RÉDACTION N° 180

COTE : NBR 083

TITRE : LIVRE I : THÉORIE DES ENSEMBLES
CHAPITRE IV (ÉTAT 7?) : STRUCTURES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 53

NOMBRE DE FEUILLES : 53

NBR 083

Archives du Brevet (?) — Rédigé Avril 1953

LIVRE I

THEORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE IV (Etat 7 ?)

STRUCTURES

Sommaire.

Commentaires.

Le rédacteur a suivi dans l'ensemble les injonctions des derniers Congrès et Caucus. Il a renoncé à l'ultra-générale définition de "plus riche" de la précédente rédaction, qui ne correspond à rien dans la pratique, et a cherché à donner les définitions qui interviennent effectivement, i.e., structures, sous-jacentes, structures plus riches, et structures équivalentes. On n'a pas cherché de procédé général de construction de structures initiales et finales, car il semble bien,

- suite -

d'après les exemples, qu'il n'y ait guère de tels procédés ; ceux signalés dans les rédactions (ou Congrès) antérieurs ne paraissent pas mériter plus qu'un exercice.

Les relations et termes structurants ont été mis en Appendice. On s'est aperçu, en rédigeant celui-ci, que la notion de "lettre typique" des précédentes rédactions était bien vague, car elle avait pour effet qu'on ne savait jamais dans quelle théorie on démontrait quelque chose ; en outre, les démonstrations de l'état 6 laissaient fortement à désirer en précision. On a donc introduit la notion de "typification" à la place de celle de "lettre typique", et on espère qu'ainsi les démonstrations sont complètes.

On n'a pas eu le <u>temps de s'occuper</u> des exercices.

LIVRE I

THÉORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE IV (Etat 7 ?)

STRUCTURES

---

§ 1. Structures et homomorphismes.

1. Echelons.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de décrire une fois pour toutes, et d'une façon aussi générale que possible, un certain nombre de constructions formatives et de démonstrations (cf.chap.I, §1,n°3 et §2,n°2), qui interviennent constamment dans toutes les théories mathématiques. Les critères que nous obtiendrons, comme ceux du chap.I, serviront à abréger notablement les raisonnements du type envisagé, et fourniront en outre un principe de classification pour les diverses théories mathématiques usuelles.

Bien entendu, la justification de ces critères appartient à la métamathématique.

Pour la description que nous avons en vue, il nous sera commode d'introduire des assemblages qui <u>ne sont pas</u> des termes ou relations de théories mathématiques. Considérons, d'une part, des lettres distinctes $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_n$ (*), et d'autre part trois nouveaux signes $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ et X .

(*) De même que dans le chap.I, cette écriture n'est qu'une facon commode d'indiquer qu'il s'agit de lettres dont on ne veut préciser ni la nature, ni le nombre tant qu'on décrit des procédés généraux de raisonnement ; mais dans chaque cas où on applique ces procédés, il doit s'agir de lettres doht chacune est explicitement écrite (en pratique, il n'y en a jamais plus d'une dizaine). Et, bien entendu, tous les "raisonnements" qui sont faits sur ces lettres sont de nature métamathématique, et n'ont rien de commun avec la théorie des entiers développée au chap.III .

Une <u>construction d'échelons sur les lettres</u> $x_1,\ldots,x_n$ est une suite d'assemblages formés avec ces lettres et les trois signes précédents, chacun de ces assemblages étant appelé, soit <u>échelon covariant</u>, soit <u>échelon contravariant</u> (sur les lettres $x_1,\ldots,x_n$), de sorte que, pour chaque assemblage $\underline{A}$ de la suite, l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

a) $\underline{A}$ est une des lettres $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$, et est alors covariant.

b) Il y a dans la suite un assemblage $\underline{B}$ précédant $\underline{A}$ et tel que $\underline{A}$ soit $\mathfrak{P}^+\underline{B}$ (resp. $\mathfrak{P}^-\underline{B}$) ; si $\underline{B}$ est contravariant, $\underline{A}$ est contravariant (resp. covariant) ; si $\underline{B}$ est covariant, $\underline{A}$ est covariant (resp. contra-variant).

c) Il y a dans la suite deux assemblages $\underline{B}$, $\underline{C}$ précédant $\underline{A}$, <u>tous deux</u> contravariants ou <u>tous deux</u> covariants, tels que $\underline{A}$ soit $X\underline{B}\underline{C}$; si $\underline{B}$ et $\underline{C}$ sont tous deux contravariants (resp. covariants) $\underline{A}$ est contravariant (resp. covariant).

La méthode développée dans l'Appendice du chap. I permet de reconnaître si un assemblage donné des lettres $x_1,\ldots,x_n$ et des trois signes $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^-$ et X , est ou non un échelon et s'il est contravariant ou covariant (cf. exerc.).

Il est immédiat que tout échelon sur <u>certaines</u> des lettres $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ est aussi un échelon sur $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$.

2. <u>Réalisations d'échelons</u>.

Les constructions d'échelons vont nous permettre de définir certaines suites de termes qui leur sont associées dans une théorie mathématique $\mathcal{T}$. Etant donnés des ensembles $E_1,E_2,\ldots,E_n$ dans une théorie $\mathcal{T}$ (c'est-à-dire (chap. II, § 1) des termes de $\mathcal{T}$) distincts ou non, à toute construction d'échelons sur n lettres distinctes $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$, nous associerons une suite de termes de $\mathcal{C}$, de sorte qu'à chaque échelon $\underline{S}$ de la construction soit associé un terme, dit <u>réalisation de</u> $\underline{S}$ <u>sur</u> $E_1,\ldots,E_n$, les conditions suivantes étant vérifiées :

a) Si $\underline{S}$ est une lettre $\underline{x}_i$, sa réalisation est E_i .

b) Si $\underline{S}$ est $\mathfrak{P}^+\underline{T}$ (resp. $\mathfrak{P}^-\underline{T}$), où $\underline{T}$ est un échelon précédant $\underline{S}$ dans la construction, et si F est la réalisation de $\underline{T}$, la réalisation de $\underline{S}$ est le terme désigné par $\mathfrak{P}(F)$ (chap.II, §5).

c) Si $\underline{S}$ est $\times\underline{T}\,\underline{U}$, où $\underline{T}$ et $\underline{U}$ sont des échelons précédant $\underline{S}$ dans la construction, et si F et G sont les réalisations respectives de $\underline{T}$ et de $\underline{U}$, la réalisation de $\underline{S}$ est le terme désigné par $F\times G$ (chap. II, § 2).

Dans les raisonnements généraux qui suivent, on désignera par $\underline{S}(E_1,\ldots,E_n)$ la réalisation de l'échelon $\underline{S}$ sur les ensembles $E_1,\ldots,E_n$.

<u>Exemple</u>.- La réalisation, sur deux ensembles identiques E,E , de l'échelon $\times\mathfrak{P}^+\mathfrak{P}^-x\ \mathfrak{P}^-\mathfrak{P}^+y$ est l'ensemble $(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)))\times(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)))$

Par abus de langage, on écrira souvent un échelon $\underline{T}$ comme sa réalisation sur n lettres $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$, à cela près qu'à chaque étape de type b) de la construction, on écrira $\mathfrak{P}^+(F)$ (resp. $\mathfrak{P}^-(F)$) au lieu de $\mathfrak{P}(F)$. Par exemple, l'échelon de l'exemple précédent s'écrira

$$(\mathfrak{P}^+(\mathfrak{P}^-(x)))\times(\mathfrak{P}^-(\mathfrak{P}^+(x))).$$

<u>3. Extensions canoniques d'applications</u>.

Etant donnée une construction d'échelons sur n lettres $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ considérons, dans une théorie $\mathcal{C}$, 2n ensembles $E_1,\ldots,E_n,E'_1,\ldots,E'_n$, et n termes $f_1,\ldots,f_n$ tels que les relations "f_i est une application de E_i dans E'_i " soient des théorèmes de $\mathcal{C}$. A chaque échelon $\underline{S}$ de la la construction donnée, on associe alors un terme de $\mathcal{T}$, que nous noterons $\underline{S}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$, et que nous appellerons l'<u>extension canonique de</u> $f_1,\dots,f_n$ <u>aux ensembles</u> $\underline{S}(E_1,\dots,E_n)$ <u>et</u> $\underline{S}(E'_1,\dots,E'_n)$, de sorte que $\underline{S}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ soit (dans la théorie $\mathcal{T}$), <u>ou bien</u> une application de $\underline{S}(E_1,\dots,E_n)$ dans $\underline{S}(E'_1,\dots,E'_n)$, <u>ou bien</u> une application de $\underline{S}(E'_1,\dots,E'_n)$ dans $\underline{S}(E_1,\dots,E_n)$, et que les conditions suivantes soient vérifiées :

a) Si $\underline{S}$ est une lettre $\underline{x}_i$, $S\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ est f_i.

b) Si $\underline{S}$ est $\mathfrak{P}^{+}\underline{T}$, où $\underline{T}$ est un échelon précédant $\underline{S}$, si $F=\underline{T}(E_1,\dots,E_n)$, $F'=\underline{T}(E'_1,\dots,E'_n)$, et si $g=\underline{T}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ est une application de F dans F' (resp. de F' dans F), $\underline{S}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ est l'<u>extension canonique</u> $\hat{g}$ <u>de</u> g à $\mathfrak{P}(F)=\underline{S}(E_1,\dots,E_n)$ (resp. à $\mathfrak{P}(F')=\underline{S}(E'_1,\dots,E'_n)$) (chap. II, § 5, n°1).

c) Si $\underline{S}$ est $\mathfrak{P}^{-}\underline{T}$, où $\underline{T}$ est un échelon précédant $\underline{S}$, si $F=\underline{T}(E_1,\dots,E_n)$, $F'=\underline{T}(E'_1,\dots,E'_n)$, et si $g=\underline{T}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ est une application de F dans F' (resp. de F' dans F), $\underline{S}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ est l'<u>extension canonique de la correspondance</u> $\overset{-1}{g}$ (réciproque de g) à $\mathfrak{P}(F')$ (resp. $\mathfrak{P}(F)$).

d) Si $\underline{S}$ est $\times\underline{T}\underline{U}$, où $\underline{T}$ et $\underline{U}$ sont des échelons précédant $\underline{S}$, si $F=\underline{T}(E_1,\dots,E_n)$, $F'=\underline{T}(E'_1,\dots,E'_n)$, $G=\underline{U}(E_1,\dots,E_n)$, $G'=\underline{U}(E'_1,\dots,E'_n)$, et si $g=\underline{T}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ est une application de F dans F' (resp. de F' dans F) et $h=\underline{U}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ une application de G dans G' (resp. de G' dans G), $\underline{S}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ est l'<u>extension canonique</u> $g\times h$ de g et h aux ensembles produits (chap. II, § 3, n°7), et par suite une application de $F\times G$ dans $F'\times G'$ (resp. de $F'\times G'$ dans $F\times G$)

On vérifie alors de proche en proche les critères suivants :

CE1. Si $\underline{S}$ est un échelon covariant (resp. contravariant), $\underline{S}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ est une application de $\underline{S}(E_1,\dots,E_n)$ dans $\underline{S}(E'_1,\dots,E'_n)$ (resp. de $\underline{S}(E'_1,\dots,E'_n)$ dans $\underline{S}(E_1,\dots,E_n)$).

Ceci montre que la définition donnée ci-dessus est valable pour un échelon quelconque de la construction donnée : a priori, il se pourrait que dans le cas d), $\underline{S}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ ne soit pas défini, si g était une application de F' dans F et h une application de G dans G', par exemple ; mais ceci est exclu par le critère CE1 et la définition d'une construction d'échelons, puisque $\underline{T}$ et $\underline{U}$ doivent être tous deux covariants ou tous deux contravariants pour que $\underline{T}\times\underline{U}$ soit défini.

CE2. Si f_i est une application de E_i dans E'_i, f'_i une application de E'_i dans E''_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, on a, pour un échelon quelconque $\underline{S}$,

$$\underline{S}\langle f'_1\circ f_1,\ f'_2\circ f_2,\dots,f'_n\circ f_n\rangle = \underline{S}\langle f'_1,\dots,f'_n\rangle\circ\underline{S}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$$

si $\underline{S}$ est covariant, et

$$\underline{S}\langle f'_1\circ f_1,\dots,f'_n\circ f_n\rangle = \underline{S}\langle f_1,\dots,f_n\rangle\circ\underline{S}\langle f'_1,\dots,f'_n\rangle$$

si $\underline{S}$ est contravariant.

De CE2 et de la caractérisation des bijections (chap.II, § 3, cor. de la prop.8), il résulte le critère :

CE3.- Les notations étant celles de CE2, on suppose en outre que f_i soit une application biunivoque de E_i sur E'_i et f'_i l'application réciproque. Alors, si $\underline{S}$ est covariant (resp. contravariant), $\underline{S}\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ est une application biunivoque de $\underline{S}(E_1,\dots,E_n)$ sur $\underline{S}(E'_1,\dots,E'_n)$ (resp. de $\underline{S}(E'_1,\dots,E'_n)$ sur $\underline{S}(E_1,\dots,E_n)$) et $\underline{S}\langle f'_1,\dots,f'_n\rangle$ est l'application réciproque.

4. Espèces de structures et structures.

On dit qu'on a défini dans une théorie $\mathcal{C}$ plus forte que la théorie des ensembles une espèce de structure, lorsqu'on s'est donné :

1° Un certain nombre de lettres distinctes $x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p$ autres que les constantes de $\mathcal{C}$.

2° Des échelons $T_1, T_2, \dots, T_p$ d'une construction d'échelons (n°1) sur les n lettres $x_1, \dots, x_n$, en nombre égal à celui des lettres s_j, distincts ou non.

3° Une relation $R\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ de la théorie $\mathcal{C}$, de la forme

$$s_1 \subset T_1(x_1, \dots, x_n) \text{ et } s_2 \subset T_2(x_1, \dots, x_n) \text{ et } \dots \text{ et }$$
$$s_p \subset T_p(x_1, \dots, x_n) \text{ et } R'\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$$

de façon que la relation suivante soit un théorème de $\mathcal{C}$:

(IS) $(R\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ et f_1 est une bijection de x_1 sur y_1 et ... et f_n est une bijection de x_n sur $y_n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow R\{y_1, \dots, y_n, s'_1, \dots, s'_p\}$$

où $y_1, \dots, y_n$ sont des lettres distinctes des constantes de $\mathcal{C}$ et de toutes les lettres figurant dans $R\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$, et où on a posé

$$s'_j = T_j\langle f_1, \dots, f_n\rangle\langle s_j\rangle$$

pour $1 \leqslant j \leqslant p$.

La définition des termes $T_j\langle f_1, \dots, f_n\rangle$ se fait bien entendu dans la théorie obtenue en adjoignant à $\mathcal{C}$, d'une part l'axiome "f_1 est une bijection de x_1 sur y_1 et ... et f_n est une bijection de x_n sur y_n", et d'autre part l'axiome "$s_1 \subset T_1(x_1, \dots, x_n)$ et ... et $s_p \subset T_p(x_1, \dots, x_n)$" (cf. n°3)

Soit Σ une espèce de structure, définie par la donnée de lettres $\underline{x}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\underline{s}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$, d'échelons $\underline{T}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ et d'une relation $\underline{R}$ satisfaisant à la condition (IS). Soit d'autre part $\mathcal{C}'$ d'une théorie plus forte que $\mathcal{C}$, et soient $E_1,\ldots,E_n,S_1,\ldots,S_p$ des termes de $\mathcal{C}'$. On dit que ces termes définissent une <u>structure d'espèce</u> Σ si dans la théorie $\mathcal{C}'$, la relation $\underline{R}\{E_1,\ldots,E_n,S_1,\ldots,S_p\}$ est <u>vraie</u>.

On appelle <u>théorie des structures d'espèce</u> Σ la théorie $\mathcal{C}_\Sigma$ ayant les mêmes axiomes et mêmes schémas que $\mathcal{C}$, et en plus l'axiome explicite $\underline{R}\{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\ldots,\underline{s}_p\}$. Dans cette théorie, les termes $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\ldots\underline{s}_p$ définissent donc une <u>structure d'espèce</u> Σ. Les constantes de $\mathcal{C}_\Sigma$ sont les constantes de $\mathcal{C}$ et les lettres $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\ldots,\underline{s}_p$. Si $\underline{A}\{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\ldots,\underline{s}_p\}$ est un théorème de $\mathcal{C}_\Sigma$, la relation $\underline{A}\{E_1,\ldots,E_n,S_1,\ldots,S_p\}$ est un théorème de la théorie $\mathcal{C}'$, si les termes $E_1,\ldots,E_n,S_1,\ldots,S_p$ définissent dans $\mathcal{C}'$ une structure d'espèce Σ (chap.I, § 2, n°3).

Une grande partie de ce Traité sera consacrée à l'étude de quelques espèces de structure dont l'importance est due au fait que leur théorie peut s'"appliquer" comme on vient de le dire, dans de très nombreuses théories mathématiques.

<u>Exemples</u>.- 1) Les deux lettres A,S , l'échelon $A \times A$, et la relation

$$(S \subset A \times A) \text{ et } (S \circ S \subset S) \text{ et } (S \cap \overset{-1}{S} = \Delta_A)$$

(où Δ_A est la diagonale de $A \times A$) définissent une espèce de structure, car on vérifie aussitôt la condition (IS), en vertu des propriétés des extensions canoniques de bijections, vues au chap.II. La théorie de cette espèce de structure n'est autre que la théorie

NBR083 11

des ensembles ordonnés, développée au chap.III, § 1 ; aussi dit-on que cette espèce de structure est l'espèce des structures d'ordre sur A .

2) On voit de même que les deux lettres A,F, l'échelon $(A\times A)\times A$ et la relation

$(F\subset(A\times A)\times A)$ et (F est un graphe fonctionnel dont $A\times A$ est l'ensemble de définition)

définissent une espèce de structure. Les structures de cette espèce sont des cas particuliers de ce qu'on appelle les structures algèbriques et la foncti n de graphe F (application de $A\times A$ dans A) est dite loi de composition interne partout définie d'une telle structure (Alg., chap.I) .

3) Considérons une lettre A , l'échelon $\mathfrak{P}^{-}(A)$, la lettre S et la relation

$$(S\subset\mathfrak{P}(A)) \text{ et } (\bigcup_{X\in S} X=A) \text{ et } (\forall T)(T\subset S \Rightarrow (\bigcup_{X\in T} X)\in S)$$
$$\text{et } (\forall X)(\forall Y)((X\in S \text{ et } Y\in S) \Rightarrow (((X\cap Y)\in S))$$

On vérifie encore que l'on définit de cette façon une espèce de structure, dite espèce des structures topologiques. Une structure de cette espèce est dite topologie et la relation $X\in S$ s'exprime en disant que X est ouvert pour la topologie S (Top.gén. chap.I, § 1).

Remarques.- 1) La condition (IS), dans toutes les espèces de structures qui interviennent en Mathématique, se vérifie toujours aisément, grâce a-ux propriétés des extensions canoniques des bijections ; nous en verrons la raison précise dans l'Appendice I. On notera que, dans toute la suite de ce paragraphe, cette condition n'intervient que pour la définition du transport de structure (n°7).

2) La relation $\underline{R}'\{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_p\}$ qui intervient dans la définition d'une espèce de structure Σ s'appelle (par abus de langage) l'<u>axiome</u> de cette espèce de structure (ou des structures d'espèce Σ). Cette relation est souvent la conjonction de plusieurs relations $\underline{R}_1,\ldots,\underline{R}_m$ (comme dans l'exemple 3 ci-dessus) ; on dit aussi alors que ces relations sont <u>les axiomes</u> de l'espèce Σ , ou des structures d'espèce Σ . La relation "$\underline{S}_1 \subset \underline{T}_1(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ et ... et $\underline{S}_p \subset \underline{T}_p(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$" est appelée la <u>caractérisation typique de</u> Σ .

3) Lorsque $E_1,\ldots,E_n,S_1,\ldots,S_p$ définissent une structure d'espèce Σ , on dit aussi que $(S_1,\ldots,S_p)$ est <u>une strucûtre d'espèce</u> Σ <u>sur les ensembles</u> $E_1,\ldots,E_n$, ou que, dans la théorie $\mathcal{C}'$, les ensembles $E_1,\ldots,E_n$ sont <u>munis de la structure</u> $(S_1,\ldots,S_p)$; on dit aussi que $E_1,E_2,\ldots,E_n$ sont les <u>ensembles de base</u> de la structure $(S_1,S_2,\ldots,S_p)$. L'ensemble des éléments $(U_1,\ldots,U_p)$ de l'ensemble produit

$$\mathfrak{P}(\underline{T}_1(E_1,\ldots,E_n))\times\mathfrak{P}(\underline{T}_2(E_1,\ldots,E_n))\times\ldots\times\mathfrak{P}((\underline{T}_p(E_1,\ldots,E_n)))$$

qui vérifient la relation $\underline{R}\{E_1,\ldots,E_n,U_1,\ldots,U_p\}$ est appelé l'<u>ensemble des structures d'espèce</u> Σ <u>sur</u> $E_1,\ldots,E_n$.

On donne un nom aux structures les plus fréquemment utilisées en Mathématique, et aux ensembles munis de telles structures : c'est ainsi qu'un <u>ensemble ordonné</u> (chap.III, § 1) est un ensemble muni d'une structure d'ordre (exemple 1) ; nous définirons, dans la suite de ce Traité, les notions de <u>groupe</u>, de <u>corps</u>, d'<u>espace topologique</u>, de <u>variété différentiable</u>, etc., qui toutes désignent des ensembles munis de certaines structures.

4) Considérons l'espèce de structure Σ_o définie par les 2n lettres $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_n$, les n échelons $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ et la relation

$\underline{s}_1 \subset \underline{x}_1$ et ... et $\underline{s}_n \subset \underline{x}_n$ et ($\underline{s}_1 = \underline{x}_1$ et ... et $\underline{s}_n = \underline{x}_n$) .
Cette relation étant vérifiée quand on y remplace $\underline{x}_i$ et $\underline{s}_i$ par le même terme (quelconque) E_n de la théorie des ensembles, les n termes $E_1,\ldots,E_n$ déterminent donc une structure d'espèce Σ_o, dite <u>structure d'ensemble</u> sur les <u>ensembles fondamentaux</u> $E_1,\ldots,E_n$; tout théorème $\underline{A}\{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\ldots,\underline{s}_n\}$ de la théorie $\mathcal{C}_{\Sigma_o}$ est tel que $\underline{A}\{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n\}$ soit un théorème de la théorie des ensembles

5) Intuitivement, la donnée d'une structure sur les ensembles $E_1,\ldots,E_n$ revient à se donner des <u>parties</u> de certaines "réalisations d'échelons" sur ces ensembles, parties qui doivent vérifier des conditions données (exprimées par les axiomes de l'espèce de structure) ; développer la théorie de l'espèce de structure envisagée, c'est déduire les conséquences logiques des propriétés qu'on a assignées à ces parties Il peut se faire que l'on ait besoin de développer une théorie où l'on se soit donné, non seulement des parties d'ensembles $\underline{T}_j(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$, mais aussi des <u>éléments</u> de tels ensembles (satisfaisant à des conditions données). On ramène cette étude à l'étude d'une espèce de structure, en associant à tout élément $\underline{t}_j \in \underline{T}_j(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$, la partie $\{\underline{t}_j\}$ de $\underline{T}_j(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$; de façon précise, se donner un élément de $\underline{T}_j(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ revient à introduire une lettre $\underline{s}_j$, avec la caractérisation typique $\underline{s}_j \subset \underline{T}_j(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$, et à insérer dans l'axiome $\mathcal{R}'$ la relation " $\underline{s}_j$ est un ensemble à un seul élément".

Soit Σ une espèce de structure sur les lettres $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\ldots,\underline{s}_p$ et les échelons $\underline{T}_1,\ldots,\underline{T}_p$, avec l'axiome $\mathcal{R}'$. Une structure Σ' sur <u>certaines</u> des lettres $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ (par exemple $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_m$) et sur <u>certaines</u> des lettres $\underline{s}_1,\ldots,\underline{s}_p$ (par exemple $\underline{s}_1,\ldots,\underline{s}_q$)

choisies de sorte que $\underline{T}_1,\dots,\underline{T}_q$ soient des échelons sur $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_m$, est dite <u>sous-jacente</u> à Σ (ou <u>plus simple</u> que Σ) si ses échelons sont $\underline{T}_1,\dots,\underline{T}_q$ et si son axiome $\mathcal{R}''\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_m,\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_q\}$ <u>ne contient pas</u> les lettres $\underline{x}_{m+1},\dots,\underline{x}_n$, $\underline{s}_{q+1},\dots,\underline{s}_p$ et est tel que la relation $\mathcal{R}'$ <u>implique</u> $\mathcal{R}''$. Tout théorème de la théorie des structures d'espèce Σ' est aussi un théorème de la théorie des structures d'espèce Σ. Si des termes $E_1,\dots,E_n,S_1,\dots,S_p$ définissent une structure d'espèce Σ, les termes $E_1,\dots,E_m,S_1,\dots,S_q$ définissent une structure d'espèce Σ', dite <u>sous-jacente</u> à la précédente.

<u>Exemples</u>.- *L'espèce de structure de <u>groupe topologique</u> se définit par la donnée de trois lettres A,S_1,S_2 des échelons $(A\times A)\times A$ et $\mathfrak{P}(A)$, avec la caractérisation typique "$S_1 \subset (A\times A)\times A$ et $S_2 \subset \mathfrak{P}(A)$" et un axiome qui s'obtient en prenant la conjonction de l'axiome des structures de <u>groupe</u> (<u>Alg</u>., chap.I, § 6), de l'axiome des structures <u>topologiques</u> (cf. ci-dessus, exemple 3) et d'un axiome additionnel (cf.<u>Top.gén</u>., chap.III, § 1, n°1). L'espèce de structure de groupe et l'espèce de structure topologique sont donc <u>sous-jacentes</u> à l'espèce de structure de groupe topologique.

De même, l'espèce de structure d'anneau a pour espèces sous-jacente celle de structure de groupe abélien et celle de structure de monoïde (multiplicatif). Une structure de groupe à opérateurs a pour structure sous-jacente une structure de groupe. Une structure de variété différentiable a pour structure sous-jacente une topologie. Etc. *

Si une structure est définie sur des ensembles $E_1,\dots,E_n$, la <u>structure d'ensemble</u> sur $E_1,\dots,E_n$ remarque 4 ci-dessus) peut toujours être considérée comme sous-jacente à la structure donnée.

En particulier, soient Σ_1, Σ_2 deux espèces de structures sur les <u>mêmes</u> lettres $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n, \underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p$ et les <u>mêmes</u> échelons $\underline{T}_1,\dots,\underline{T}_p$, et soient $\underline{R}'_1$ (resp. $\underline{R}'_2$) l'axiome de Σ_1 (resp. Σ_2). Dire que Σ_1 est sous-jacente à Σ_2 signifie simplement alors que $\underline{R}'_2$ <u>implique</u> $\underline{R}'_1$: on dit dans ce cas que Σ_2 est <u>plus riche</u> que Σ_1 (ou que Σ_1 est <u>moins riche</u> que Σ_2)

Par abus de langage, on dit aussi qu'une structure d'espèce Σ_2 est <u>plus riche</u> qu'une structure d'espèce Σ_1 . Toute structure d'espèce Σ_2 peut être considérée comme étant d'espèce Σ_1 ; on dit que cette dernière s'obtient en <u>appauvrissant</u> la structure donnée. Tout théorème de la théorie des structures d'espèce Σ_1 est alors un théorème de la théorie des structures d'espèce Σ_2 . Si des termes $E_1,\dots,E_n,S_1,\dots,S_p$ d'une théorie $\mathcal{T}'$ définissent une structure d'espèce Σ_2 , ils définissent aussi une structure d'espèce Σ_1 .

On peut encore dire que sur $E_1,\dots,E_n$, l'ensemble des structures d'espèce Σ_2 est <u>contenu</u> dans l'ensemble des structures d'espèce Σ_1 .

<u>Exemples</u>.- L'espèce de structure d'ensemble <u>totalement ordonné</u> (obtenue en ajoutant à l'axiome des structures d'ordre la relation $S \cup \overset{-1}{S} = A \times A$ (cf. exemple 1)) est plus riche que l'espèce des structures d'ordre. * Une structure de groupe abélien est plus riche qu'une structure de groupe ; une structure d'espace compact est plus riche qu'une structure d'espace topologique. Etc. *

<u>Remarque</u>.- Comme le montrent les exemples précédents, la plupart du temps la relation $\underline{R}'_2$ est <u>conjonction</u> de $\underline{R}'_1$ et d'une autre relation $\underline{R}''$: on dit qu'on passe de Σ_1 à Σ_2 en "ajoutant l'axiome $\underline{R}''$ " aux axiomes de Σ_1 . De même, on passe le plus

souvent d'une structure Σ' à une structure Σ à laquelle Σ' est sous-jacente en "augmentant" à la fois l'axiome et la caractérisation typique de Σ'.

5. Homomorphismes et isomorphismes.

On notera que la distinction entre échelons covariants et échelons contravariants ($n^o 1$) n'est pas intervenue dans la définition d'une espèce de structure. Elle est au contraire essentielle pour la définition des homomorphismes.

Soit Σ une espèce de structure, définie sur les lettres $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$, $\underline{S}_1,\dots,\underline{S}_p$ et correspondant aux échelons $T_1,\dots,T_p$ sur $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$. Soient $(S_1,\dots,S_p)$ une structure d'espèce Σ sur $E_1,\dots,E_n$ et $(S'_1,\dots,S'_p)$ une structure de même espèce Σ sur $E'_1, E'_2,\dots,E'_n$. Soient f_i une application de E_i dans E'_i pour $1\leqslant i\leqslant n$. On dit que les applications f_i constituent un homomorphisme (ou quelquefois une représentation) des ensembles $E_1,\dots,E_n$, munis de la structure $(S_1,\dots,S_p)$, dans les ensembles $E'_1,\dots,E'_n$, munis de la structure $(S'_1,\dots,S'_p)$ si elles satisfont aux conditions suivantes pour $1\leqslant j\leqslant p$:

1) Si T_j est un échelon covariant, $T_j\langle f_1,\dots,f_n\rangle\langle S_j\rangle\subset S'_j$

2) Si T_j est un échelon contravariant, $T_j\langle f_1,\dots,f_n\rangle\langle S'_j\rangle\subset S_j$.

Exemples.- 1) Soient S,S' des structures d'ordre sur des ensembles A,A'. Comme l'échelon $A\times A$ (sur A) est covariant homomorphisme f de l'ensemble ordonné A dans l'ensemble ordonné A est une application telle que la relation $(x,y)\in S$ entraîne $(f(x),f(y))\in S'$, c'est-à-dire (avec dles notations du chap. III, § 1) que $x\leqslant y$ entraîne $f(x)\leqslant f(y)$, ou encore que f soit croissante.

2) Soient F, F' les graphes de deux lois de composition f, f' internes sur A, A' respectivement (n°4, exemple 2). Comme l'échelon $(A \times A) \times A$ est covariant, un homomorphisme g de l'ensemble A dans l'ensemble A' (pour les deux structures algèbriques considérées) est une application telle que la relation $(x,y) \in F$ entraîne $(g(x), g(y)) \in F'$, c'est-à-dire telle que l'on ait $f'(g(x), g(y)) = g(f(x,y))$ (cf. Alg. chap. I).

3) Soient S, S' deux topologies sur des ensembles A, A' (n°4, exemple 3) Comme l'échelon $\mathfrak{P}^{-}(A)$ est contravariant, un homomorphisme f de A dans A' est une application telle que, pour tout $X' \in S'$, on ait $\overset{-1}{f}(X') \in S$; autrement dit, les homomorphismes sont les applications telles que l'image réciproque de tout ensemble ouvert (pour S') soit un ensemble ouvert (pour S) ou encore les applications continues de A dans A' (Top. gén. chap. I, § 4).

Remarque.- Si, dans la définition des topologies (n°4, exemple 3), on remplace l'échelon $\mathfrak{P}^{-}(A)$ par l'échelon covariant $\mathfrak{P}^{+}(A)$, un homomorphisme est alors une application f de A dans A' telle que l'image par f de tout ensemble ouvert dans A soit un ensemble ouvert dans A' (application ouverte de A dans A') ; *comme une telle application n'est pas nécessairement continue, et qu'une application continue n'est pas nécessairement ouverte, on voit que la notion d'homomorphisme dépend de la distinction entre échelons covariants et échelons contravariants.*

On dit qu'un homomorphisme $(f_1, \dots, f_n)$ est un épimorphisme si f_i est une application de E_i sur E'_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) ; on dit que c'est un monomorphisme si f_i est une application biunivoque de E_i dans E'_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$).

On dit que les applications $(f_1, \dots, f_n)$ constituent un isomorphisme de $(E_1, \dots, E_n)$ (munis de la structure $(S_1, \dots, S_p)$) sur $(E'_1, \dots, E'_n)$

(munis de la structure $(S_1,\dots,S_p)$) sur $(E'_1,\dots,E'_n)$ (munis de la structure $(S'_1,\dots,S'_p)$) si elles vérifient les conditions suivantes :

1) chacune des applications f_i est une application biunivoque de E_i sur E'_i $(1\leqslant i\leqslant n)$;

2) les applications $(f_1,\dots,f_n)$ constituent un homomorphisme de $(E_1,\dots,E_n)$ dans $(E'_1,\dots,E'_n)$;

3) si g_i est l'application réciproque de f_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, les applications $(g_1,\dots,g_n)$ constituent un homomorphisme de $(E'_1,\dots,E'_n)$ dans $(E_1,\dots,E_n)$.

Il résulte immédiatement de cette définition que $(g_1,\dots,g_n)$ est alors un <u>isomorphisme</u> de $(E'_1,\dots,E'_n)$ sur $(E_1,\dots,E_n)$, dit <u>réciproque</u> de l'isomorphisme $(f_1,\dots,f_n)$.

Compte tenu du critère CE3 (n°3), la définition d'un isomorphisme s'exprime encore comme suit : $(f_1,\dots,f_n)$ est un isomorphisme si les applications f_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont telles que, pour tout échelon $\underline{T}_j$, on ait

1° $\underline{T}_j\langle f_1,\dots,f_n\rangle\langle S_j\rangle = S'_j$ si $\underline{T}_j$ est covariant ;

2° $\underline{T}_j\langle f_1,\dots,f_n\rangle\langle S'_j\rangle = S_j$ si $\underline{T}_j$ est contravariant.

<u>Remarques</u>.- 1) Cette seconde formulation prouve que, si dans la construction d'échelons où figurent les $\underline{T}_j$, on remplace certains des signes $\mathfrak{P}^-$ par des $\mathfrak{P}^+$, et certains des $\mathfrak{P}^+$ par des $\mathfrak{P}^-$, la notion d'isomorphisme (pour les structures de l'espèce Σ considérée) demeure <u>inchangée</u>, contrairement à ce qui se passe pour les homomorphismes.

2) Un isomorphisme $(f_1,\dots,f_n)$ de $(E_1,\dots,E_n)$ sur $(E'_1,\dots,E'_n)$ est évidemment aussi un <u>épimorphisme</u> et un <u>monomorphisme</u>. Mais les applications $(f_1,\dots,f_n)$ peuvent constituer <u>à la fois</u> un épimorphisme et un monomorphisme sans constituer un isomorphisme.

Par exemple, une application continue d'un espace topologique A dans un espace topologique A' peut être une application biunivoque de A sur A' sans que son application réciproque soit continue (<u>Top.gén.</u>, chap.I, § 4).

3) Pour la "structure d'ensemble" sur n ensembles fondamentaux $E_1,\dots,E_n$, un système d'applications $(f_1,\dots,f_n)$ (f_i application de E_i dans E'_i) est <u>toujours</u> un homomorphisme ; dire que c'est un <u>épimorphisme</u> (resp. <u>monomorphisme</u>, <u>isomorphisme</u>) signifie simplement que chacune des f_i est une <u>surjection</u> (resp. <u>injection</u>, <u>bijection</u>).

On dit que $E'_1,\dots,E'_n$, munis de $(S'_1,\dots,S'_p)$ sont <u>isomorphes</u> à $E_1,\dots,E_n$ munis de $(S_1,\dots,S_p)$ s'il existe un isomorphisme de $E_1,\dots,E_n$ sur $E'_1,\dots,E'_n$; on dit encore dans ce cas que les structures $(S_1,\dots,S_p)$ et $(S'_1,\dots,S'_p)$ sont <u>isomorphes</u>.

Les définitions données ci-dessus entraînent les critères suivants, compte tenu de CE2 et de la caractérisation des bijections CE4 . <u>Soient</u> $(S_1,\dots,S_p)$, $(S'_1,\dots,S'_p)$, $(S''_1,\dots,S''_p)$ <u>trois structures de même espèce</u> Σ <u>sur des ensembles</u> $(E_1,\dots,E_n)$, $(E'_1,\dots,E'_n)$, $(E''_1,\dots,E''_n)$ <u>respectivement</u>. <u>Soit</u> f_i <u>une application de</u> E_i <u>dans</u> E'_i , g_i <u>une application de</u> E'_i <u>dans</u> E''_i $(1 \leq i \leq n)$. <u>Si</u> $(f_1,\dots,f_n)$ <u>et</u> $(g_1,\dots,g_n)$ <u>sont des homomorphismes</u> (resp. <u>épimorphismes</u>, <u>monomorphismes</u>, <u>isomorphismes</u>), $(g_1\circ f_1,\dots,g_n\circ f_n)$ <u>est un homomorphisme</u> (resp. <u>épimorphisme</u>, <u>monomorphisme</u>, <u>isomorphisme</u>).

CE5. <u>Soient</u> $(S_1,\dots,S_p)$, $(S'_1,\dots,S'_p)$ <u>deux structures de même espèce</u> Σ <u>sur des ensembles</u> $(E_1,\dots,E_n)$, $(E'_1,\dots,E'_n)$ <u>respectivement</u>. <u>Soient</u> $(f_1,\dots,f_n)$ <u>un homomorphisme de</u> $(E_1,\dots,E_n)$ <u>dans</u> $(E'_1,\dots,E'_n)$ $(g_1,\dots,g_n)$ <u>un homomorphisme de</u> $(E'_1,\dots,E'_n)$ <u>dans</u> $(E_1,\dots,E_n)$. <u>Si pour</u> $1 \leq i \leq n$, $g_i\circ f_i$ <u>est l'application identique de</u> E_i <u>sur lui-même</u>, <u>et</u> $f_i\circ g_i$ <u>l'application identique de</u> E'_i <u>sur lui-même</u>, <u>alors</u> $(f_1,\dots,f_n)$ <u>est un isomorphisme</u>

de $(E_1,\dots,E_n)$ sur $(E'_1,\dots,E'_n)$, et $(g_1,\dots,g_n)$ l'isomorphisme réciproque.

Soient $E_1,\dots,E_n$ des ensembles munis d'une structure d'espèce Σ. On dit qu'un homomorphisme de $(E_1,\dots,E_n)$ dans $(E_1,\dots,E_n)$ est un endomorphisme de $(E_1,\dots,E_n)$, et qu'un isomorphisme de $(E_1,\dots,E_n)$ sur $(E_1,\dots,E_n)$ est un automorphisme de $(E_1,\dots,E_n)$. Le composé de deux endomorphismes (resp. automorphismes) de $(E_1,\dots,E_n)$ est un endomorphisme (resp. automorphisme) ; l'isomorphisme réciproque d'un automorphisme est un automorphisme.

6. Ensembles auxiliaires.

Il arrive souvent que, dans la théorie d'une espèce de structure Σ définie sur n lettres $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$, on s'intéresse surtout à des homomorphismes et isomorphismes $(f_1,\dots,f_n)$ du type particulier suivant : les deux systèmes d'ensembles $(E_1,\dots,E_n)$, $(E'_1,\dots,E'_n)$ que l'on considère sont tels que $E'_i=E_i$ pour $m+1\leqslant i\leqslant n$, et f_i est l'application identique de E_i sur lui-même pour ces indices (le plus souvent, on a $m=1$, autrement dit, f_1 est la seule des applications f_i qui ne soit pas l'application identique). On convient alors de réserver le nom d'homomorphisme (resp. isomorphisme) à ces homomorphismes (resp. isomorphismes) particuliers, et de donner un autre nom aux homomorphismes et isomorphismes plus généraux quand il arrive qu'on les utilise. Dans les mêmes conditions on dit que $E_{m+1},\dots,E_n$ sont les ensembles auxiliaires pour la structure considérée ; par abus de langage, on dit que cette structure est définie sur $E_1,\dots,E_m$ et on parle de l'homomorphisme $(f_1,\dots,f_m)$ au lieu de $(f_1,\dots,f_n)$.

*Par exemple, une structure d'espace vectoriel (*Alg.*, chap. II, § 1) est définie sur deux ensembles K (le corps des scalaires) et E (l'espace vectoriel) ; mais K est considéré comme ensemble auxiliaire, et les homomorphismes correspondants sont appelés *applications linéaires*. On a aussi parfois à considérer alors des homomorphismes au sens de la définition générale du n°5 ; on les appelle *applications semi-linéaires*.

De même, une structure de variété différentiable est définie sur deux ensembles, dont l'un est la variété et l'autre l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, considéré comme ensemble auxiliaire. Une structure d'espace fibré est définie sur deux ensembles, l'espace fibré E et le groupe correspondant G , G étant le plus souvent considéré comme ensemble auxiliaire .*

7. *Transport de structure. Identifications.*

Soit Σ une espèce de structure définie par la donnée de lettres $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p$, d'échelons $\underline{T}_1,\dots,\underline{T}_p$ et d'un axiome $\underline{R}'$. Soit $(S_1,\dots,S_p)$ une structure d'espèce Σ sur des ensembles $E_1,\dots,E_n$, et soit f_i une application biunivoque de E_i sur un ensemble E_i' , pour $1\leqslant i\leqslant n$, et f_i' l'application réciproque. Posons

$$S_j' = \underline{T}_j\langle f_1,\dots,f_n\rangle\langle S_j\rangle \quad \text{si } \underline{T}_j \text{ est covariant ,}$$

$$S_j' = \underline{T}_j\langle f_1',\dots,f_n'\rangle\langle S_j\rangle \quad \text{si } \underline{T}_j \text{ est contravariant ;}$$

il résulte de la condition (IS) du n°3 que $(S_1',\dots,S_p')$ est une structure d'espèce Σ sur $E_1',\dots,E_n'$; on dit qu'elle est obtenue en *transportant la structure* $(S_1,\dots,S_p)$ *aux ensembles* $E_1',\dots,E_n'$, *au moyen des applications biunivoques* $f_1,\dots,f_n$. Il résulte alors des définitions que $(f_1,\dots,f_n)$ est un *isomorphisme* de $E_1,\dots,E_n$ munis de $(S_1,\dots,S_p)$, sur $E_1',\dots,E_n'$ munis de $(S_1',\dots,S_p')$. Inversement, si $(g_1,\dots,g_n)$

est un isomorphisme de $E_1,\dots,E_n$ munis de $(S_1,\dots,S_p)$ sur des ensembles $E''_1,\dots,E''_n$ munis d'une structure $(S''_1,\dots,S''_p)$ d'espèce Σ, cette dernière structure est obtenue en transportant $(S_1,\dots,S_p)$ au moyen des applications $g_1,\dots,g_n$.

Dans une théorie $\mathcal{C}$, soit $(f_1,\dots,f_n)$ un isomorphisme des ensembles $E_1,\dots,E_n$, munis de la structure $(S_1,\dots,S_p)$ d'espèce Σ sur des ensembles $E'_1,\dots,E'_n$, munis de la structure $(S'_1,\dots,S'_p)$. Soient $T_1,\dots,T_p$ les échelons construits sur n lettres $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ qui servent à définir l'espèce Σ, et soient $U_1,\dots,U_q$ des échelons covariants (distincts ou non des précédents) construits sur les mêmes lettres. Enfin, soient $C_1,\dots,C_q$ des termes de $\mathcal{C}$ tels que les relations $C_k \in \underline{U}_k(E_1,\dots,E_n)$ $(1\leqslant k\leqslant q)$ soient vraies dans $\mathcal{C}$, et posons $C'_k = \underline{U}_k\langle f_1,\dots,f_n\rangle(C_k)$ $(1\leqslant k\leqslant q)$; alors les relations $C'_k\in\underline{U}_k(E'_1,\dots,E'_n)$ $(1\leqslant k\leqslant q)$ sont vraies dans $\mathcal{C}$, en raison de CE1. Cela étant, la plupart des relations de la forme $\underline{A}\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p,\underline{z}_1,\dots,\underline{z}_q\}$ qui interviennent dans la théorie $\mathcal{C}$ sont telles que, lorsque $\underline{A}\{E_1,\dots,E_n,S_1,\dots,S_p,C_1,\dots,C_q\}$ est vraie, il en est de même de $\underline{A}\{E'_1,\dots,E'_n,S'_1,\dots,S'_p,C'_1,\dots,C'_q\}$ (cf. Appendice I). En raison de ce fait, on notera souvent par le <u>même</u> signe les termes C'_k et C_k (en particulier E'_i et E_i seront notés par le même signe, ainsi que S'_j et S_j) ; lorsqu'on fait cet abus de langage, on dit qu'on a <u>identifié les ensembles</u> $E_1,\dots,E_n$, <u>munis de</u> $(S_1,\dots,S_p)$ <u>aux ensembles</u> $E'_1,\dots,E'_n$ <u>munis de</u> $(S'_1,\dots,S'_p)$, <u>au moyen de l'isomorphisme</u> $(f_1,\dots,f_n)$.

<u>Exemples</u>.- 1) Au chap. II, § 5, on a défini un certain nombre de bijections, dites <u>canoniques</u>, de certains termes de la théorie des ensembles sur d'autres termes ; signalons entre autres l'application

canonique de l'ensemble F^E sur l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F, l'application canonique de l'ensemble $X_\alpha^{\{\alpha\}}$ sur X_α , celle de $A \times B$ sur $\prod_{i=1,2} X_i$, où $X_1=A$, $X_2=B$, celle de $\prod_{\lambda \in L} (\prod_{\iota \in J_\lambda} X_\iota)$ sur $\prod_{\iota \in I} X_\iota$, lorsque $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une partition de I. Dans tous ces cas, il est d'usage d'<u>identifier</u> les termes correspondants au moyen de ces correspondances biunivoques. De même, l'application $G \rightarrow (G,A,B)$ de l'ensemble $\mathfrak{P}(A \times B)$ sur l'ensemble des correspondances de A dans B est une bijection ; en raison de ce fait, on identifie très souvent une correspondance entre A et B (et en particulier une application de A dans B) avec son graphe.

2) *L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est identifié à une partie de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels (ce dernier étant défini comme un ensemble quotient de l'ensemble des couples (m,n) d'entiers naturels) ; l'ensemble $\mathbb{Z}$ est identifié à une partie de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (ce dernier étant défini comme ensemble quotient d'un ensemble de couples (x,y) d'entiers rationnels) ; l'ensemble $\mathbb{Q}$ est identifié à une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (ce dernier étant défini comme ensemble quotient d'un ensemble de filtres sur $\mathbb{Q}$) ; enfin $\mathbb{R}$ est identifié à une partie de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes (ce dernier étant défini comme ensemble de couples (x,y) de nombres réels).*

Il est clair que si on considérait comme égaux (au sens du chap.I, § 5) deux termes que l'on a ainsi "identifiés", on obtiendrait aussitôt des contradictions (ce qui est vrai d'ailleurs pour tout abus de langage).

On aura soin de ne faire des "identifications" que lorsqu'on ne risquera pas d'en déduire involontairement de telles égalités contradictoires.

*Par exemple, en arithmétique, il est commode d'identifier un corps K de nombres algébriques à un sous-corps de chacun de ses "corps locaux" $K_{\mathfrak{p}}$, qui sont des complétés de K pour certaines topologies. Mais lorsqu'on considère simultanément plusieurs corps locaux $K_{\mathfrak{p}_i}$ (en nombre fini ou non il est aussi commode d'identifier K à la "diagonale" du produit $\prod_i K_{\mathfrak{p}_i}$, l'élément $x \in K$ étant identifié à l'élément (x_i) du produit tel que $x_i = x$ pour tout indice i . Dans ce dernier cas, il sera recommandé de renoncer à l'identification de K à un sous-corps de chacun des $K_{\mathfrak{p}_i}$. *

8. Espèces de structures équivalentes.

Considérons n lettres distinctes $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$, et deux espèces de structure, Σ , Σ' , comportant chacune la donnée des lettres $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$; en outre, Σ est définie par p lettres $\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p$, p échelons $\underline{T}_1,\dots,\underline{T}_p$ sur $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ et un axiome $\underline{R}'$; Σ' est définie par q lettres $\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_q$, q échelons $\underline{U}_1,\dots,\underline{U}_q$ sur $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ et un axiome $\underline{S}'$. Supposons que, dans la théorie $\mathcal{T}$ que l'on considère, on ait défini q termes $\underline{P}_k \{\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p\}$ $(1 \leq k \leq q)$ et p termes $\underline{Q}_j \{\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_q\}$ $(1 \leq j \leq p)$ de sorte que les conditions suivantes soient remplies :

1° On a $\underline{P}_k \{\underline{Q}_1\{\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_q\},\dots,\underline{Q}_p\{\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_q\}\} = \underline{t}_k$ $(1 \leq k \leq q)$, et

$$\underline{Q}_j \{\underline{P}_1\{\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p\},\dots,\underline{P}_q\{\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p\}\} = \underline{s}_j \quad (1 \leq j \leq p).$$

2° La relation

$$\underline{s}_1 \subset \underline{T}_1 \text{ et } \dots \text{ et } \underline{s}_p \subset \underline{T}_p \text{ et } \underline{R}' \{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n, \underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p\}$$

entraîne la relation

$$\underline{P}_1\{\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p\}\subset\underline{U}_1 \text{ et } \dots \text{ et } \underline{P}_q\{\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p\}\subset\underline{U}_q$$
$$\text{et } \underline{S}'\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{P}_1,\dots,\underline{P}_q\}$$

et la relation

$$\underline{t}_1\subset\underline{U}_1 \text{ et } \dots \text{ et } \underline{t}_q\subset\underline{U}_q \text{ et } \underline{S}'\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_q\}$$

entraîne la relation

$$\underline{Q}_1\{\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_q\}\subset\underline{T}_1 \text{ et } \dots \text{ et } \underline{Q}_p\{\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_q\}\subset\underline{T}_p$$
$$\text{et } \underline{R}'\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_p\}.$$

3° Soient $E_1,\dots,E_n,E'_1,\dots,E'_n$ 2n ensembles, f_i une application de E_i dans E'_i $(1\leqslant i\leqslant n)$. Soient $(S_1,\dots,S_p)$, $(S'_1,\dots,S'_p)$ des structures d'espèce Σ sur $E_1,\dots,E_n$ et $E'_1,\dots,E'_n$ respectivement. Soit $T_k=\underline{P}_k\{S_1,\dots,S_p\}$, $T'_k=\underline{P}_k\{S'_1,\dots,S'_p\}$, de sorte que, d'après 1°, $S_j=\underline{Q}_j\{T_1,\dots,T_q\}$, $S'_j=\underline{Q}_j\{T'_1,\dots,T'_q\}$. Alors, si $(f_1,\dots,f_n)$ est un homomorphisme de $E_1,\dots,E_n$ munis de $(S_1,\dots,S_p)$ dans $E'_1,\dots,E'_n$ munis de $(S'_1,\dots,S'_p)$, $(f_1,\dots,f_n)$ est aussi un homomorphisme de $E_1,\dots,E_n$ munis de $(T_1,\dots,T_q)$ dans $E'_1,\dots,E'_n$ munis de $(T'_1,\dots,T'_q)$; et réciproquement.

Cette dernière condition s'exprime en disant que les structures d'espèce Σ et celles d'espèce Σ' *ont les mêmes homomorphismes*.

Lorsque les trois conditions précédentes sont remplies, on dit que les espèces de structures Σ et Σ' sont *équivalentes*.

Il est clair alors que pour tout théorème $\underline{A}\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p\}$ de la théorie $\mathcal{T}_\Sigma$ des structures d'espèce Σ, la relation $\underline{A}\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_p\}$ est un théorème de la théorie $\mathcal{T}_{\Sigma'}$ des structures d'espèce Σ' ; et inversement, pour tout théorème $\underline{B}\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_q\}$ de la théorie $\mathcal{T}_{\Sigma'}$, la relation $\underline{B}\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{P}_1,\dots,\underline{P}_q$ est un théorème de $\mathcal{T}_\Sigma$. Il n'y a donc pas de distinction à faire entre les deux théories.

<u>Exemple</u>.- *Soit Σ l'espèce des structures topologiques (n°4, exemple 3) définie sur deux lettres A, S. Considérons la relation

$$(x \in A) \text{ et } (X \subset A) \text{ et } (\forall U)((U \in S \text{ et } x \in U) \Rightarrow (X \cap U \neq \emptyset))$$

Elle admet un graphe $Q \subset A \times \mathfrak{P}(A)$ par rapport au couple (x, X) ; Q est appelé l'ensemble des couples (x, X) tels que x soit <u>adhérent</u> à X (pour la topologie S). On peut démontrer (cf. <u>Top.gén.</u>, chap.I) que les relations suivantes sont des théorèmes de $\mathcal{T}_\Sigma$:

$$(\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow Y \subset Q\langle Y\rangle)$$

$$(\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow Q\langle Q\langle Y\rangle\rangle = Q\langle Y\rangle)$$

$$(\forall Y)(\forall Z)((Y \subset A \text{ et } Z \subset A) \Rightarrow Q\langle Y \cup Z\rangle = Q\langle Y\rangle \cup Q\langle Z\rangle).$$

Considérons alors l'espèce de structure Σ' définie par deux lettres A, T, l'échelon covariant $A \times \mathfrak{P}^+(A)$, et la relation

$$(T \subset A \times \mathfrak{P}(A)) \text{ et } (\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow Y \subset T\langle Y\rangle) \text{ et}$$
$$(\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow T\langle T\langle Y\rangle\rangle = T\langle Y\rangle) \text{ et } (\forall Y)(\forall Z)((Y \subset A \text{ et } Z \subset A) \Rightarrow$$
$$T\langle Y \cup Z\rangle = T\langle Y\rangle \cup T\langle Z\rangle)$$

Considérons d'autre part la relation

$$(U \subset A) \text{ et } (\forall x)(x \in U \Rightarrow x \notin T\langle A-U\rangle)$$

L'ensemble des U satisfaisant à cette relation est défini et est une partie P de $\mathfrak{P}(A)$. On démontre alors (loc.cit.) que les relations suivantes sont des théorèmes de $\mathcal{T}_{\Sigma'}$:

$$A \in P$$

$$(\forall R)(R \subset P \Rightarrow (\bigcup_{X \in R} X) \in P)$$

$$(\forall X)(\forall Y)((X \in P \text{ et } Y \in P) \Rightarrow (X \cap Y) \in P).$$

Autrement dit, les termes $Q\{S\}$ et $P\{T\}$ vérifient la condition 2° ci-dessus. On vérifie aussi qu'ils satisfont à la condition 1° et que les structures d'espèce Σ et d'espèce Σ' ont les mêmes homomorphismes (dire que f est un homomorphisme de A dans A' pour des structures T, T' d'espèce Σ' signifie que la relation $x \in T\langle X\rangle$ entraîne $f(x) \in T'\langle f\langle X\rangle\rangle$, ce qui est une condition de continuité pour f).

On considère donc toute structure d'espèce Σ' comme une topologie, savoir celle définie par le terme $P\{T\}$ correspondant.*

§ 2. Structures dérivées.

1. Structures plus ou moins fines.

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles, $(S_1, \ldots, S_p)$ et $(S'_1, \ldots, S'_p)$ des structures de même espèce Σ sur $E_1, \ldots, E_n$. Désignons par e_i l'application identique de E_i sur lui-même ($1 \leqslant i \leqslant n$). On dit que la structure $(S_1, \ldots, S_p)$ est plus fine que $(S'_1, \ldots, S'_p)$ (ou que $(S'_1, \ldots, S'_p)$ est moins fine que $(S_1, \ldots, S_p)$) si $(e_1, \ldots, e_n)$ est un homomorphisme de $E_1, \ldots, E_n$ munis de $(S_1, \ldots, S_p)$, sur $E_1, \ldots, E_n$ munis de $(S'_1, \ldots, S'_p)$.

De cette définition et du critère CE4, il résulte aussitôt que si $E'_1, \ldots, E'_n$ sont des ensembles munis d'une structure $(S''_1, \ldots, S''_p)$ d'espèce Σ, et si $(f_1, \ldots, f_n)$ est un homomorphisme de $E_1, \ldots, E_n$ munis de $(S'_1, \ldots, S'_p)$ dans $E'_1, \ldots, E'_n$ munis de $(S''_1, \ldots, S''_p)$, alors $(f_1, \ldots, f_n)$ est aussi un homomorphisme de $E_1, \ldots, E_n$ munis de $(S_1, \ldots, S_p)$ dans $E'_1, \ldots, E'_n$ munis de $(S''_1, \ldots, S''_p)$. De même, si $(g_1, \ldots, g_n)$ est un homomorphisme de $E'_1, \ldots, E'_n$ munis de $(S''_1, \ldots, S''_p)$, dans $E_1, \ldots, E_n$ munis de $(S_1, \ldots, S_p)$, $(g_1, \ldots, g_n)$ est aussi un homomorphisme de $E'_1, \ldots, E'_n$ munis de $(S''_1, \ldots, S''_p)$ dans $E_1, \ldots, E_n$ munis de $(S'_1, \ldots, S'_p)$.

En termes plus imagés, plus une structure (d'espèce Σ) sur $E_1, \ldots, E_n$ est fine, plus il y a d'homomorphismes de $E_1, \ldots, E_n$ dans des ensembles munis de structures de même espèce, et moins il y a d'homomorphismes de tels ensembles dans $E_1, \ldots, E_n$.

Soient $\underline{T}_1,\dots,\underline{T}_p$ les échelons qui interviennent dans la définition de l'espèce de structures Σ . Il résulte de la définition d'un homomorphisme (§ 1,n°5) que l'on peut encore exprimer de la façon suivante la condition pour que $(S_1,\dots,S_p)$ soit plus fine que $(S'_1,\dots,S'_p)$: il faut et il suffit que

1° $S_j \subset S'_j$ lorsque $\underline{T}_j$ est covariant ;

2° $S'_j \subset S_j$ lorsque $\underline{T}_j$ est contravariant.

Il est clair que la relation "$(S_1,\dots,S_p)$ est plus fine que $(S'_1,\dots,S'_p)$" est une relation d'ordre (entre $(S'_1,\dots,S'_p)$ et $(S_1,\dots,S_p)$) dans l'ensemble des structures d'espèce Σ sur $E_1,\dots,E_n$ car si une structure est à la fois plus fine et moins fine qu'une autre, elle lui est identique. On dit que deux structures d'espèce Σ sur $E_1,\dots,E_n$ sont comparables si l'une est plus fine que l'autre ; on dit qu'une structure est strictement plus fine (resp. strictement moins fine) qu'une autre si elle est plus fine (resp. moins fine) que cette dernière et en est distincte.

Exemples.- 1) Comme une structure d'ordre est définie par l'échelon covariant $A \times A$ (§ 1,n°3,exemple 1), pour qu'une structure d'ordre de graphe S sur A soit plus fine qu'une structure d'ordre de graphe S', il faut et il suffit que $S \subset S'$. Autrement dit, deux éléments x,y de A comparables pour S doivent aussi être comparables pour S' (chap.III, § 1,n°4, exemple 3).

2) Considérons deux structures algèbriques F,F' de même espèce Σ sur un ensemble A , F et F' étant les graphes de deux applications de $A \times A$ dans A (§ 1,n°3,exemple 2). Comme l'échelon $(A \times A) \times A$ est covariant, dire que F est plus fine que F' signifie que $F \subset F'$. Mais comme F et F' sont des graphes fonctionnels

ayant tous deux le même ensemble de définition $A \times A$, on a nécessairement $F=F'$. Autrement dit, deux structures comparables d'espèce Σ sont nécessairement identiques.

3) Soient S, S' deux topologies sur un ensemble A (§ 1, n°3 exemple 3). Comme l'échelon correspondant $\mathfrak{P}^{-}(A)$ est contravariant, dire que S est plus fine que S' signifie que $S' \subset S$; en d'autres termes, toute partie de A qui est un ensemble ouvert pour S' est aussi un ensemble ouvert pour S (ou, de façon plus imagée, plus une structure est fine plus il y a d'ensembles ouverts pour cette structure).

Remarque.- Nous venons de voir un exemple où deux structures comparables de même espèce Σ sont nécessairement identiques (a fortiori, l'ensemble des structures d'espèce Σ sur un ensemble donné n'est pas un ensemble ordonné filtrant). On rencontre de nombreux exemples de telles structures : *structures algèbriques dont les lois de composition sont partout définies, structures d'ordre total, topologies d'espace compact, topologies d'espace de Fréchet, topologies définies par une valeur absolue (ou une valuation) sur un corps, etc. *

Pour ces espèces de structures, un système d'application $(f_1, \ldots, f_n)$ qui est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme est un isomorphisme ; car en transportant par ces applications la structure $(S_1, \ldots, S_p)$, on obtient une structure plus fine que $(S'_1, \ldots, S'_p)$, donc qui lui est nécessairement identique.

Plus particulièrement, il peut arriver qu'une espèce de structure Σ soit telle que deux structures d'espèce Σ sur les mêmes ensembles $E_1, \ldots, E_n$ se déduisent nécessairement l'une de l'autre par transport de structure ; *il en est ainsi de la structure de corps premier, ou de celle d'espace vectoriel de dimension finie sur un corps donné (considéré alors comme ensemble auxiliaire), ou de celle de groupe monogène. *

Le cas extrême se présente lorsque deux structures d'espèce Σ, sur des ensembles $E_1,\ldots,E_n$ et $E'_1,\ldots,E'_n$ quelconques, se déduisent nécessairement l'une de l'autre par transport de structure. On dit alors que l'espèce de structure Σ est univalente. *Il en est ainsi de la structure de groupe monogène infini (isomorphe à $\mathbb{Z}$), de celle de corps premier de caractéristique 0 (isomorphe à $\mathbb{Q}$), de la structure de corps ordonné, archimédien et complet (isomorphe à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{Z}$ intervenant comme ensemble auxiliaire dans ces deux dernières structures), de la structure de corps connexe, localement compact, commutatif et algèbriquement clos (isomorphe à $\mathbb{C}$), enfin de la structure de corps connexe, localement compact et non commutatif (isomorphe au corps des quaternions K)*. On observera que ces structures sont essentiellement celles qui sont à la base de la Mathématique classique.

2. Structures initiales.

Pour simplifier, nous allons supposer, dans ce qui suit, que les structures dont il est question sont définies sur un seul ensemble, ou que tous les ensembles de base sont des ensembles auxiliaires, à l'exception d'un seul.

Considérons une espèce de structure Σ, et une famille $(A_\iota)_{\iota\in I}$ d'ensembles, dont chacun est muni d'une structure $\mathcal{S}_\iota=(S_{1\iota},S_{2\iota},\ldots,S_{p\iota})$ d'espèce Σ. Soit d'autre part E un ensemble, et, pour tout $\iota\in I$, soit f_ι une application de E dans A_ι. On dit qu'une structure $\mathcal{S}_o=(S_1,S_2,\ldots,S_p)$ d'espèce Σ sur E est structure initiale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$ si elle possède la propriété suivante :

(IN) Quels que soient l'ensemble E', la structure $\mathcal{S}'$ d'espèce Σ sur E', et l'application g <u>de</u> E' <u>dans</u> E , la relation

"g est un homomorphisme de E' dans E "

est <u>équivalente</u> à la relation

"quel que soit $\iota \in I$, $f_\iota \circ g$ est un homomorphisme de E' dans A_ι"

Comme nous le verrons ci-dessous, il n'existe pas nécessairement de structure initiale pour une famille donnée (A_ι , $\mathcal{S}_\iota$, f_ι) ; mais on a le critère suivant :

CE6 . <u>S'il existe sur</u> E <u>une structure initiale pour la famille</u> $(A_\iota , \mathcal{S}_\iota , f_\iota)_{\iota \in I}$, <u>elle est unique, et elle est la moins fine des structures d'espèce</u> Σ <u>sur</u> E <u>pour lesquelles chacune des applications</u> f_ι <u>est un homomorphisme</u>.

En effet soit, $\mathcal{S}_0$ une structure initiale sur E , et $\mathcal{S}'$ une structure d'espèce Σ sur E pour laquelle chacune des f_ι est un homomorphisme ; désignant par e l'application identique de E , muni de $\mathcal{S}'$, sur E , muni de $\mathcal{S}_0$, on peut encore dire que $f_\iota \circ e$ est un homomorphisme pour tout $\iota \in I$; en vertu de la condition (IN), e est un homomorphisme, ce qui signifie (n°1) que $\mathcal{S}'$ est <u>plus fine</u> que $\mathcal{S}_0$. Il est clair d'autre part, en appliquant (IN) àll'application identique de E (muni de $\mathcal{S}_0$) sur lui-même, que chacune des f_ι est un homomorphisme de E dans A_ι ce qui prouve le critère.

Lorsque I est un ensemble à un seul élément, la structure initiale pour le seul triplet (A, $\mathcal{S}$,f) est encore appelée (lorsqu'elle existe) <u>image réciproque par</u> f <u>de la structure</u> $\mathcal{S}$.

On a le <u>critère de transitivité</u> suivant :

CE7. Soient I un ensemble d'indices, $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ une partition de I. Pour tout $\iota \in I$, soit A_ι un ensemble, $\mathcal{S}_\iota$ une structure d'espèce Σ sur A. Pour tout $\lambda \in L$, soit B_λ un ensemble. Pour tout $\iota \in J_\lambda$, soit $g_{\lambda\iota}$ une application de B_λ dans A_ι, et pour tout $\lambda \in L$, soit h_λ une application d'un ensemble E dans B_λ. On suppose que, pour tout $\lambda \in L$, il existe une structure initiale $\mathcal{S}'_\lambda$ pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_{\lambda\iota})_{\iota \in J_\lambda}$; on suppose en outre qu'il existe une structure initiale $\mathcal{S}''$ pour la famille $(B_\lambda, \mathcal{S}'_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in L}$. Alors, si, pour tout $\lambda \in L$ et pour tout $\iota \in J_\lambda$ on pose $f_\iota = g_{\lambda\iota} \circ h_\lambda$, la structure $\mathcal{S}''$ est structure initiale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$.

En effet, soit E' un ensemble muni d'une structure $\mathcal{S}$ d'espèce Σ, et u une application de E' dans E ; la relation "u est un homomorphisme de E' dans E " (E étant muni de $\mathcal{S}''$) est équivalente à "quel que soit $\lambda \in L$, $h_\lambda \circ u$ est un homomorphisme de E' dans B_λ " ; comme la relation "$h_\lambda \circ u$ est un homomorphisme de E' dans B_λ " est équivalente à "quel que soit $\iota \in J_\lambda$, $g_{\lambda\iota} \circ h_\lambda \circ u = f_\iota \circ u$ est un homomorphisme de E' dans A_ι ", on voit que $\mathcal{S}''$ vérifie la condition (IN) pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$.

Soit φ une application biunivoque de E sur un ensemble F, et ψ l'application réciproque ; s'il existe une structure initiale $\mathcal{S}_0$ pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$, la structure $\mathcal{S}'_0$ sur F, transportée de $\mathcal{S}_0$ par φ, est structure initiale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota \circ \psi)_{\iota \in I}$ comme il résulte aussitôt de la définition.

Exemples : I. Structure induite. Soient A un ensemble muni d'une structure $\mathcal{S}$ d'espèce Σ, B une partie de A, i l'injection de B dans A. On appelle structure induite par $\mathcal{S}$ sur B l'image réciproque (si elle existe) de la structure $\mathcal{S}$ par l'injection i.

Une structure d'ordre induit une structure de même espèce sur toute partie de l'ensemble où elle est définie ; il n'en est pas de même d'une structure d'ensemble ordonné filtrant. * Une topologie induit une topologie sur toute partie de l'ensemble où elle est définie ; il n'en est pas de même d'une topologie d'espace compact. Sur une partie quelconque B d'un ensemble A où est définie une structure algèbrique cette structure n'induit pas en général une structure de même espèce ; lorsque la structure donnée sur A comporte des lois de composition partout définies, il est nécessaire que B soit stable pour chacune de ces lois, mais cette condition n'est pas suffisante. *

Remarque.- Lorsque Σ_0 est une espèce de structure moins riche que Σ, il arrive souvent (comme le montrent les exemples précédents) qu'une structure d'espèce Σ sur A n'induit pas une structure de même espèce sur une partie B de A, mais qu'en appauvrissant la structure donnée en une structure d'espèce Σ_0, elle induise sur B une structure d'espèce Σ_0 ; par abus de langage, on dira encore que cette structure est induite sur B par la structure donnée.

Le critère général CE7 donne pour les structures induites le critère de transitivité :

CE8. Soient B une partie de A, C une partie de B ; si une structure $\mathcal{S}$ sur A induit sur B une structure $\mathcal{S}'$, et si $\mathcal{S}'$ induit sur C une structure $\mathcal{S}''$, alors $\mathcal{S}''$ est la structure induite sur C par $\mathcal{S}$.

II. Structure produit. Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, et sur chaque ensemble A_ι, soit $\mathcal{S}_\iota$ une structure d'espèce Σ ; soit $E = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ l'ensemble produit de la famille $(A_\iota)_{\iota \in I}$ (chap.II, § 5), et soit pr_ι la projection de E sur A_ι. On appelle <u>structure produit</u> des structures $\mathcal{S}_\iota$ la structure initiale (si elle existe) pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, pr_\iota)$.

Une famille de structures d'ordre admet toujours une structure produit, mais non une famille de structures d'ensemble totalement ordonné. Une famille de structures de groupe admet toujours une structure produit, mais non une famille de structures de corps. Une famille de topologies admet toujours une structure produit, mais non une famille de topologies d'espace localement compact.

Comme il résulte de ces exemples, on peut souvent définir une structure produit en <u>appauvrissant</u> l'espèce de la structure que l'on considère.

Le critère CE7 donne pour les structures produits le <u>critère d'associativité</u> :

CE9. <u>Soit</u> $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ <u>une partition d'un ensemble</u> I. <u>Soit</u> $(A_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille d'ensembles,</u> $\mathcal{S}_\iota$ <u>une structure d'espèce</u> Σ <u>sur</u> A_ι. <u>Si, sur chaque produit partiel</u> $F_\lambda = \prod_{\iota \in J_\lambda} A_\iota$, $\mathcal{S}'_\lambda$ <u>est la structure produit des</u> $\mathcal{S}_\iota$ <u>(pour</u> $\iota \in J_\lambda$) <u>et si, sur le produit</u> $E = \prod_{\lambda \in L} F_\lambda$, $\mathcal{S}''$ <u>est la structure produit des</u> $\mathcal{S}'_\lambda$, <u>alors, en identifiant</u> E <u>au produit</u> $\prod_{\iota \in I} A_\iota$, $\mathcal{S}''$ <u>est la structure produit des</u> $\mathcal{S}_\iota$ $(\iota \in I)$.

Une autre application de CE7 donne le critère suivant, relatif aux structures induites par une structure produit :

CE10. <u>Soient</u> $(B_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille d'ensembles,</u> $\mathcal{S}_\iota$ <u>une structure d'espèce</u> Σ <u>sur</u> B. <u>Pour chaque</u> $\iota \in I$, <u>soit</u> A_ι <u>une partie de</u> B_ι. <u>On suppose que chaque</u> $\mathcal{S}_\iota$ <u>induise une structure</u> $\mathcal{S}'_\iota$ <u>sur</u> A_ι, <u>et que sur le produit</u> $B = \prod_{\iota \in I} B_\iota$, <u>il existe une structure</u> $\mathcal{S}$ <u>produit des</u> $\mathcal{S}_\iota$. <u>Dans ces conditions, les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

a) sur l'ensemble $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota \subset B$, il existe une structure $\mathcal{S}''$ induite par $\mathcal{S}$;

b) sur l'ensemble A , il existe une structure $\mathcal{S}'$ produit des structures $\mathcal{S}'_\iota$.

En outre, ces propositions entraînent que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}''$.

En effet, soit i_ι l'injection de A_ι dans B_ι , i l'injection de A dans B, p_ι la projection de B sur B_ι , p'_ι la projection de A sur A_ι ; on a évidemment $p_\iota \circ i = i_\iota \circ p'$ pour tout $\iota \in I$. D'après CE7, $\mathcal{S}''$ est la structure initiale correspondant à la famille $(B_\iota , \mathcal{S}_\iota , p_\iota \circ i)_{\iota \in I}$ et $\mathcal{S}'$ la structure initiale correspondant à la famille $(B_\iota , \mathcal{S}_\iota , p_\iota \circ i)_{\iota \in I}$ et $\mathcal{S}'$ la structure initiale correspondant à la famille $(B_\iota , \mathcal{S}_\iota , i_\iota \circ p'_\iota)_{\iota \in I}$. D'où le critère.

On a enfin le critère suivant :

CE11. Soient $(A_\iota)_{\iota \in I}$, $(B_\iota)_{\iota \in I}$ deux familles d'ensembles, $\mathcal{S}_\iota$ une structure d'espèce Σ sur A_ι , $\mathcal{S}'_\iota$ une structure d'espèce Σ sur B_ι . Soient $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) la structure produit des $\mathcal{S}_\iota$ (resp. $\mathcal{S}'_\iota$) sur $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ (resp. $B = \prod_{\iota \in I} B_\iota$) ; et, pour tout $\iota \in I$, soit f_ι une application de A_ι dans B_ι . Pour que l'application $f = (f_\iota)_{\iota \in I}$ soit un homomorphisme de A dans B , il faut et il suffit que, pour tout $\iota \in I$, f_ι soit un homomorphisme de A_ι dans B_ι .

Il suffit en effet d'appliquer à f la condition (IN), en remarquant que, si pr_ι est la projection de B sur B_ι , on a $pr_\iota \circ f = f_\iota$.

III. Borne supérieure d'une famille de structures.

Soit $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de structures de même espèce Σ sur un même ensemble A ; désignons par A_ι l'ensemble A muni de la structure $\mathcal{S}_\iota$, et par e_ι l'application identique de A dans A_ι . S'il existe une structure initiale $\mathcal{S}$ pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, e_\iota)$, il résulte de CE6 que $\mathcal{S}$ est la <u>moins fine</u> de toutes les structures d'espèce Σ qui sont <u>plus fines</u> que chacune des structures $\mathcal{S}_\iota$: autrement dit, $\mathcal{S}$ est la <u>borne supérieure</u> de l'ensemble des $\mathcal{S}_\iota$ dans l'ensemble des structures d'espèce Σ sur A . Mais il peut se faire que cet ensemble admette une borne supérieure, sans que cette borne supérieure soit structure initiale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, e_\iota)$.

Z

Par exemple, considérons l'espèce de structure Σ définie sur deux ensembles F,A , où F est un ensemble auxiliaire ; Σ est définie par la donnée d'une espèce de structure sous-jacente Σ_0 <u>sur</u> F , et en outre un seul échelon (covariant) A , et une lettre S ; la caractérisation typique comporte (en outre de celle de Σ_0) la relation $S \subset A$; enfin l'axiome de Σ est la conjonction de celui de Σ_0 et de l'axiome

$$A=F \quad \text{et} \quad S \in \mathfrak{F}$$

où $\mathfrak{F}$ est un terme de la théorie $\mathcal{T}_{\Sigma_0}$, tel que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(F)$ et satisfaisant aux conditions suivantes : 1) pour toute partie $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ telle qu'il existe un ensemble M contenant tous les $X \in \mathfrak{G}$, la réunion des $X \in \mathfrak{G}$ appartient à $\mathfrak{F}$; 2) il existe deux ensembles N_1, N_2 appartenant à $\mathfrak{F}$ et tels que $N_1 \cap N_2$ n'appartienne pas à $\mathfrak{F}$. *(On peut prendre $F = R^2$, et pour $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties de R^2 définies par trois inégalités : $x \geqslant 0$, $x \leqslant 1$, $y \geqslant ax+b$, a et b arbitraires). Considérons alors sur A les deux structures d'espèce Σ *obtenues en prenant pour S les ensembles N_1 et N_2, et soit $N \neq N_1 \cap N_2$ la réunion des ensembles de $\mathfrak{F}$ contenus dans $N_1 \cap N_2$. Ces deux structures admettent une borne supérieure définie en prenant $S=N$. Mais un homomorphisme de A muni de N dans A muni de N_1

(resp. N_2) est une application f de A dans A satisfaisant à la condition $f(N) \subset N_1$ (resp. $f(N) \subset N_2$) ; et il est facile de définir une application f telle que $f(N) \subset N_1 \cap N_2$, mais telle que $f(N) \not\subset N$; f n'est alors pas un endomorphisme de A muni de la structure N , autrement dit, la condition (IN) n'est pas vérifiée et N n'est pas structure initiale pour N_1 et N_2 .

Remarque.- Soit B l'ensemble produit $\prod_{\iota \in I} A_\iota$, Δ la diagonale de ce produit, et h l'application canonique de A sur Δ , telle que h(x) soit l'élément $(x_\iota)_{\iota \in I}$ tel que $x_\iota = x$ pour tout $\iota \in I$. Supposons qu'il existe sur B la structure produit $\mathcal{S}'$ des $\mathcal{S}_\iota$, et sur Δ la structure $\mathcal{S}''$ induite par $\mathcal{S}'$; et désignons par $\mathcal{S}$ la structure obtenue en transportant $\mathcal{S}''$ sur A par l'application h^{-1}. Comme on peut écrire $e_\iota = pr_\iota \circ i \circ h$, où i est l'injection de Δ dans B , le critère de transitivité CE7 prouve que $\mathcal{S}$ est la structure initiale pour la famille $(A_\iota , \mathcal{S}_\iota , e_\iota)$.

3. Structures finales.

Considérons encore une espèce de structure Σ , et une famille $(A_\iota)_{\iota \in I}$ d'ensembles, dont chacun est muni d'une structure $\mathcal{S}_\iota$ d'espèce Σ . Soit d'autre part E un ensemble, et, pour chaque $\iota \in I$, soit g_ι une application de A_ι dans E . On dit qu'une structure $\mathcal{S}_\infty$ d'espèce Σ sur E est structure finale pour la famille $(A_\iota , \mathcal{S}_\iota , g_\iota)_{\iota \in I}$ si elle possède la propriété suivante :

(FI) Quels que soient l'ensemble E', la structure $\mathcal{S}'$ d'espèce Σ sur E', et l'application f de E dans E', la relation

"f est un homomorphisme de E dans E' "

est équivalente à la relation

"quel que soit $\iota \in I$, $f \circ g_\iota$ est un homomorphisme de A_ι dans E' ".

Il n'existe pas nécessairement de structure finale pour une famille donnée $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)$; mais on a le critère suivant :

CE12. <u>S'il existe sur</u> E <u>une structure finale pour la famille</u> $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)_{\iota \in I}$, <u>elle est unique, et elle est la plus fine des structures d'espèce</u> Σ <u>sur</u> E <u>pour lesquelles chacune des applications</u> g_ι <u>soit un homomorphisme</u>.

En effet, soit $\mathcal{S}_\infty$ une structure finale sur E , et $\mathcal{S}'$ une structure d'espèce Σ sur E pour laquelle chacune des g_ι soit un homomorphisme ; désignant par e_ι l'application identique de E muni de $\mathcal{S}_\infty$, sur E , muni de $\mathcal{S}'$, on peut encore dire que $e \circ g_\iota$ est un homomorphisme pour tout ι ; en vertu de la condition (FI), e est un homomorphisme, ce qui signifie (n°1) que $\mathcal{S}'$ est <u>moins fine</u> que $\mathcal{S}_\infty$. D'autre part, en appliquant (FI) à l'application identique de E (muni de $\mathcal{S}_\infty$) sur lui-même, on voit que chacune des g_ι est un homomorphisme de A_ι dans E , d'où le critère.

Soit φ une application biunivoque de E sur un ensemble F ; s'il existe une structure finale $\mathcal{S}_\infty$ pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)_{\iota \in I}$, la structure $\mathcal{S}'_\infty$ sur F , transportée de $\mathcal{S}_\infty$ par φ , est structure finale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, \varphi \circ g_\iota)_{\iota \in I}$.

Lorsque I est un ensemble à un seul élément, la structure finale pour le seul triplet $(A, \mathcal{S}, g)$ est encore appelée (lorsqu'elle existe) <u>l'image directe par</u> g <u>de la structure</u> $\mathcal{S}$.

On a le <u>critère de transitivité</u> suivant :

CE13. <u>Soient</u> I <u>un ensemble d'indices</u>, $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ <u>une partition de</u> I . <u>Pour tout</u> $\iota \in I$, <u>soit</u> A_ι <u>un ensemble</u>, $\mathcal{S}_\iota$ <u>une structure d'espèce</u> Σ <u>sur</u>

Pour tout $\lambda \in L$, soit B_λ un ensemble. Pour tout $\iota \in J_\lambda$, soit $g_{\iota\lambda}$ une application de A_ι dans B_λ, et pour tout $\lambda \in L$, soit h_λ une application de B_λ dans un ensemble E. On suppose que, pour tout $\lambda \in L$, il existe une structure finale $\mathcal{S}'_\lambda$ pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_{\iota\lambda})_{\iota \in J_\lambda}$; on suppose en outre qu'il existe une structure finale $\mathcal{S}''$ pour la famille $(B_\lambda, \mathcal{S}'_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in L}$. Alors, si, pour tout $\lambda \in L$ et tout $\iota \in J_\lambda$, on pose $f_\iota = h_\lambda \circ g_{\iota\lambda}$, la structure $\mathcal{S}''$ est structure finale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$.

En effet, si E' est un ensemble muni d'une structure $\mathcal{S}$ d'espèce Σ, et u une application de E dans E', la relation "u est un homomorphisme de E dans E' " (E étant muni de $\mathcal{S}''$) est équivalente à "quel que soit $\lambda \in L$, $u \circ h_\lambda$ est un homomorphisme de B_λ dans E' " ; comme la relation "$u \circ h_\lambda$ est un homomorphisme de B_λ dans E' " est équivalente à "quel que soit $\iota \in J_\lambda$, $u \circ h_\lambda \circ g_{\iota\lambda} = u \circ f_\iota$ est un homomorphisme de A_ι dans E' ", on voit que $\mathcal{S}''$ vérifie bien la condition (FI) pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$.

Exemples : I. Structure quotient. Soient A un ensemble muni d'une structure $\mathcal{S}$ d'espèce Σ, R une relation d'équivalence dans A, et soit φ l'application canonique de A sur l'ensemble quotient $E = A/R$ (chap. II, § 6). On appelle structure quotient de $\mathcal{S}$ par la relation R l'image directe (si elle existe) de la structure $\mathcal{S}$ par l'application φ.

En général, une structure d'ordre ou une structure algèbrique n'admettent pas de structure quotient pour une relation d'équivalence quelconque. Par contre, une topologie admet toujours une structure quotient pour une relation d'équivalence arbitraire, mais il n'en est pas de même de la structure d'espace topologique séparé.

Soit f une application de A *sur* un ensemble B , R la relation d'équivalence f(x)=f(y), φ l'application canonique de A sur A/R ; posons $f=g\circ\varphi$, où g est une application biunivoque de A/R sur B. Pour qu'il existe une structure quotient $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ par R , il faut et il suffit qu'il existe une image directe $\mathcal{S}''$ de $\mathcal{S}$ par f , et $\mathcal{S}''$ est alors transportée de $\mathcal{S}'$ par g .

Le critère de transitivité CE13 donne en particulier le critère suivant :

CE14. *Soient* A *un ensemble muni d'une structure* $\mathcal{S}$, R *une relation d'équivalence dans* A *telle qu'il existe sur* B=A/R *une structure quotient* $\mathcal{S}'$ *de* $\mathcal{S}$ *par* R . *Soit* S *une relation d'équivalence dans* R , *entraînée par* R , *et telle que* S/R *soit, sur* B , *une relation d'équivalence pour laquelle il existe sur* B/(S/R) *une structure quotient* $\mathcal{S}''$ *de* $\mathcal{S}'$ *par* S/R . *Alors il existe sur* A/S *une structure quotient* $\mathcal{S}_0$ *de* $\mathcal{S}$ *par* S , *et l'application canonique de* A/S (*muni de* $\mathcal{S}_0$) *sur* (A/R)/(S/R) (*muni de* $\mathcal{S}''$) *est un isomorphisme*.

En effet, il résulte de CE13 que, si φ est l'application canonique de A sur A/R , ψ celle de B sur B/S , $\mathcal{S}''$ est structure finale pour le triplet (A, $\mathcal{S}$,$\psi\circ\varphi$). Le critère résulte alors de ce que la relation $\psi(\varphi(x))=\psi(\varphi(y))$ est équivalente à S .

Soient A,B deux ensembles munis respectivement de structures $\mathcal{S}$ $\mathcal{S}'$ d'espèce Σ , et soit f un homomorphisme de A dans B . Soit R la relation d'équivalence f(x)=f(y), φ l'application canonique de A/R sur $f(A)\subset B$, et i l'injection de f(A) dans B . Supposons que $\mathcal{S}$ admette une structure quotient $\mathcal{S}_0$ par R , et que $\mathcal{S}'$ induise une structure $\mathcal{S}'_0$ sur f(A). Alors, dans la *décomposition canonique* $f=i\circ g\circ\varphi$, g est un *épimorphisme* et un <u>monomorphisme</u> (mais non nécessairement un isomorphisme) de A/R (muni de $\mathcal{S}_0$) sur $f(A)$ (muni de $\mathcal{S}'_0$) : en effet, $i\circ g$ est un homomorphisme de A/R dans B , par définition de la structure quotient, et g un homomorphisme de A/R dans $f(A)$ par définition de la structure induite.

CE15. <u>Soient</u> A,B <u>deux ensembles munis de structures</u> $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ <u>d'espèce</u> Σ , R <u>une relation d'équivalence dans</u> A , S <u>une équivalence dans</u> B . <u>On suppose qu'il existe une structure quotient</u> $\mathcal{S}_0$ <u>de</u> $\mathcal{S}$ <u>par</u> R , <u>et une structure quotient</u> $\mathcal{S}'_0$ <u>de</u> $\mathcal{S}'$ <u>par</u> S . <u>Alors, si</u> f <u>est un homomorphisme de</u> A <u>dans</u> B, <u>compatible avec les relations</u> R <u>et</u> S , <u>et</u> g <u>l'application obtenue par passage aux quotients</u> g <u>est un homomorphisme de</u> A/R <u>dans</u> B/S .

En effet, si φ est l'application canonique de A sur A/R , ψ l'application canonique de B sur B/S , on a $g\circ\varphi = \psi\circ f$; comme ψ et f sont des homomorphismes, il en est de même de $\psi\circ f$ en vertu de CE4 ; comme $g\circ\varphi$ est un homomorphisme, il en est de même de g , par définition de la structure quotient.

II. <u>Borne inférieure d'une famille de structures</u>. Soit $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de structures de même espèce Σ sur un <u>même</u> ensemble A ; soit A_ι l'ensemble A muni de la structure $\mathcal{S}_\iota$, et e_ι l'application identique de A_ι dans A . S'il existe une structure finale $\mathcal{S}$ pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, e_\iota)$, il résulte de CE12 que $\mathcal{S}$ est la <u>borne inférieure</u> de l'ensemble des $\mathcal{S}_\iota$ dans l'ensemble des structures d'espèce Σ sur A . Mais le même exemple qu'au n°2, exemple III montre que la borne inférieure de cet ensemble peut exister sans être structure finale pour $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, e_\iota)$.

Appendice I.

Relations structurantes et termes structurants.

1. Relations structurantes et termes structurants.

Nous nous proposons de donner un certain nombre de critères permettant d'affirmer que dans une théorie $\mathcal{E}$, une relation vérifie la condition (IS) qui a été introduite au §1, n°4, dans la définition d'une espèce de structure.

Soient $x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p$ des lettres distinctes entre elles et distinctes des constantes de $\mathcal{E}$, et soient $T_1, \ldots, T_p$ p échelons d'une construction d'échelons sur $x_1, \ldots, x_n$. Nous dirons que la relation $S\{x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p\}$:

" $s_1 \in T_1(x_1, \ldots, x_n)$ et $s_2 \in T_2(x_1, \ldots, x_n)$ et ...et $s_p \in T_p(x_1, \ldots x_n)$"

est une typification des lettres $s_1, \ldots, s_p$ dans laquelle la lettre s_j est typifiée de type T_j.

Soit alors $R\{x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p\}$ une relation de $\mathcal{E}$, contenant certaines des lettres x_i, s_j (et éventuellement d'autres lettres). On dit que R est structurante (dans $\mathcal{E}$) pour la typification S si la relation

(1) " $S\{x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p\}$ et f_1 est une bijection de x_1 sur y_1 et ... et f_n est une bijection de x_n sur y_n "

entraîne, dans $\mathcal{E}$, la relation

$$\text{"}\; R\{x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p\} \Leftrightarrow R\{y_1, \ldots, y_n, s'_1, s'_2, \ldots, s'_p\} \;\text{"}$$

où $y_1, \ldots, y_p$ sont des lettres distinctes des constantes de $\mathcal{E}$ et de toutes les lettres figurant dans $R\{x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p\}$, et où on a posé

$$s'_j = T_j \langle f_1, \ldots, f_n \rangle (s_j) \qquad (1 \leq j \leq p).$$

<u>Remarques</u>.- 1) Il suffit de démontrer que, dans $\mathcal{C}$, la relation (1) entraîne la relation

$$R\{x_1,\ldots,x_n, s_1,\ldots,s_p\} \Rightarrow R\{y_1,\ldots,y_n, s'_1,\ldots,s'_p\}.$$

En effet, désignons par A la relation (1), et substituons dans A , x_i à y_i , y_i à x_i , g_i à f_i $(1 \leq i \leq n)$ et t_j à s_j $(1 \leq j \leq p)$. Alors cette nouvelle relation A' entraîne

$$R\{y_1,\ldots,y_n, t_1,\ldots,t_p\} \Rightarrow R\{x_1,\ldots,x_n, t'_1,\ldots,t'_p\}$$

avec

$$t'_j = T_j \langle g_1,\ldots,g_n \rangle (t_j)$$

Si alors, dans A', on substitue s'_j à t_j , et à g_i l'application réciproque de f_i , on obtient une relation qui est <u>entraînée</u> par A ; par suite A entraîne la relation obtenue en faisant les mêmes substitutions dans la relation

$$R\{y_1,\ldots,y_n, t_1,\ldots,t_p\} \Rightarrow R\{x_1,\ldots,x_n, t'_1,\ldots,t'_p\}$$

ce qui, compte tenu de CE3, donne

$$R\{y_1,\ldots,y_n, s'_1,\ldots,s'_p\} \Rightarrow R\{x_1,\ldots,x_n, s_1,\ldots,s_p\}.$$

2) Il est clair que si une relation $R\{x_1,\ldots,x_n, s_1,\ldots,s_p\}$ est structurante pour la typification

$$s_1 \in \mathfrak{P}(T_1(x_1,\ldots,x_n)) \text{ et } \ldots \text{ et } s_p \in \mathfrak{P}(T_p(x_1,\ldots,x_n))$$

elle satisfera à la condition (IS) du § 1 .

Soit $U\{x_1,\ldots,x_n, s_1,\ldots,s_p\}$ un terme de $\mathcal{C}$. On dit que U est un terme structurant (dans $\mathcal{C}$) <u>de type</u> T (T étant un échelon sur $x_1,\ldots,x_n$) pour la <u>typification</u> S si les deux conditions suivantes sont remplies :

1) la relation S entraîne (dans $\mathcal{C}$) la relation $U \in T(x_1,\ldots,x_n)$;

2) $\underline{z}$ étant une lettre distincte des constantes de $\mathcal{C}$, des $\underline{x}_i, \underline{s}_j$ et des lettres figurant dans $\underline{U}$, la relation $\underline{z} = \underline{U}$ est structurante pour la typification " $\underline{S}$ et $\underline{z} \in T(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$" .

Cette seconde condition revient à dire que, dans $\mathcal{C}$, la relation " $\underline{S}$ et $\underline{f}_1$ est une bijection de $\underline{x}_1$ dans $\underline{y}_1$ et ... et $\underline{f}_n$ est une bijection de $\underline{x}_n$ dans $\underline{y}_n$ " entraîne la relation

(2) $T\langle \underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n \rangle (\underline{U}\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n, \underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_p\}) = \underline{U}\{\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n, \underline{s}'_1, \ldots, \underline{s}'_p\}$

On dit souvent que le premier membre de (2) est le <u>transformé</u> du terme $\underline{U}\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n, \underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_p\}$ par les bijections $\underline{f}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

2. <u>Critères de structura-nce.</u>

Dans les critères ci-dessous, lorsqu'il est question (dans un même critère) de relations et de termes structurants, il est toujours sous-entendu que ces termes ou relations se rapportent tous à la <u>même</u> typification.

Nous utiliserons la remarque suivante : Soit $\underline{S}$ une typification portant sur les lettres $\underline{s}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$, $\underline{s}_j$ étant typifiée de type $\underline{T}_j$. Soit $\underline{t}$ une lettre distincte des constantes de $\mathcal{C}$ et de toutes les lettres figurant dans $\underline{S}$ et considérons la typification " $\underline{S}$ et $\underline{t} \in T(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$", où T est un certain échelon ; nous désignerons cette relation par $\underline{S}'$. Cela étant, soit $\underline{R}$ une relation structurante <u>pour la typification</u> $\underline{S}'$, et supposons en outre que $\underline{R}$ <u>ne contienne pas</u> $\underline{t}$; on peut alors en conclure que $\underline{R}$ est structurante <u>pour la typification</u> $\underline{S}$, dans les deux cas suivants :

1° $T(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ est un ensemble $\neq \emptyset$ (par exemple de la forme $\mathfrak{P}(T'(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n))$) ; cela résulte en effet de la méthode de la constante auxiliaire (chap. I, § 3, n°3 et § 4, n°1).

2° T est identique à un des T_j ; en effet, en substituant alors S_j à t dans S', on obtient une relation équivalente à S, et cette substitution ne change pas R, d'où la conclusion (chap. I, § 2, règle C3).

RS0. *L'ensemble vide est un terme structurant de type quelconque (pour toute typification).*

En effet, pour toute application g, on a $g\langle\emptyset\rangle = \emptyset$.

Il est clair que les lettres s_j et x_i sont des termes structurants pour la typification S (de types T_j et $\mathfrak{P}(x_i)$ respectivement).

RS1. *Si* U_1 *et* U_2 *sont des termes structurants de même type, la relation* $U_1 = U_2$ *est structurante.*

RS2. *Si* U *et* V *sont des termes structurants de types respectifs* T *et* $\mathfrak{P}(T)$, *la relation* $U \in V$ *est structurante.*

RS3. *Si* U *et* V *sont des termes structurants de type* $\mathfrak{P}(T)$, *la relation* $U \subset V$ *est structurante.*

RS4. *Si* U *et* U' *sont des termes structurants de types* T et T', (U, U') *est un terme structurant de type* $T \times T'$, *et* $\mathfrak{P}(U)$ *est un terme structurant de type* $\mathfrak{P}(T)$. *Si* U *et* U' *sont des termes structurants de types* $\mathfrak{P}(T)$ et $\mathfrak{P}(T')$, $U \times U'$ *est un terme structurant de type* $\mathfrak{P}(T \times T')$.

Les démonstrations de ces critères découlent immédiatement des définitions et des propriétés des bijections. On notera qu'il résulte de RS4, appliqué de proche en proche, que si $U_1, \ldots, U_q$ sont des termes structurants, toute réalisation d'échelon sur ces termes est un terme structurant.

RS5. *Si* R *et* R' *sont des relations structurantes, il en est de même des relations* "non R", "R ou R'", "R et R'", "$R \Rightarrow R'$", "$R \Leftrightarrow R'$".

Cela résulte aussitôt des critères du chap.I .

RS6. <u>Si $\underline{R}$ est une relation structurante, et si $\underline{R}'$ est une relation équivalente à $\underline{R}$ (dans $\mathcal{E}$) et telle que $\underline{R}$ et $\underline{R}'$ contiennent les mêmes lettres, alors $\underline{R}'$ est structurante.</u>

En effet, comme

$$\underline{R}\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p\}\Longleftrightarrow \underline{R}'\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p\}$$

est vraie dans $\mathcal{E}$, il en est de même de

$$\underline{R}\{\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n,\underline{s}'_1,\dots,\underline{s}'_p\}\Longleftrightarrow \underline{R}'\{\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n,\underline{s}'_1,\dots,\underline{s}'_p\}$$

puisque les lettres $\underline{x}_i$ et $\underline{s}_j$ sont distinctes des constantes de $\mathcal{E}$ (chap.I, § 2,critère C3). On en déduit aussitôt le critère.

RS7. <u>Si $\underline{R}$ est une relation structurante pour une typification $\underline{S}$ dans laquelle la lettre $\underline{s}$ est typifiée de type $\underline{T}$, les relations</u>

$(\exists\,\underline{s}\,)(\underline{s}\in\underline{T}(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$ et $\underline{R})$ <u>et</u> $(\forall\,\underline{s}\,)((\underline{s}\in\underline{T}(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n))\Rightarrow\underline{R}\,)$ <u>sont structurantes pour $\underline{S}$</u> .

En effet, supposons par exemple que $\underline{s}$ soit la lettre $\underline{s}_1$. Il résulte de l'hypothèse que la relation (1) entraîne la relation

$$(\exists\,\underline{s}_1)(\underline{s}_1\in\underline{T}_1(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)\text{ et }\underline{R}\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p\})\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow(\exists\,\underline{s}_1)(\underline{s}_1\in\underline{T}_1(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)\text{ et }\underline{R}\{\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n,\underline{s}'_1,\underline{s}'_2,\dots,\underline{s}'_p\})$$

Or, d'après la signification de $\underline{s}'_1$, la relation $\underline{s}_1\in\underline{T}_1(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$ entraîne $\underline{s}'_1\in\underline{T}_1(\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n)$, et la relation

$$\underline{s}'_1\in\underline{T}_1(\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n)\text{ et }\underline{R}\{\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n,\underline{s}'_1,\dots,\underline{s}'_p\}$$

entraîne

$$(\exists\,\underline{t}\,)(\underline{t}\in\underline{T}_1(\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n)\text{ et }\underline{R}\{\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n,\underline{t},\underline{s}'_2,\dots,\underline{s}'_p\})$$

Comme cette dernière relation ne contient plus $\underline{s}_1$, on voit, en désignant par $\underline{R}'\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{s}_2,\dots,\underline{s}_p\}$ la relation $(\exists\,\underline{s}_1)(\underline{s}_1\in\underline{T}_1(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$ et $\underline{R}\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_p\}$), que la relation (1) entraîne

$$R'\{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\underline{s}_2,\dots,\underline{s}_p\} \Rightarrow R'\{\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n,\underline{s}'_2,\dots,\underline{s}'_p\}$$

d'où la première partie du critère. La seconde partie résulte de la première et de RS5 .

RS8. <u>Soit $\underline{R}$ une relation structurante pour une typification $\underline{S}$ dans laquelle la lettre $\underline{s}$ est typifiée de type $\underline{T}$; alors, si $\underline{U}$ est un terme structurant de type $\underline{T}$, la relation $(\underline{U}|\underline{s})\underline{R}$ est structurante.</u>

En effet, soit $\underline{z}$ une lettre distincte des constantes de $\mathcal{C}$, et de toutes les lettres figurant dans $\underline{R}$ ou dans $\underline{U}$; soit $\underline{R}'$ la relation $(\underline{z}|\underline{s})\underline{R}$. La relation $\underline{R}'$ est structurante pour la typification "$\underline{z}\in\underline{T}(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$ et $\underline{S}$", dans laquelle $\underline{z}$ est de type $\underline{T}$. D'après RS5 et RS7, la relation $(\exists\underline{z})(\underline{z}\in\underline{T}$ et $\underline{z}=\underline{U}$ et $\underline{R}')$ est structurante pour la typification $\underline{S}$ (puisqu'elle ne contient pas $\underline{z}$) ; comme elle est équivalente à "$(\underline{U}|\underline{s})\underline{R}$ et $(\exists\underline{z})(\underline{z}\in\underline{T})$" , et que $\underline{S}$ entraîne $(\exists\underline{z})(\underline{z}\in\underline{T})$, on en conclut (en vertu de RS6) que $(\underline{U}|\underline{s})\underline{R}$ est structurante pour la typification $\underline{S}$.

RS9. <u>Soit $\underline{U}$ un terme structurant pour une typification $\underline{S}$ dans laquelle la lettre $\underline{s}$ est typifiée de type $\underline{T}$; si $\underline{V}$ est un terme structurant de type $\underline{T}$, $(\underline{V}|\underline{s})\underline{U}$ est un terme structurant de même type que $\underline{U}$.</u>

Cela résulte de la définition des termes structurants et de RS8 compte tenu du fait que, si $\underline{U}$ est de type $\underline{T}'$, la relation $\underline{U}\in\underline{T}'(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$ est structurante en vertu de RS2 .

RS10. <u>Soit $\underline{R}$ une relation structurante pour une typification $\underline{S}$ dans laquelle la lettre $\underline{s}$ est typifiée de type $\underline{T}$. Si la relation</u> "$\underline{s}\in\underline{T}$ et $\underline{R}$" <u>est</u> fonctionnelle en $\underline{s}$, <u>le terme</u> $\tau_{\underline{s}}(\underline{s}\in\underline{T}$ et $\underline{R})$ <u>est un terme structurant de type</u> $\underline{T}$.

Notons ce terme par $\underline{U}$, et soit $\underline{z}$ une lettre distincte des constantes de $\mathcal{E}$ et de toutes les lettres figurant dans $\underline{R}$; la relation $\underline{z} = \underline{U}$ est équivalente à " $\underline{z} \in \underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ et $(\underline{z} | \underline{s})\underline{R}$ " (chap.I, § 5,critère C46 Or, cette dernière est structurante pour la typification " $\underline{S}$ et $\underline{z} \in \underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$" en vertu de RS2 et RS5, donc il en est de même de $\underline{z} = \underline{U}$ en vertu de RS6. Par ailleurs, comme " $\underline{s} \in \underline{T}$ et $\underline{R}$" entraîne $\underline{s} \in \underline{T}$, la relation $\underline{U} \in \underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ est vraie, ce qui achève de prouve que $\underline{U}$ est structurant.

Par contre, même si $\underline{R}$ est une relation structurante contenant $\underline{s}$, le terme $\tau_{\underline{s}}(\underline{R})$ n'est pas en général un terme structurant. Prenons par exemple pour $\underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ l'échelon $\underline{x}_1$, et pour $\underline{R}$ la relation structurante $\underline{s} \in \underline{x}_1$. Si $\tau_{\underline{s}}(\underline{R})$ était structurant, on aurait

$$\underline{f}(\tau_{\underline{s}}(\underline{s} \in \underline{x}_1)) = \tau_{\underline{t}}(\underline{t} \in \underline{f}(\underline{x}_1))$$

pour toute bijection $\underline{f}$ de $\underline{x}_1$ dans un ensemble $\underline{y}_1$. Remplaçant dans cette relation $\underline{x}_1$ et $\underline{y}_1$ par deux ensembles équipotents E,F ayant plus d'un élément, on en conclurait que l'image de l'élément $\tau_s(s \in E)$ par toute bijection f de E sur F serait un élément de F indépendant de f , alors qu'il existe des bijections de E sur F transformant un élément donné de E en un élément arbitraire de F .

RS11. Soient $\underline{R}$ une relation structurante pour une typification $\underline{S}$ dans laquelle la lettre $\underline{s}$ est typifiée de type $\underline{T}$. Alors le terme "l'ensemble des $\underline{s} \in \underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ tels que $\underline{R}$" est un terme structurant de type $\mathfrak{P}(\underline{T})$.

En effet, soit $\underline{X}$ une lettre distincte des constantes de $\mathcal{E}$ et des lettres figurant dans $\underline{R}$; le terme considéré est $\tau_{\underline{X}}(\underline{R}')$, où $\underline{R}'$ est la relation $(\forall \underline{s})((\underline{s} \in \underline{X}) \Longleftrightarrow (\underline{s} \in \underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ et $\underline{R}))$(chap.II,§1,n°

Comme cette relation est fonctionnelle en $\underline{X}$ (chap. II, § 1, n°6) et qu'elle est équivalente à "$\underline{R}'$ et $\underline{X} \in \mathfrak{P}(\underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n))$" (puisqu'elle entraîne $\underline{X} \in \mathfrak{P}(\underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n))$), il résulte de RS10 que le terme $\tau_{\underline{X}}(\underline{R}')$ est structurant pour la typification "$\underline{S}$ et $\underline{X} \in \mathfrak{P}(\underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n))$" et est de type $\mathfrak{P}(\underline{T})$; comme il ne contient pas $\underline{X}$, il est aussi structurant pour la typification $\underline{S}$.

RS12. *Soit* $\underline{U}$ *un terme structurant de type* $\underline{T}$ *et* $\underline{X}$ *un terme structurant de type* $\mathfrak{P}(\underline{T}')$, *pour une typification dans laquelle* $\underline{s}$ *est typifiée de type* $\underline{T}'$. *Alors le terme* "l'ensemble des objets de la forme $\underline{U}$ pour $\underline{s} \in \underline{X}$" (chap. II, § 1, n°6) *est un terme structurant de type* $\mathfrak{P}(\underline{T})$.

En effet, soit $\underline{z}$ une lettre distincte des constantes de $\mathcal{C}$ et des lettres figurant dans $\underline{U}$ ou dans $\underline{X}$. Le terme en question est l'ensemble des $\underline{z} \in \underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ tels que $(\exists \underline{s})(\underline{s} \in \underline{T}'$ et $\underline{s} \in \underline{X}$ et $\underline{z} = \underline{U})$ (chap. II, § 1, n°6). Il en résulte qu'il est structurant pour la typification "$\underline{S}$ et $\underline{z} \in \underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$" en vertu de RS11 ; il est aussi structurant pour la typification $\underline{S}$, puisqu'il ne contient pas $\underline{z}$ et que $\underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \neq \emptyset$ est entraînée par $\underline{S}$.

RS13. *Soit* $\underline{X}$ *un terme structurant de type* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\underline{T}))$; *les termes* $\bigcup_{\underline{Y} \in \underline{X}} \underline{Y}$ *et* $\bigcap_{\underline{Y} \in \underline{X}} \underline{Y}$ (*si* $\underline{X} \neq \emptyset$) *sont des termes structurants de type* $\mathfrak{P}(\underline{T})$.

RS14. *Si* $\underline{X}$ *est un terme structurant de type* $\mathfrak{P}(\underline{T})$, *il en est de même de* $\underline{T}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) - \underline{X}$.

Ces deux critères résultent de RS7 et RS11.

Dans ce qui suit, nous identifierons, pour la commodité des énoncés, toute *correspondance* entre deux ensembles E, F, avec le graphe de cette correspondance (partie de $E \times F$) (cf. § 1, n°7).

RS15 . Soient $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ des termes structurants de types $\mathfrak{P}(\underline{T})$ et $\mathfrak{P}(\underline{T}')$, pour une typification dans laquelle $\underline{S}$ est typifiée de type $\mathfrak{P}(\underline{T} \times \underline{T}')$. Alors les relations :

" $\underline{S}$ est une correspondance entre $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ "

" $\underline{S}$ est une application de $\underline{X}$ dans $\underline{Y}$ "

" $\underline{S}$ est une surjection de $\underline{X}$ sur $\underline{Y}$ "

" $\underline{S}$ est une injection de $\underline{X}$ dans $\underline{Y}$ "

" $\underline{S}$ est une bijection de $\underline{X}$ sur $\underline{Y}$,

sont des relations structurantes.

C'est évident pour la première, qui n'est autre que $\underline{S} \subset \underline{X} \times \underline{Y}$, en vertu de RS3 et RS4. La seconde est la conjonction de la première et des relations

$(\forall \underline{x})(\forall \underline{z})(\forall \underline{z}')((\underline{y} \in \underline{X} \text{ et } \underline{z} \in \underline{Y} \text{ et } \underline{z}' \in \underline{Y}) \Rightarrow ((\underline{y}, \underline{z}) \in \underline{S}$ et $(\underline{y}, \underline{z}') \in \underline{S}) \Rightarrow (\underline{z} = \underline{z}'))$

$(\forall \underline{y})((\underline{y} \in \underline{X}) \Rightarrow (\exists \underline{z})(\underline{z} \in \underline{Y} \text{ et } (\underline{y}, \underline{z}) \in \underline{S}))$

Or, en vertu de RS7, ces relations sont structurantes pour la typification " $\underline{S}$ et $\underline{y} \in \underline{T}$ et $\underline{z} \in \underline{T}'$ et $\underline{z}' \in \underline{T}'$ " ; comme elles ne contiennent pas $\underline{y}$ ni $\underline{z}$ ni $\underline{z}'$, elles sont structurantes pour la typification $\underline{S}$, et on conclut à l'aide de RS5 . Vérification analogue pour les autres relations énoncées.

Soient $\underline{X}$, $\underline{Y}$, $\underline{G}$ des termes structurants de types $\mathfrak{P}(\underline{T})$, $\mathfrak{P}(\underline{T}')$ et $\mathfrak{P}(\underline{T} \times \underline{T}')$ respectivement. Si la relation " $\underline{G}$ est une correspondance entre $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ " est vraie dans $\mathcal{T}$, on dit que $\underline{G}$ est une correspondance structurante entre $\underline{X}$ et $\underline{Y}$. On définit de même les notions d'application structurante, de surjection, injection ou bijection structurante. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les critères suivants

RS16. Si une relation structurante admet un graphe par rapport à deux lettres s_j, s_k, ce graphe est une correspondance structurante entre T_j et T_k.

RS17. La composée de deux correspondances structurantes et la réciproque d'une correspondance structurante sont des correspondances structurantes.

RS18. Soient X et Y des termes structurants de types $\mathfrak{P}(T)$ et $\mathfrak{P}(T')$, et G une correspondance structurante entre X et Y. Si U est un terme structurant de type $\mathfrak{P}(T)$, tel que $U \subset X$, alors $G\langle U\rangle$ est un terme structurant de type $\mathfrak{P}(T')$.

RS19. Soient X et Y des termes structurants, f une application structurante de X dans Y ; si U est un terme structurant tel que $U \in X$, $f(U)$ est un terme structurant.

RS20. La restriction d'une application structurante à un terme structurant est une application structurante.

RS21. Si X est un terme structurant, R une relation d'équivalence structurante dans X, alors l'ensemble quotient X/R est un terme structurant, et l'application canonique de X sur X/R est une application structurante.

RS22. L'extension canonique d'une correspondance structurante aux ensembles de parties est une application structurante ; l'extensiton canonique de deux applications structurantes aux ensembles produits est une application structurante.

Exemple.- L'espèce de structure de groupe est définie par la donnée de deux lettres ~~xxx~~ G,f ; sa caractérisation typique est $f \in (G \times G) \times G$, et son axiome peut être pris sous la forme suivante (à une "équivalence" près (§1,n°8)) :

f est une application de $G \times G$ dans G , et

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in G$ et $y \in G$ et $z \in G) \Rightarrow f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z))$, et

$(\forall x)(\forall y)((x \in G$ et $y \in G)) \Rightarrow ((\exists z)(z \in G$ et $f(x,z)=y)$ et

$(\exists z')(z' \in G$ et $f(z',x)=y))$.

Utilisant les critères précédents, on voit que cette relation est structurante (pour la typification S : $f \in \mathfrak{P}((G \times G) \times G))$. En effet, la relation $f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z))$ est équivalente à

$(\exists u)(\exists v)(\exists w)((u \in G$ et $v \in G$ et $w \in G)$ et $((x,y),u) \in f$

et $((y,z),v) \in f$ et $((u,z),w) \in f$ et $((x,v),w) \in f$

et par suite, cette relation est structurante pour la typification "S et $u \in G$ et $v \in G$ et $w \in G$ et $x \in G$ et $y \in G$ et $z \in G$" ; nous laissons au lecteur le soin d'achever le raisonnement. Par suite, la condition (IS) est vérifiée. La plupart des termes et relations que l'on introduit dans la théorie des groupes sont structurants.

*Montrons par exemple que le terme "le groupe des commutateurs de G" est structurant. Tout d'abord, la relation "x est un commutateur" est structurante, car elle s'écrit $(\exists s)(\exists t)(s \in G$ et $t \in G$ et $x \in G$ et $f(f(t,s),x)=f(s,t))$. Le terme "l'ensemble des commutateurs de G" est donc structurant en vertu de RS11. D'autre part, la relation "H est un sous-groupe de G" est structurante (pour la typification "S et $H \in \mathfrak{P}(G))$, car elle s'écrit

$H \subset G$ et $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in H$ et $y \in H$ et $z \in G$ et $f(z,y)=x) \Rightarrow z \in H))$.

On en déduit enfin que le terme "le groupe des commutateurs de G" est structurant, car il s'écrit "l'intersection des sous-groupes de G qui contiennent l'ensemble des commutateurs de G", et on conclut en vertu des critères donnés ci-dessus, notamment de RS13.

3. Applications canoniques.

Soit Σ une espèce de structure, et soit $\underline{S}$ sa caractérisation typique. Si $\underline{X}$, $\underline{Y}$ et $\underline{f}$ sont trois termes structurants pour la typification $\underline{S}$, tels que la relation " $\underline{f}$ est une application de $\underline{X}$ dans $\underline{Y}$ " soit un théorème de la théorie $\mathcal{E}_{\Sigma}$, on dit que $\underline{f}$ est une application canonique de $\underline{X}$ dans $\underline{Y}$ pour l'espèce de structure Σ.

Exemples.- Toutes les applications "canoniques" définies au chap.II sont des applications canoniques au sens de la définition précédente, quand on considère sur les ensembles qui y interviennent la "structure d'ensemble". On aura l'occasion, dans la suite de ce Traité, de définir de très nombreuses applications canoniques ; voir p.ex. Alg., chap.II, qui se compose presque entièrement de telles définitions.

Il résulte de la relation (2) que si $\underline{f}$ est une application canonique, sa "transformée" par tout automorphisme de la structure ($\underline{S}_1, \ldots, \underline{S}_p$) sur $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ est égale à $\underline{f}$ (ce qui est d'ailleurs vrai de tout terme structurant pour $\underline{S}$). Bien entendu, cette condition nécessaire n'est pas suffisante pour qu'une application soit canonique.

Il peut se faire, par exemple, que tout automorphisme de la structure précédente se réduise à l'application identique (sur chacun des $\underline{x}_i$): c'est le cas pour l'espèce de structure de corps ordonné, archimédien et complet (Top.gén.,chap.IV, § 3,exerc.3).

Appendice II

Applications universelles

Pour mémoire : le rédacteur, ne voyant rien d'essentiel à changer à la rédaction précédente, estime superflu de recopier le paragraphe correspondant de cette dernière.