RÉDACTION N° 179

TITRE : PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE D'E.V.T.

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 9

NOMBRE DE FEUILLES : 9

PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE D'ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

Théorème. Si E et F sont deux espaces localement convexes, il existe sur $E \otimes F$ une topologie localement convexe et une seule ayant la propriété suivante : quel que soit l'espace localement convexe G, l'isomorphisme canonique entre l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G et l'espace vectoriel des applications linéaires de $E \otimes F$ dans G fait correspondre à l'espace vectoriel $B(E,F\ ;\ G)$ des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G l'espace vectoriel $L(E \otimes F\ ;\ G)$ des applications linéaires continues de $E \otimes F$ dans G. Cet isomorphisme fait alors correspondre les ensembles équicontinus d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G aux ensembles équicontinus d'applications linéaires de $E \otimes F$ dans G. La topologie ainsi définie sur $E \otimes F$ est la topologie d'espace localement convexe la plus fine pour laquelle l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$ soit continue.

Démonstration.

Soit T une topologie répondant aux conditions de l'énoncé. L'application identique de $(E \otimes F)_T$ dans $(E \otimes F)_T$ est continue, donc l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $(E \otimes F)_T$ est continue. Si maintenant T' est une topologie localement convexe sur $E \otimes F$ telle que l'application canonique de $E \times F$ dans $(E \otimes F)_{T'}$ soit continue, alors l'application identique de $(E \otimes F)_T$ sur $(E \otimes F)_{T'}$ est continue, donc T est plus fine que T'. Nous avons bien montré que T, si elle existe, est la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$ soit continue ; et ceci démontre en même temps l'unicité de T.

Montrons maintenant l'existence.

Nous montrerons pour cela

<u>Proposition 1</u>. Lorsque U (resp. V) parcourt un système fondamental de voisinages de 0 de E (resp. F), $\Gamma(U \otimes V)$, enveloppe convexe équilibrée de $U \otimes V$, parcourt un système fondamental de voisinages de 0 d'une topologie répondant aux conditions de l'énoncé du théorème. Comme $\Gamma(U \otimes V)$ est convexe, équilibré, absorbant, et que ces ensembles forment une base de filtre, ils définissent bien un système fondamental de voisinages de 0 d'une topologie T localement convexe sur $E \otimes F$.

Soit H une partie équicontinue, de $B(E,F\ ;\ G)$. Il existe alors, pour tout voisinage convexe équilibré W de 0 dans G, des voisinages U, V, de 0 dans E,F tels que, pour toute $B \in H$, on ait $B(U \times V) \subset W$. Si on appelle $\tilde{B}$ l'application linéaire de $E \otimes F$ dans G associée à B, on voit que l'on a, pour toute $\tilde{B} \in \tilde{H}$, $\tilde{B}(U \otimes V) \subset W$, donc, W étant convexe équilibré, $\tilde{B}(T(U \otimes V)) \subset W$; donc $\tilde{H}$ est une partie équicontinue de $L((E \otimes F)_T\ ;\ G)$.

Réciproquement soit $\tilde{H}$ une partie équicontinue de $L((E \otimes F)_T\ ;\ G)$. Quel que soit le voisinage de 0, W, dans G, il existe alors un voisinage de 0 de $(E \otimes F)_T$, que nous pouvons supposer de la forme $\Gamma(U \otimes V)$, tel que $\tilde{B}(\Gamma(U \otimes V)) \subset W$ pour toute $\tilde{B} \in \tilde{H}$. Alors a fortiori $\tilde{B}(U \otimes V) \subset W$, donc $B(U \times V) \subset W$, ce qui prouve que H est une partie équicontinue de $B(E,F\ ;\ G)$. C.Q.F.D.

<u>Définition</u>. La topologie de $E \otimes F$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé du théorème sera appelée produit tensoriel des topologies de E et de F.

$E \otimes F$ sera toujours muni de cette topologie.

$E \tilde{\otimes} F$ sera le complété de $E \otimes F$ pour cette topologie. Si alors G est un espace vectoriel localement convexe complet, toute application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G définit canoniquement une application linéaire continue de $E \hat{\otimes} F$ dans G.

Remarque. Le dual de $E \otimes F$ s'identifie par l'application $\tilde{B} \to B$ à l'espace $B(E,F)$ des formes bilinéaires continues sur $E \times F$; il en est de même du dual de $E \hat{\otimes} F$. Comme les parties équicontinues de $(E \otimes F)'$ sont alors identifiées aux parties équicontinues de $B(E,F)$, on voit qu'un système fondamental de voisinages de 0 dans $E \otimes F$ (resp. $E \hat{\otimes} F$) est constitué par les polaires des parties équicontinues de $B(E,F)$, dans la dualité séparante entre $E \otimes F$ (resp. $E \hat{\otimes} F$) et $B(E,F)$.

Ceci aurait pu également servir à montrer l'unicité de la topologie produit tensoriel, et d'ailleurs aussi son existence.

Proposition 2. Si E et F sont séparés (resp. métrisables), $E \otimes F$ est séparé (resp. métrisable).

Soit en effet $u \in E \otimes F$. Si E et F sont séparés, il existe une forme bilinéaire continue B sur $E \times F$ telle que la forme linéaire associée $\tilde{B}$ sur $E \otimes F$ vérifie $\tilde{B}(u) \neq 0$ [Il existe en effet des sous-espaces de dimension finie E_1, F_1, tels que $u \in E_1 \otimes F_1$; soient E_2, F_2 des supplémentaires topologiques de E_1, F_1. Si B_1 est une forme bilinéaire sur $E_1 \otimes F_1$ telle que la forme linéaire associée $\tilde{B}_1$ vérifie $\tilde{B}_1(u) \neq 0$, on pourra prendre pour B la forme bilinéaire égale à B_1 sur $E_1 \times F_1$, à 0 sur $E_1 \times F_2$, $E_2 \times F_1$, $E_2 \times F_2$]. Comme $\tilde{B}$ doit être continue, cela prouve que u n'est pas adhérent à 0, donc que $E \otimes F$ est séparé.

Si E et F sont métrisables, on peut prendre un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans $E \otimes F$, les $\Gamma(U_\alpha \otimes V_\beta)$, où U_α (resp. V_β) parcourt un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans E (resp. F) ; donc $E \otimes F$ est métrisable, et $E \hat{\otimes} F$ est un espace de Fréchet.

<u>Proposition 3.</u>

Si U (resp. V) est un voisinage de 0 de E (resp. F), d'indicateur p(resp. q), l'indicateur de $\Gamma(U \otimes V)$ est donné par

$$(1) \qquad p \otimes q\,(u) = \begin{cases} \inf. \sum_\nu p(\xi_\nu)\, q(\eta_\nu), \text{ pour} \\ u = \sum_\nu \xi_\nu \otimes \eta_\nu \end{cases}$$

Lorsque p (resp. q) parcourt un système fondamental de semi-normes continues de E (resp. F), les $p \otimes q$ forment un système fondamental de semi-normes continues sur $E \otimes F$. On a

$$(2) \qquad p \otimes q\,(\xi \otimes \eta) = p(\xi)\, q(\eta) .$$

<u>Démonstration.</u>

Montrons que $\Gamma(U \otimes V)$ a précisément pour jauge $r = p \otimes q$. Cette jauge est en effet définie par

$$(3) \qquad r(u) = \inf_{\substack{u \in \lambda \Gamma(U \otimes V) \\ \lambda > 0}} (\lambda) .$$

Mais $u \in \lambda\Gamma(U \otimes V)$ équivaut à $u = \sum_{\nu=1}^{N} t_\nu\, x_\nu \otimes y_\nu$, $p(x_\nu) \leqslant 1$, $q(y_\nu) \leqslant 1$, $\sum |t_\nu| \leqslant \lambda$. Ceci entraîne $u = \sum_{\nu=1}^{N} \xi_\nu \otimes \eta_\nu$, $\sum_{\nu=1}^{N} p(\xi_\nu)\, q(\eta_\nu) \leqslant \lambda$, en prenant $\xi_\nu = t_\nu x_\nu$, $\eta_\nu = y_\nu$.

Réciproquement soit $u = \sum_{\nu=1}^{N} \xi_\nu \otimes \eta_\nu$, avec $\sum p(\xi_\nu) q(\eta_\nu) \leqslant \lambda$. En posant $x_\nu = \dfrac{\xi_\nu}{p(\xi_\nu)}$, $y_\nu = \dfrac{\eta_\nu}{q(\eta_\nu)}$, $t_\nu = p(\xi_\nu)\, q(\eta_\nu)$ pour les valeurs de ν pour lesquelles $p(\xi_\nu)\, q(\eta_\nu) \neq 0$; $x_\nu = N \dfrac{\xi_\nu\, q(\eta_\nu)}{\varepsilon}$ $y_\nu = \dfrac{\eta_\nu}{q(\eta_\nu)}$, $t_\nu = \dfrac{\varepsilon}{N}$, pour les valeurs de ν pour lesquelles

$p(\xi_\nu)=0$, $q(\eta_\nu)\neq 0$; $x_\nu = \dfrac{\xi_\nu}{p(\xi_\nu)}$, $y_\nu = N\,\dfrac{\eta_\nu\, p(\xi_\nu)}{\varepsilon}$, $t_\nu = \dfrac{\varepsilon}{N}$, pour les valeurs de ν pour lesquelles $p(\xi_\nu)\neq 0$, $q(\eta_\nu)=0$; $x_\nu = N\,\dfrac{\xi_\nu}{\varepsilon}$, $y_\nu = \eta_\nu$, $t_\nu = \dfrac{\varepsilon}{N}$, pour les valeurs de ν pour lesquelles $p(\xi_\nu)= = q(\eta_\nu)=0$; on obtient toujours une décomposition $u = \sum_{\nu=1}^{N} t_\nu\, x_\nu \otimes y_\nu$, $p(x_\nu)\leqslant 1$, $q(y_\nu)\leqslant 1$, $\sum_{\nu=1}^{N} |t_\nu| \leqslant \lambda + \varepsilon$.

Comme ε est aussi petit qu'on veut, $r(u)$ défini par (3) est bien égal à $p\otimes q(u)$ défini par (1).

Montrons maintenant (2) .

(1) donne $(p\otimes q)(\xi \otimes \eta) \leqslant p(\xi)\, q(\eta)$.

Il suffit donc de montrer l'inégalité inverse ; comme elle est évidente si $p(\xi)\, q(\eta)=0$, nous pouvons supposer $p(\xi)\, q(\eta) \neq 0$.

D'après Hahn-Banach, il existe $X' \in E'$ tel que

$$(4) \qquad \begin{aligned} &|\langle X', X \rangle| \leqslant p(X) \\ &\langle X', \xi \rangle = p(\xi) \end{aligned}$$

De même il existe $Y' \in F'$ tel que

$$(5) \qquad \begin{aligned} &|\langle Y', Y \rangle| \leqslant q(Y) \\ &\langle Y', \eta \rangle = q(\eta) \end{aligned}$$

Alors si $u = \xi \otimes \eta = \sum_\nu \xi_\nu \otimes \eta_\nu$, on a

$$(6) \qquad |\langle X' \otimes Y' , u \rangle| \leqslant \sum_\nu p(\xi_\nu)\, q(\eta_\nu)$$

donc

$$\leqslant (p\otimes q)(u)$$

mais aussi

$$(7) \qquad \langle X' \otimes Y' , u \rangle = \langle X', \xi \rangle \langle Y', \eta \rangle = p(\xi)\, q(\eta) \quad \text{d'où}$$

$p(\xi)\, q(\eta) \leqslant p \otimes q\ (u)$, C.Q.F.D.

 7

Proposition 4.

Si E et F sont normés, de normes resp. p et q, il existe sur $E \otimes F$ topologique, une norme et une seule, à savoir $p \otimes q$, ayant la propriété suivante : quel que soit l'espace normé G, l'isomorphisme canonique entre applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G et applications linéaires continues de $E \otimes F$ dans G conserve les normes de ces applications. L'application bilinéaire canonique de $(E)_p \times (F)_q$ dans $(E \otimes F)_{p \otimes q}$ est de norme 1 .

Montrons d'abord l'unicité d'une telle norme. Si s et s' sont deux telles normes, comme l'application identique de $(E \otimes F)_s$ dans $(E \otimes F)_s$ est de norme 1, l'application bilinéaire canonique de l'application bilinéaire canonique de $E \otimes F$ dans $(E \otimes F)_s$ sera de norme 1 , (ce qui démontrera la dernière assertion du théorème quand on saura que $s = p \otimes q$); alors l'application identique de $(E \otimes F)_{s'}$ dans $(E \otimes F)_s$ sera de norme 1 , donc $s \leqslant s'$; de même $s' \leqslant s$, donc $s=s'$.

Il suffit donc de voir que $s = p \otimes q$ répond à la question. D'abord c'est une norme, puisque, d'après la prop.3 elle définit la topologie, et que celle-ci est séparée d'après la prop.2 . Soit B une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G . Pour simplifier, notons toujours par $\|v\|$ la norme de v dans E, F, $E \otimes F$, relativement aux normes p, q, $p \otimes q$. Pour toute décomposition $u = \sum_\nu \xi_\nu \otimes \eta_\nu$ de $u \in E \otimes F$, on a

$$(8) \quad \|\tilde{B}(u)\| = \|\sum_\nu B(\xi_\nu, \eta_\nu)\| \leqslant \|B\| \sum_\nu \|\xi_\nu\| \, \|\eta_\nu\|$$

donc $\|\tilde{B}(u)\| \leqslant \|B\| \, \|u\|$

et par suite $\|\tilde{B}\| \leqslant \|B\|$.

Par ailleurs

$$(9) \qquad \| B(\xi,\eta)\| = \|\tilde{B}(\xi\otimes\eta)\|$$

$$\leqslant \|\tilde{B}\| \ \|\xi\otimes\eta\| \leqslant \|\tilde{B}\| \ \|\xi\| \ \|\eta\|$$

(et même =)

Donc $\|B\| \leqslant \|\tilde{B}\|$,

et par suite $\|B\| = \|\tilde{B}\|$, C.Q.F.D.

<u>Proposition 5.</u>

Si E_i, F_i $(i=1,2)$ sont des espaces localement convexes, A_i $(i=1,2)$ des applications linéaires continues de E_i dans F_i , l'application $A_1 \otimes A_2$ de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$ est continue, et si E_i, F_i $(i=1,2)$ sont normés,

$$\|A_1 \otimes A_2\| \leqslant \|A_1\| \ \|A_2\| \ .$$

Considérons en effet un voisinage de 0 quelconque de $F_1 \otimes F_2$, il contient un $\Gamma(V_1 \otimes V_2)$, V_i $(i=1,2)$ voisinages de 0 dans F_i . Comme A_i est continue, il existe un voisinage de 0, U_i , dans E_i, tel que $A_i(U_i) \subset V_i$. Alors

$$(10) \quad (A_1 \otimes A_2)\left[\Gamma(U_1 \otimes U_2)\right] \subset \Gamma\left[A_1 \otimes A_2\,(U_1 \otimes U_2)\right] =$$

$$= \Gamma(A_1(U_1) \otimes A_2(U_2)) \subset \Gamma(V_1 \otimes V_2) \ ;$$

ce qui montre la continuité de $A_1 \otimes A_2$.

Si les espaces sont normés, prenons pour U_i la boule unité fermée de E_i . Alors $A_i(U_i) \subset V_i$ boule fermée de rayon $\|A_i\|$ de F_i . (10) montre alors que $\Gamma(U_1 \otimes U_2)$, qui contient la boule unité ouverte de $E_1 \otimes E_2$, a son image dans $\Gamma(V_1 \otimes V_2)$, contenu dans la boule fermée de rayon $\|A_1\| \ \|A_2\|$ de $F_1 \otimes F_2$. Donc $\|A_1 \otimes A_2\| \leqslant \|A_1\| \ \|A_2\|$.

Corollaire. $A_1 \otimes A_2$ se prolonge canoniquement en une application linéaire continue $A_1 \hat{\otimes} A_2$ de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \hat{\otimes} F_2$.

Proposition 6. Si A_i est un épimorphisme de E_i sur F_i, $A_1 \otimes A_2$ est un épimorphisme de $E_1 \otimes E_2$ sur $F_1 \otimes F_2$.

D'abord on sait que $A_1 \otimes A_2$ est épijective. Soit alors $\Gamma(U_1 \otimes U_2)$ un voisinage de 0 dans $E_1 \otimes E_2$. Son image par $A_1 \otimes A_2$ est $\Gamma(V_1 \otimes V_2)$, où $V_i = A_i(U_i)$ est un voisinage de 0 dans F_i, puisque A_i est un épimorphisme ; donc $A_1 \otimes A_2$ est bien un épimorphisme.

Mais il faudrait se garder de croire que, si A_i est un monomorphisme de E_i dans F_i, $A_1 \otimes A_2$ soit un monomorphisme. Si E_i est un sous-espace topologique de F_i, $E_1 \otimes E_2$ a en général une topologie strictement plus fine que la topologie induite par $F_1 \otimes F_2$.

Produit tensoriel de plusieurs espaces localement connexes.

Définition directe par les applications multilinéaires.

Proposition 7.- L'isomorphisme (algèbrique) canonique de $(E \otimes F) \otimes G$ sur $E \otimes F \otimes G$ est un isomorphisme topologique (resp. un isomorphisme d'espaces normés si E, F, G, sont normés).

Il suffit de remarquer que si U (resp. V, W) parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans E (resp. F, G), un système fondamental de voisinages de 0 dans les 2 espaces en litige est formé par les $\Gamma(\Gamma(U \otimes V), W)$ et $\Gamma(U \otimes V \otimes W)$, or c'est du pareil au même. Si U (resp. V, W) est l'indicateur de la semi-norme p (resp. q, r) alors on voit que $p \otimes q \otimes r = (p \otimes q) \otimes r$, d'où la propriété relative aux espaces normés.
