblement continue (donc de la forme $y \to \langle x,y \rangle$ avec $x \in F$) il suffit que sa restriction aux ensembles de $\mathfrak{S}$ soit faiblement continue, pourvu que F , muni de la topologie $\mathcal{C}$, soit complet (Théorème de Banach).

Dual fort.

12. Soit E un espace localement convexe séparé, E' son dual. On appelle topologie forte sur E' la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E , E', muni de cette topologie, est appelé dual fort de E . Les polaires des parties bornées de E forment un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie forte de E'.

13. On notera que la topologie forte de E' ne dépend que de la dualité entre E et E', autrement dit, ne dépend que de la topologie $\sigma(E,E')$ (ou aussi bien de $\sigma(E',E)$).

(Ceci justifierait une rédaction de la dualité forte en langage "dualité entre F et G ". Faut-il le faire ?)

14. Toute partie équicontinue de E' est fortement bornée, et toute partie fortement bornée est faiblement bornée. Réciproquement, si E est quasi-complet, toute partie faiblement bornée de E' est fortement bornée ; si E est tonnelé, toute partie faiblement bornée de E' est fortement bornée et équicontinue.

15. On appelle bidual de E , et on note E", le dual fort de E' fort. Pour tout $x \in E$, $x' \to \langle x,x' \rangle$ est une forme linéaire continue sur E' fort, donc est un élément $\iota(x)$ de E". L'application $\iota : E \to E"$ est linéaire, continue et biunivoque. Pour que ι applique E sur E" ,

il faut et il suffit que toute partie bornée de E soit relativement compacte pour $\sigma(E,E')$. Pour que ι soit un isomorphisme de l'espace vectoriel topologique E sur l'espace vectoriel topologique E" , il faut et il suffit que la condition précédente soit remplie et que E soit tonnelé ; on dit alors que E est un espace <u>réflexif</u>.

Le dual fort d'un espace réflexif est réflexif.

<u>Transposition</u>.

16. Soient (F,G), (F_1,G_1) deux couples d'espaces en dualité, et u une application linéaire de F dans F_1 ; pour qu'il existe une application v de G_1 dans G telle que $\langle u(y), z_1 \rangle = \langle y, v(z_1) \rangle$ quels que soient $y \in F$ et $z_1 \in G_1$, il faut et il suffit que u soit faiblement continue (c'est-à-dire continue pour les topologies $\sigma(F,G)$ et $\sigma(F_1,G_1)$.

L'application v est alors une application linéaire faiblement continue, appelée <u>transposée</u> de u , et notée ${}^t u$. On a ${}^{tt}u = u$.

Le noyau de ${}^t u$ est l'orthogonal de u(F). Pour que u(F) soit faiblement dense dans F_1, il faut et il suffit que ${}^t u$ soit biunivoque.

17. Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, u une application linéaire de E dans F . Si u est faiblement continue, ${}^t u$ est définie et applique F' dans E' ; c'est une application continue lorsque l'on munit simultanément E' et F' de la topologie faible ou de la topologie forte.

Si u est continue pour les topologies initiales de E et de F , u est faiblement continue ; la réciproque est vraie si E est tonnelé.

§ 7. Principaux types d'espaces localement convexes.

Espaces tonnelés.

1. Dans un espace localement convexe E , on appelle tonneau tout ensemble convexe équilibré fermé et absorbant. Un tonneau absorbe toutes les parties convexes complètes et bornées (utilité ?). Si E est quasi-complet, ou bien tonnelé, un tonneau absorbe toutes les parties bornées.

2. On dit qu'un espace vectoriel topologique E est tonnelé s'il est localement convexe et si tout tonneau est un voisinage de 0 . Un espace localement convexe de Baire (donc un Fréchet, donc un Banach) est tonnelé; un espace réflexif est tonnelé ; par définition un espace de Montel est tonnelé. Un espace quotient, une somme directe, une limite inductive de tonnelés sont tonnelés.

3. Soient E un espace tonnelé, F un espace localement convexe. Les parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$ sont les mêmes pour toutes les $\mathfrak{S}$-topologies, pourvu que la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$ soit totale dans E ; elles coincident avec les parties équicontinues de $\mathcal{L}(E,F)$.

Si F est séparé et si Φ est un filtre sur $\mathcal{L}(E,F)$, borné ou à base dénombrable, qui converge simplement vers une application u_0 de E dans F , alors u_0 est une application linéaire continue et Φ converge vers u_0 uniformément sur toute partie précompacte de E (Théorème de Banach-Steinhaus).

Si en outre F est quasi-complet et si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de E contenant les parties finies, $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est quasi-complet.

4. Soient E un espace tonnelé séparé, E' son dual. Si M' est une partie de E' les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) M' est faiblement bornée.

b) M' est fortement bornée.

c) M' est relativement faiblement compacte.

d) M' est équicontinue.

L'espace E' est <u>quasi-complet</u> aussi bien pour la topologie forte que pour la topologie faible. Dans E' faible l'enveloppe convexe fermée d'un compact est un compact.

5. Si E est tonnelé et séparé, sa topologie coincide avec la <u>topologie de Mackey</u> $\tau(E,E')$.

Les polaires des voisinages de 0 dans E (resp. dans E' fort) forment un système fondamental de parties bornées dans E' fort (resp. dans E).

Réciproquement, les polaires des parties bornées de E (resp. de E' fort) forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E' fort (resp. dans E).

6. Soient E,F,G trois espaces vectoriels topologiques. Si F est tonnelé toute application bilinéaire u séparément continue de $E \times F$ dans G est $\mathfrak{S}$-hypocontinue quel que soit le recouvrement $\mathfrak{S}$ de E par des parties bornées. Si en outre E et F sont métrisables, u est continue.

<u>Espaces de Montel</u>.

7. On appelle <u>espace de Montel</u>, ou espace (M...), tout espace localement convexe, séparé, tonnelé, et dans lequel tout ensemble borné est relativement compact.

Un espace normé qui est un espace de Montel est de dimension finie (<u>théorème de Bochner-Weil</u>) ; par contre il y a d'importants exemples de Fréchets qui sont des (M...), cf. Appendice II .

8. Sur une partie bornée d'un espace de Montel la topologie affaiblie coïncide avec la topologie initiale. Tout filtre à base dénombrable faiblement convergent est convergent pour la topologie initiale.

Soit P une partie d'un espace de Montel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) P est bornée pour la topologie initiale.

b) P est bornée pour la topologie affaiblie.

c) P est relativement compacte pour la topologie initiale.

d) P est relativement compacte pour la topologie affaiblie.

9. Tout espace de Montel est <u>réflexif</u>. Le dual fort d'un espace de Montel est un espace de Montel.

<u>Espaces de Fréchet</u>.

10. On appelle <u>espace de Fréchet</u>, ou espace (F...), tout espace localement convexe, métrisable et complet.

11. Puisqu'un espace de Fréchet est métrisable et complet, on peut lui appliquer le <u>théorème du grafferme</u> et ses conséquences (§ 2, n°7 - § 2, n°8 - § 3, n°7).

12. Un espace de Fréchet est <u>tonnelé</u>. On peut donc notamment lui appliquer le théorème de Banach-Steinhaus (§ 7, n°3).

<u>Espaces de Banach</u>.

13. On appelle <u>espace de Banach</u> tout espace normé complet.

Tout espace de Banach est un espace de Fréchet.

Le complété d'un espace normé est un espace de Banach. Si M est un sous-espace fermé d'un espace de Banach, M et E/M sont des espaces de Banach.

 36

14. Si E et F sont deux espaces de Banach, et si l'on munit $\mathcal{L}(E,F)$ de la norme $\|u\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|u(x)\|$, $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach dont la topologie est celle de la <u>convergence bornée</u>.

Si H est une partie de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que $\sup_{u\in H}\|u(x)\| < +\infty$ pour tout $x \in E$, alors $\sup_{u\in H}\|u\| < +\infty$ (<u>Théorème de Banach-Steinhaus</u>).

15. Soient E un espace de Banach, E' son dual. Si l'on munit E' de la norme $\|x'\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle x,x'\rangle|$, E' est un espace de Banach dont la topologie est la topologie forte. Ainsi le dual fort d'un Banach est un Banach.

Dans E' toute boule fermée est faiblement compacte. Pour qu'une forme linéaire sur E' soit faiblement continue (donc de la forme $x' \to \langle x,x'\rangle$ avec $x \in E$), il suffit que sa restriction à la boule $\|x'\| \leqslant 1$ soit faiblement continue.

16. Si E est un espace de Banach, son <u>bidual</u> E" est un espace de Banach, et l'application canonique i de E dans E" est une isomètrie. Pour que E soit réflexif il faut et il suffit que la boule $\|x\| \leqslant 1$ soit compacte pour la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$.

17. Soient M un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach E , M^o l'orthogonal de M dans E' . Le dual de E/M est isomorphe (en tant qu'espace de Banach) à M^o, et le dual de M est isomorphe (en tant qu'espace de Banach) à E'/M^o .

Si E est réflexif, M et E/M sont réflexifs.

18. Soient E et F deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de E dans F . On a $\|u\| = \|{}^t u\|$.

Espaces de Hilbert.

19. Soit E un espace vectoriel sur le corps K des réels ou des complexes. On appelle forme hermitienne sur E toute application $(x,y) \longrightarrow (x|y)$ de $E \times E$ dans K vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} (x|y) \text{ est linéaire en } x \text{ et semi-linéaire en } y \,. \\ (y|x) = \overline{(x|y)} \,. \end{cases}$$

Si $(x|x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$, la forme $(x|y)$ est dite positive ; si en outre $(x|x) = 0$ entraîne $x=0$, elle est dite définie-positive.

20. Tout espace vectoriel E, muni d'une forme hermitienne positive, est appelé espace préhilbertien. La forme $(x|y)$ est dite produit scalaire des éléments x et y ; on pose $\|x\| = (x|x)^{1/2}$; $\|x\|$ est une semi-norme, qui fait de E un espace localement convexe.

Le produit scalaire vérifie l'inégalité de Buniatowski-Cauchy-Schwarz : $|(x|y)| \leqslant \|x\| . \|y\|$; il est donc continu sur $E \times E$.

Pour que E soit séparé, il faut et il suffit que la forme hermitienne donnée soit définie-positive ; $\|x\|$ est alors une norme, et E un espace normé.

21. Un espace préhilbertien séparé et complet est appelé espace hilbertien, ou espace de Hilbert. Le complété d'un espace préhilbertien séparé est un espace hilbertien. Si M est un sous-espace fermé d'un espace hilbertien E, M et E/M sont des espaces hilbertiens. Le corps K, muni du produit scalaire $(\lambda | \mu) = \lambda \bar{\mu}$, est un espace hilbertien. Toute somme hilbertienne d'espaces hilbertiens est un espace hilbertien. En particulier si I est un ensemble, l'espace $L^2_K(I)$ des familles (λ_i), $i \in I$, telles que $\sum |\lambda_i|^2 < +\infty$ est un espace hilbertien lorsqu'on le munit du produit scalaire : $(\lambda_i)|(\mu_i)) = \sum_{i \in I} \lambda_i \bar{\mu}_i$.

22. Soit E un espace préhilbertien, et, pour tout $y \in E$, soit u_y la forme linéaire $x \to (x|y)$. L'application $\varphi : y \to u_y$ est une application semi-linéaire et isométrique de E dans son dual E'. Si E est un espace hilbertien, φ est un <u>semi-isomorphisme de</u> E <u>sur</u> E'. On peut donc identifier un espace de Hilbert à son dual.

Tout espace de Hilbert E est un espace de Banach réflexif. La boule unité de E est faiblement compacte. Pour qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur E converge fortement vers x_0 il faut et il suffit qu'il converge faiblement et que $\lim_{\mathcal{F}} \|x\| = \|x_0\|$.

23. Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert E, et soit M^0 l'<u>orthogonal</u> de M, ensemble des points $y \in E$ tels que $(x|y)=0$ pour tout $x \in M$. M^0 est un sous-espace vectoriel fermé de E, et, si M est fermé, E est somme hilbertienne de M et de M^0.

24. Une famille (e_i), $i \in I$, d'éléments d'un espace préhilbertien E est dite <u>orthonormale</u> si $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$; une telle famille est topologiquement libre.

Si (e_i) est une famille orthonormale d'un espace préhilbertien séparé E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) La famille (e_i) est totale.

b) Pour tout $x \in E$ la famille $(x|e_i)e_i$ est sommable et a pour somme x.

c) Pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x|e_i)$.

Une famille orthonormale (e_i) vérifiant ces conditions est appelée une <u>base orthonormale</u> de E.

Si E est un espace hilbertien, les conditions a), b), c) sont équivalentes à la condition :

d) $(x|e_i) = 0$ pour tout $i \in I$ entraîne $x=0$.

Si (e_i) est une base orthonormale d'un espace hilbertien E, l'application $x \rightarrow ((x/e_i))$ est un <u>isomorphisme de</u> E <u>sur l'espace</u> $L^2_K(I)$.

25. Dans tout espace préhilbertien de type dénombrable il existe une base orthonormale dénombrable.

26. Dans tout espace hilbertien il existe une base orthonormale contenant une famille orthonormale donnée ; tout espace hilbertien possède donc au moins une base orthonormale. Deux bases orthonormales quelconques sont équipotentes ; leur cardinal est appelé la <u>dimension hilbertienne</u> de l'espace considéré. Pour que deux espaces hilbertiens soient isomorphes il faut et il suffit qu'ils aient même dimension hilbertienne.

<u>Appendice I.</u>

Diagramme des divers types d'E.V.T.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{localement convexe} & & \\
 & \text{tonnelé} \arrow[u, Rightarrow] & & \\
\text{Fréchet} \arrow[ur, Rightarrow] & & & \\
 & & \text{réflexif} \arrow[uul, Rightarrow] & \\
\text{Banach} \arrow[uu, Rightarrow] & & & \\
 & \text{Hilbert} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[uur, Rightarrow] & & \text{Montel} \arrow[uul, Rightarrow] \\
 & & \text{espace séparé de dimension finie} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \\
 & & (0) \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Appendice II .

Propriétés des E.V.T. usuels.

1. Soit $\mathcal{D}_K$ l'espace des fonctions de classe C^{∞} sur R^n, à support dans un compact K , muni de la topologie de la convergence uniforme pour toutes les dérivées. $\mathcal{D}_K$ est un espace de Fréchet et un espace de Montel.

2. L'espace $\mathcal{D}$, limite inductive des $\mathcal{D}_K$, est une limite inductive stricte de Fréchets, et un espace de Montel.

3. Le dual $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$, espace des distributions sur R^n, muni de la topologie forte, est un Montel.

4. L'espace $\mathcal{E}$ des fonctions de classe C^{∞} sur R^n, muni de la topologie de la convergence compacte de toutes les dérivées, est un espace de Fréchet et un espace de Montel.

5. Le dual $\mathcal{E}'$ ~~es~~ de $\mathcal{E}$, espace des distributions à support compact, muni de la topologie forte, est une limite inductive (non stricte) de Banachs et un Montel.

6. L'espace Θ des fonctions holomorphes sur C^n, muni de la topologie de la convergence compacte, est un espace de Fréchet et un espace de Montel (manquerait plus que çà !).

7. Soient X un espace localement compact, K un compact contenu dans X , $\mathcal{R}(X,K)$ l'espace des fonctions continues sur X , à support dans K , muni de la topologie de la convergence uniforme. $\mathcal{R}(X,K)$ est un espace de Banach (non réflexif en général).

8. L'espace $\mathcal{R}(X)$, limite inductive des $\mathcal{R}(X,K)$, est une limite inductive stricte d'espaces de Banach.

9. Si μ est une mesure positive sur X , les espaces $L^p(X,\mu)$, munis de la norme $\|f\|_p$, sont des espaces de Banach. Ils sont réflexifs pour $1<p<+\infty$, et $L^2(X,\mu)$ est un espace de Hilbert.

Remarques.- 1. Tous les espaces précédents sont tonnelés, vu le diagramme de l'App.I et le fait qu'une limite inductive de tonnelés est tonnelée.

2. On étend facilement 1,...,5 à des variétés dif.ables qqes, en remplaçant le mot "fonction" par le mot "section d'un espace fibré à fibre vectorielle".