RÉDACTION N° 177

COTE : NBR 080

TITRE : LIVRE VII : ESPACES DIFFÉRENTIABLES
CHAPITRE III
ÉTUDE LOCALE DES VARIÉTÉS (ÉTAT 3)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 98

NOMBRE DE FEUILLES : 98

Archives M. Dixmier Mars 1953

NBR 080 177 2

LIVRE VIII.- VARIÉTÉS DIFFERENTIABLES.

CHAPITRE III. ÉTUDE LOCALE DES VARIÉTÉS. Etat 3.

Sommaire

....

- Suite -

Commentaires.

Ce chapitre était intitulé "Généralités sur les variétés" dans la Tribu. Le chapitre suivant (intitulé "Etude locale des variétés" dans la Tribu) s'appellera "Etude infinitésimale des variétés".

D'autre part, le présent chapitre est numéroté III et non IV comme dans la Tribu. En effet, l'insertion d'un chap.III "Faisceaux et Sammeaux" était apparemment motivé par la question des variétés plongées dites "dégueulasses mal recollées". Or, cette question n'a rien de "dégueulasse", et peut faire l'objet d'une rédaction très élémentaire ; il serait ridicule d'imposer au lecteur l'absorption préalable des faisceaux.

Le point de vue global de l'Etat 2 était, entre autres difficultés, inadaptable au cas analytique. La présente rédaction est basée sur les cartes. Si on décide de prendre les fonctions différentiables pour point de départ, il faudra utiliser les fonctions différentiables sur un ouvert de la variété.

Le § sur les variétés fibrées n'est certainement pas complet. On a mis exactement ce qui se révèlait nécessaire au chapitre suivant.

Il est bien agréable d'avoir dès ce chapitre la notion de rang d'une application. Or, l'espace tangent à une variété ne doit être défini qu'au chap.IV, après un tas de fourbis sur les variétés de points proches, variétés $P^{(m)}(V)$, etc. On a donc défini le rang sans référence à l'espace tangent.

Aucune démonstration n'étant "profonde", je n'ai énoncé que des propositions. Bourbaki choisira les théorèmes. Les points d'exclamation font défaut.

CHAPITRE III. ÉTUDE LOCALE DES VARIÉTÉS.

Dans tout ce chapitre, K désigne un corps valué complet commutatif et non discret, de caractéristique 0 .

L'usage correct des définitions qui vont suivre nous amènerait à employer constamment le qualificatif "indéfiniment différentiable" lorsque $K = R$, et à répéter ensuite mot pour mot, sauf dans quelques cas exceptionnels, les démonstrations et les résultats, en substituant au qualificatif "indéfiniment différentiable" le qualificatif "analytique", lorsque K est un corps valué complet commutatif non discret de caractéristique 0. Pour alléger l'exposé, nous emploierons presque toujours le mot "différentiable" sans préciser le corps K ; ceci voudra dire que les démonstrations et les résultats sont applicables, soit lorsque $K = R$ et que "différentiable" signifie "indéfiniment différentiable", soit que K est un corps valué complet commutatif non discret de caractéristique 0 , et que "différentiable" signifie "analytique" ; et nous laisserons au lecteur le soin de faire la traduction. Dans les passages exceptionnels où il y a lieu de distinguer entre le "cas indéfiniment différentiable" et le "cas analytique", la terminologie correcte sera utilisée.

§ 1. Généralités sur les variétés.

1. Cartes.- Définition 1.- *Soient V un espace topologique, n un nombre entier $\geqslant 0$. Soit H (resp. H') un homéomorphisme d'une partie ouverte O (resp. O') de V sur une partie ouverte de K^n . On dit que H et H' sont différentiablement (resp. analytiquement) semblables si l'une des circonstances suivantes est réalisée : 1. $O \cap O'$ est vide. 2. $O \cap O'$ est non vide, et les homéomorphismes réciproques $H \circ H'^{-1}$ et $H' \circ H^{-1}$ de $H'(O \cap O') \subset K^n$ et $H(O \cap O') \subset K^n$ l'un sur l'autre sont indéfiniment différentiables* (resp. analytiques

Si H et H' sont différentiablement semblables, leurs restrictions H_1 et H'_1 à des parties ouvertes O_1 et O'_1 de O et O' sont différentiablement semblables ; en effet, $H_1 \circ H'^{-1}_1$ est la restriction de $H \circ H'^{-1}$ à $H'(O_1 \cap O'_1)$, et $H'_1 \circ H^{-1}_1$ est la restriction de $H' \circ H^{-1}$ à $H(O_1 \cap O'_1)$. D'autre part, pour que H et H' soient différentiablement semblables, il faut et il suffit que leurs restrictions à $O \cap O'$ soient différentiablement semblables.

Lemme 1.- Soit $(O_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de $O \cap O'$. Pour que H et H' soient différentiablement semblables, il faut et il suffit que, pour tout $\iota \in I$, les restrictions H_ι et H'_ι à $O \cap O_\iota$ et $O' \cap O_\iota$ de H et H' soient différentiablement semblables.

La condition est nécessaire d'après une remarque précédente. D'autre part, si $H_\iota \circ H'^{-1}_\iota$ est différentiable pour tout $\iota \in I$, $H \circ H'^{-1}$ est différentiable, puisque les ensembles $H'(O_\iota \cap O')$ forment un recouvrement ouvert de $H'(O \cap O')$. Le lemme résulte aussitôt de là .

Lemme 2.- Soit O une partie ouverte de V . Dans l'ensemble des homéomorphismes de O sur une partie ouverte variable de K^n, la relation "H et H' sont différentiablement semblables" est une relation d'équivalence.

En effet, cette relation est évidemment symétrique et réflexive. D'autre part, soient H, H', H'' des homéomorphismes de O sur des parties ouvertes de K^n . On a $H \circ H''^{-1} = (H \circ H'^{-1}) \circ (H' \circ H''^{-1})$; donc, si $H \circ H'^{-1}$ et $H' \circ H''^{-1}$ sont différentiables, $H \circ H''^{-1}$ est différentiable.

Définition 2.- Soit n un nombre entier $\geqslant 0$. On appelle variété indéfiniment différentiable réelle (resp. variété analytique sur K) de dimension n un espace topologique séparé V , muni d'un ensemble $\mathcal{C}$ d'applications, dont chacune est un homéomorphisme d'une partie ouverte non vide de V

sur une partie ouverte de R^n, (resp. K^n) de manière que les axiomes suivants soient vérifiés :

(V_I) Les ensembles de définition des applications de $\mathcal{C}$ forment un recouvrement de V .

(V_{II}) Soit C un homéomorphisme d'une partie ouverte O de V sur une partie ouverte de R^n (resp. K^n) ; soit $(O_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties ouvertes de V dont la réunion est O . Pour que $C \in \mathcal{C}$, il faut et il suffit que les restrictions de C aux O_ι appartiennent à $\mathcal{C}$.

(V_{III}) Deux éléments quelconques de $\mathcal{C}$ sont différentiablement (resp. analytiquement) semblables.

(V_{IV}) Soient C et C' deux homéomorphismes différentiablement (resp. analytiquement) semblables d'une même partie ouverte de V sur des parties ouvertes de R^n (resp. K^n). Si $C \in \mathcal{C}$, on a $C' \in \mathcal{C}$.

Quand aucune confusion n'est possible, on dit parfois plus brièvement que V est une variété. Lorsque $K = R$, ou $K = C$, on parle de *variété analytique réelle*, ou de *variété analytique complexe*. Désormais, toutes les variétés considérées sont des variétés sur K , sauf mention expresse du contraire.

Toute application de $\mathcal{C}$ est appelée *carte* de V .

L'espace topologique V est appelé *espace sous-jacent* de la variété. Il est localement compact (resp. localement connexe) lorsque K est localement compact (resp. localement connexe), par exemple si $K = R$ ou $K = C$.

Soient V et V' deux variétés de dimension n , toutes deux indéfiniment différentiables réelles, ou toutes deux analytiques sur K . Conformément aux définitions générales, une application biunivoque φ de V sur V' est appelée un *isomorphisme* si φ est un homéomorphisme et si, pour toute

NBR 080 7

carte C (resp. C') de V (resp. V'), $C \circ \overset{-1}{\varphi}$ (resp. $C' \circ \varphi$) est une carte de V' (resp. V). En particulier, un isomorphisme de V sur V s'appelle un automorphisme de V .

Remarque - Si une application biunivoque φ de V sur V' est telle que, pour toute carte C' de V', $C' \circ \varphi$ soit une carte de V , il est immédiat que φ est bicontinue. Si en outre, pour toute carte C de V , $C \circ \overset{-1}{\varphi}$ est une carte de V', φ est donc un isomorphisme de V sur V' .

Exemples de variétés. 1. Soit V une variété de dimension 0. Comme K^0 est réduit à un élément a , les cartes sont définies sur des ensembles à un élément, et l'espace V est discret d'après (V_I). Réciproquement, soit V un espace discret ; prenons pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications dont chacune transforme un point de V en a ; il est immédiat qu'on définit ainsi sur V une structure de variété de dimension 0 . Une telle variété sera appelée variété discrète.

2. Prenons pour espace V l'espace topologique K^n, et pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des homéomorphismes différentiables à jacobien non nul qui appliquent une partie ouverte de K^n sur une partie ouverte de K^n . Il est immédiat que les axiomes (V_I) à (V_{IV}) sont satisfaits. On définit ainsi sur K^n une structure de variété de dimension n sur K . Lorsqu'on parlera de la variété K^n sans préciser, c'est toujours de cette structure qu'il s'agira.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K . Soit φ un isomorphisme de l'espace vectoriel K^n sur l'espace vectoriel E . En transportant par φ la structure de variété de K^n, on définit sur E une structure de variété de dimension n sur K . Il est immédiat que cette structure ne dépend pas du choix de φ . Quand on parlera de la variété E sans préciser c'est toujours de cette structure qu'il s'agira.

2. Atlas.- Définition 3.- Une famille de cartes s'appelle un atlas de V lorsque les ensembles de définition de ces cartes forment un recouvrement de V .

Proposition 1.- Soient V une variété de dimension n sur K , et $(C_\iota)_{\iota\in I}$ un atlas de V . Pour qu'un homéomorphisme C d'une partie ouverte O de V sur une partie ouverte de K^n soit une carte, il faut et il suffit que C soit différentiablement semblable à C_ι pour tout $\iota \in I$.

La nécessité résulte aussitôt de (V_{III}). Soit maintenant C un homéomorphisme d'une partie ouverte O de V sur une partie ouverte de K^n , différentiablement semblable à C_ι pour tout $\iota \in I$. Soient O_ι l'ensemble de définition de C_ι , $O'_\iota = O \cap O_\iota$, C'_ι la restriction de C_ι à O'_ι (qui est une carte comme il résulte aussitôt de (V_{II})), et D_ι la restriction de C à O'_ι . Alors, C'_ι et D_ι sont différentiablement semblable, donc D_ι est une carte d'après (V_{IV}). Comme les O'_ι recouvrent O, C est une carte d'après (V_{II}).

Si $(C_\iota)_{\iota\in I}$ est un atlas de V , les C_ι sont deux à deux différentiablement semblables. Réciproquement, on a la proposition suivante :

Proposition 2.- Soient V un espace topologique séparé, et $(O_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert de V . Pour tout $\iota \in I$, soit C_ι un homéomorphisme de O_ι sur une partie ouverte de K^n . Supposons les C_ι différentiablement semblables deux à deux. Alors, il existe sur V une structure de variété de dimension n sur K , et une seule, telle que $(C_\iota)_{\iota\in I}$ soit un atlas de V .

D'après la prop.1, l'ensemble des cartes de la variété V, si elle existe, s'obtient en prenant les homéomorphismes d'une partie ouverte de V sur une partie ouverte de K^n, différentiablement semblables à tous les C_ι . Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces homéomorphismes, et montrons qu'il qu'il satisfait aux axiomes (V_I) à (V_{IV}). D'abord, $C_\iota \in \mathcal{C}$ pour tout $\iota \in I$, donc (V_I) est satisfait. Soient maintenant D un homéomorphisme d'une partie ouverte U de V sur une partie ouverte de K^n, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de parties ouvertes de U recouvrant U, et D_α la restriction de D à U_α ; pour que $D \in \mathcal{C}$, il faut et il suffit que $D_\alpha \in \mathcal{C}$ pour tout $\alpha \in A$, en vertu du lemme 1 ; donc (V_{II}) est satisfait. Si $D \in \mathcal{C}$ et $D' \in \mathcal{C}$, montrons que D et D' sont différentiablement semblables ; il suffit d'envisager le cas où D et D' sont définis dans le même ensemble ouvert U ; or, les restrictions de D et D' à $U \cap O_\iota$ sont différentiablement semblables d'après le lemme 2 ; donc D et D' sont différentiablement semblables d'après le lemme 1, de sorte que (V_{III}) est satisfait. Enfin, soient C et C' deux homéomorphismes différentiablement semblables d'une même partie ouverte U de V sur des parties ouvertes de K^n, et supposons $C \in \mathcal{C}$; pour tout $\iota \in I$, les restrictions de C' et de C_ι à $U \cap O_\iota$ sont différentiablement semblables (lemme 2), donc $C' \in \mathcal{C}$, de sorte que (V_{IV}) est satisfait. L'ensemble $\mathcal{C}$ définit donc sur V une structure de variété. Comme $C_\iota \in \mathcal{C}$, $(C_\iota)_{\iota \in I}$ est un atlas de V.

<u>Corollaire 1.- Pour qu'un homéomorphisme</u> φ <u>d'une variété</u> V <u>de dimension</u> n <u>sur une variété</u> V' <u>de dimension</u> n <u>soit un isomorphisme, il faut et il suffit que</u> φ <u>transforme un atlas de</u> V <u>en un atlas de</u> V' .

<u>Corollaire 2.- Soit</u> V <u>une variété analytique réelle de dimension</u> n . <u>Soit</u> $(C_\iota)_{\iota \in I}$ <u>un atlas de</u> V . <u>Alors, il existe sur</u> V <u>une structure de variété indéfiniment différentiable réelle de dimension</u> n , <u>et une seule, telle que</u> $(C_\iota)_{\iota \in I}$ <u>soit un atlas pour cette structure. Cette structure est indépendante de l'atlas choisi</u> $(C_\iota)_{\iota \in I}$ <u>de la variété analytique réelle</u> V .

Comme deux homéomorphismes analytiquement semblables sont différentiablement semblables, il existe sur V, d'après la prop.2, une structure de variété indéfiniment différentiable réelle de dimension n et une seule, telle que $(C_\iota)_{\iota \in I}$ soit un atlas pour cette structure. D'autre part, soit $(C'_\varkappa)_{\varkappa \in J}$ un autre atlas de la variété analytique V . Chaque $C'_\varkappa$ est analytiquement semblable à tous les C_ι, donc $C'_\varkappa$ est une carte de la variété indéfiniment différentiable V , et le corollaire résulte immédiatement de là .

La variété indéfiniment différentiable ainsi définie s'appelle la variété indéfiniment différentiable associée à la variété analytique V .

(A résoudre en exercice : existence de variétés indéfiniment différentiables non associées à des variétés analytiques, ou associées à plusieurs variétés analytiques distinctes).

Corollaire 3.- Soit V une variété analytique de dimension n sur K . Soient K' un sous-corps fermé de K , d le degré de K sur K', supposé fini. Soit φ un isomorphisme de K^n sur K'^{nd}, K^n et K'^{nd} étant considérés comme espaces vectoriels sur K' . Soit $(C_\iota)_{\iota \in I}$ un atlas de V . Alors, il existe sur V une structure de variété analytique de dimension nd sur K' , et une seule, telle que $(\varphi \circ C_\iota)_{\iota \in I}$ soit un atlas pour cette structure. Cette structure est indépendante du choix de $(C_\iota)_{\iota \in I}$ et de φ .

En effet, les $\varphi \circ C_\iota$ sont analytiquement semblables deux à deux, relativement à K'. D'où l'existence et l'unicité d'une structure de variété analytique de dimension nd sur K', telle que $(\varphi \circ C_\iota)_{\iota \in I}$ soit un atlas. Soit $(C'_\varkappa)_{\varkappa \in J}$ un autre atlas de V , et soit φ' un autre isomorphisme de K^n sur K'^{nd} . Si $\iota \in I$ et $\varkappa \in J$, $\varphi \circ C'_\varkappa$ et $\varphi \circ C_\iota$ sont analytiquement semblables, relativement à K' ; d'autre part, $\varphi \circ C'_\varkappa$ et $\varphi' \circ C'_\varkappa$ sont définis dans le même ensemble, et analytiquement semblables, relativement à K' ; donc $\varphi' \circ C'_x$ est une carte de V considérée comme variété analytique sur K'. Le corollaire résulte aussitôt de là .

La variété analytique sur K' ainsi définie s'appelle la variété sur K' associée à V . C'est ainsi qu'on parle de la variété analytique réelle associée à une variété analytique complexe.

Une variété analytique sur K' n'est pas toujours associée à une variété sur K, puisque, par exemple, toute variété analytique réelle associée à une variété analytique complexe est de dimension paire.

3. Sous-variétés ouvertes.- Soient V une variété de dimension n sur K , $\mathscr{C}$ l'ensemble de ses cartes. Soit V' une partie ouverte non vide de V , munie de la topologie induite par celle de V . Soit $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ l'ensemble des cartes de V dont l'ensemble de définition est contenu dans V'. Il est immédiat que $\mathscr{C}'$ satisfait aux axiomes (V_I) à (V_{IV}) pour V'. On définit donc ainsi sur V' une structure de variété de dimension n sur K . Munie de cette structure, V' est appelée sous-variété ouverte de V . On dit aussi que la structure de variété de V' est induite par celle de V .

En particulier, toute partie ouverte non vide O de K^n peut être ainsi munie d'une structure de variété de dimension n sur K . Lorsqu'on parlera de la variété O, sans préciser, c'est toujours de cette structure qu'il s'agira.

Si V' est une sous-variété ouverte de V et V" une sous-variété ouverte de V', alors V" est une sous-variété ouverte de V .

Proposition 3.- Soient V une variété de dimension n sur K , O une partie ouverte de V , C un homéomorphisme de O sur une partie ouverte de K^n . Pour que C soit une carte de V, il faut et il suffit que C soit un isomorphisme de la variété O sur la variété C(O) .

Supposons que C soit une carte de V ; si C' est une carte de la sous-variété ouverte O de V, $C'\circ\overset{-1}{C}$ est une application différentiable à jacobien non nul d'une partie ouverte de $C(O)$ sur une partie ouverte de K^n , c'est-à-dire une carte de $C(O)$; si C'' est une carte de $C(O)$, $C''\circ C$ est une carte de O ; on voit donc que C est un isomorphisme de la variété O sur la variété $C(O)$. Réciproquement, supposons que C soit un isomorphisme de O sur $C(O)$; soit D une carte quelconque de V , définie sur une partie ouverte U de V ; la restriction de D à $U\cap O$ est une carte de O , donc $D\circ\overset{-1}{C}$ est une carte de $C(O)$, donc est différentiable à jacobien non nul ; autrement dit, C et D sont différentiablement semblables ; la prop. 1 montre alors que C est une carte de V .

4. Applications différentiables.- Définition 4.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n' sur K. Une application φ de V dans V' est dite différentiable si, pour toute carte C de V et toute carte C' de V', l'application $C'\circ\varphi\circ\overset{-1}{C}$ est définie sur une partie ouverte de K^n et différentiable (lorsqu'elle est définie sur un ensemble non vide de K^n).

Il est immédiat qu'une telle application est continue.

Lorsque V et V' sont des parties ouvertes de K^n et $K^{n'}$ respectivement, on retrouve les notions des chap. I-II .

Soient V et V' des variétés de dimension n sur K . Il est clair qu'un isomorphisme de V sur V' est différentiable, ainsi que $\overset{-1}{\varphi}$. Réciproquement, on a la proposition suivante :

Proposition 4.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n' sur K . Soit φ un homéomorphisme de V sur V', différentiable ainsi que $\overset{-1}{\varphi}$. Alors $n=n'$, et φ est un isomorphisme de V sur V' .

En effet, soient C une carte de V, C' une carte de V', telles que $C'\circ\varphi\circ C^{-1}$ soit définie sur une partie non vide de K^n. Alors, $C'\circ\varphi\circ C^{-1}$ est différentiable ainsi que l'application réciproque, et applique une partie ouverte de K^n sur une partie ouverte de K^n. Il en résulte (chap. I-II) que $n=n'$. Ensuite, C et $C'\circ\varphi$ sont différentiablement semblables. D'après la prop. 1, $C'\circ\varphi$ est donc une carte de V. De même, $C\circ\varphi^{-1}$ est une carte de V'. Donc φ est un isomorphisme.

<u>Définition 5</u>.- <u>Soient</u> V <u>et</u> V' <u>deux variétés ayant même ensemble sous-jacent</u>. <u>On dit que la structure de variété de</u> V <u>est plus fine que celle de</u> V' <u>si l'application identique de</u> V <u>dans</u> V' <u>est différentiable</u>.

Soient V une variété, O une sous-variété ouverte de V, i l'injection canonique de O dans V, V' une autre variété, φ une application de V' dans O. Pour que φ soit différentiable, il faut et il suffit, comme on le voit aussitôt, que $i\circ\varphi$ soit différentiable. Il en résulte que la structure de sous-variété ouverte de O est la moins fine des structures de variétés sur O qui rendent i différentiable.

La notion d'application différentiable est une notion de caractère local. En effet :

<u>Proposition 5</u>.- <u>Soient</u> V <u>et</u> V' <u>des variétés</u>, φ <u>une application de</u> V <u>dans</u> V', $(O_\iota)_{\iota\in I}$ <u>un recouvrement ouvert de</u> V. <u>Pour que</u> φ <u>soit différentiable il faut et il suffit que la restriction de</u> φ <u>à chaque</u> O_ι <u>soit différentiable</u>.

La nécessité de la condition est immédiate. Supposons maintenant que la restriction de φ à chaque O_ι soit différentiable. Soit C une carte de V, définie sur une partie ouverte O de V, et soit C' une carte de V'. La restriction de $C'\circ\varphi\circ C^{-1}$ à $C(O_\iota\cap O)$ est différentiable, puisque la restriction de C à $O_\iota\cap O$ est une carte de O_ι. Comme les $C(O_\iota\cap O)$ forment un recouvrement ouvert de $C(O)$, on voit que $C'\circ\varphi\circ C^{-1}$ est différentiable (chap. I-II). Donc φ est différentiable.

En particulier, si φ est une application différentiable de V dans V', la restriction de φ à une sous-variété ouverte O de V est différentiable. Mais on notera qu'une application différentiable de O dans V' n'est pas nécessairement la restriction à O d'une application différentiable de V dans V', même si $V'=K$.

Z

Proposition 6 (transitivité).- Soient V,V',V" des variétés, φ une application différentiable de V dans V', φ' une application différentiable de V' dans V". Alors, $\varphi'\circ\varphi$ est une application différentiable de V dans V".

Soit $x\in V$. Il existe un voisinage ouvert U' de $\varphi(x)$ dans V' dans lequel est défini une carte C' de V'. L'ensemble $\overset{-1}{\varphi}(U')=U$ est un voisinage ouvert de x dans V , et nous allons montrer que la restriction de $\varphi'\circ\varphi$ à U est différentiable ; ceci, avec la prop. 5, établira la proposition. Or, soient C une carte de U et C" une carte de V". Comme $\varphi(U)\subset U'$, on a $C''\circ(\varphi'\circ\varphi)\circ\overset{-1}{C} = (C''\circ\varphi'\circ\overset{-1}{C'})\circ(C'\circ\varphi\circ\overset{-1}{C})$. Or $C'\circ\varphi\circ\overset{-1}{C}$ et $C''\circ\varphi'\circ\overset{-1}{C'}$ sont différentiables, donc $C''\circ(\varphi'\circ\varphi)\circ\overset{-1}{C}$ est différentiable (chap.I-II), ce qui établit notre assertion.

Proposition 7.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n', $(C_\alpha)_{\alpha\in A}$ un atlas de V , $(C'_\beta)_{\beta\in B}$ un atlas de V', φ une application de V dans V'. Pour que φ soit différentiable, il faut et il suffit que l'application $C'_\beta\circ\varphi\circ\overset{-1}{C_\alpha}$ soit définie dans une partie ouverte de K^n et différentiable pour tout $\alpha\in A$ et tout $\beta\in B$ (tels que cette application soit définie sur un ensemble non vide).

Si φ est différentiable, $C'_\beta\circ\varphi\circ\overset{-1}{C_\alpha}$ est défini dans un ensemble vide ou différentiable par définition des applications différentiables. Réciproquement, supposons vérifiée la condition de la proposition. Alors, φ est d'abord continue. Donc, si O_α (resp. O'_β) désigne l'ensemble

15

de définition de C_α (resp. C'_β), les ensembles $O_\alpha \cap \overset{-1}{\varphi}(O'_\beta)$ forment un recouvrement ouvert de V. La restriction de φ à tout ensemble $O_\alpha \cap \overset{-1}{\varphi}(O'_\beta)$ est différentiable d'après les prop.3 et 6. Ceci, avec la prop.5, montre que φ est différentiable.

Corollaire 1. Soient V et V' des variétés analytiques sur K, φ une application de V dans V', K' un sous-corps fermé de K, tel que le degré de K sur K' soit fini. Soient V_1 et V'_1 les variétés sur K' associées à V et V'. Alors, si φ, considérée comme application de V dans V', est analytique, φ est aussi une application analytique de V_1 dans V'_1.

En effet, soient n et n' les dimensions de V et V', d le degré de K sur K', θ un isomorphisme de K^n sur K'^{nd}, θ' un isomorphisme de $K^{n'}$ sur $K'^{n'd}$ (K^n, $K^{n'}$, K^{nd}, $K'^{n'd}$ étant considérés comme espaces vectoriels sur K'). Soient $(C_\alpha)_{\alpha\in A}$ un atlas de V, $(C'_\beta)_{\beta\in B}$ un atlas de V'. Alors, $(\theta\circ C_\alpha)_{\alpha\in A}$ est un atlas de V_1, $(\theta'\circ C'_\beta)_{\beta\in B}$ est un atlas de V'_1. Si les applications $C'_\beta\circ\varphi\circ\overset{-1}{C_\alpha}$ sont des applications analytiques de parties ouvertes de K^n dans $K^{n'}$, les applications
$(\theta'\circ C'_\beta)\circ\varphi\circ(\theta\circ C_\alpha)^{-1} = \theta'\circ(C'_\beta\circ\varphi\circ\overset{-1}{C_\alpha})\circ\overset{-1}{\theta}$ sont des applications analytiques de parties ouvertes de K'^{nd} dans $K'^{n'd}$, d'où le corollaire.

On établit de manière analogue le corollaire suivant :

Corollaire 2.- Soient V et V' des variétés analytiques réelles, V_1 et V'_1 les variétés indéfiniment différentiables associées, φ une application analytique de V dans V'. Alors, φ est une application indéfiniment différentiable de V_1 dans V'_1.

On notera que la réciproque du corollaire 1 est inexacte, par exemple quand V et V' sont des parties ouvertes de $K=C$, et que $K'=R$.

Proposition 8 (est-ce sa place ici ?) - Soit φ une application différentiable d'une variété V de dimension n dans une variété V' de dimension n dans une variété V' de dimension n' > n . Soit H une partie compacte de V . L'ensemble $\varphi(H)$ est rare dans V' (moyennant des hypothèses que j'ignore sur le corps de base).

Soit $x \in H$. Il existe un voisinage ouvert V_x de x qui est l'ensemble de définition d'une carte de V . Soit W_x un voisinage fermé de x contenu dans V_x (si l'espace V a le bon goût d'être régulier). L'ensemble H peut être recouvert par un nombre fini de voisinages W_x . Il suffit donc de prouver que $\varphi(H \cap W_x)$ est rare dans V'. Or $H \cap W_x$ est compact. On est donc ramené au cas où H est contenu dans une partie ouverte O de V qui est l'ensemble de définition d'une carte C de V . Nous ferons désormais cette hypothèse.

L'ensemble $H' = \varphi(H)$ est compact. Il est donc réunion d'un nombre fini d'ensembles compacts $H'_1, H'_2, \ldots, H'_p$ dont chacun est contenu dans une partie ouverte de V' qui est l'ensemble de définition d'une carte. Soit $H_i = H \cap \overset{-1}{\varphi}(H'_i)$. Les ensembles H_i sont compacts, et $H'_i = \varphi(H_i)$. Il suffit de prouver que chaque ensemble H'_i est rare. Nous ferons donc désormais l'hypothèse que H' est contenu dans une partie ouverte O' de V' qui est l'ensemble de définition d'une carte C' de V'.

Alors, comme C et C' sont des isomorphismes de variétés, nous sommes ramenés au cas où V et V' sont des parties ouvertes de K^n et $K^{n'}$ respectivement, et la proposition résulte des chap. I-II .

Si φ est supposée seulement continue, $\varphi(H)$ n'est pas nécessairement rare dans V' .

5. *Rang d'une application différentiable*.- *Proposition 9*.- *Soient* V *et* V' *des variétés*, φ *une application différentiable de* V *dans* V', x *un point de* V, $x'=\varphi(x)$. *Soient* C *et* C' *des cartes de* V *et* V', *définies dans des voisinages ouverts de* x *et* x' *respectivement*. *Le rang* r *de l'application* $C'\circ\varphi\circ C^{-1}$ *en* $C(x)$ *est indépendant du choix de* C *et* C'.

En effet, soient C_1 et C_1' d'autres cartes de V et V', définies dans des voisinages ouverts de x et x' respectivement. Les applications $C_1'\circ\varphi\circ C_1^{-1}$ et $(C_1'\circ C'^{-1})\circ(C'\circ\varphi\circ C^{-1})\circ(C\circ C_1^{-1})$ sont égales dans un voisinage de $C_1(x)$, et les jacobiens de $C_1'\circ C'^{-1}$, $C\circ C_1^{-1}$ sont non nuls. D'où la proposition.

Définition 5.- *Le nombre* r *défini par la prop.9 est appelé le rang de* φ *en* x.

Lorsque V et V' sont des parties ouvertes de K^n et $K^{n'}$ respectivement, on retrouve la définition des chap. I-II.

Si φ' est la restriction de φ à un voisinage ouvert de x, φ et φ' ont même rang en x.

Proposition 10.- *Soient* V, V' *des variétés*, φ *une application différentiable de* V *dans* V'. *Le rang* r_x *de* r *en* x *est une fonction semi-continue inférieurement de* x.

Soit x un point de V tel que $r_x \geqslant r$. Il faut montrer que $r_y \geqslant r$ lorsque y appartient à un voisinage de x. Or, x et $x'=\varphi(x)$ possèdent des voisinages ouverts qui sont isomorphes à des sous-variétés ouvertes de K^n et $K^{n'}$ respectivement. La proposition résulte alors des chap.I-II.

Corollaire.- *Soient* n *et* n' *les dimensions de* V *et* V'. *Si* $r_x=n$ (resp. $r_x=n'$), *on a* $r_y=n$ (resp. $r_y=n'$) *dans un voisinage de* x.

Proposition 11.- Soient V, V', V'' des variétés de dimensions n, n', n'', φ une application différentiable de V dans V', ψ une application différentiable de V' dans V'', x un point de V, $x'=\varphi(x)$, r, r', r'' les rangs de φ, ψ et $\psi\circ\varphi$ en x, x' et x respectivement. On a $r'' \leqslant \min(r, r')$. Si $r=n'$, on a $r''=r'$. Si $r'=n'$, on a $r''=r$.

Cette proposition résulte aussitôt des résultats correspondants des chap. I-II.

Proposition 12.- Soient V et V' des variétés, φ une application différentiable de V dans V', de rang partout nul. Si V et K sont connexes et localement connexes, φ est une application constante.

En effet, soient $x \in V$, et $x'=\varphi(x)$. L'ensemble A des points $y \in V$ tels que $\varphi(y)=x'$ est non vide et fermé. Si on montre qu'il est ouvert, on aura $A=V$ et la proposition sera démontrée. Il suffit donc de prouver que $\varphi(y)=x'$ lorsque y appartient à un voisinage de x. On peut donc se ramener au cas où V et V' sont des parties ouvertes connexes de K^n et $K^{n'}$. La proposition résulte alors des chap. I-II.

(Probablement, V connexe entraîne K connexe).

Proposition 13.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n', φ une application différentiable de V dans V', x un point de V. Pour que le rang de φ soit constant et égal à r au voisinage de x, il faut et il suffit que les circonstances suivantes soient réalisées : il existe des voisinages ouverts U et U' de x et $\varphi(x)$, des parties ouvertes O_1, O_2, O_3 de $K^r, K^{n-r}, K^{n'-r}$ contenant l'origine, une carte C de V appliquant U sur $O_1 \times O_2$, une carte C' de V' appliquant U' sur $O_1 \times O_3$, de façon que l'application $C'\circ\varphi\circ\overset{-1}{C}$ transforme le point $(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ en le point $(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots, 0)$.

La proposition résulte aussitôt des énoncés correspondants des chap. I-II .

Corollaire 1.- Supposons $n=n'$. Pour que le rang de φ en x soit égal à n , il faut et il suffit que la restriction de φ à U soit un isomorphisme de U sur un voisinage ouvert de $\varphi(x)$.

Corollaire 2.- Soient V et V' des variétés de dimension n , φ une application différentiable biunivoque de V sur V'. Pour que φ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que, en tout point x de V , le rang de φ soit égal à n .

En effet, la condition entraîne que la restriction de $\overset{-1}{\varphi}$ à un voisinage ouvert de x est différentiable.

6. Fonctions différentiables.- Soit V une variété sur K . Dans tout ce chapitre, et sauf mention expresse du contraire, nous réserverons le nom de "fonction" sur V aux applications de V dans K .

Si, dans la déf.4, on prend pour V' la variété K , on obtient la notion de fonction différentiable sur V .

Supposons que $K = R$ ou $K = C$, et soient E un espace vectoriel topologique localement convexe sur K , E^* son dual. Une application f de V dans E est dite différentiable si, pour tout élément $u \in E^*$, la fonction $x \to \langle f(x),u \rangle$ est différentiable. Lorsque E est de dimension finie r , E est muni canoniquement d'une structure de variété de dimension r sur K , et on vérifie aussitôt que la définition qu'on vient de donner concorde avec la déf.4 .

Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ un système de fonctions définies sur V , à valeurs dans K . Dire que ces fonctions sont différentiables revient à dire, comme on le voit aussitôt que l'application ....

$x \to (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)) = \varphi(x)$ de V dans K^p est différentiable. Si donc g est une fonction différentiable définie dans un voisinage ouvert de $\varphi(V) \subset K^p$, la fonction $g \circ \varphi$, qu'on désigne aussi par $g(f_1, f_2, \ldots, f_p)$, est différentiable. Toute fonction de cette forme est appelée <u>fonction différentiable de</u> $f_1, f_2, \ldots, f_p$.

En particulier, les fonctions différentiables sur V forment une algèbre sur K par rapport à l'addition et à la multiplication usuelle. Si f est une fonction différentiable sur V, et si $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in V$, $1/f$ est différentiable.

7. <u>Systèmes de coordonnées</u>.- <u>Définition 6</u>.- <u>On dit qu'un système de fonctions</u> $f_1, f_2, \ldots, f_n$ <u>définies dans une partie ouverte</u> O <u>de</u> V <u>est un système de coordonnées dans</u> O <u>si l'application</u> $x \to (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ <u>de</u> O <u>dans</u> K^n <u>est une carte de</u> V.

En appelant $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les fonctions coordonnées sur K^n, il revient au même de dire qu'un système de coordonnées dans O est un système de fonctions de la forme $(y_1 \circ C, y_2 \circ C, \ldots, y_n \circ C)$, C étant une carte de V définie dans O. La restriction d'un système de coordonnées dans O à une partie ouverte O' de O est un système de coordonnées dans O'.

Si $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est un système de coordonnées dans O, toute fonction différentiable dans O peut se mettre sous la forme $g(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, g étant une fonction différentiable dans l'ensemble ouvert de K^n image de O par la carte $x \to (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$; autrement dit, une fonction différentiable dans O n'est autre qu'une fonction différentiable de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Ces remarques, et la prop.7, entraînent plus généralement la proposition suivante :

Proposition 14 - Soient V et V' des variétés de dimensions n et n' sur K. Soient $(O_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de V, $(O'_\beta)_{\beta\in B}$ un recouvrement ouvert de V'. Pour $\alpha\in A$ (resp. $\beta\in B$), soit $(f_1^\alpha, f_2^\alpha,\dots,f_n^\alpha)$ (resp. $(g_1^\beta, g_2^\beta,\dots,g_{n'}^\beta)$) un système de coordonnées dans O_α (resp. O'_β). Soit φ une application de V dans V'. Pour que φ soit différentiable, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha\in A$ et tout $\beta\in B$ tels que $U_{\alpha\beta} = O_\alpha\cap\overset{-1}{\varphi}(O'_\beta)\neq\emptyset$, $U_{\alpha\beta}$ soit ouvert et que les fonctions $g_1^\beta\circ\varphi, g_2^\beta\circ\varphi,\dots,g_{n'}^\beta\circ\varphi$, restreintes à $U_{\alpha\beta}$, soient des fonctions différentiables des restrictions à $U_{\alpha\beta}$ des fonctions $f_1^\alpha, f_2^\alpha,\dots,f_n^\alpha$.

Corollaire 1 - Soient V et V' des variétés sur K, φ une application de V dans V'. Pour que φ soit différentiable, il faut et il suffit que, pour toute fonction f définie sur une partie ouverte de V' et différentiable, $f\circ\varphi$ soit définie sur une partie ouverte de V et différentiable.

Corollaire 2.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n' sur K, φ un homéomorphisme de V sur V'. Si, pour toute fonction f' définie sur une partie ouverte de V' et différentiable, $f'\circ\varphi$ est différentiable, et si, pour toute fonction f définie sur une partie ouverte de V et différentiable, $f\circ\overset{-1}{\varphi}$ est différentiable, alors $n=n'$ et φ est un isomorphisme de V sur V'.

Ceci résulte aussitôt du cor. 1 et de la prop. 4.

8. Rang d'un système de fonctions.- Définition 7.- Soient V une variété, $f_1, f_2,\dots,f_p$ des fonctions différentiables définies sur V, x un point de V. On appelle rang en x du système $(f_1,f_2,\dots,f_p)$ le rang en x de l'application $y\to(f_1(y),f_2(y),\dots,f_p(y))$ de V dans K^p.

Lorsque V est une partie ouverte de K^n, on retrouve la définition des chap. I-II. Le rang est indépendant de l'ordre dans lequel sont rangées les fonctions f_i.

Proposition 15.- Soient V une variété, $f_1,f_2,\dots,f_p$ des fonctions différentiables sur V, x un point de V. Pour que le rang du système $f_1,f_2,\dots,f_p$ soit constant et égal à r au voisinage de x, il faut et il suffit qu'on puisse partager ce système en deux systèmes $(f_{i_1},f_{i_2},\dots,f_{i_r})$, $(f_{i_{r+1}},f_{i_{r+2}},\dots,f_{i_p})$, avec les propriétés suivantes 1. Les fonctions $f_{i_{r+1}},f_{i_{r+2}},\dots,f_{i_p}$ sont des fonctions différentiables de $f_{i_1},f_{i_2},\dots,f_{i_r}$ dans un voisinage de x. 2. Les fonctions $f_{i_1},f_{i_2},\dots,f_{i_r}$ font partie d'un système de coordonnées dans un voisinage de x.

Etant donné le caractère local des hypothèses et des conclusions, la prop. résulte des chap. I-II.

Corollaire 1 - Soit n la dimension de V. Pour que le rang en x du système $(f_1,f_2,\dots,f_p)$ soit égal à n, il faut et il suffit que n des fonctions f_i forment un système de coordonnées dans un voisinage de x.

Corollaire 2 - Pour que le rang en x du système $(f_1,f_2,\dots,f_p)$ soit égal à p, il faut et il suffit que $f_1,f_2,\dots,f_p$ fassent partie d'un système de coordonnées dans un voisinage de x.

Corollaire 3 - Supposons $p=n$. Pour que le rang en x du système $(f_1,f_2,\dots,f_n)$ soit égal à n, il faut et il suffit que $f_1,f_2,\dots,f_n$ forment un système de coordonnées dans un voisinage de x.

Corollaire 4 - Soient V une variété, $(f_1,f_2,\dots,f_n)$ un système de coordonnées dans une partie ouverte O de V, x un point de O. Soit $x_i=f_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Soient $g_1,g_2,\dots,g_n$ des fonctions différentiables définies dans un voisinage ouvert du point $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ de K^n. Les fonctions $h_1=g_1(f_1,f_2,\dots,f_n),\dots,h_n=g_n(f_1,f_2,\dots,f_n)$ sont définies et différentiables dans un voisinage ouvert de x. Pour qu'il existe un voisinage ouvert de x dans lequel $h_1, h_2, \ldots, h_n$ constituent un système de coordonnées, il faut et il suffit que le jacobien de $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ soit non nul au point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

§ 2. Modes de définition d'une variété.

1. Définition par la donnée de sous-variétés ouvertes.-Proposition 1.- Soient V un espace topologique séparé, n un nombre entier $\geqslant 0$, $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de V . Supposons donnée sur chaque espace U_ι une structure de variété de dimension n sur K ,de telle sorte que la condition suivante soit vérifiée : si ι et $\varkappa$ sont deux indices de I tels que $U_\iota \cap U_\varkappa \neq \emptyset$, les structures de variétés induites sur $U_\iota \cap U_\varkappa$ par celles de U_ι et $U_\varkappa$ sont identiques. Alors, il existe sur V une structure de variété de dimension n sur K , et une seule, telle que, pour tout $\iota \in I$, la variété U_ι soit une sous-variété ouverte de V .

L'unicité est immédiate : si V_1 et V_2 sont deux variétés répondant à la question, l'application identique de V_1 sur V_2 est différentiable (parce que la différentiabilité est une propriété locale) ainsi que l'application réciproque, donc est un isomorphisme de variétés. Montrons maintenant l'existence sur V d'une structure de variété répondant à la question. Soit $(C_\alpha)_{\alpha \in A_\iota}$ un atlas de la variété U_ι . L'ensemble des C_α, $(\alpha \in A_\iota$, $\iota \in I)$ vérifie les conditions de la prop.2 . Il existe donc sur V une structure de variété de dimension n sur K telle que l'ensemble des C_α constitue un atlas de V . Alors, $(C_\alpha)_{\alpha \in A_\iota}$ est un atlas de la sous-variété ouverte U_ι de V , de sorte que cette sous-variété ouverte coïncide avec la variété donnée U_ι . Ceci achève la démonstration.

Soit $(V_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de variétés de dimension fixe n , et soit V un espace topologique somme des V_ι . Il existe une partition $(O_\iota)_{\iota \in I}$ de V formée d'ensembles ouverts et fermés, et une famille $(f_\iota)_{\iota \in I}$ d'homéomorphismes de V_ι sur O_ι . Alors, d'après la prop. 1, il existe sur l'espace V une structure de variété de dimension n et une seule telle que, pour tout $\iota \in I$, f_ι soit un isomorphisme de la variété V_ι sur la sous-variété ouverte O_ι de V . La variété V ainsi définie s'appelle <u>variété somme</u> des variétés V_ι .

2. <u>Définition par la donnée des applications différentiables des parties ouvertes d'espaces K^p dans la variété</u>.- Ce n°, ainsi que le suivant, est probablement à rejeter en exercice, à moins qu'il ne serve de point de départ à l'introduction des "variétés infinies".

<u>Proposition 2</u>.- <u>Soit</u> V <u>une variété sur</u> K . <u>Soit</u> $\mathcal{S}$ <u>l'ensemble des applications différentiables de parties ouvertes d'espaces</u> K^p (p, <u>nombre entier</u> $\geqslant 0$ <u>variable</u>) <u>dans</u> V . <u>Pour qu'un homéomorphisme</u> C <u>d'une partie ouverte</u> U <u>de</u> V <u>sur une partie ouverte d'un espace</u> K^n <u>soit une carte de</u> V , <u>il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées</u>: 1°- $\overset{-1}{C} \in \mathcal{S}$; 2°- <u>pour toute</u> $f \in \mathcal{S}$, $C \circ f$ <u>est différentiable</u>.

Les conditions sont évidemment nécessaires. Réciproquement, supposons ces conditions remplies. Puisque $\overset{-1}{C}$ est différentiable d'après la condition 1°, il suffit de montrer que C est différentiable. Or, soit $x \in U$. Soit C' une carte de V définie sur un voisinage ouvert U' de x contenu dans U . D'après la condition 2°, $C \circ \overset{-1}{C'}$ est différentiable. Comme $\overset{-1}{C'}$ est un isomorphisme de C'(U') sur U', on en déduit que la restriction de C à U' est différentiable. Comme x est un point arbitraire de U , on voit que C est différentiable.

L'ensemble $\mathcal{S}$ de la prop. 2 possède les propriétés suivantes :

1°- Soit S une application d'une partie ouverte O de K^p dans V ; soit $(O_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties ouvertes de K^p dont la réunion est O. Pour que $S \in \mathcal{S}$, il faut et il suffit que les restrictions de S aux O_ι appartiennent à $\mathcal{S}$.

2°- Soit S un élément de $\mathcal{S}$, défini dans une partie ouverte O de K^p. Si f est une application différentiable d'une partie ouverte O' de K^p dans O, on a $S \circ f \in \mathcal{S}$.

3°- Pour tout $x \in V$, il existe un élément S de $\mathcal{S}$ qui est un homéomorphisme d'une partie ouverte d'un espace K^n sur un voisinage ouvert de x, et qui est tel que, pour toute $f \in \mathcal{S}$, $\overset{-1}{S} \circ f$ est différentiable.

Le nombre entier n de la condition 3° est nécessairement la dimension de V d'après la proposition 2.

Réciproquement, on a la proposition suivante :

Proposition 3.- Soit V un espace topologique séparé. Soit $\mathcal{S}$ un ensemble d'applications continues, dont chacune est définie dans une partie ouverte d'un espace K^p (p, nombre entier $\geqslant 0$ variable), et prend ses valeurs dans V, vérifiant les conditions suivantes :

1°- Soit S une application d'une partie ouverte O de K^p dans V ; soit $(O_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties ouvertes de K^p dont la réunion est O. Pour que $S \in \mathcal{S}$, il faut et il suffit que les restrictions de S aux O_ι appartiennent à $\mathcal{S}$.

2°- Soit S un élément de $\mathcal{S}$, défini dans une partie ouverte O de K^p. Si f est une application différentiable d'une partie ouverte O' de K^p dans O, on a $S \circ f \in \mathcal{S}$.

3°- Pour tout $x \in V$, il existe un élément S de $\mathcal{S}$ qui est un homéomorphisme d'une partie ouverte de K^n (n, nombre entier positif fixe, indépendant de x) sur un voisinage ouvert de x, et qui est tel que, pour toute $f \in \mathcal{S}$, $\overset{-1}{S} \circ f$ soit différentiable.

Alors, il existe sur V une structure de variété de dimension n sur K, et une seule, telle que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble des applications différentiables de parties ouvertes d'espaces K^p dans V.

S'il existe sur V une structure de variété répondant à la question, ses cartes sont nécessairement définies, d'après la prop. 2, de la manière suivante : on prend les homéomorphismes C d'une partie ouverte O de V sur une partie ouverte $C(O)$ de K^n, tels que $\overset{-1}{C} \in \mathcal{S}$, et tels que, pour toute application $f \in \mathcal{S}$, $C \circ f$ soit différentiable. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces homéomorphismes. Montrons d'abord que $\mathcal{C}$ vérifie les axiomes (V_I) à (V_{IV}) de la déf. 2 .

La condition 3° exprime précisément que (V_I) est vérifié. Maintenant, soit C un homéomorphisme d'une partie ouverte O de V sur une partie ouverte de K^n ; soit $(O_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties ouvertes de V dont la réunion est O ; soit C_ι la restriction de C à O . Si $C \in \mathcal{C}$, on a $\overset{-1}{C} \in \mathcal{S}$, donc, d'après la condition 1°, $\overset{-1}{C_\iota} \in \mathcal{S}$; et, si $f \in \mathcal{S}$, $C \circ f$ est différentiable, donc $C_\iota \circ f$ est différentiable ; donc $C_\iota \in \mathcal{C}$ pour tout $\iota \in I$. Maintenant, supposons que $C_\iota \in \mathcal{C}$ pour tout $\iota \in I$; alors $\overset{-1}{C_\iota} \in \mathcal{S}$ pour tout $\iota \in I$, donc $\overset{-1}{C} \in \mathcal{S}$ d'après la condition 1° ; d'autre part, si $f \in \mathcal{S}$, $C_\iota \circ f$ est différentiable pour tout $\iota \in I$, donc $C \circ f$ est différentiable, donc $C \in \mathcal{C}$, et l'axiome (V_{II}) est vérifié. Soient maintenant C et C' deux éléments de $\mathcal{C}$; on a $\overset{-1}{C} \in \mathcal{S}$, donc $C' \circ \overset{-1}{C}$ est différentiable ; de même, $C \circ \overset{-1}{C'}$ est différentiable, de sorte que l'axiome (V_{III}) est vérifié. Enfin, soit C un élément de $\mathcal{C}$, appliquant une partie ouverte U de V sur une partie ouverte de K^n , et soit φ une application différentiable biunivoque à jacobien non nul de $C(U)$ sur une partie ouverte de K^n ; soit $C' = \varphi \circ C$; on a

$\overset{-1}{C'} = \overset{-1}{C} \circ \overset{-1}{\varphi} \in \mathcal{S}$ d'après la condition 2°; d'autre part, si $f \in \mathcal{S}$, on a $C' \circ f = \varphi \circ (C \circ f)$, donc $C' \circ f$ est différentiable ; ainsi, $C' \in \mathcal{C}$, et l'axiome (V_{IV}) est satisfait.

Il existe donc sur V une structure de variété de dimension n sur K, telle que $\mathcal{C}$ soit l'ensemble des cartes de V. Si $f \in \mathcal{S}$, $C \circ f$ est différentiable pour toute carte C de V, donc (§1, prop. 7) f est différentiable. Réciproquement, soit f une application différentiable d'une partie ouverte O d'un espace K^p dans la variété V ; montrons que $f \in \mathcal{S}$; soit $x \in O$; soient U un voisinage ouvert de f(x) dans V, C une carte de V définie dans U ; soit $O' = \overset{-1}{f}(U)$, qui est un voisinage ouvert de x contenu dans O ; soit f' la restriction de f à O' ; on a $f' = \overset{-1}{C} \circ (C \circ f')$, $C \circ f'$ est différentiable, et $\overset{-1}{C} \in \mathcal{S}$, donc $f' \in \mathcal{S}$ d'après la condition 2° ; comme x est un point quelconque de O, on en déduit que $f \in \mathcal{S}$ d'après la condition 1°.

3. <u>Définition par la donnée des applications différentiables de parties ouvertes de la variété dans les espaces</u> K^p .-- Soient V une variété sur K, $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications différentiables de parties ouvertes de V dans K^p (p, nombre entier $\geqslant 0$ variable). L'ensemble $\mathcal{C}$ possède les propriétés suivantes :

1°- Soit T une application d'une partie ouverte O de V dans K^p ; soit $(O_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties ouvertes de V dont la réunion est O. Pour que $T \in \mathcal{C}$, il faut et il suffit que les restrictions de T aux O_ι appartiennent à $\mathcal{C}$.

2°- Soit T un élément de $\mathcal{C}$, défini dans une partie ouverte O de V à valeurs dans K^p. Si f est une application différentiable d'une partie ouverte de K^p contenant T(O) dans K^p, on a $f \circ T \in \mathcal{C}$.

3^o- Pour tout $x \in V$, il existe un élément T de $\mathcal{C}$ qui est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert de x sur une partie ouverte d'un espace K^n, et qui est tel que, pour toute $f \in \mathcal{C}$, $f \circ T^{-1}$ est différentiable.

Le nombre entier n de la condition 3^o est nécessairement la dimension de V d'après la prop.3 du §1 et le cor.1 de la prop.9 du §1.

Réciproquement, on a la proposition suivante :

Proposition 4 - Soit V un espace topologique séparé. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble d'applications continues, dont chacune est définie dans une partie ouverte de V, et prend ses valeurs dans un espace K^p (p, nombre entier $\geqslant 0$ variable), vérifiant les conditions suivantes :

1^o- Soit T une application d'une partie ouverte O de V dans K^p ; soit $(O_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties ouvertes de V dont la réunion est O. Pour que $T \in \mathcal{C}$, il faut et il suffit que les restrictions de T, aux O_ι appartiennent à $\mathcal{C}$.

2^o- Soit T un élément de $\mathcal{C}$, défini dans une partie ouverte O de V, à valeurs dans K^p. Si f est une application différentiable d'une partie ouverte de K^p contenant T(O) dans K^p, on a $f \circ T \in \mathcal{C}$.

3^o- Pour tout $x \in V$, il existe un élément T de $\mathcal{C}$ qui est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert de x sur une partie ouverte de K^n (n, nombre entier $\geqslant 0$ fixe), et qui est tel que, pour toute $f \in \mathcal{C}$, $f \circ T^{-1}$ est différentiable.

Alors, il existe sur V une structure de variété de dimension n sur K, et une seule, telle que $\mathcal{C}$ soit l'ensemble des applications différentiables de parties ouvertes de V dans les espaces K^p.

S'il existe sur V une structure de variété répondant à la question, ses cartes sont nécessairement définies, d'après le cor.1 de la prop.9 , de la manière suivante : on prend les homéomorphismes $C \in \mathfrak{C}$ d'une partie ouverte O de V sur une partie ouverte $C(O)$ de K^n, tels que, pour toute application $f \in \mathfrak{C}$, $f \circ \overset{-1}{C}$ soit différentiable. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble de ces homéomorphismes. Montrons d'abord que $\mathscr{C}$ vérifie les axiomes (V_I) à (V_{IV}) de la déf. 1.

La condition 3° exprime précisément que (V_I) est vérifié. Maintenant, soit C un homéomorphisme d'une partie ouverte O de V sur une partie ouverte de K^n ; soit $(O_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties ouvertes de V dont la réunion est O ; soit C_ι la restriction de C à O_ι . Si $C \in \mathscr{C}$, on a $C \in \mathfrak{C}$, donc, d'après la condition 1°, $C_\iota \in \mathfrak{C}$; et, si $f \in \mathfrak{C}$, $f \circ \overset{-1}{C}$ est différentiable, donc $f \circ \overset{-1}{C_\iota}$ est différentiable ; donc $C_\iota \in \mathscr{C}$ pour tout $\iota \in I$. Maintenant, supposons que $C_\iota \in \mathscr{C}$ pour tout $\iota \in I$; alors $C_\iota \in \mathfrak{C}$ pour tout $\iota \in I$, donc $C \in \mathfrak{C}$ d'après la condition 1° ; d'autre part, si $f \in \mathfrak{C}$, $f \circ \overset{-1}{C_\iota} \in \mathfrak{C}$ est différentiable pour tout $\iota \in I$, donc $f \circ \overset{-1}{C}$ est différentiable ; donc $C \in \mathscr{C}$, et l'axiome (V_{II}) est vérifié. Soient maintenant C et C' deux éléments de $\mathscr{C}$; on a $C' \in \mathfrak{C}$, donc $C' \circ \overset{-1}{C}$ est différentiable ; de même, $C \circ \overset{-1}{C'}$ est différentiable, de sorte que l'axiome (V_{III}) est vérifié. Enfin, soit C un élément de $\mathscr{C}$ appliquant une partie ouverte U de V sur une partie ouverte de K^n, et soit φ une application différentiable biunivoque à jacobien non nul de $C(U)$ sur une partie ouverte de K^n ; soit $C' = \varphi \circ C$; on a $C' \in \mathfrak{C}$ d'après la condition 2° ; d'autre part, si $f \in \mathfrak{C}$, on a $f \circ \overset{-1}{C'} = (f \circ \overset{-1}{C}) \circ \overset{-1}{\varphi}$, do $f \circ \overset{-1}{C'}$ est différentiable ; ainsi, $C' \in \mathscr{C}$, et l'axiome (V_{IV}) est satisfait.

Il existe donc sur V une structure de variété de dimension n sur K , telle que $\mathscr{C}$ soit l'ensemble des cartes de V . Si $f \in \mathfrak{C}$, $f \circ \overset{-1}{C}$ est différentiable pour toute carte C de V , donc (§ 1,prop.7) f est différentiable

NBR080 30

Réciproquement, soit f une application différentiable d'une partie ouverte O de V dans un espace K^p ; montrons que $f \in \mathcal{E}$; soit $x \in O$; soient U un voisinage ouvert de x contenu dans O, C une carte de V définie dans U, f' la restriction de f à U ; on a $f'=(f \circ C^{-1}) \circ C$, $f \circ C^{-1}$ est différentiable, et $C \in \mathcal{E}$, donc $f' \in \mathcal{E}$ d'après la condition 2^o ; comme x est un point quelconque de O, on en déduit que $f \in \mathcal{E}$ d'après la condition 1^o.

4. Définition par la donnée des fonctions différentiables.- Soit V une variété de dimension n sur K. L'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions différentiables définies dans des parties ouvertes de V possède les propriétés suivantes :

1^o- Pour qu'une fonction f, définie sur une partie U de V réunion d'une famille de parties ouvertes $(U_\iota)_{\iota \in I}$, appartienne à $\mathcal{F}$, il faut et il suffit que sa restriction à chaque U_ι appartienne à $\mathcal{F}$.

2^o- Quel que soit $x \in V$, il existe un voisinage ouvert O de x, et un homéomorphisme C de O sur une partie ouverte de K^n, tels que l'ensemble des fonctions $f \circ C^{-1}$, quand f parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ dont l'ensemble de définition est contenu dans O, soit l'ensemble des fonctions différentiables définies dans une partie ouverte de $C(O)$.

Réciproquement, on a la proposition suivante :

Proposition 5.- Soit V un espace topologique séparé. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions à valeurs dans K, dont chacune est définie sur une partie ouverte de V. Supposons que $\mathcal{F}$ vérifie les propriétés suivantes :

1^o- Pour qu'une fonction f, à valeurs dans K, définie sur une partie U de V réunion d'une famille de parties ouvertes $(U_\iota)_{\iota \in I}$, appartienne à $\mathcal{F}$, il faut et il suffit que sa restriction à chaque U_i appartienne à $\mathcal{F}$.

2°- Quel que soit $x \in V$, il existe un voisinage ouvert O de x, et un homéomorphisme C de O sur une partie ouverte de K^n, tels que l'ensemble des fonctions $f \circ \overset{-1}{C}$, quand f parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ dont l'ensemble de définition est contenu dans O, soit l'ensemble des fonctions différentiables définies dans une partie ouverte de $C(O)$, à valeurs dans K.

Alors, il existe sur V une structure de variété différentiable de dimension n sur K, et une seule, telle que $\mathcal{F}$ soit l'ensemble des fonctions différentiables définies dans des parties ouvertes de V.

S'il existe sur V une structure de variété répondant à la question, le cor.2 de la prop.9 du §1 montre que ses cartes sont nécessairement définies de la manière suivante : on considère les homéomorphismes C d'une partie ouverte O de V sur une partie ouverte $C(O)$ de K^n, tels que, quand f parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ définies dans une partie de O, $f \circ \overset{-1}{C}$ parcourt l'ensemble des fonctions différentiables à valeurs dans K, définies dans une partie ouverte de $C(O)$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces homéomorphismes. Montrons que deux éléments quelconques C et C' de $\mathcal{C}'$ définis dans O et O', sont différentiablement semblables. Si $U = O \cap O' \neq \emptyset$, la restriction C_1 de C à U transforme l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ définies dans U en l'ensemble des fonctions différentiables définies dans $C_1(U)$, et la restriction C'_1 de C' à U transforme l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ définies dans U en l'ensemble des fonctions différentiables définies dans $C'_1(U)$. Alors, d'après la prop.9 du §1, $C_1 \circ \overset{-1}{C'_1}$ et $C'_1 \circ \overset{-1}{C_1}$ sont différentiables, ce qui établit notre assertion.

Ceci posé, il existe, d'après la prop.2 du § 1 et la propriété 2°, une structure de variété sur V telle que $\mathcal{C}$ soit un atlas de V. Montrons que, pour cette structure, $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions différentiables définies dans des parties ouvertes de V. Soit O une partie ouverte de V ; pour tout point $x \in O$, il existe un voisinage ouvert U de x contenu dans O et un homéomorphisme $C \in \mathcal{C}$ défini dans U, qui transforme l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ définies dans U en l'ensemble des fonctions différentiables définies dans C(U) ; comme C est une carte de la variété V, ceci entraîne que les fonctions de $\mathcal{F}$ définies dans U ne sont autres que les fonctions différentiables définies sur U. Ceci posé, si f est une fonction de $\mathcal{F}$ définie dans O, sa restriction à U est une fonction de $\mathcal{F}$ (d'après la propriété 1°), dont est différentiable ; comme x est un point arbitraire de O, on voit que f est différentiable dans O (§ 1, prop.5). Réciproquement, si f est une fonction différentiable définie dans O, sa restriction à U est différentiable, donc appartient à $\mathcal{F}$; comme x est un point arbitraire de O, on voit que $f \in \mathcal{F}$, d'après la propriété 1°.

Dire ici que, si on définit la structure de variété différentiable par ses fonctions différentiables, les "représentations" sont les applications différentiables d'après le cor.1 de la prop.9 du § 1 (il faut préciser les questions de variances, et la partie "topologique" de la structure).

5. Exercices pour le chapitre global.- Lemme 1.- *Soient V une variété indéfiniment différentiable réelle paracompacte, O une partie ouverte de V, F une partie fermée de V telle que $F \subset O$, f une fonction différentiable définie dans O. Il existe alors une fonction différentiable g définie dans V, qui coïncide avec f dans F, et qui est nulle hors de O.*

Soit F' un voisinage fermé de $\complement O$ sans point commun avec f . Il existe (cf. chapitre global) une fonction différentiable h sur V égale à 1 sur F et à 0 sur F'. Considérons la fonction g égale à 0 dans $\complement O$ et à fh dans O . Cette fonction coïncide avec f dans F . Montrons qu'elle est différentiable. Il suffit de le vérifier au voisinage d'un point quelconque x de V . Or, si $x \in \complement O$, g est nulle dans le voisinage F' de x ; et, si $x \in O$, g est égale à fh dans le voisinage O de x .

Proposition 6.- Soient V une variété indéfiniment différentiable réelle paracompacte de dimension n , $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions définies sur V et différentiables, x un point de V . Il existe un voisinage ouvert O de x , et une carte C définie dans O, tels que l'ensemble des fonctions $f \circ C^{-1}$, pour $f \in \mathcal{G}$, soit l'ensemble des restrictions à C(O) des fonctions différentiables dans R^n .

En effet, soit O_1 un voisinage ouvert de x qui soit l'ensemble de définition d'une carte C_1 de V . Soit O un voisinage ouvert de x tel que $\overline{O}$ soit compact et contenu dans O_1. Alors, $C_1(O)$ est un voisinage ouvert de $C_1(x)$ tel que $\overline{C_1(O)}$ soit compact et contenu dans $C_1(O_1)$. Soit C la restriction de C_1 à O . On va voir que O et C possèdent la propriété du lemme. Soit $f \in \mathcal{G}$. Il existe (lemme 1) une fonction g différentiable sur R^n qui coïncide avec $f \circ C_1^{-1}$ dans $\overline{C_1(O)}$, donc dont la restriction à C(O) est $f \circ C^{-1}$. Réciproquement, soit f' une fonction différentiable sur R^n . Il existe (lemme 1) une fonction g' différentiable sur V qui coïncide avec $f' \circ C_1$ dans O ; donc la restriction de f' à C(O) coïncide avec $g' \circ C^{-1}$.

Proposition 7.- Soit V un espace paracompact. Soit $\mathcal{G}$ un ensemble de fonctions numériques définies sur V et vérifiant les conditions suivantes :

1°- Si une fonction numérique f définie sur V coïncide au voisinage de tout point de V avec une fonction de $\mathcal{G}$, alors $f \in \mathcal{G}$.

2°- Si $x \in V$, il existe un voisinage ouvert O de x, et un homéomorphisme C de O sur une partie ouverte de R^n, tels que l'ensemble des fonctions $f \circ \overset{-1}{C}$, pour $f \in \mathcal{G}$, soit l'ensemble des restrictions à $C(O)$, des fonctions différentiables dans R^n.

Alors, il existe sur V une structure de variété indéfiniment différentiable réelle de dimension n, et une seule, telle que $\mathcal{G}$ soit l'ensemble des fonctions différentiables définies sur V.

Pour toute partie ouverte O de V, soit $\mathcal{F}_O$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur O qui, au voisinage de tout point de O, coïncident avec une fonction de $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{F}$ la réunion des $\mathcal{F}_O$. S'il existe sur V une structure de variété indéfiniment différentiable réelle telle que $\mathcal{G}$ soit l'ensemble des fonctions différentiables définies sur V, $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions différentiables définies sur des parties ouvertes de V (lemme 1). La structure cherchée est donc unique si elle existe (prop.5). D'autre part, nous allons montrer que $\mathcal{F}$ satisfait aux conditions 1° et 2° de la prop.5. Il en résultera l'existence d'une structure de variété indéfiniment différentiable réelle sur V, pour laquelle $\mathcal{F}$ sera l'ensemble des fonctions différentiables définies sur des parties ouvertes de V. L'ensemble des fonctions différentiables pour cette structure et définies sur V sera alors $\mathcal{G}$ en vertu de la condition 1° de la proposition.

Il est immédiat que $\mathcal{F}$ vérifie la condition 1° de la prop.5. Maintenant, soit $x \in V$; soient O un voisinage ouvert de x, et C un homéomorphisme de O sur une partie ouverte de R^n, tels que l'ensemble des fonctions $f \circ \overset{-1}{C}$, pour $f \in \mathcal{G}$, soit l'ensemble des restrictions à $C(O)$

des fonctions différentiables dans R^n. Nous allons prouver, ce qui achèvera la démonstration, que l'ensemble des fonctions $g \circ \overset{-1}{C}$, lorsque g parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ définies dans une partie de O, est l'ensemble des fonctions numériques différentiables définies dans une partie ouverte de C(O). Soit g une fonction de $\mathcal{F}$ définie dans la partie ouverte O' de O ; pour tout point x de O', il existe une fonction $g' \in \mathcal{G}$ qui coïncide avec g au voisinage de x, par définition de $\mathcal{F}$; la fonction $g' \circ \overset{-1}{C}$ est alors différentiable dans C(O) et coïncide avec $g \circ \overset{-1}{C}$ dans un voisinage de C(x) ; comme C(x) est un point arbitraire de C(O'), on en conclut que $g \circ \overset{-1}{C}$ est différentiable dans C(O'). Réciproquement, soit g une fonction définie dans une partie ouverte O' de O, telle que $g \circ \overset{-1}{C}$ soit différentiable ; pour tout point y de O', il existe une fonction R différentiable définie dans R^n qui coïncide avec $g \circ \overset{-1}{C}$ au voisinage de C(y) (lemme 1) ; d'autre part, il existe une fonction $g' \in \mathcal{G}$ telle que $g' \circ \overset{-1}{C}$ soit la restriction de h à C(O) ; donc h coïncide avec g au voisinage de y ; comme y est un point arbitraire de O', on en conclut que $g \in \mathcal{F}$.

Au lieu de parler de fonctions différentiables dans une partie ouverte de R^n et prolongeables à tout R^n, on pourrait, comme dans l'Etat 2, parler de fonctions différentiables sur une partie fermée de R^n. Est-ce utile ?

<u>Proposition 8.- Soient</u> V <u>et</u> V' <u>des variétés indéfiniment différentiables réelles,</u> φ <u>une application continue de</u> V <u>dans</u> V'. <u>Pour que</u> φ <u>soit différentiable, il suffit que, pour toute fonction</u> f <u>différentiable et définie sur</u> V', f∘φ <u>soit différentiable sur</u> V (<u>à condition que</u> V' <u>soit paracompacte</u>).

En effet, soit g une fonction différentiable définie dans une partie ouverte O de V'. Montrons que la fonction $g \circ \varphi$, qui est définie sur la partie ouverte $\overset{-1}{\varphi}(O)$ de V, est différentiable. Ceci, avec le cor. 1 de la prop. 9 du § 1, achèvera la démonstration. Or, soit $x \in \overset{-1}{\varphi}(O)$; il existe une fonction f, différentiable et définie sur V', qui coïncide avec g sur un voisinage de $\varphi(x)$; alors, la fonction $f \circ \varphi$ est différentiable sur V et coïncide avec $g \circ \varphi$ dans un voisinage de x ; comme x est un point arbitraire de $\overset{-1}{\varphi}(O)$, notre assertion est établie.

On peut transposer de même en langage global le cor. 2 de la prop. 9 du § 1.

Proposition 9.- Soit V un espace topologique séparé. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions à valeurs dans R, dont chacune est définie sur une partie ouverte de V. Supposons que $\mathcal{F}$ vérifie les propriétés suivantes :

1°- Pour qu'une fonction f, à valeurs dans R, définie sur une partie U de V réunion d'une famille de parties ouvertes $(U_\iota)_{\iota \in I}$, appartienne à $\mathcal{F}$, il faut et il suffit que sa restriction à chaque U_ι appartienne à $\mathcal{F}$.

2°- Quel que soit $x \in V$, il existe un voisinage ouvert arbitrairement petit O de x, et un homéomorphisme C de O sur une partie ouverte de R^n, tels que l'ensemble des fonctions $f \circ \overset{-1}{C}$, quand f parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ définies dans O, soit l'ensemble des fonctions différentiables dans $C(O)$.

Alors, il existe sur V une structure de variété indéfiniment différentiable de dimension n sur R, et une seule, telle que $\mathcal{F}$ soit l'ensemble des fonctions différentiables définies dans des parties ouvertes de V.

D'après la prop. 5, il suffit de prouver ceci : soit C un homéomorphisme d'une partie ouverte O de V sur une partie ouverte de R^n tel que, quand f parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ définies dans O, $f \circ \overset{-1}{C}$ parcourt l'ensemble des fonctions différentiables dans C(O) ; alors, quand f parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ définies dans une partie ouverte O' de O, $f \circ \overset{-1}{C}$ parcourt l'ensemble des fonctions différentiables définies dans C(O').

Soit C' la restriction de C à O'. Considérons d'abord une fonction différentiable f définie dans C'(O'), et montrons que $f \circ C' \in \mathcal{F}$. Pour tout point $x \in O'$, il existe (lemme 1) une fonction g différentiable dans C(O) qui coïncide avec f dans un voisinage ouvert A de C'(x). Alors, $g \circ C \in \mathcal{F}$, donc, d'après la propriété 1°, la restriction de $g \circ C$ à $\overset{-1}{C'}(A)$, qui est aussi la restriction de $f \circ C'$ à $\overset{-1}{C'}(A)$, appartient à $\mathcal{F}$. Comme x est un point arbitraire de O', la propriété 1° entraîne que $f \circ C' \in \mathcal{F}$.

Réciproquement, soit f une fonction définie sur C'(O'), telle que $f \circ C' \in \mathcal{F}$, et montrons que f est différentiable. Soit $y \in C'(O')$. Soit g une fonction différentiable dans C(O), égale à 1 dans un voisinage de y et à 0 dans un voisinage de C(O)-C'(O') (lemme 1). Soit h la fonction égale à 0 dans C(O)-C'(O'), et à fg dans C'(O'). Montrons que la fonction $h \circ C$, qui est définie dans O, appartient à $\mathcal{F}$. Il suffit de prouver que, pour tout point $x \in O$, il existe un voisinage ouvert de x tel que la restriction de $h \circ C$ à ce voisinage appartienne à $\mathcal{F}$; or, si $x \in O-O'$, $h \circ C$ coïncide dans un voisinage de x avec la fonction identiquement nulle sur O, laquelle appartient à $\mathcal{F}$; et, si $x \in O'$, $h \circ C$ coïncide dans un voisinage de x avec la fonction $(f \circ C').(g' \circ C')$, g' désignant la restriction de g à C'(O') ; or, $f \circ C'$ appartient à $\mathcal{F}$ par hypothèse, et $g' \circ C'$ appartient à $\mathcal{F}$ comme restriction à O' de $g \circ C$ qui appartient à $\mathcal{F}$; et nous allons montrer dans un instant que le produit de deux fonctions de $\mathcal{F}$ définies dans le même ensemble est une fonction de $\mathcal{F}$. Ceci posé, on peut conclure que h est différentiable dans C(O), donc que la restriction de f à un voisinage de y est différentiable ; comme y est un point arbitraire de O', f est différentiable.

Reste à montrer que le produit de deux fonctions $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{F}$ définies dans la même partie ouverte O de V appartient à $\mathcal{F}$ (on pourrait prendre ceci pour hypothèse 3^o dans la prop., en supprimant dans l'hypothèse 2^o les mots "arbitrairement petit" qui n'ont pas encore servi ; mais il ne semble pas qu'on puisse éviter une hypothèse supplémentaire, contrairement à ce qu'affirme le rapport Schwartz). Soit $x \in O$. Il existe un voisinage ouvert U de x contenu dans O et un homéomorphisme C de U sur une partie ouverte de R^n qui transforme l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ définies dans U en l'ensemble des fonctions différentiables dans C(U). Soient f' et g' les restrictions de f et g à U. On a $f' \in \mathcal{F}$, $g' \in \mathcal{F}$, donc $f' \circ \overset{-1}{C}$ et $g' \circ \overset{-1}{C}$ sont différentiables dans C(U), donc il en est de même de $(f' \circ C).(g' \circ \overset{-1}{C})$; par suite, $f'g' \in \mathcal{F}$. Comme x est un point arbitraire de O, on conclut que $fg \in \mathcal{F}$.

Problème : la prop.9 est-elle vraie dans le cas analytique ?

§ 3. Produits de variétés.

1. Définition du produit de deux variétés.- Proposition 1.- Soient V_1 et V_2 des variétés de dimensions n_1 et n_2 sur K, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les ensembles de cartes de V_1 et V_2. Pour toute carte $C_1 \in \mathcal{C}_1$ définie sur O_1 et toute carte $C_2 \in \mathcal{C}_2$ définie sur O_2, soit $C_1 \times C_2$ l'homéomorphisme $(x_1,x_2) \rightarrow (C_1(x_1),C_2(x_2))$ de la partie ouverte $O_1 \times O_2$ de l'espace $V_1 \times V_2$ sur la partie ouverte $C_1(O_1) \times C_2(O_2)$ de $K^{n_1} \times K^{n_2} = K^{n_1+n_2}$.

<u>Il existe sur</u> $V_1 \times V_2$ <u>une structure de variété de dimension</u> n_1+n_2 <u>sur</u> K, <u>et une seule, telle que les</u> $C_1 \times C_2$ <u>forment un atlas de</u> $V_1 \times V_2$.

En effet, soient $C_1 \in \mathcal{C}_1$, $C_1' \in \mathcal{C}_1$, $C_2 \in \mathcal{C}_2$, $C_2' \in \mathcal{C}_2$, $C = C_1 \times C_2$, $C' = C_1' \times C_2'$. On a $(C \circ C'^{-1})(y_1, y_2) = ((C_1 \circ C_1'^{-1})(y_1)$, $(C_2 \circ C_2'^{-1})(y_2))$. Donc C et C' sont différentiablement semblables. Il suffit alors d'appliquer la prop.2 du § 1 .

<u>Définition 1</u> - <u>La variété introduite dans la prop.1 s'appelle le produit des variétés</u> V_1 <u>et</u> V_2, <u>et se désigne par</u> $V_1 \times V_2$.

Si V_1 et V_2 sont des espaces vectoriels de dimension finie, on vérifie aussitôt que la structure de variété de $V_1 \times V_2$ est la structure canoniquement associée à la structure d'espace vectoriel produit.

Si $(f_1, f_2, \ldots, f_{n_1})$ est un système de coordonnées dans une partie ouverte O_1 de V_1, et $(g_1, g_2, \ldots, g_{n_2})$ un système de coordonnées dans une partie ouverte O_2 de V_2, le système de fonctions $(x_1,x_2) \to f_1(x_1), \ldots,$ $(x_1,x_2) \to f_{n_1}(x_1), (x_1,x_2) \to g_1(x_2), \ldots, (x_1,x_2) \to g_{n_2}(x_2)$ est un système de coordonnées dans $O_1 \times O_2$.

Le résultat d'unicité de la prop.2 du § 1 entraîne immédiatement les résultats suivants :

1. Si V_1' et V_2' sont des sous-variétés ouvertes de V_1 et V_2, les structures de variétés de $V_1' \times V_2'$ obtenues en considérant $V_1' \times V_2'$ soit comme produit de V_1' et V_2' , soit comme sous-variété ouverte de $V_1 \times V_2$, sont identiques.

2. Si K' est un sous-corps fermé de K tel que le degré de K sur K' soit fini, et si V_1' et V_2' désignent les variétés sur K' associées aux variétés V_1 et V_2 sur K , $V_1' \times V_2'$ est la variété sur K' associée à la variété $V_1 \times V_2$ sur K .

3. Si V_1 et V_2 sont des variétés analytiques réelles, et si $V_1^!, V_2^!$ désignent les variétés indéfiniment différentiables réelles associées, $V_1^! \times V_2^!$ est la variété indéfiniment différentiable associée à la variété analytique $V_1 \times V_2$.

2. Applications différentiables dans un produit.- Proposition 2.- Soient V_1, V_2 et W des variétés, φ une application de W dans $V_1 \times V_2$. Pour que φ soit différentiable, il faut et il suffit que $pr_1 \circ \varphi$ et $pr_2 \circ \varphi$ soient différentiables.

Montrons d'abord que pr_1 et pr_2 sont différentiables. Soit $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$. Soient C_1 une carte de V_1 définie dans un voisinage ouvert O_1 de x_1, C_2 une carte de V_2 définie dans un voisinage ouvert O_2 de x_2. Il suffit de prouver que les restrictions de pr_1 et pr_2 à $O_1 \times O_2$ sont différentiables. Or, soient n_1 et n_2 les dimensions de V_1 et V_2, et $C = C_1 \times C_2$. Alors, $C_1 \circ pr_1 \circ \overset{-1}{C}$ est la projection d'une partie ouverte de $K^{n_1+n_2}$ dans K^{n_1}, donc est différentiable ; donc la restriction de pr_1 à $O_1 \times O_2$ est différentiable. De même, pour pr_2.

Si φ est une application différentiable de W dans $V_1 \times V_2$, $pr_1 \circ \varphi$ et $pr_2 \circ \varphi$ sont donc différentiables. Réciproquement, supposons que $pr_1 \circ \varphi$ et $pr_2 \circ \varphi$ soient différentiables. Soient $x \in W$, $(x_1, x_2) = \varphi(x)$, C_1 une carte de V_1 définie dans un voisinage O_1 de x_1, C_2 une carte de V_2 définie dans un voisinage O_2 de x_2, et $C = C_1 \times C_2$. Les applications $C_1 \circ pr_1 \circ \varphi$ et $C_2 \circ pr_2 \circ \varphi$ sont différentiables, donc, d'après la prop.9 du § 1, l'application $y \to ((C_1 \circ pr_1 \circ \varphi)(y), (C_2 \circ pr_2 \circ \varphi)(y)) = (C \circ \varphi)(y)$ est différentiable. Il en résulte que φ est différentiable.

Corollaire 1.- Soient V_1 et V_2 des variétés. La structure de variété produit sur $V_1 \times V_2$ est la moins fine des structures de variétés qui rendent différentiables les projections pr_1 et pr_2.

Ceci prouve que la déf.1 est conforme aux définitions générales du Livre I, chap. IV.

Corollaire 2.- Soient V_1 et V_2 des variétés, f_1 une fonction différentiable sur V_1, f_2 une fonction différentiable sur V_2. Alors la fonction $(x_1,x_2) \to f_1(x_1)f_2(x_2)$ est différentiable sur $V_1 \times V_2$.

En effet, la fonction $(x_1,x_2) \to f_1(x_1)$ est composée de pr_1 et de f_1, la fonction $(x_1,x_2) \to f_2(x_2)$ est composée de pr_2 et de f_2.

Corollaire 3.- L'application canonique de $V_1 \times V_2$ sur $V_2 \times V_1$ est un isomorphisme de variétés.

Nous laissons au lecteur le soin de généraliser les définitions et résultats précédents au cas du produit d'un nombre fini quelconque de variétés.

Les isomorphismes canoniques de produits sont des isomorphismes de variétés.

3. Le théorème des fonctions implicites.- Proposition 3.- Soient X, Y, Z des variétés de dimensions n, n', n', φ une application différentiable de $X \times Y$ dans Z, ψ une application différentiable de X dans Z. Soient $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, tels que $\varphi(x_0,y_0) = \psi(x_0)$. Si l'application $y \to \varphi(x_0,y)$ de Y dans Z est de rang n' en y_0, il existe des voisinages ouverts O et O' de x_0 et y_0 dans X et Y, et une application différentiable θ de O dans O' tels que 1) $\theta(x_0) = y_0$; 2) $\varphi(x,\theta(x)) = \psi(x)$ pour $x \in O$; 3) si $x \in O$ et $y \in O'$ sont tels que $\varphi(x,y) = \psi(x)$, on a $y = \theta(x)$.

Cette proposition résulte aussitôt de la proposition correspondante des chap. I-II puisque x_0, y_0 et $\varphi(x_0,y_0)$ admettent pour voisinages ouverts des variétés isomorphes à des sous-variétés ouvertes de K^n, $K^{n'}$ et $K^{n'}$.

Corollaire 1 (théorème des fonctions implicites).– *Soient* X, Y, Z *des variétés de dimensions* n, n', n', φ *une application différentiable de* $X \times Y$ *dans* Z, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$. *Si l'application* $y \to \varphi(x_0, y)$ *de* Y *dans* Z *est de rang* n' *en* y_0, *il existe des voisinages ouverts* O *et* O' *de* x_0 *et* y_0 *dans* X *et* Y, *et une application différentiable* θ *de* O *dans* O' *tels que* : 1) $\theta(x_0) = y_0$; 2) $\varphi(x, \theta(x)) = z_0$ *pour* $x \in O$; 3) *si* $x \in O$ *et* $y \in O'$ *sont tels que* $\varphi(x, y) = z_0$, *on a* $y = \theta(x)$.

En effet, il suffit de prendre pour ψ dans la prop.3 l'application $x \to z_0$.

Corollaire 2 (résolution d'équations dépendant d'un paramètre).– *Soient* X, Y, L *des variétés de dimensions* m, m, m', φ *une application différentiable de* $X \times L$ *dans* Y, $x_0 \in X$, $\lambda_0 \in L$, $y_0 = \varphi(x_0, \lambda_0)$. *Si l'application* $x \to \varphi(x, \lambda_0)$ *de* X *dans* Y *est de rang* m *en* x_0, *il existe des voisinages ouverts* O, O', Ω *de* x_0, y_0, λ_0 *dans* X, Y *et* L, *et une application différentiable* θ *de* $O' \times \Omega$ *dans* O *tels que* : 1) $\theta(y_0, \lambda_0) = x_0$; 2) $y = \varphi(\theta(y, \lambda), \lambda)$ *pour* $y \in O'$, $\lambda \in \Omega$; *si* $y \in O'$, $\lambda \in \Omega$, $x \in O$ *sont tels que* $y = \varphi(x, \lambda)$, *on a* $x = \theta(y, \lambda)$.

En effet, remplaçons, dans la prop.3, X, Y et Z par $Y \times L$, X et Y, φ par l'application $(y, \lambda, x) \to \varphi(x, \lambda)$ de $Y \times L \times X$ dans Y, ψ par l'application $(y, \lambda) \to y$ de $Y \times L$ dans Y, x_0 par (y_0, λ_0), y_0 par x_0. Les conditions de la prop.3 sont alors remplies.

[N-B : Un énoncé un peu biscornu tel que la prop.3 est nécessaire si on veut ne pas faire deux démonstrations pour les deux corollaires. Dans les espaces euclidiens, il n'y a pas de difficulté de ce genre, car la soustraction permet de "tout faire passer dans un même membre".

Pour qu'un procédé de ce genre soit applicable ici, il faudrait, étant donné une variété V, savoir fabriquer une application différentiable δ de $V \times V$ dans V tel que $x=y \Longleftrightarrow \delta(x,y)=z_0$ (point marqué sur V). C'est un problème pour le Haut-Commissariat].

§ 4. Sous-variétés et variétés plongées.

Dans ce § et dans le suivant, n et n' désignent des nombres entiers $\geqslant 0$ fixes tels que $n' \leqslant n$. On identifie $K^{n'}$ avec l'ensemble des points de K^n dont les n-n' dernières coordonnées sont nulles, $K^{n-n'}$ avec l'ensemble des points de K^n dont les n' premières coordonnées sont nulles, et K^n avec $K^{n'} \times K^{n-n'}$.

1. Définition des sous-variétés et des variétés plongées.- Définition 1.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n' sur K. On dit que V' est une sous-variété de V si les conditions suivantes sont satisfaites : 1° l'ensemble V' est une partie de l'ensemble V ; 2° pour tout point x de V', il existe un voisinage ouvert U de x dans V et une carte C de V définie dans U, tels que $U'=U \cap V$ soit une partie ouverte de V' et que la restriction C' de C à U' soit une carte de V' appliquant U' sur $C(U) \cap K^{n'}$.

Exemple.- Si V est un espace vectoriel de dimension n sur K, et V' un sous-espace vectoriel de dimension n', et si on munit V et V' de leurs structures canoniques de variétés sur K, V' est une sous-variété de U.

Définition 2.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n' sur K. On dit que V' est une variété plongée dans V si les conditions suivantes sont satisfaites : 1° l'ensemble V' est une partie de l'ensemble V ; 2° pour tout point x de V', il existe un voisinage ouvert U de x dans V, une carte C de V définie dans U, et un voisinage ouvert U' de x dans V' contenu dans U, tels que la restriction C' de C à U' soit une carte de V' appliquant U' sur $C(U)\cap K^{n'}$.

Les relations entre les deux notions sont les suivantes : si V' est une sous-variété de V, V' est plongée dans V , et l'espace sous-jacent de V' est un sous-espace de V ; si V' est plongée dans V, l'injection canonique de V' dans V est continue. Enfin :

Proposition 1.- Soient V une variété, V' une variété plongée dans V . Pour que V' soit une sous-variété de V, il faut et il suffit que l'espace sous-jacent de V' soit un sous-espace de V .

La condition est nécessaire, comme on l'a remarqué. Réciproquement, supposons que l'espace sous-jacent de V' soit un sous-espace de V . Soit $x\in V'$. Puisque V' est plongée dans V , il existe un voisinage ouvert U de x dans V, une carte C de V définie dans U, et un voisinage ouvert U' de x dans V' contenu dans U, tels que la restriction C' de C à U' soit une carte de V' appliquant U' sur $C(U)\cap K^{n'}$ (n' désignant la dimension de V'). Puisque V' est un sous-espace de V, il existe un voisinage ouvert O de x dans V tel que $U'=O\cap V'$. Soient $U_1=O\cap U$, et C_1 la restriction de C à U_1, qui est une carte de V . On a $U'=U_1\cap V'$, C' est la restrictio[n] de C_1 à U', et $C'(U')=C_1(U_1)\cap K^{n'}$. D'où la proposition.

Remarques.- 1. Soient V une variété, V' un sous-ensemble quelconque de V . Muni de la structure de variété discrète, V' est une variété plongée dans V . Ceci prouve qu'il existe des variétés plongées qui ne sont pas des sous-variétés.

2. Une sous-variété ouverte (§ 1, n°3) de V est une sous-variété au sens de la définition 1. Réciproquement, si V' est une sous-variété de V , et si l'ensemble V' est une partie ouverte de V, V' est une sous-variété ouverte de V au sens du § 1, n°3 . Ceci justifie la terminologie .

Enfin, soient V une variété de dimension n, et V' une variété plongée dans V de dimension n ; alors, V' est une sous-variété ouverte de V .

3. Soit V une variété dimension n . Si V' est une sous-variété de V , de dimension n', il existe, pour tout $x \in V'$, un voisinage ouvert U de x dans V, des parties ouvertes O et O' de $K^{n'}$ et $K^{n-n'}$, contenant l'origine, et une carte C de V appliquant U sur $O \times O'$, tels que $U' = U \cap V'$ soit une partie ouverte de V' et que la restriction C' de C à U' soit une carte de V' appliquant U' sur $O \times \{0\}$. Si V' est une variété plongée dans V, de dimension n', il existe, pour tout $x \in V'$, un voisinage ouvert U de x dans V, des parties ouvertes O et O' de $K^{n'}$ et $K^{n-n'}$, contenant l'origine, une carte C de V appliquant U sur $O \times O'$, et un voisinage ouvert U' de x dans V', tels que la restriction C' de C à U' soit une carte de V' appliquant U' sur $O \times \{0\}$.

4. Soient V et V' des variétés analytiques réelles, V_1 et V'_1 les variétés indéfiniment différentiables associées. Si V' est une sous-variété de V (resp. une variété plongée dans V), V'_1 est une sous-variété de V_1 (resp. une variété plongée dans V_1).

5. Soient V et V' des variétés sur K, K' un sous-corps fermé de K tel que $[K:K']$ soit fini, V_1 et V'_1 les variétés sur K' associées à V et V'. Si V' est une sous-variété de V (resp. une variété plongée dans V), V'_1 est une sous-variété de V_1 (resp. une variété plongée dans V_1).

Les notions de variété plongée et de sous-variété sont des notions de caractère local. On a en effet les résultats suivants :

<u>Proposition 2</u>.- <u>Soient</u> V <u>et</u> V' <u>des variétés,</u> V' <u>étant un sous-ensemble de</u> V . <u>Si, pour tout</u> $x \in V'$, <u>il existe une sous-variété ouverte</u> O <u>de</u> V

contenant x , et une et une sous-variété ouverte O' de V' contenant x , telles que O' soit une variété plongée dans O, alors V' est une variété plongée dans V .

En effet, soient $x \in V'$, et O, O' des sous-variétés ouvertes de V, V' possédant les propriétés de la proposition. Il existe un voisinage ouvert U de x dans O, une carte C de O définie dans U, et un voisinage ouvert U' de x dans O', tels que la restriction C' de C à U' soit une carte de O' appliquant U' sur $C(U) \cap K^{n'}$ (n' désignant la dimension de V'. Alors, U et U' sont des voisinages ouverts de x dans V et V' respectivement, C est une carte de V', C' une carte de V'. D'où la proposition.

Corollaire.- Soient V et V' des variétés, V' étant un sous-ensemble de V. Si, pour tout $x \in V'$, il existe une sous-variété ouverte O de V contenant x telle que $O \cap V'$ soit une partie ouverte de V' et que $O \cap V'$, considéré comme sous-variété ouverte de V', soit une sous-variété de O, alors V' est une sous-variété de V .

En effet, l'espace sous-jacent de V' est alors un sous-espace de V .

2. Applications différentiables dans une variété plongée.- Proposition 3.- Soient V et W deux variétés, V' une variété plongée dans V , i l'injection canonique de V' dans V . Pour qu'une application φ de W dans V' soit différentiable, il faut que l'application $i\varphi$ de W dans V soit différentiable. Réciproquement, si $i\circ\varphi$ est différentiable, et si φ est continue (la première condition entraînant la seconde si V' est une sous-variété de V), φ est différentiable.

Montrons d'abord que i est différentiable. Il suffit de le vérifier localement. Soit $x \in V'$. Il existe un voisinage ouvert U de x dans V , une carte C de V définie dans U, un voisinage ouvert U' de x dans V'

contenu dans U, tels que la restriction C' de C à U' soit une carte de V' appliquant U' sur $C(U)\cap K^{n'}$ (n' désignant la dimension de V'). L'application $C\circ i\circ \overset{-1}{C'}$ est l'injection de $C(U)\cap K^{n'}$ dans C(U), donc est différentiable. Donc la restriction de i à U' est différentiable, ce qui établit notre assertion.

Donc, si φ est différentiable, $i\circ\varphi$ est différentiable. Réciproquement supposons $i\circ\varphi$ différentiable, et φ continue. Montrons que φ est différentiable. Soit $x\in W$. Soient U un voisinage de $\varphi(x)$ dans V, C une carte de V définie dans U, U' un voisinage ouvert de $\varphi(x)$ dans V' contenu dans U, tels que la restriction C' de C à U' soit une carte de V' appliquant U' sur $C(U)\cap K^{n'}$. L'ensemble $\overset{-1}{\varphi}(U')\subset W$ est un voisinage ouvert de x parce que φ est continue, et il suffit de prouver que la restriction ψ de φ à $\overset{-1}{\varphi}(U')$ est différentiable. Or, l'application $C\circ i\circ\psi$ de $\overset{-1}{\varphi}(U')$ dans K^n est différentiable et prend ses valeurs dans $K^{n'}$. Donc l'application $C'\circ\psi$ de $\overset{-1}{\varphi}(U')$ dans $K^{n'}$ est différentiable. D'où notre assertion

<u>Remarque</u> - La différentiabilité de $i\circ\varphi$ entraîne encore la continuité de φ sous les hypothèses suivantes : 1. K est localement convexe ; 2. Pour tout $x\in V'$, il existe un voisinage U de x dans V tel que les composantes connexes (au sens de la topologie de V) de $U\cap V'$ soient des parties relativement compactes de V' (au sens de la topologie de V'). En effet, soit y un point de W tel que $\varphi(y)=x$, et soit O un voisinage connexe de y dans W tel que $\varphi(O)\subset U$. Alors, $\varphi(O)$ est contenu dans une composante connexe de $U\cap V'$, donc dans une partie compacte K de l'espace V'. Or, la restriction de i à K, étant continue, est un homéomorphisme. Donc la restriction de φ à O est continue, ce qui démontre notre assertion.

Corollaire 1.- Soient V une variété, V' une variété plongée dans V (resp. une sous-variété de V). Sur l'espace V' (resp. l'ensemble V'), la structure de variété plongée (resp. de sous-variété) est la moins fine des structures de variété pour lesquelles l'injection de V' dans V soit différentiable.

Corollaire 2.- Soient V une variété, V' et V'' deux variétés plongées dans V (resp. deux sous-variétés de V), ayant même espace sous-jacent (resp. même ensemble de points). Alors, V' et V'' ont même dimension, et l'application identique de V' sur V'' est un isomorphisme.

3. Existence d'une structure de variété plongée sur un sous-ensemble.-

Le cor.2 précédent est un résultat d'unicité, que nous allons compléter par des théorèmes d'existence.

Proposition 4.- Soit V une variété de dimension n sur K. Soit V' un sous-ensemble de V, muni d'une topologie séparée, et possédant la propriété suivante : pour tout point x de V', il existe un voisinage ouvert U_x de x dans V, une carte C_x de V définie dans U_x, et un voisinage ouvert U'_x de x dans V' contenu dans U_x, tels que la restriction C'_x de C_x à U'_x soit un homéomorphisme de U'_x sur $C_x(U_x) \cap K^{n'}$. Il existe alors sur l'espace V' une structure de variété et une seule telle que V' soit plongée dans V ; les C'_x forment un atlas de V' pour cette structure.

L'unicité résulte du cor.2 de la prop.3. D'autre part, si $x \in V'$ et $y \in V'$, C_x et C_y sont différentiablement semblables, donc il en est de même de C'_x et C'_y. D'après la prop.2 du §1, il existe sur V' une structure de variété telle que les C'_x forment un atlas pour cette structure. Il est évident que, muni de cette structure, V' est une variété plongée dans V.

Corollaire.- Soit V une variété de dimension n sur K . Soit V' un sous-ensemble de V possédant la propriété suivante : pour tout point x de V', il existe un voisinage ouvert U_x de x dans V et une carte C_x de V définie dans U_x, tels que $C_x(U_x \cap V')=C_x(U_x) \cap K^{n'}$. Il existe alors sur V' une structure de variété et une seule telle que V' soit une sous-variété de V ; les restrictions C'_x des C_x aux $U_x \cap V'$ forment un atlas de V pour cette structure.

En effet, munissons V' de la topologie induite par celle de V, et posons $U'_x = U_x \cap V'$. On est dans les conditions d'application de la prop.4. La structure de variété ainsi obtenue sur V' fait une sous-variété de V (prop.1).

4. Variétés plongées et notion de rang.- Proposition 5.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n', φ une application différentiable de V dans V', x un point de V . Pour que le rang de φ en x soit égal à n , il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de x tel que la restriction de φ à U soit un isomorphisme de U sur une sous-variété de V'.

Cette proposition résulte aussitôt de la prop. 13 du § 1 .

Corollaire 1.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n', φ une injection différentiable de U dans V'. Pour que φ soit un isomorphisme de V sur une variété plongée dans V', il faut et il suffit que, en tout point x de V, le rang de φ soit égal à n .

La nécessité résulte aussitôt de la prop.5 . Supposons maintenant le rang de φ partout égal à n . Transportant la structure de variété de V à $\varphi(V)$ par l'application φ, on est ramené au cas où φ est l'injection canonique de V dans V'. Le corollaire résulte alors de la prop.5 et du caractère local de la notion de variété plongée.

Le cor.1 permet de former de nombreux exemples de variétés plongées (cf. exerc.).

Corollaire 2.- Soient V une variété de dimension n, V' une variété de dimension n' plongée dans V, x un point de V', U un voisinage ouvert de x dans V, $(f_1,\ldots,f_n)$ un système de coordonnées dans U. Alors, il existe n' des fonctions f_i dont les restrictions à V' constituent un système de coordonnées dans un voisinage de x sur V'.

En effet, soit i l'injection canonique de V' dans V, et φ l'application $y \to (f_1(y), f_2(y),\ldots,f_n(y))$ de U dans K^n, qui est un isomorphisme de U sur $\varphi(U)$. L'application i est de rang n' en x (cor.1), donc il en est de même de $\varphi\circ i$. Donc le système de fonctions $(f_1\circ i, f_2\circ i,\ldots,f_n\circ i)$ est de rang n' en x. Il suffit alors d'appliquer le cor.1 de la prop.15 du §1.

Proposition 6.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n', φ une application différentiable de V dans V', x un point de V'. Supposons que l'ensemble $V_1 = \overset{-1}{\varphi}(x)$ soit non vide. Alors, si φ est de rang r en tout point de V_1, V_1 est porteur d'une structure de sous-variété fermée de V (et, naturellement, d'une seule), de dimension $n-r$.

D'abord, V_1 est évidemment fermé. Ensuite, soit $y \in V_1$. Il existe (§1, prop.13) des parties ouvertes O, O', O'' de K^r, K^{n-r}, $K^{n'-r}$ contenant l'origine, une carte C de V appliquant un voisinage ouvert U de y sur $O\times O'$, une carte C' de V' appliquant un voisinage ouvert de x sur $O\times O''$, de façon que $C(y) = (0,0)$, et de façon que $C'\circ\varphi\circ \overset{-1}{C}$ soit la projection de $O\times O'$ sur son premier facteur. Alors, $C(U\cap V_1) = \{0\}\times O'$. Le corollaire résulte donc du cor. de la prop.4.

Par exemple, soient V une partie ouverte de K^n, et $x_1, x_2,\ldots,x_n$ les coordonnées canoniques sur V. Soit V_1 un sous-ensemble non vide de V défini par des équations $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0,\dots,$ $f_s(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$, où les f_i sont des fonctions différentiables sur V. Si le rang du système $(f_1,f_2,\dots,f_s)$ est de rang r en tout point de V_1, V_1 peut être muni d'une structure de sous-variété fermée de V. Ce procédé permet de former des exemples importants de variétés.

5. Rétractions différentiables.- Proposition 7.- Soient V et V' des variétés V' étant un sous-ensemble de V. Pour que V' soit une variété plongée dans V, il faut et il suffit que : 1° l'injection canonique i de V' dans V soit différentiable ; 2°- pour tout point x V', il existe un voisinage ouvert U de x dans V, un voisinage ouvert U' de x dans V' contenu dans U, et une application différentiable ψ de U sur U', tels que $\psi(y)=y$ pour $y\in U'$.

En effet, si ces conditions sont remplies, la restriction de i à U' est de rang en x égal à la dimension de V', donc V' est plongée dans V d'après le cor.1 de la prop.5. Réciproquement, supposons V' plongée dans V. La condition 1° est satisfaite (prop.3). Soit x un point de V'. Soient U un voisinage ouvert de x dans V, O et O' des parties ouvertes de $K^{n'}$ et $K^{n-n'}$ contenant l'origine, C une carte de V appliquant U sur O O', U' un voisinage ouvert de x dans V', tels que la restriction C' de C à U' soit une carte de V' appliquant U' sur O. Soit π la projection de $O\times O'$ sur son premier facteur. L'application $\psi = C'^{-1}\circ\pi\circ C$ est différentiable, applique U sur U', et se réduit à l'identité sur U'.

Corollaire 1.- Soient V et V' des variétés, V' étant un sous-ensemble de V. Pour que V' soit une sous-variété de V, il faut et il suffit que

1°- l'injection canonique i de V' dans V soit différentiable ; 2°- pour tout point x de V', il existe un voisinage ouvert U de x dans V et une application différentiable ψ de U sur $U \cap V'$, tels que $\psi(y)=y$ pour $y \in U \cap V'$.

En effet, ces conditions assurent que l'espace sous-jacent de V' est un sous-espace de V.

Corollaire 2.- Soient V et V' des variétés, f une application différentiable de V dans V', W le graphe de f dans $V \times V'$, g l'application $x \longrightarrow (x,f(x))$ de V dans W, qui est biunivoque. Par transport de structure, g permet de définir une structure de variété sur W. Alors, W est une sous-variété fermée dde $V \times V'$.

En effet, W est fermé, puisque f est continue (référence ?). Soit i l'injection canonique de W dans $V \times V'$. Pour $x \in V$, on a $(i \circ g)(x)=(x,f(x))$ donc (§ 3, prop.2) $i \circ g$ est une application différentiable de V dans $V \times V'$, et par suite i est une application différentiable de W dans $V \times V'$. Ensuite, soit ψ l'application de $V \times V'$ dans W définie par $\psi(x,y)=(x,f(x))$. On a $(g^{-1} \circ \psi)(x,y)=x$, donc $g^{-1} \circ \psi$ est une application différentiable de $V \times V'$ dans V (loc. cit.), et par suite ψ est une application différentiable de $V \times V'$ dans W. Le cor.2 est donc une conséquence du cor.1 .

Corollaire 3.- Soient V et W des variétés, V' une variété plongée dans V. Pour qu'une application φ de V' dans W soit différentiable, il faut et il suffit que, pour tout point $x \in V'$, il existe un voisinage ouvert U de x dans V, une application différentiable ψ de U dans W, et un voisinage ouvert U' de x dans V' contenu dans U, tels que $\psi(y)=\varphi(y)$ pour $y \in U'$.

En effet, supposons d'abord cette condition remplie. Soit i l'injection canonique de U' dans U, qui est différentiable. La restriction de φ à U' est égale à $\psi\circ i$, donc est différentiable. Comme x est un point arbitraire de V', on en déduit que φ est différentiable. Réciproquement, supposons que φ soit différentiable. Soit x un point de V'. Il existe un voisinage ouvert U de x dans V, un voisinage ouvert U' de x dans V' contenu dans U, et une application différentiable θ de U sur U', tels que $\theta(y)=y$ pour $y\in U'$. Alors, U,U' et $\psi=\varphi\circ\theta$ vérifient les conditions du corollaire.

Corollaire 4.- *Soient V et W des variétés, V' une sous-variété de V. Pour qu'une application φ de V' dans W soit différentiable, il faut et il suffit que, pour tout point $x\in V'$, il existe un voisinage ouvert U de x dans V et une application différentiable ψ de U dans W, tels que $\psi(y)=\varphi(y)$ pour $y\in U\cap V'$.*

En effet, en restreignant convenablement les voisinages U et U' du cor.3, on peut supposer que $U'=U\cap V'$.

Par contre, il n'existe pas nécessairement d'application différentiable ψ, définie dans un voisinage ouvert de V' relativement à V, appliquant ce voisinage dans W, et prolongeant φ.

5. Transitivité des variétés plongées.- Proposition 8.- *Soient V,V',V'' des variétés. Si V' est plongée dans V et V'' plongée dans V', alors V'' est plongée dans V.*

En effet, soient n,n',n'' les dimensions de V,V',V'' ; les injections canoniques de V'' dans V' et de V' dans V sont différentiables, et de rang n'',n' donc l'injection canonique de V'' dans V est différentiable, et de rang n''. D'où la proposition.

Corollaire.- Soient V, V', V'' des variétés. Si V' est une sous-variété de V et V'' une sous-variété de V', alors V'' est une sous-variété de V.

En effet, V'' est un sous-espace de V' et V' un sous-espace de V, donc V'' est un sous-espace de V.

Proposition 9.- Soient V une variété, V' une sous-variété de V, V'' une variété plongée dans V et contenue dans V'. Alors, V'' est plongée dans V'.

Soient i et j les injections canoniques de V'' dans V' et de V' dans V. L'injection canonique $j \circ i$ de V'' dans V est différentiable. Comme V' est un sous-espace de V, il en résulte que i est continue. Alors, la prop.3 prouve que i est différentiable. D'autre part, le rang de $j \circ i$ est égal à la dimension de V'', donc il en est de même du rang de i. D'où la proposition.

Corollaire 1.- Soient V une variété, V' et V'' des sous-variétés de V, avec $V'' \subset V'$. Alors, V'' est une sous-variété de V'.

En effet, V'' est alors un sous-espace de V'.

Corollaire 2.- Soient V une variété, V' une sous-variété de V de dimension n'. Soit V'' une variété plongée dans V, de dimension $n'' \geqslant n'$, ayant même ensemble de points que V. Alors, $n''=n'$, et les variétés V' et V'' sont identiques.

En effet, V'' est plongée dans V'. Donc $n'' \leqslant n'$ et par suite $n''=n'$. D'où le corollaire ($n^o 1$, remarque 2).

Exercice pour le chapitre global : on peut remplacer l'hypothèse "de dimension $n'' \geqslant n'$ " par "dénombrable à l'infini" (au moins pour $K=R$ ou C). Car l'injection canonique i de V'' dans V' est différentiable, donc, si $n'' < n$, $i(V'')$ est maigre, ce qui est absurde par le théorème de Baire.

Proposition 10.- Soient V une variété, V' une sous-variété de V. Alors, V' est sous-variété fermée d'une sous-variété ouverte de V.

En effet, soit n' la dimension de V'. Pour tout point $x \in V'$, soient U_x un voisinage ouvert de x dans V, et C_x une carte de V définie dans U_x, tels que la restriction C'_x de C_x à $U'_x = U_x \cap V'$ soit une carte de V' appliquant U'_x sur $C_x(U_x) \cap K^{n'}$. Soit U la réunion des U_x quand x parcourt V. L'ensemble U est une partie ouverte de V contenant V'. Il suffit de prouver (d'après la prop.9, ou directement) que V' est fermée dans U. Soit y $U-V'$. Il existe un $x \in V'$ tel que $y \in U_x$. Comme $U_x \cap V' = U'_x$ est fermé dans U_x, il existe un voisinage ouvert de y dans U_x qui ne rencontre pas U'_x, donc qui ne rencontre pas V'. Ceci établit notre assertion.

7. Produits de variétés plongées.- Proposition 11.- Soient V_1 et V_2 des variétés, V'_1 et V'_2 des variétés plongées dans V_1 et V_2 respectivement. Alors, $V'_1 \times V'_2$ est plongée dans $V_1 \times V_2$.

Soient n_1 et n_2 les dimensions de V_1 et V_2, n'_1 et n'_2 les dimensions de V'_1 et V'_2. Soient $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$. Pour $i=1,2$, il existe un voisinage ouvert U_i de x_i dans V_i, une carte C_i de V_i définie dans U_i, et un voisinage ouvert U'_i de x_i dans V'_i contenu dans U_i, tels que la restriction C'_i de C_i à U'_i soit une carte de V'_i appliquant U'_i sur $C_i(U_i) \cap K^{n'_i}$.
Alors, l'application $(y_1, y_2) \to (C_1(y_1), C_2(y_2))$ est une carte C de $V_1 \times V_2$ définie dans $U_1 \times U_2$, dont la restriction C' à $U'_1 \times U'_2$ est une carte de $V'_1 \times V'_2$ appliquant $U'_1 \times U'_2$ sur $(C_1(U_1) \times C_2(U_2)) \cap (K^{n'_1} \times K^{n'_2})$.
Il en résulte que $U'_1 \times U'_2$ est une sous-variété de $U_1 \times U_2$, d'où la proposition. (On utilisera un automorphisme canonique de $K^{n_1+n_2}$).

<u>Corollaire</u>.- <u>Soient V_1 et V_2 des variétés, V'_1 et V'_2 des sous-variétés de V_1 et V_2 respectivement. Alors, $V'_1 \times V'_2$ est une sous-variété de $V_1 \times V_2$.</u>

En effet, l'espace $V'_1 \times V'_2$ est un sous-espace de $V_1 \times V_2$.

<u>Exercices</u>.

1. Soient V une variété sur un corps K localement connexe, V' une variété plongée dans V, de dimension n', et vérifiant l'hypothèse suivante : pour tout $x \in V'$, il existe un voisinage U de x dans V tel que les composantes connexes (au sens de la topologie de V) de $U \cap V'$ soient des parties relativement compactes de V' (au sens de la topologie de V'). Soit V'' une variété plongée dans V et contenu dans V'. Alors V'' est plongée dans V'. (Raisonner comme dans la prop.7, en appliquant la Remarque du n°3). En déduire que si V'' a même ensemble de points que V et a une dimension $n'' \geqslant n'$, les variétés V' et V'' sont identiques.

2. Soient V une variété analytique réelle de dimension n , V' une variété indéfiniment différentiable réelle de dimension $n' \leqslant n$, qui soit un sous-ensemble de V . Supposons que, pour tout point $x \in V'$, il existe un voisinage ouvert U de x dans V, une carte C de V définie dans U, et un voisinage ouvert U' de x dans V' contenu dans U, tels que la restriction C' de C à U' soit une carte de V' appliquant U' sur $C(U) \cap K^{n'}$. Alors, il existe une variété analytique réelle V'_1 et une seule telle que V' soit la variété indéfiniment différentiable associée à V'_1 et telle que V'_1 soit plongée dans V . Enoncer et démontrer la proposition analogue pour les sous-variétés.

3. Soient V une variété indéfiniment différentiable réelle de dimension n, V' une variété analytique réelle de dimension $n' \leqslant n$, V'_1 la variété indéfiniment différentiable associée. Supposons que V'_1 soit plongée dans V

Alors, pour tout $x \in V'$, il existe un voisinage ouvert U de x dans V, une carte C de V définie dans U, et un voisinage ouvert U' de x dans V' contenu dans U, tels que la restriction C' de C à U' soit une carte de V' appliquant U' sur $C(U) \cap K^{n'}$. Enoncer et démontrer la proposition analogue pour les sous-variétés.

4. Pour $t \in R$, on pose : $f(t) = \dfrac{t}{1+t^4}$, $g(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4}$. Soit φ l'application $t \to (f(t), g(t))$ de R dans R^2. Montrer que c'est une injection analytique partout de rang 1, donc un isomorphisme sur une variété analytique réelle V plongée dans R^2. Montrer que V est l'ensemble des points (x,y) de R^2 tels que $(x^2+y^2)-xy = 0$ (lemniscate de Bernouilli). En déduire que V est une partie compacte de R^2. Soit σ l'application $(x,y) \to (y,x)$ de R^2 sur R^2, et $\varphi' = \sigma \circ \varphi$. Montrer que φ' est un isomorphisme de R sur une variété V' plongée dans R^2, qui a même ensemble de points que V mais qui est distincte de V.

§ 5. Variétés quotients.

1. Définition des variétés quotients.- Définition 1.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n' sur K. Soit R une relation d'équivalence sur V. On dit que V' est une variété quotient de V par la relation R si les conditions suivantes sont satisfaites : 1° l'ensemble V' est identique à l'ensemble quotient V/R ; soit p la projection canonique de V sur V' ; 2° pour tout point x de V, il existe un voisinage ouvert U de x dans V, et une carte C de V définie sur U, appliquant U sur une partie de K^n de la forme $O \times O'$, O étant une partie ouverte de $K^{n'}$ et O' une partie ouverte de $K^{n-n'}$, tels que : a) deux points u et v de U sont congrus modulo R si et seulement si $\pi(C(u)) = \pi(C(v))$

(π désignant la projection de $O \times O'$ sur son premier facteur) ;
b) l'application de $p(U)$ sur O déduite de $\pi \circ C$ par passage au quotient suivant R est une carte de V'.

Exemple.- Soient V et V' des variétés. Sur $V \times V'$, soit R la relation d'équivalence "x et y ont même projection sur le premier facteur". Alors, V identifiée canoniquement à l'ensemble $V \times V'/R$, est variété quotient $V \times V'$ par R.

Remarques.- 1. La condition b de la déf. 1 exprime en particulier que $p(U)$ est une partie ouverte de V'. La définition entraîne alors aussitôt que l'image d'un voisinage de x dans V par p est un voisinage de $p(x)$ dans V', et que l'image réciproque d'un voisinage de $p(x)$ par p est un voisinage de x. On en déduit d'abord que l'espace sous-jacent de V' n'es autre que l'espace quotient V/R, et ensuite que la relation d'équivalence R est nécessairement séparé et ouverte.

2. Les classes d'équivalence suivant R peuvent être munies de structure de variétés qui en font des sous-variétés fermées de V de dimension $n-n'$.

3. Soient V et V' des variétés analytiques réelles, V_1 et V'_1 les variétés indéfiniment différentiables associées, R une relation d'équivalence sur V. Si V' est variété quotient de V par R, V'_1 est variété quotient de V_1 par R.

4. Soient V et V' des variétés sur K, K' un sous-corps fermé de K tel que $[K:K']$ soit fini, V_1 et V'_1 les variétés sur K' associées à V et V', R une relation d'équivalence sur V. Si V' est variété quotient de V par R, V'_1 est variété quotient de V_1 par R.

La notion de variété quotient est une notion de caractère local. On a en effet la proposition suivante :

<u>Proposition 1.- Soient</u> V <u>une variété</u>, R <u>une relation d'équivalence sur</u> V, V' <u>une variété dont l'ensemble de points est identique à l'ensemble</u> V/R . <u>Si, pour tout</u> $x \in V$, <u>il existe une sous-variété ouverte</u> O <u>de</u> V <u>contenant</u> x , <u>et une sous-variété ouverte</u> O' <u>de</u> V' <u>contenant</u> $p(x)$, <u>telles que</u> O' <u>soit variété quotient de</u> O <u>par la relation</u> R_o <u>induite par</u> R <u>dans</u> O, <u>alors</u> V' <u>est variété quotient de</u> V <u>par</u> R .

En effet, soient $x \in V'$, et O, O' des sous-variétés ouvertes de V, V' possédant les propriétés de la proposition. Il existe un voisinage ouvert U de x dans O, et une carte C de O définie dans U, appliquant U sur une partie de K^n de la forme $\Omega \times \Omega'$, Ω étant une partie ouverte de $K^{n'}$ et Ω' une partie ouverte de $K^{n-n'}$, tels que : a) deux points u et v de U sont congrus modulo R_o si et seulement si $\pi(C(u))=\pi(C(v))$ (π désignant la projection de $\Omega \times \Omega'$ sur Ω) ; b) l'application C' de $p(U)$ sur Ω déduite de $\pi \circ C$ par passage au quotient suivant R_o est une carte de O'. Alors, U est un voisinage ouvert de x dans V , C est une carte de V et C' une carte de V', ce qui établit la proposition.

2. Applications différentiables définies sur une variété quotient.-

<u>Proposition 2.- Soient</u> V <u>et</u> W <u>des variétés</u>, R <u>une relation d'équivalence dans</u> V, V' <u>une variété quotient de</u> V <u>par</u> R , p <u>la projection canonique de</u> V <u>sur</u> V'. <u>Pour qu'une application</u> φ <u>de</u> V' <u>dans</u> W <u>soit différentiable, il faut et il suffit que l'application</u> $\varphi \circ p$ <u>de</u> V <u>dans</u> W <u>soit différentiable.</u>

Supposons d'abord que φ soit différentiable et montrons que $\varphi \circ p$ est différentiable. Nous allons montrer pour cela que p est différentiable. Or, il suffit de le vérifier localement. Compte-tenu de la déf.1, et du fait qu'une carte est un isomorphisme, on est ramené à prouver que la projection de la variété différentiable K^n sur la variété différentiable $K^{n'}$ est différentiable, ce qui est évident.

Réciproquement, supposons que $p\circ\varphi$ soit différentiable, et montrons que φ est différentiable. Il suffit de le vérifier localement. Compte-tenu de la déf.1, et du fait qu'une carte est un isomorphisme, nous sommes ramenés à l'assertion suivante, qui est évidente : soient O et O_1 des parties ouvertes de $K^{n'}$ et de $K^{n-n'}$; soit ψ une application de O dans W ; soit q la projection de $O\times O_1$ sur O ; alors, si $\psi\circ q$ est différentiable, ψ est différentiable.

Corollaire 1.- Soient V une variété, R une relation d'équivalence sur V, V' une variété quotient de V par R, p l'application canonique de V sur V'. Sur l'espace V', la structure de variété quotient est la plus fine des structures de variétés pour lesquelles p est différentiable.

Corollaire 2.- Soient V une variété, R une relation d'équivalence sur V, V' et V'' des variétés quotients de V par R. Alors, V' et V'' ont même dimension et l'application identique de V' sur V'' est un isomorphisme.

On parlera donc désormais de la variété quotient (lorsqu'elle existe) d'une variété V par une relation d'équivalence R, et c'est elle désormais qu'on notera V/R, sauf mention expresse du contraire.

Corollaire 3.- Soient V_1 et V_2 deux variétés, R_1 une relation d'équivalence dans V_1, R_2 une relation d'équivalence dans V_2, $V_1' = V_1/R_1$, $V_2' = V_2/R_2$. Soit φ une application différentiable de V_1 dans V_2, compatible avec R_1 et R_2. L'application ψ de V_1' dans V_2' déduite de φ par passages aux quotients est alors différentiable.

En effet, soient p_1 et p_2 les applications canoniques de V_1 sur V_1' et de V_2 sur V_2'. On a $\psi\circ p_1 = p_2\circ\varphi$. L'application $p_2\circ\varphi$ est différentiable, donc ψ est différentiable.

Définition 2.- Soient V et W des variétés, φ une application de V sur W, R la relation d'équivalence sur V définie par φ. On dit que φ est un homomorphisme, pour les structures de variétés, de V sur W si la variété V/R existe et si l'application de V/R sur W déduite de φ par passage au quotient est un isomorphisme de V/R sur W.

Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on dit aussi que φ est un homomorphisme différentiable. Un homomorphisme différentiable de V sur W est une application différentiable de V sur W (prop.2), qui transforme les ensembles ouverts en ensembles ouverts, mais la réciproque n'est pas vraie.

(A cause du dédoublement variétés plongées, sous-variétés, il n'est pas indiqué d'introduire d'autre notion).

A cause de la prop.1, la notion d'homomorphisme différentiable est une notion locale : si φ est une application d'une variété V sur une variété W, et si, pour tout $x \in V$, il existe un voisinage ouvert U de x et un voisinage ouvert U' de $\varphi(x)$ tels que la restriction de φ à U soit un homomorphisme différentiable de U sur U', alors φ est un homomorphisme de V sur W.

3. Existence de la variété quotient.- Proposition 3.- Soient V une variété de dimension n, R une relation d'équivalence séparée et ouverte sur V. Supposons vérifiées les conditions suivantes :

1°- Pour tout point x de V, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans V, et une carte C_x de V définie dans U_x, appliquant U_x sur une partie de K^n de la forme $O_x \times O'_x$, O_x étant une partie ouverte de $K^{n'}$ et O'_x une partie ouverte de $K^{n-n'}$, tels que deux points u et v de U_x soient congrus modulo R si et seulement si $\pi(C_x(u)) = \pi(C_x(v))$ (π désignant la projection de K^n sur $K^{n'}$).

2^{o}- Si $x \in V$ et $x' \in V$, l'application d'une partie ouverte de O_x sur une partie ouverte de $O_{x'}$, obtenue en faisant correspondre, à un élément de O_x, un élément $O_{x'}$ lorsque leurs images réciproques par $\pi \circ C_x$ et $\pi \circ C_{x'}$ sont dans une même classe d'équivalence, est différentiable.

Il existe alors sur l'espace quotient $V/R = V'$ une structure de variété de dimension n' telle que la variété V' soit la variété quotient de V par R . Les applications déduites des $\pi \circ C_x$ par passage au quotient suivant R forment un atlas de V'.

En effet, comme R est séparée, l'espace V' est séparé. Soit p la projection canonique de V sur V'. Comme R est ouverte, $p(U_x)$ est une partie ouverte de l'espace V', et l'espace $p(U_x)$ s'identifie au quotient de l'espace U_x par la relation d'équivalence induite par R sur U_x . L'application C'_x déduite de $\pi \circ C_x$ par passage au quotient suivant R est un homéomorphisme de $p(U_x)$ sur O_x . Soient $x \in V$ et $x' \in V$. La condition 2^{o} exprime exactement que C'_x et $C'_{x'}$ sont différentiablement semblables. Alors, d'après la prop.2 du §1, il existe sur V' une structure de variété de dimension n' telle que les C'_x forment un atlas de V'. Et il est immédiat que cette variété est la variété quotient de V par R .

Corollaire.- Soient V une variété de dimension n sur K, Γ un groupe d'automorphismes de V, R la relation d'équivalence, supposée séparée, définie par Γ . Supposons vérifiée la condition suivante : pour tout $x \in V$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans V et une carte C_x de V définie sur U_x, appliquant U_x sur une partie de K^n de la forme $O_x \times O'_x$, O_x étant une partie ouverte de $K^{n'}$ et O'_x une partie ouverte de $K^{n-n'}$, de telle sorte que deux points u et v de U_x sont congrus modulo R si et seulement si $\pi(C_x(u)) = \pi(C_x(v))$ (π désignant la projection de K^n sur $K^{n'}$). Il existe alors sur l'espace V/R une structure de variété telle que cette variété soit la variété quotient de V par R . Les applications déduites des $\pi \circ C_x$ par passage au quotient suivant R forment un atlas de V/R .

En effet, R, étant définie par Γ , est ouverte. Il suffit de vérifier que la condition 2^o de la prop.3 est satisfaite. Soient donc $x \in V$ et $x' \in V$. Soit G (resp. G') la partie ouverte de U_x (resp. $U_{x'}$) formée des points qui sont congrus modulo R à un point de $U_{x'}$ (resp. U_x). Soient $H = \pi(C_x(G)) \subset O_x$, $H' = \pi(C_{x'}(G)) \subset O_{x'}$. Soit f l'application de H sur H' obtenue en faisant correspondre, à un point $t \in H$, le point t' de H' tel que $\overset{-1}{C_x}(\{t\} \times K^{n-n'})$ et $\overset{-1}{C_{x'}}(\{t'\} \times K^{n-n'})$ soient contenus dans une même classe d'équivalence. Il s'agit de prouver que f est différentiable. Nous allons le vérifier localement. Soient donc u un point de H , u'=f(u), v un point de G tel que $\pi(C_x(v))=u$, v' un point de G' tel que $\pi(C_{x'}(v'))=u'$. Les points v et v' sont congrus modulo R. Soit donc g un élément de Γ tel que g(v')=v . L'application $C = C_{x'} \circ \overset{-1}{g}$ est une carte de V définie sur g(U'), donc dans un voisinage ouvert de v . Cette carte est différentiablement semblable à C_x . Donc $C \circ \overset{-1}{C_x}$, qui est défini sur un voisinage ouvert de $C_x(v)$, et applique $C_x(v)$ sur $C(v)=C_{x'}(v')$, est différentiable. Or, f coïncide sur un voisinage de $u = \pi(C(v))$ avec l'application déduite de $C \circ \overset{-1}{C_x}$ par passage au quotient modulo $K^{n-n'}$ dans K^n .

Définition 3.- La variété quotient de V par R s'appelle aussi, dans les conditions du corollaire précédent, la variété quotient de V par Γ .

4. Variétés quotients et notion de rang.- Proposition 4.- Soient V et V' des variétés, φ une application différentiable de V dans V', x un point de V . Pour que le rang de φ soit constant et égal à r au voisinage de x ,

il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de x tel que la restriction de φ à U soit un homomorphisme de U sur une sous-variété de V' de dimension r.

Cette proposition résulte aussitôt de la prop. 13 du § 1.

Corollaire 1.- Pour que le rang de φ en x soit égal à la dimension de V', il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de x tel que la restriction de φ à U soit un homomorphisme de U sur un voisinage ouvert de $\varphi(x)$.

Corollaire 2.- Soient V et V' des variétés de dimensions n et n', φ une projection différentiable de V sur V'. Pour que φ soit un homomorphisme de V sur V', il faut et il suffit que, en tout point x de V, le rang de φ soit égal à n'.

La nécessité résulte aussitôt du cor. 1. Supposons maintenant le rang de φ partout égal à n'. Soient R la relation d'équivalence sur V définie par φ, et ψ l'application de l'ensemble V/R sur V' déduite de φ par passage au quotient suivant R. Transportons la structure de variété de V' à V/R par l'application $\overset{-1}{\psi}$. On est ramené au cas où φ est la projection canonique de V sur V/R. Le corollaire résulte alors de la prop. 4 et du caractère local de la notion de variété quotient.

[N-B : On voit donc qu'au dédoublement variété plongée-sous-variété ne semble pas correspondre un dédoublement de la notion de variété quotient]

Corollaire 3.- Soient V une variété de dimension n, V' une variété quotient de V, p la projection canonique de V sur V', x un point de V, $x'=p(x)$, $(f_1, f_2, \ldots, f_{n'})$ un système de coordonnées dans un voisinage ouvert U' de x'. Alors, les fonctions $f_1 \circ p$, $f_2 \circ p, \ldots, f_{n'} \circ p$ font partie d'un système de coordonnées dans un voisinage ouvert de x.

En effet, soit φ l'application $y \to (f_1(y), f_2(y), \ldots, f_{n'}(y))$ de U' dans $K^{n'}$, qui est un isomorphisme de U' sur $\varphi(U')$. L'application p est de rang n' en x (cor.2), donc il en est de même de $\varphi \circ p$. Donc le système $(f_1 \circ p, f_2 \circ p, \ldots, f_n \circ p)$ est de rang n' en x. Il suffit alors d'appliquer le cor.2 de la prop.15 du § 1.

5. Sections différentiables.- Proposition 5.- *Soient V et V' des variétés, R une relation d'équivalence sur V. Supposons que l'ensemble V' soit identique à l'ensemble quotient V/R. Pour que V' soit la variété quotient de V par R, il faut et il suffit que : 1°- la projection canonique p de V sur V' soit différentiable ; 2°- pour tout point $x \in V$, il existe un voisinage ouvert U' de p(x) dans V' et une application différentiable s de U' dans V telle que s(p(x))= x et p(s(y))=y pour $y \in U'$.*

En effet, si ces conditions sont remplies, la projection p est de rang en x égale à la dimension de V', donc V' est variété quotient de V d'après le cor.2 de la prop.4. Réciproquement, supposons que V' soit variété quotient de V. La condition 1° est satisfaite (prop.2). Soit x un point de V. Soient U un voisinage ouvert de x dans V, C une carte de V définie dans U, appliquant U sur une partie de K^n de la forme $O \times O'$, O étant une partie ouverte de $K^{n'}$ et O' une partie ouverte de $K^{n-n'}$, tels que : a) deux points u et v de U sont congrus modulo R si et seulement si $\pi(C(u)) = \pi(C(v))$ (π désignant la projection de $O \times O'$ sur son premier facteur) ; b) l'application C' de p(U) sur O déduite de $\pi \circ C$ par passage au quotient suivant R est une carte de V'. On peut supposer que C(x) est l'origine de K^n, de sorte que $O \subset O \times O'$. Alors, l'application $s = \overset{-1}{C} \circ C'$ possède les propriétés de la proposition.

Corollaire.- Soient V et W des variétés, V' une variété quotient de V, p la projection canonique de V sur V'. Pour qu'une application φ de W dans V' soit différentiable, il faut et il suffit que, pour tout point $x \in W$, il existe un voisinage ouvert U de x dans W et une application différentiable ψ de U dans V tels que la restriction de φ à U soit égale à $p \circ \psi$.

En effet, si cette condition est remplie, la restriction de φ à U est différentiable. Comme x est un point arbitraire de W, on en déduit que φ est différentiable. Réciproquement, supposons que φ soit différentiable. Soit $x \in W$. Il existe un voisinage ouvert U' de $\varphi(x)$ dans V' et une application différentiable s de U' dans V telle que $p(s(y))=y$ pour $y \in U'$. Alors, $U = \overset{-1}{\varphi}(U')$ et $\psi = s \circ \varphi$ vérifient les conditions du corollaire.

6. Transitivité des variétés quotients.- Proposition 6.- Soient V une variété, R et S des relations d'équivalence sur V, S étant moins fine que R. Supposons que la variété quotient $V'=V/R$ existe, et que, T désignant la relation d'équivalence S/R sur V', la variété quotient $V'' = V'/T$ existe. Alors, V'' est la variété quotient de V par S.

En effet, soient n, n', n'' les dimensions de V, V', V'' ; les projections canoniques de V dans V' et de V' dans V'' sont différentiables et de rang n', n'', donc la projection canonique de V sur V'' est différentiable et de rang n''. D'où la proposition.

7. Produits de variétés quotients.- Proposition 7.- Soient V_1 et V_2 deux variétés R_1 et R_2 des relations d'équivalence sur V_1 et V_2 telles qu'il existe des variétés quotients $V_1' = V_1/R_1$, $V_2' = V_2/R_2$. Alors, il existe une variété quotient W de $V_1 \times V_2$ par $R_1 \times R_2$, et l'application canonique de $V_1' \times V_2'$ sur W est un isomorphisme.

En effet, l'application canonique de l'espace $(V_1/R_1)\times(V_2/R_2)$ sur l'espace $(V_1\times V_2)/(R_1\times R_2)$ est un homéomorphisme H puisque R_1 et R_2 sont ouvertes. Transportons à $(V_1\times V_2)/(R_1\times R_2)$ la structure de variété de $(V_1/R_1)\times(V_2/R_2)$ par cet homéomorphisme ; nous obtenons une variété W, et nous allons montrer, ce qui établira la proposition, que W est la variété quotient de $V_1\times V_2$ par $R_1\times R_2$. Soient p_1, p_2 et p les applications canoniques de V_1, V_2 et $V_1\times V_2$ sur V_1', V_2' et W. Si $x_1\in V_1$ et $x_2\in V_2$, on a $p((x_1,x_2))=H((p_1(x_1),p_2(x_2)))$, de sorte que p est différentiable. D'autre part, il existe une section différentiable s_1 de V_1 définie sur un voisinage ouvert de $p_1(x_1)$ et telle que $s_1(p_1(x_1))=x_1$; il existe une section différentiable s_2 de V_2 définie sur un voisinage ouvert de $p_2(x_2)$ et telle que $s_2(p_2(x_2))=x_2$. Alors, l'application $H((y_1,y_2))\longrightarrow(s_1(y_1),s_2(y_2))$ est une section différentiable de $V_1\times V_2$ définie dans un voisinage ouvert de $H((p_1(x_1),p_2(x_2)))$, telle que $s(H((p_1(x_1),p_2(x_2)))) = (x_1,x_2)$.
D'où la proposition.

Nous identifierons désormais les variétés $(V_1/R_1)\times(V_2/R_2)$ et $(V_1\times V_2)/(R_1\times R_2)$ par l'isomorphisme canonique de la prop. 6.

8. Sous-variétés d'un quotient.- Proposition 8.- Soient V une variété de dimension n, R une relation d'équivalence sur V telle que la variété quotient $V'=V/R$ existe et soit de dimension n', p la projection canonique de V sur V', V_1' un sous-ensemble de V', $V_1=\overset{-1}{p}(V_1')$, R_1 la relation d'équivalence induite par R sur V_1. S'il existe sur V_1' (resp. V_1) une structure de variété de dimension n_1' (resp. n_1) qui en fait une sous-variété de V' (resp. V), il existe sur V_1 (resp. V_1') une structure de variété de dimension n_1 (resp. n_1') qui en fait une sous-variété de V (resp. V') ; V_1' est la variété quotient V_1/R_1, et $n-n' = n_1-n_1'$.

Soit $x \in V_1$. Soient U un voisinage ouvert de x, O_1 et O_2 des parties ouvertes de $K^{n'}$ et $K^{n-n'}$ respectivement, π_1 et π_2 des applications différentiables de U sur O_1 et O_2 respectivement, tels que l'application $z \to (\pi_1(z), \pi_2(z))$ soit une carte de V, tels que la relation d'équivalence définie par π_1 sur U soit la relation d'équivalence R_U induite par R, et tels que l'application déduite de π_1 par passage au quotient suivant R_U soit une carte de V' définie sur $U'=p(U)$. Si V'_1 (resp. V_1) peut être munie d'une structure de variété de dimension n'_1 (resp. n_1) qui en fait une sous-variété de V' (resp. V), nous allons montrer que $V_1 \cap U$ (resp. $V'_1 \cap U'$) peut être muni d'une structure de variété de dimension n_1 (resp. n'_1) qui en fait une sous-variété de U (resp. U'), que $V'_1 \cap U'$ est la variété quotient de la variété $V_1 \cap U$ par la relation induite par R dans $V_1 \cap U$, et que $n-n' = n_1-n'_1$. En vertu de la prop.1 et de la prop.3 du § 4, la proposition sera démontrée. On voit donc qu'on peut se limiter au cas où V' est une partie ouverte de $K^{n'}$, où V est de la forme $V' \times Z$, Z étant une partie ouverte de $K^{n-n'}$, et où R est la relation d'équivalence dont les classes sont les ensembles $\{w\} \times Z$. Ceci posé, si V'_1 est une sous-variété de V', $V_1 = V'_1 \times Z$ est une sous-variété de V (prop.7), V'_1 est la variété quotient de V_1 par R_1, et $n-n'$, $n_1-n'_1$ sont égaux à la dimension de Z. Réciproquement, supposons que V_1 soit une sous-variété de V, et montrons que V'_1 peut être muni d'une structure de variété qui en fait une sous-variété de V' ; ceci, avec le résultat précédent, achèvera la démonstration. Comme, en vertu de la prop.3 du § 4, il suffit d'établir notre assertion localement, on peut supposer, en restreignant au besoin V' et Z, que les restrictions à V_1 de certaines fonctions coordonnées canoniques sur

$V' \times Z \subset K^n$, soient $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$, forment un système de coordonnées sur V_1, les autres, soient $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-p}}$, étant des fonctions différentiables de $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ (§ 4, cor.2 de la prop.5). Si un point de $V' \times Z$ appartient à V_1, tout point de $V' \times Z$ qui lui est congru modulo $K^{n-n'}$ appartient aussi à V_1. Il en résulte que $x_{n'+1}, x_{n'+2}, \dots, x_n$ ne peuvent faire partie de $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-p}}$. On peut donc supposer que $j_1 = 1$, $j_2 = 2, \dots, j_{n-p} = h \leqslant n'$. L'ensemble $V_1' \subset V' \subset K^{n'}$ est alors défini par des équations de la forme $x_1 = f_1(x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_{n'})$, $x_2 = f_2(x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_{n'}), \dots, x_h = f_h(x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_{n'})$, $f_1, f_2, \dots, f_h$ étant des fonctions différentiables définies dans une partie ouverte de $K^{n'-h}$. Donc (§ 4, cor.2 de la prop.7), V_1' peut être muni d'une structure de variété qui en fait une sous-variété de V'.

9. <u>Recollement de variétés</u>.- Soit $(V_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de variétés de dimension fixe n. Soit V une variété somme des variétés V_ι. Il existe une partition $(O_\iota)_{\iota \in I}$ de V formée de sous-variétés ouvertes et fermées, et une famille $(f_\iota)_{\iota \in I}$ d'isomorphismes de V_ι sur O_ι. Soit R une relation d'équivalence séparée sur V, telle que toute classe d'équivalence suivant R ait au plus un point dans chaque O. Si ι et $\varkappa$ sont deux indices distincts quelconques, on désignera par $A_{\iota\varkappa}$ la partie de O_ι formée des points x tels qu'il existe un point y, de la classe d'équivalence de x, appartenant à $O_\varkappa$; d'après l'hypothèse sur R, à tout $x \in A_{\iota\varkappa}$ correspond ainsi un y de $A_{\varkappa\iota}$ et un seul ; on désignera par $h_{\iota\varkappa}$ l'application biunivoque de $A_{\iota\varkappa}$ sur $A_{\varkappa\iota}$ ainsi définie. Rappelons (Top.gén.) que l'espace quotient V/R s'appelle l'espace obtenu par recollement des O_ι le long des $A_{\iota\varkappa}$ au moyen des $h_{\iota\varkappa}$. Supposons que, pour tout couple d'indices $\iota, \varkappa$ distincts,

$A_{\iota\varkappa}$ soit une partie ouverte de O_ι , et que $h_{\iota\varkappa}$ soit un isomorphisme de la sous-variété ouverte $A_{\iota\varkappa}$ de O_ι sur la sous-variété ouverte $A_{\varkappa\iota}$ de $O_\varkappa$. On sait (loc. cit.) qu'alors R est une relation d'équivalence ouverte. Les conditions de la prop.3 sont évidemment satisfaites avec $n'=0$, en prenant, pour tout $x \in V$, une carte C_x de V définie sur un voisinage ouvert U_x de x contenu dans celui des ensembles O_ι qui contient x . Il existe donc une variété quotient V/R de dimension n , qu'on appelle <u>la variété obtenue par recollement des variétés O_ι le long des $A_{\iota\varkappa}$ au moyen des $h_{\iota\varkappa}$</u> . Soit p la projection canonique de V sur V/R . Les ensembles $p(O_\iota)$ constituent un recouvrement ouvert de V/R . La restriction de p à O_ι est une application biunivoque différentiable et partout de rang n de O_ι sur $p(O_\iota)$, donc un isomorphisme de O_ι sur $p(O_\iota)$.

Réciproquement, soient W une variété, $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de V, V une variété somme des variétés U_ι . Il existe une partition de V en sous-variétés ouvertes O_ι , et, pour tout $\iota \in I$, un isomorphisme f_ι de O_ι sur U_ι . Disons que deux points $x \in O_\iota$ et $y \in O_\varkappa$ sont équivalents si $f_\iota(x) = f_\varkappa(y)$. On définit ainsi sur V une relation d'équivalence du type considéré plus haut, et la variété quotient de V par R est isomorphe à W .

Si W est une variété de dimension n, tout point de W admet un voisinage ouvert isomorphe à une sous-variété ouverte de K^n. Donc W peut s'obtenir par recollement de sous-variétés ouvertes de K^n .

§ 6. Variétés fibrées.

1. Variétés fibrées.- Définition 1.- Soient V, B, F trois variétés, p une application continue de V sur B. Supposons que, pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b dans B, et un isomorphisme f de la variété $U \times F$ sur $\overset{-1}{p}(U)$, sous-variété ouverte de V, tel que $p(f(x,y))=x$ pour $x \in U$ et $y \in F$. Dans ces conditions, on dit que V est une variété fibrée de base B, de fibre typique F, et de projection p sur B.

L'espace sous-jacent de V est alors fibré, admet pour base l'espace sous-jacent de B, pour fibre typique l'espace sous-jacent de F, et pour projection p sur B. L'espace fibré V est localement trivial. Soit R la relation d'équivalence sur V définie par p ; les classes d'équivalence suivant R, c'est-à-dire les fibres de V, peuvent être munies de structures de sous-variétés fermées de V isomorphes à F. La projection p est un homomorphisme différentiable de V sur B ; autrement dit, la variété quotient V/R existe, et l'application déduite de p par passage au quotient suivant R est un isomorphisme de V/R sur B.

Exemple .- Considérons la variété $B \times F$, et soit p la projection sur le premier facteur B. Cette variété est une variété fibrée de base B, de fibre typique F, de projection p sur B. Une telle variété fibrée est dite triviale.

Définition 2.- Soient V et V' deux variétés fibrées de base B, de fibre typiques F, F', de projections p, p' sur B. Une application biunivoque f de V sur V' est appelée un B-isomorphisme de la variété fibrée V sur la variété fibrée V' si c'est un B-isomorphisme de systèmes fibrés (Top. géd.) et si c'est un isomorphisme de variétés.

Soit $x \in B$. La restriction de f à $\overset{-1}{p}(x)$ est une application différentiable de la sous-variété $\overset{-1}{p}(x)$ dans V' (§ 4, prop.3), et $f(\overset{-1}{p}(x)) = \overset{-1}{p'}(x)$, donc cette restriction est une application différentiable de $\overset{-1}{p}(x)$ sur $\overset{-1}{p'}(x)$ (§ 4, prop.3). De même, la restriction de $\overset{-1}{f}$ à $\overset{-1}{p'}(x)$ est une application différentiable de $\overset{-1}{p'}(x)$ sur $\overset{-1}{p}(x)$. les fibres de V et V' sont donc isomorphes.

Soient V une variété fibrée de base B, de filtre F, de projection p sur B, et B' une sous-variété ouverte de B. Soient $V' = \overset{-1}{p}(B')$, et p' la restriction de p à V'. Alors, V' est une variété fibrée de base B', de fibre typique F et de projection p' sur B'. Pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage ouvert B' de b tel que la variété fibrée V' précédente soit B'-isomorphe à une variété fibrée triviale $B' \times F$.

Proposition 1.- *Soient* B *et* F *deux variétés,* V *un ensemble,* p *une application de* V *sur* B. *Soient* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *un recouvrement ouvert de* B, *et, pour tout* $\iota \in I$, θ_ι *une application biunivoque de* $U_\iota \times F$ *sur* $\overset{-1}{p}(U_\iota)$, *telle que* $p(\theta_\iota(x,y)) = x$ *pour* $x \in U_\iota$ *et* $y \in F$. *Supposons vérifiée la condition suivante : si* ι *et* $\varkappa$ *sont deux indices de* I *tels que* $U_\iota \cap U_\varkappa \neq \emptyset$, $\overset{-1}{\theta_\iota} \circ \theta_\varkappa$ *est une application différentiable de la variété* $(U_\iota \cap U_\varkappa) \times F$ *dans elle-même. Alors, il existe sur* V *une structure de variété et une seule telle que, pour tout* $\iota \in I$, $\overset{-1}{p}(U_\iota)$ *soit une sous-variété ouverte de* V *et que* θ_ι *soit un isomorphisme de la variété* $U_\iota \times F$ *sur la variété* $\overset{-1}{p}(U_\iota)$. *Pour cette structure,* V *est une variété fibrée de base* B, *de fibre typique, de projection* p *sur* B.

En effet, les ensembles $\overset{-1}{p}(U_\iota)$ forment un recouvrement de V. Pour tout $\iota \in I$, transportons à $\overset{-1}{p}(U_\iota)$ par θ_ι la structure de variété de $U_\iota \times F$. En observant que l'application identique de $\overset{-1}{p}(U_\iota) \cap \overset{-1}{p}(U_\varkappa)$

peut s'écrire $\theta_\iota \circ (\theta_\iota^{-1} \circ \theta_n) \circ \theta_\varkappa^{-1}$ ou $\theta_\varkappa \circ (\theta_\varkappa^{-1} \circ \theta_\iota) \circ \theta_\iota^{-1}$, on voit que cette application est un isomorphisme de $p^{-1}(U_\iota) \cap p^{-1}(U_\varkappa)$, considéré comme sous-variété ouverte de $p^{-1}(U_\iota)$, sur $p^{-1}(U_\iota) \cap p^{-1}(U_\varkappa)$, considéré comme sous-variété ouverte de $p^{-1}(U_\varkappa)$. Il existe donc une structure de variété et une seule sur V telle que les $p^{-1}(U_\iota)$ soient des sous-variétés ouvertes de V . Il est immédiat que, pour cette structure, V est une variété fibrée de base B de fibre typique F , de projection p sur B .

Proposition 2.- Soient V et F deux variétés, R une relation d'équivalence séparée sur V . Supposons vérifiée la condition suivante : pour tout $x \in V$, il existe une variété Z et un isomorphisme f de la variété $Z \times F$ sur un voisinage ouvert U de x saturé pour R, tel que les images par f des ensembles $\{z\} \times F$, où z parcourt Z, soient les classes d'équivalence suivant R contenues dans U . Alors, il existe une variété quotient $B = V/R$. Soit p l'application canonique de V sur B . La variété V est fibrée de base B , de fibre typique F , et de projection p sur B .

Montrons d'abord que les conditions de la prop.3 du § 5 sont remplies. Soit $x \in V$. Il existe une variété Z et un isomorphisme f de $Z \times F$ sur un voisinage ouvert U de x saturé pour R , tel que les images par f des ensembles $\{z\} \times F$, où z parcourt Z , soient les classes d'équivalence suivant R contenues dans U .

Soient $u \in Z$ et $v \in F$ tels que $f(u,v)=x$. Soit C une carte de Z définie sur un voisinage ouvert de u . Soit C' une carte de F définie dans un voisinage ouvert de v . Alors, en composant la carte $C \times C'$ de (u,v) et f^{-1} , on obtient une carte C_x de V, définie dans un voisinage ouvert O_x de x , et qui satisfait évidemment à la condition 1° de la prop.3 du § 5 . Maintenant, soit x' un autre point de V, auquel on associe de même une variété Z', un isomorphisme f', une carte $C_{x'}$ de V définie dans un voisinage ouvert $O_{x'}$ de x'. Pour vérifier la condition 2° de la prop.3 du § 5, il faut démontrer que l'application d'une partie ouverte de Z sur une partie ouverte de Z' obtenue en faisant correspondre, à un élément $t \in Z$, un élément $t' \in Z'$ lorsque $f(\{t\} \times F) = f'(\{t'\}) \times F')$ est différentiable. Or, ceci résulte du cor.3 de la prop.2 du § 5, puisque cette application s'obtient à partir de l'application $f'^{-1} \circ f$ de $Z \times F$ dans $Z' \times F$ par passage aux quotients. Ainsi, il existe une variété quotient $B = V/R$. Soit $b = p(x) \in B$. L'application de Z sur une partie ouverte de B déduite de f par passages aux quotients est un isomorphisme, d'après le cor.3 de la prop.2 du § 5. Il en résulte aussitôt que V est une variété fibrée de base B, de fibre typique F, et de projection p sur B.

2. Groupes différentiables.- Définition 3.- On appelle groupe différentiable de dimension n sur K un groupe G muni d'une structure de variété de dimension n sur K telle que l'application $(s,t) \to st^{-1}$ de $G \times G$ dans G soit différentiable.

On dit aussi que la structure de variété est compatible avec la structure de groupe. Dans ce cas, la topologie de G est aussi compatible avec la structure de groupe de G. On parlera donc du groupe topologique sous-jacent au groupe différentiable G.

Si G est un groupe différentiable, les translations à droite et à gauche, et l'application $s \to s^{-1}$, sont des automorphismes de la variété G.

Exemples de groupe différentiable.- 1. Le groupe additif K^n, muni de la structure de variété de K^n, est un groupe différentiable.

2. Le groupe multiplicatif K^*, muni de la structure de sous-variété ouverte de K, est un groupe différentiable.

3. Le groupe multiplicatif (non commutatif) des quaternions $\neq 0$, identifié à une sous-variété ouverte de R^4, est un groupe analytique réel.

4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K. L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est un espace vectoriel sur K, donc est muni canoniquement d'une structure de variété sur K. Le groupe GL(E) des automorphismes de l'espace vectoriel E est une partie ouverte de $\mathcal{L}(E)$. Considéré comme sous-variété ouverte de E, c'est un groupe différentiable sur K. En effet, soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. La donnée de cette base permet d'identifier $\mathcal{L}(E)$ à l'algèbre $M_n(K)$ des matrices à n lignes et n colonnes sur K. Soient $x_{ij}(\sigma)$ les éléments d'une matrice σ de $M_n(K)$. Si $\sigma \in GL(E)$ et $\tau \in GL(E)$, les $x_{ij}(\sigma\tau^{-1})$ sont des fonctions rationnelles des $x_{ij}(\sigma)$ et des $x_{ij}(\tau)$ dont le dénominateur reste non nul sur GL(E). D'où notre assertion.

Soit G un groupe analytique réel. Munissons le groupe G de la structure de variété indéfiniment différentiable associée à la structure de variété analytique de G. On obtient évidemment un groupe indéfiniment différentiable qui sera dit <u>associé à</u> G.

> Nous verrons plus tard que tout groupe indéfiniment différentiable réel est associé à un groupe analytique réel et à un seul.

Soit G un groupe analytique sur K. Soit K' un sous-corps fermé de K tel que le degré de K sur K' soit fini. Munissons le groupe G de la structure de variété sur K' associée à la structure de variété sur K de G. On obtient évidemment un groupe analytique sur K' qui sera dit groupe <u>associé</u> à G.

Soient G et H des groupes différentiables. Munissons le groupe $G \times H$ de la structure de variété produit des variétés G et H . L'application $((\sigma, \tau),(\sigma_1, \tau_1)) \longrightarrow (\sigma\sigma_1^{-1}, \tau\tau_1^{-1})$ de $(G \times H) \times (G \times H)$ dans $G \times H$ est évidemment différentiable, de sorte que $G \times H$ est un groupe différentiable appelé <u>groupe différentia-ble produit</u> des groupes G et H .

Soient G un groupe différentiable, G' un sous-groupe de G . Supposons G' muni d'une structure de variété telle que G' soit une variété plongée dans G . Alors, G' est un groupe différentiable. En effet, $G' \times G'$ est une variété plongée dans $G \times G$. L'application $(s,t) \longrightarrow st^{-1}$ de $G' \times G'$ dans G s'obtient en composant l'injection canonique de $G' \times G'$ dans $G \times G$ et l'application $(s,t) \longrightarrow st^{-1}$ de $G \times G$ dans G ; elle est donc différentiable. Par suite, l'application $(s,t) \longrightarrow st^{-1}$ de $G' \times G'$ dans G' est différentiable, ce qui prouve notre assertion. Pour vérifier que la variété G' est plongée dans la variété G, il suffit de vérifier que l'injection canonique i de G' dans G est différentiable, et que son rang en e (élément neutre de G) est égal à la dimension n' de G' ; en effet, comme les translations d'un groupe différentiable sont des automorphismes de sa structure de variété, i est alors de rang n' en tout point de G'.

Soient G un groupe différentiable, G_1 un sous-groupe distingué de G, Γ le groupe quotient G/G_1 . Supposons Γ muni d'une structure de variété telle que Γ soit variété quotient de la variété G . Alors, est un groupe différentiable. En effet, l'application $(s,t) \longrightarrow st^{-1}$ de $\Gamma \times \Gamma$ dans Γ s'obtient à partir de l'application $(s,t) \longrightarrow st^{-1}$ de $G \times G$ dans G par passage au quotient. Pour vérifier que la variété Γ est quotient de la variété G , il suffit de vérifier que la projection canonique de G sur Γ est différentiable et que son rang en e (élément neutre de G) est égal à la dimension de Γ .

Définition 4.- Soient V une variété sur K, G un groupe différentiable sur K. Supposons que G opère (à droite ou à gauche) sur V, et soit $\rho(s)$ l'application biunivoque de V sur V définie par un élément s de G. On dit que G opère différentiablement sur V si l'application $(s,x) \to \rho(s)x$ de $G \times V$ dans V est différentiable.

Lorsqu'il en est ainsi, les applications $\rho(s)$ sont des automorphismes de la structure de variété de V.

Proposition 3.- L'application $(s,x) \to \rho(s)x$ est un homomorphisme différentiable de $G \times V$ sur V.

En effet, soient $x \in V$ et $s \in G$. Considérons l'application $y \to (s^{-1}, \rho(s)y)$ de V dans $G \times V$. Cette application est différentiable, et sa composée avec l'application $(t,y) \to \rho(t)y$ de $G \times V$ dans V est l'application identique de V. La proposition résulte alors de la prop. 5 du § 5.

Si V' est une variété plongée dans V et stable pour les opérations de G, G opère différentiablement sur V', d'après la prop. 3 du § 4. Dérouler le rouleau pour produits et quotients.

3. Variétés fibrées principales.- Définition 5.- Soient V et B deux variétés sur K, G un groupe différentiable sur K, opérant à droite sur V, p une application continue de V sur B, r l'application de $G \times V$ sur V définie par les opérations de G (on posera $r(s,x) = xs$ pour $s \in G$ et $x \in V$). Supposons que, pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b dans B, et un isomorphisme f de la variété $U \times G$ sur la variété $\overset{-1}{p}(U)$, tel que $p(f(u,s)) = u$ et $f(u,s)t = f(u,st)$ pour $u \in U$, $s \in G$, $t \in G$. Dans ces conditions, on dit que V est une variété fibrée principale à droite de base B, de groupe structural G, de repère général r, de projection p sur B. On définit de façon analogue les variétés fibrées principales à gauche.

 78

Dans ce § , toutes les variétés fibrées principales considérées sont des variétés fibrées principales à droite.

<u>L'espace</u> V est fibré principal. D'autre part, la variété V est fibré de base B, de fibre typique G, de projection p sur B (déf.1). Ces remarques justifient la terminologie employée.

Le groupe G opère différentiablement sur V et sans point fixe. Soit R la relation d'équivalence sur V associée à p . Les classes d'équivalence suivant R ne sont autres que les classes d'intransitivité pour G. Si $x \in V$, l'application $s \to xs$ de G dans V est un isomorphisme de la variété G sur la classe de x suivant R .

<u>Exemple</u>.- Considérons la variété filtrée triviale $B \times G$. Soit r l'application de $(B\times G)\times G$ dans $B\times G$ définie par $r((b,s),t)=(b,st)$ pour $b\in B$, $s \in G$, $t\in G$. On obtient une variété fibrée principale qui est dite <u>triviale</u>.

<u>Définition 6</u>.- <u>Soient</u> V <u>et</u> V' <u>des variétés fibrées principales de base</u> B, <u>de groupe structural</u> G , <u>de projections</u> p <u>et</u> p' <u>sur</u> B, <u>de repères généraux</u> r <u>et</u> r'. <u>Une application biunivoque de</u> V <u>sur</u> V' <u>est appelée un</u> B-<u>isomorphisme de la variété fibrée principale</u> V <u>sur la variété fibrée principale</u> V' <u>si c'est un</u> B-<u>isomorphisme de systèmes fibrés principaux</u> (Top. géd.) <u>et si c'est un isomorphisme de variétés</u>.

Soit V une variété fibrée principale de base B, de groupe structural G , de projection p sur B, de repère général r . Soient B' une sous-variété ouverte de B, $V'=\overset{-1}{p}(B')$, p' la restriction de p à V', r' la restriction de r à $G\times V'$. Alors, V' est une variété fibrée principale de base B', de groupe structural G, de projection p' sur B', de repère général r'. Pour tout point $b\in B$, il existe un voisinage ouvert B' de b tel que la variété fibrée principale V' précédente soit B'-isomorphe à la variété fibrée principale triviale $B'\times G$.

Proposition 4.- Soient V *une variété,* G *un groupe différentiable opérant à droite sur* V, *de telle sorte que la relation d'équivalence* R *définie par* G *soit séparée. Supposons que la condition suivante soit vérifiée* : *pour tout* $x \in V$, *il existe une variété* Z *et un isomorphisme* f *de la variété* $Z \times G$ *sur un voisinage ouvert* U *de* x *dans* V , *tel que* $f(z,s)t = f(z),st)$ *pour* $z \in Z$, $s \in G$, $t \in G$. *Alors, il existe une variété quotient* $B = V/R$. *Soit* p *l'application canonique de* V *sur* B . *La variété* V *est fibrée principale à droite, de base* B, *de groupe structural* G , *de projection* p *sur* B .

La proposition est une conséquence immédiate de la prop.2 .

Soit P une variété fibrée principale de base B, de groupe structual G, de projection p sur B . Soit G' un sous-groupe distingué de G, et supposons que le groupe quotient différentiable G/G' existe ; on désignera par $\dot{s}$ l'image canonique dans G/G' d'un élément s de G . Soit d'autre part P' la base de P considéré comme système fibré principal de groupe structural G'. Rappelons (Top. péd.) que les opérations de G dans P passent au quotient, de sorte que G opère à droite dans P' ; les éléments de G' opèrent identiquement dans P', et G/G' opère sans point fixe dans P' ; ainsi, P' est un système fibré principal de groupe structural G/G', de base B , dont la projection p' sur B se déduit de p par passage au quotient. Soient maintenant U une partie ouverte de B et f un isomorphisme de $U \times G$ sur $\overset{-1}{p}(U)$, tel que $p(f(u,s))=u$ et $f(u,s)t = f(u,st)$ pour $u \in U$, $s \in G$, $t \in G$. Soit R la relation d'équivalence définie par G' dans P . Si on transporte à $U \times G$ par $\overset{-1}{f}$ la relation d'équivalence induite par R dans $\overset{-1}{p}(U)$, la relation d'équivalence obtenue a pour classes les ensembles $\{u\} \times \dot{s}$ où $u \in U$ et $s \in G$. Comme la variété quotient G/G' existe, on déduit aussitôt de là qu'il existe une structure de variété sur P' telle que P' soit la variété quotient P/R. Par passage aux quotients, f définit un isomorphisme f de la variété $U \times (G/G')$ sur la variété $\overset{-1}{p'}(U)$, tel que $f'(u,\dot{s})\dot{t} = f'(u,\dot{s}\dot{t})$, et $p'(f'(u,\dot{s}))=u$. Ceci prouvé que P' est une variété fibrée principale de base B, de groupe structural $G\ G'$, qui sera dite <u>déduite de</u> P <u>par passage au quotient</u>. Si P est la variété fibrée principale triviale $B \times G$, P' s'identifie canoniquement à la variété fibrée principale triviale $B \times (G/G')$, comme on le voit tout de suite.

Soient P et P' des variétés fibrées principales triviales de base B, de groupes structuraux G, G', de repères généraux r, r' de projections p, p' sur B. Dans l'ensemble $P \times P'$, considérons l'ensemble P'' des couples (x,x') où $x \in P$, $x' \in P'$ et $p(x)= p'(x')$. Soit p'' l'application $(x,x') \rightarrow p(x)=p'(x')$ de P'' sur B. Soit G'' le groupe produit $G \times G'$. Pour $(x,x') \in P''$ et $(s,s') \in G''$, posons $r''((x,x'),(s,s'))=(r(x,s), r'(x',s'))$. On sait (Top.péd.) que P'' est un système fibré principal de base B, de groupe structural G'', de repère général r'', de projection p'' sur B. Pour tout point b de B, il existe un voisinage ouvert U de b dans B et des U-isomorphismes f, f' des variétés fibrées principales triviales $U \times G$, $U \times G'$ sur les variétés fibrées principales $\overset{-1}{p}(U)$, $\overset{-1}{p'}(U)$. La variété $\overset{-1}{p}(U) \times \overset{-1}{p'}(U)$ est une sous-variété ouverte de la variété $P \times P'$. Soit g l'application $(u,s,u',s') \rightarrow (f(u,s),f'(u',s'))$ de $U \times G \times U \times G'$ sur $\overset{-1}{p}(U) \times \overset{-1}{p'}(U')$, qui est un isomorphisme de variétés. Soit V l'ensemble des éléments de $U \times G \times U \times G'$ de la forme (u,s,u,s') ; il peut être muni d'une structure de variété qui en fait une sous-variété de $U \times G \times U \times G'$. La restriction de g à V est une application g_1 de V sur $P'' \cap (\overset{-1}{p}(U) \times \overset{-1}{p'}(U)) = \overset{-1}{p''}(U)$. En vertu de la prop.4 du §4, P'' peut donc être muni d'une structure de variété qui en fait une sous-variété de $P \times P'$. L'application p'' de P'' sur B est alors continue. En outre, g_1 est un isomorphisme de la variété V sur $\overset{-1}{p''}(U)$, considéré comme sous-variété ouverte de P''. Soient enfin φ l'isomorphisme de $U \times G''$ sur V défini par $\varphi(u,(s,s')) = (u,s,u,s')$, et $f = g_1 \circ \varphi$. Il est clair que $p''(f''(u,(s,s'))) = u$ et $f''(u,(s,s'))(t,t') = f''(u,(s,s')(t,t'))$. Donc P'' est une variété fibrée principale de base B, de groupe structural G'', de repère général r'', de projection p'' sur B, qui sera dite <u>produit fibré des variétés fibrées principales</u> P <u>et</u> P'. Il est clair que si P et P' sont les variétés fibrées principales triviales $B \times G$ et $B \times G'$, P'' s'identifie canoniquement à la variété principale triviale $B \times G''$.

4. <u>Variétés fibrées associées à une variété fibrée principale</u>.- <u>Définition 7</u>. <u>Soient</u> P <u>une variété fibrée principale à droite, de base</u> B, <u>de groupe structural</u> G, $x \rightarrow xs$ <u>l'automorphisme de la variété</u> P <u>défini par l'élément</u> s <u>de</u> G, p <u>la projection de</u> P <u>sur</u> B. <u>Soient</u> F <u>une variété sur laquelle</u> G <u>opère différentiablement à gauche</u>, $y \rightarrow sy$ <u>l'automorphisme de</u> F <u>défini par l'élément</u> s <u>de</u> G. <u>Soient</u> E <u>une variété fibrée de base</u> B, <u>de fibre typique</u> F, <u>de projection</u> q <u>sur</u> B, <u>et</u> r <u>une application de</u> $P \times F$ <u>sur</u> E. <u>Supposons que, pour tout point</u> $b \in B$, <u>il existe un voisinage ouvert</u> U <u>de</u> b <u>dans</u> B, <u>un</u> U-<u>isomorphisme</u> f <u>de la variété fibrée triviale</u> $U \times F$ <u>sur la variété fibrée</u> $\overset{-1}{q}(U)$, <u>un</u> U-<u>isomorphisme</u> g <u>de la variété fibrée principale triviale</u> $U \times G$ <u>sur la variété fibrée principale</u> ~~<u>triviale</u> $U \times G$ <u>sur la variété fibrée principale</u>~~ $\overset{-1}{p}(U)$, <u>tels que</u> $r(g(b,s),x) = f(b,sx)$ <u>pour</u> $b \in U$, $s \in G$, $x \in F$. <u>Dans ces conditions, on dit que</u> E <u>est une variété fibrée associée à</u> P, <u>de groupe structural</u> G, <u>de repère général</u> r.

En échangeant les mots "à droite" et "à gauche" dans la définition, on obtient les variétés fibrées associées à des variétés fibrées principales à gauche.

L'espace E est un espace fibré associé à l'espace fibré principal P.

Pour tout $x \in P$, l'application partielle $y \to r(x,y)$ de F dans E est un isomorphisme de la variété F sur $\overset{-1}{q}(p(x))$, considéré comme sous-variété de E. Cet isomorphisme, que nous noterons r_x, est appelé le repère correspondant à x. Soit $\rho(s)$ l'application $y \to sy$ de F sur F; pour $x \in P$ et $s \in G$, on a $r_{xs} = r_x \circ \rho(s)$. Le repère général est un homomorphisme différentiable de $P \times F$ sur E, comme il résulte de la prop. 3.

Exemple.- Considérons la variété fibrée principale triviale $B \times G$ et la variété fibrée triviale $B \times F$. Soit r l'application de $(B \times G) \times F$ sur $B \times F$ définie par $r((b,s),x) = (b,sx)$ pour $b \in B$, $s \in G$, $x \in F$. On obtient ainsi une variété fibrée associée à $B \times G$, qui sera dite triviale.

Soit E une variété fibrée associée à une variété fibrée principale P, de fibre typique F, de groupe structural G, de base B, de repère général r. Soient q et p les projections de E et P respectivement sur B. Soient B' une sous-variété ouverte de B, $E' = \overset{-1}{q}(B')$, $P' = \overset{-1}{p}(B')$, q' la restriction de q à E', p' la restriction de p à P', r' la restriction de r à $P' \times F$. Alors, E' est une variété fibrée associée à la variété fibrée principale P', de fibre typique F, de groupe structural G', de base B', de repère général r'.

Lorsque G opère identiquement sur F, il existe (Top. géd.) un isomorphisme canonique i de E sur $B \times F$, qui se déduit par passage au quotient de l'application $(y,x) \to (p(y),x)$ de $P \times F$ sur $B \times F$; et i est un B-isomorphisme du système fibré E sur le système fibré trivial $B \times F$.

En outre, i est un isomorphisme de variétés. En effet, il suffit de prouver que l'application $(y,x) \rightarrow (p(y),x)$ est un homomorphisme différentiable, ce qui résulte aussitôt du fait que p est un homomorphisme différentiable.

Proposition 5.- *Soit P une variété fibrée principale de base B, de groupe structural G, de projection p sur B . Soit F une variété sur laquelle G opère différentiablement à gauche. Soient E et E' des variétés fibrées associées à P , de fibre typique F, de repères généraux r,r' . Il existe une application biunivoque f et une seule de E sur E' telle que $r'=f\circ r$, et f est un B-isomorphisme de la variété fibrée E sur la variété fibrée E'.*

On a vu en Top. géd. que f existe, est unique, et est un B-isomorphisme du système fibré E sur le système fibré E'. Comme r' est différentiable et que r est un homomorphisme différentiable de $P\times F$ sur E , on voit que f est différentiable. De même, f^{-1} est différentiable. Donc f est un isomorphisme de variétés.

Le résultat précédent est un résultat d'unicité. Etablissons maintenant un résultat d'existence.

Proposition 6.- *Soient P une variété fibrée principale, B sa base, G son groupe structural, p la projection de P sur B, $x \rightarrow xs$ l'automorphisme de la variété P défini par l'élément s de G . Soient F une variété sur laquelle G opère différentiablement à gauche, $y \rightarrow sy$ l'automorphisme de F défini par l'élément s de G . Faisons opérer G à droite sur $P\times F$ par la loi $(x,y)s = (xs, s^{-1}y)$ pour $x\in P$, $y\in F$, $s\in G$ et soit R la relation d'équivalence définie par G dans $P\times F$. Alors, il existe une variété quotient $E = P\times F/R$. Soit r l'application canonique de $P\times F$ sur E . L'application $(x,y) \rightarrow p(x)$ de $P\times F$ sur B est compatible avec R ,*

<u>donc définit par passage au quotient une application différentiable</u> q <u>de</u> E <u>sur</u> B . <u>Alors</u>, E <u>est une variété fibrée associée à</u> P , <u>de base</u> B , <u>de fibre typique</u> F, <u>de repère général</u> r <u>et de projection</u> q <u>sur</u> B .

Rappelons d'abord que R est séparée. Montrons en effet que deux points (x,y) et (x',y') de $P\times F$ non congrus modulo R possèdent des voisinages ouverts disjoints saturés pour R . Si $p(x)\neq p(x')$, soient U et U' des voisinages ouverts disjoints de $p(x)$ et $p(x')$ dans B . Alors, $\overset{-1}{p}(U)\times F$ et $\overset{-1}{p}(U')\times F$ sont saturés pour R, ouverts et disjoints. Supposons maintenant $p(x)=p(x')$. Par définition des variétés fibrées principales, on peut alors se ramener au cas où P est une variété principale triviale, de la forme $B\times G$. Alors R est la relation d'équivalence définie sur $B\times G\times F$ par l'application φ de $B\times G\times F$ dans $B\times F$ qui transforme l'élément (b,s,x) en l'élément (b, sx). Ceci prouve notre assertion.

Ceci posé, soit $b\in B$. Il existe un voisinage ouvert U de b dans B , et un isomorphisme g de la variété fibrée principale triviale $U\times G$ sur la variété fibrée principale $\overset{-1}{p}(U)$. Soit h l'isomorphisme de la variété $U\times G\times F$ sur la variété $\overset{-1}{p}(U)\times F$ définie par $h(u,s,x)=(g(u,s),x)$ pour $u\in U$, $s\in G$, $x\in F$. Soit φ l'application de $U\times G\times F$ sur $U\times F$ définie par $\varphi(u,s,x)=(u,sx)$. Cette application définit une relation d'équivalence R' sur $U\times G\times F$, dont la transformée par h est la relation d'équivalence R_1 induite par R dans $\overset{-1}{p}(U)\times F$. En vertu de la prop.3, il existe une variété quotient de $U\times G\times F$ par R', et l'application φ' de $(U\times G\times F)/R'$ sur $U\times F$ déduite de φ par passage au quotient est un isomorphisme de variétés par lequel nous identifions désormais $U\times F$ et $(U\times G\times F)/R'$. Il en résulte d'abord qu'il existe une variété quotient de $\overset{-1}{p}(U) \times F$ par R_1. Comme R est séparée et ouverte, la prop.3 du § 5 montre qu'il existe une variété quotient E de $P \times F$ par R. Les applications q et r définies dans l'énoncé de la proposition font de E un système fibré associé au système fibré principal P. Si f désigne l'application de $U \times F$ sur $(\overset{-1}{p}(U) \times F)/R_1$ déduite de h par passages aux quotients, f est un isomorphisme de variétés, et il est clair que c'est un U-isomorphisme de systèmes fibrés. Donc E est une variété fibrée de base B, de fibre typique F, de projection q sur B. Enfin, pour $u \in U$, $s \in G$, $x \in F$, $r(g(u,s),x)$ est la classe de $(g(u,s),x)$ modulo R_1, donc aussi celle de $(g(u,s)s^{-1},sx) = (g(u,e),sx)$; et $f(u,sx)$ est la classe modulo R_1 du transformé par h de (u,e,sx), c'est-à-dire de $(g(u,e),sx)$; donc $r(g(u,s),x) = f(u,sx)$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1.- Soient P une variété fibrée principale de base B, de groupe structural G, F une variété sur laquelle G opère différentiablement à gauche, E un système fibré associé à P, de groupe structural G, de base B, de repère général r. Il existe alors sur E une structure de variété et une seule pour laquelle E est une variété fibrée associée à P, de fibre typique F, de groupe structural G, de repère général r.

En effet, soit E' une variété fibrée associée à P, de fibre F, de repère général r' (prop.6). Il existe (Top. géd.) une application biunivoque f de E' sur E telle que $r = f \circ r'$. En transportant à E par l'application f la structure de variété de E', on obtient une structure de variété sur E répondant à la question. L'unicité résulte de la prop.5.

Corollaire 2.- Soit P une variété fibrée principale de groupe structural G, de repère général r. Si on fait opérer G sur lui-même par les translations à gauche, P peut être considérée comme variété fibrée associée à P, de fibre typique, de repère général r.

En effet, on sait (Top. péd.) que P est un système fibré de fibre G associé au système fibré principal P . Et r est un homomorphisme différentiable de $P \times G$ sur P (prop.3).

Soient P une variété fibrée principale de base B , de projection p sur B, de groupe structural G , $(F^\nu)_{1\leqslant\nu\leqslant n}$ des variétés sur lesquelles G opère différentiablement à gauche, $(E^\nu)_{1\leqslant\nu\leqslant n}$ des variétés fibrées associées à P, q^ν la projection de E^ν sur B , r^ν le repère général de E^ν . Soit $(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}) \to x_1x_2\dots x_{n-1}$ une application de $F^1\times F^2 \times \dots \times F^{n-1}$ dans F^n, telle que $(sx_1)(sx_2)\dots(sx_{n-1})=s(x_1x_2\dots x_{n-1})$ pour $s\in G$, $x_1\in F^1,\dots,x_n\in F^n$. Soit $b\in B$. On sait (Top.péd.) qu'il existe une application et une seule de $\overset{-1}{q^1}(b)\times\overset{-1}{q^2}(b)\times\dots\times\overset{-1}{q^{n-1}}(b)$ dans $\overset{-1}{q^n}(b)$, que nous noterons encore $(y_1,y_2,\dots,y_{n-1})\to y_1y_2\dots y_{n-1}$, telle que, pour tout $t\in\overset{-1}{p}(b)$, on ait $r^1_t(x_1)\cdot r^2_t(x_2)\dots r^{n-1}_t(x_{n-1}) = r^n_t(x_1\,x_2\dots x_{n-1})$. Enfin, si $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1}$ sont des applications d'une variété W dans $E^1,E^2,\dots,E^{n-1}$ telles que $q^1\circ\varphi_1 = q^2\circ\varphi_2=\dots=q^{n-1}\circ\varphi_{n-1}$, on notera encore $\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_{n-1}$ l'application $x\to\varphi_1(x)\varphi_2(x)\dots\varphi_{n-1}(x) = \varphi_n(x)$ de W dans E^n .

<u>Proposition 7.- Si l'application</u> $(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})\to x_1x_2\dots x_{n-1}$ <u>est différentiable, et si les</u> φ_i <u>sont différentiables pour</u> $1\leqslant i\leqslant n-1$, <u>alors</u> φ_n <u>est différentiable</u>.

En effet, il suffit de vérifier la différentiabilité de φ_n localement. Comme $q^n\circ\varphi_n = q^1\circ\varphi_1 = \dots = q^{n-1}\circ\varphi_{n-1}$ est continue, on peut se ramener au cas où P est une variété fibrée principale triviale $B\times G$, ou les E^ν sont des variétés fibrées triviales $B\times F^\nu$, avec $r^\nu((b,s),x_\nu)=(b,sx_\nu)$ pour $b\in B$, $s\in G$, $x_\nu\in F^\nu$. On a alors $\varphi_\nu(x)=(\psi(x),\theta_\nu(x))$ pour $x\in W$, où ψ_ν est une application différentiable de W dans B et θ_ν une application différentiable de W dans F^ν , pour $1\leqslant\nu\leqslant n-1$; et $\varphi_n(x) = (\psi(x),\theta_1(x)\,\theta_2(x)\dots\theta_{n-1}(x))$, ce qui prouve la proposition.

Soient P une variété fibrée principale de base B, de projection p sur B, de groupe structural G, F une variété sur laquelle G opère différentiablement à gauche, E une variété fibrée associée à P, de fibre typique F, de projection q sur B, de repère général r. Soit F' une variété plongée dans F, stable pour G. On sait (Top. géd.) que, si $b \in B$, l'image de F' par un repère r_t défini par un élément $t \in \overset{-1}{p}(b)$ est indépendante du choix de t. La réunion E' de ces images est un système fibré de base B, dont la projection p' sur B est la restriction de p à E', de fibre typique F', associé à P. D'après le cor. 1 de la prop. 6, il existe sur E' une structure de variété et une seule telle que E' soit une variété fibrée associée à P, de fibre typique F. Alors, E' <u>est une variété plongée dans</u> E. En effet, il suffit de le vérifier localement, de sorte qu'on peut se ramener au cas où P est la variété fibrée principale triviale $B \times G$, et où E est la variété fibrée triviale $B \times F$, avec $r((b,s),x)=(b,sx)$ pour $b \in B$, $s \in G$, $x \in F$. Alors, E' s'identifie à $B' \times F'$, ce qui prouve notre assertion. On voit de même, que si F' est une partie fermée (resp. ouverte) de F, E' est une partie fermée (resp. ouverte) de E, et que, si F' est une sous-variété de F, E' est une sous-variété de E.

Maintenant, soit R une relation d'équivalence sur F, telle que la variété quotient $F''= F/R$ existe. Supposons les opérations de G compatibles avec R, de sorte que G opère différentiablement sur F''. Soit $b \in B$. On sait que, si $t \in \overset{-1}{p}(b)$, la transformée de R par r_t est une relation d'équivalence R_b sur $\overset{-1}{q}(b)$ indépendante du choix de t. Il existe sur E une relation d'équivalence S qui induit R_b sur chaque fibre $\overset{-1}{q}(b)$, et l'ensemble quotient $E''=E/S$ est canoniquement muni d'une structure de système fibré de base B, associé à P, de fibre F''. D'après le cor. 1

de la prop.6, il existe sur E" une structure de variété et une seule telle que E" soit une variété fibrée associée à P, de fibre typique F". Alors, E" <u>est variété quotient de</u> E <u>par</u> S . Comme plus haut, il suffit de faire la vérification localement, et c'est immédiat.

Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des variétés sur lesquelles G opère différentiablement à gauche, et $F_0 = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$. Le groupe G opère différentiablement à gauche sur F_0 . Soit E_i une variété fibrée associée à P et de fibre typique F_i . La variété E_0 est appelée la variété produit fibré des variétés $E_1, E_2, \dots, E_n$. On sait que, pour tout $b \in B$, la fibre correspondante de E_0 s'identifie canoniquement au produit des fibres correspondantes de $E_1, E_2, \dots, E_n$.

Enfin, soit E une variété fibrée de base B , de fibre typique F , de groupe structural G , associée à la variété fibrée principale P , de reprère général r . Soit G' un sous-groupe différentiable distingué de G, agissant identiquement sur F , tel que le groupe quotient différentiable $G_1 = G/G'$ existe. Soit P_1 la variété fibrée principale de groupe structural G_1 déduite de P par passage au quotient. Le groupe G_1 opère différentiablement sur F . Pour $x \in P$ et $s \in G'$, on a $r_{xs} = r_x \circ \rho(s) = r_x$, donc r définit, par passage au quotient, une application r_1 de $P_1 \times F$ sur E . On sait que E est un système fibré associé à P_1, de fibre F , de repère général r_1. D'autre part, puisque r et l'application canonique de P sur P_1 sont des homomorphismes différentiables, il en est de même de r_1 . Ceci prouve que E est une variété fibrée, associée à la variété fibrée principale P_1, de fibre F , de repère général r_1 .

5. **Variétés de revêtement.** Proposition 8.- *Soient V une variété, G un groupe discret proprement discontinu d'automorphismes de V, tel que la relation d'équivalence R définie par G soit séparé. Il existe une variété quotient $B = V/R$. Soit p la projection canonique de V sur B . La variété V est fibrée principale, de base B, de groupe structural G, de projection p sur B .*

En effet, soit $x \in V$. Soit Z un voisinage ouvert de x disjoint de tous ses transformés par G . Posons $U = \bigcup_{s \in G} Z_s$ (en supposant par exemple que G opère à droite dans V). Pour $y \in Z$ et $s \in G$, posons $f(y,s)=ys$. On a, si $t \in G$, $f(y,s)t = (ys)t = y(st) = f(y,st)$. D'autre part, f est une application différentiable biunivoque de $Z \times G$ sur U . Enfin, posons, pour $u \in U$, $\overset{-1}{f}(u) = (g(u),h(u))$ avec $g(u) \in Z$ et $h(u) \in G$ L'application h est constante sur chaque ensemble Zs, donc différentiable ; et, sur chaque ensemble Zs, $g(u)$ est le transformé de u par un élément fixe de G, ~~xx~~ de sorte que g est différentiable. Il en résulte que f est un isomorphisme de $Z \times G$ sur U . Ainsi, les conditions de la prop.4 sont remplies, ce qui achève la démonstration.

Réciproquement, il est clair que si V est une variété fibrée principale à groupe structural discret G , G opère dans V comme groupe proprement discontinue d'automorphisme. On décrit aussi cette situation en disant que V est *variété de revêtement* de B . Lorsque la restriction de p à une partie ouverte U de V est une application biunivoque de U sur p(U), c'est un isomorphisme de U sur p(U).

Proposition 9.- *Soient V un espace topologique séparé, G un groupe discret proprement discontinu d'homéomorphismes de V, R la relation d'équivalence, supposée séparée, définie par G, B l'espace quotient V/R* p la projection canonique de V sur B . Supposons B munie d'une structure de variété de dimension n . Alors, il existe sur V une structure de variété et une seule telle que V soit variété de revêtement de B .

En effet, si V et V' sont deux variétés répondant à la question, l'application identique de V sur V' est localement différentiable, ainsi que l'application réciproque, donc est un isomorphisme, d'où le résultat d'unicité. D'autre part, soit e l'élément neutre de G . Tout point x de V admet un voisinage ouvert U_1 tel que $U_1 \cap s(U_1) = \emptyset$ pour $s \neq e$, donc tel que la restriction de p à U_1 soit un homéomorphisme ; et il existe un voisinage ouvert $U \subset U_1$ tel que p(U) soit l'ensemble de définition d'une carte de B. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des couples (U,C), où U est une partie ouverte de V telle que la restriction de p à U soit un homéomorphisme de U sur p(U) et où C est une carte de B définie sur p(U). D'après ce qui précède, les parties U forment un recouvrement de V . Si $(U,C) \in \mathcal{U}$ et $(U',C') \in \mathcal{U}$, les restrictions à U et U' de $C \circ p$ et $C' \circ p$ sont différentiablement semblables puisque C et C' le sont. D'après la prop.2 du § 1, il existe sur V une structure de variété de dimension n telle que les $C \circ p$ forment un atlas de V . Soit $s \in G$; si $(U,C) \in \mathcal{U}$, on a $(s(U),C) \in \mathcal{U}$, et s transforme la carte $C \circ p$ de U en la carte $C \circ p$ de s(U) ; donc s est un automorphisme de la variété V , et il suffit d'appliquer la prop.8 .

Exercices.

1. Soient P une variété fibrée principale, s et s' deux sections différentiables de P . Pour tout x appartenant à la base B de P , il existe un élément t(x) et un seul du groupe structural G de P tel que $s'(x)=s(x)t(x)$ (en désignant par $(y,t) \rightarrow yt$ le repère général de P). Montrer que l'application $x \rightarrow t(x)$ est différentiable.

2. Soient P une variété fibrée principale à droite de base B et de groupe structural G . S'il existe une section différentiable de P , il existe un isomorphisme de la variété fibrée principale à droite $B\times G$ sur P . Déterminer les automorphismes de la variété fibrée principale à droite $B\times G$.

3. Soient P une variété fibrée principale de base B, de projection p sur B, de groupe structural G, F une variété sur laquelle G opère différentiablement à gauche, E une variété fibrée de fibre F associée à P, de projection q sur B, de repère général r . Soient W une autre variété, φ et ψ des applications différentiables de W dans E et P telles que $q\circ\varphi = p\circ\psi$. Alors, il existe une application θ et une seule de W dans F telle que $\varphi(x)= r(\psi(x),\theta(x))$, et cette application est différentiable.

§ 7. Exemples de variétés.

1. Boules et sphères euclidiennes.- Proposition 1.- Une boule ouverte de R^n est une variété analytique réelle isomorphe à R^n .

En effet, pour $x\in R^n$, posons $f(x) = x(1+\|x\|^2)^{-1/2}$ (où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne), et, pour y appartenant à la boule ouverte B de centre O et de rayon 1, posons $g(y)= y(1-\|y\|^2)^{-1/2}$. Alors, $f\circ g$ et $g\circ f$ sont respectivement les applications identiques de B et R^n , et f,g sont analytiques. Donc f est un isomorphisme de R^n sur B . Comme les similitudes sont des automorphismes de la variété R^n , la proposition en résulte.

Proposition 2.- Le groupe analytique R^*_+ est isomorphe au groupe analytique R .

En effet, l'application $x \to \log x$ est un isomorphisme du groupe R^*_+ sur le groupe R, l'application $y \to e^y$ est un isomorphisme réciproque du groupe R sur le groupe R_+^* , et ces applications sont analytiques.

<u>Corollaire.- Un demi-espace ouvert de R^n est une variété analytique réelle isomorphe à</u> R^n .

En effet, une similitude de R^n transforme un demi-espace ouvert en $R^{n-1}\times R_+^*$.

Soit f la fonction analytique définie sur R^n par $f(x_1,x_2,\dots,x_n)= x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2-1$. La sphère S_{n-1} est définie par l'équation $f=0$. Or le rang de la matrice $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\|$ est égal à 1 sauf au point de coordonnées $(0,0,\dots,0)$ qui n'appartient pas à S_{n-1}. Donc S_{n-1} peut être munie d'une structure de variété analytique réelle de dimension $n-1$ qui en fait une sous-variété fermée de R^n . Quand on parlera de la variété analytique réelle S_{n-1} sans préciser, c'est toujours de cette variété qu'il s'agira.

Identifions la variété analytique réelle C à la variété analytique réelle R^2. Le sous-groupe U du groupe multiplicatif C^* s'identifie à S_1, donc à une sous-variété fermée de R_2^* . Donc U est un sous-groupe analytique réel de C^* .

Identifions le corps K des quaternions réels à R^4, ce qui munit K d'une structure de variété analytique réelle. Le sous-groupe multiplicatif des quaternions de norme 1 s'identifie à S_3, donc à une sous-variété fermée de K^*. Donc ce sous-groupe est un sous-groupe analytique réel de K

<u>Proposition 3.- La variété</u> R_n^* <u>est fibrée principale de base</u> S_{n-1}, <u>de groupe structural</u> R_+^* , <u>la projection de</u> R_n^* <u>sur</u> S_{n-1} <u>étant la projection centrale, le repère général étant l'application</u> $(t,x)\longrightarrow tx$ <u>de</u> $R_+^*\times R_n^*$ <u>dans</u> R_n^* . <u>L'application</u> $x\longrightarrow\left(\frac{x}{\|x\|},\|x\|\right)$ <u>est un</u> S_{n-1}<u>-isomorphisme de cette variété fibrée principale sur la variété fibrée principale triviale</u> $S_{n-1}\times R_+^*$.

En effet, il est clair que R_n^* est un système fibré principal de base S_{n-1} et de groupe structural R_+^*, la projection et le repère général étant les applications indiquées dans la proposition, et que l'application $x \longrightarrow (\frac{x}{\|x\|}, \|x\|)$ est un S_{n-1}-automorphisme i de ce système fibré principal sur le système fibré principal trivial $S_{n-1} \times R_+^*$. D'autre part, les applications $x \longrightarrow \|x\|$ et $x \longrightarrow \frac{x}{\|x\|}$ sont des applications différentiables de R_n^* dans R_+^* et S_{n-1} respectivement (car l'application $x \longrightarrow \frac{x}{\|x\|}$ est une application différentiable de R_n^* dans R_n^*). D'autre part, l'application réciproque de i est l'application $(x,t) \longrightarrow tx$ de $S_{n-1} \times K_+^*$ sur R_n^*, qui est différentiable. Ceci achève la démonstration.

Corollaire 1.- La sphère S_{n-1} est isomorphe à la variété quotient de R_n^* par la relation d'équivalence dont les classes sont les demi-droites ouvertes d'origine O.

Corollaire 2.- La variété R_n^* est isomorphe à la variété $R \times S_{n-1}$.

En effet, R_+^* est isomorphe à R (prop.2).

Corollaire 3.- Le groupe analytique réel C^* est isomorphe au produit des groupes analytiques réels U et R_+^*.

En effet, l'isomorphisme de la prop.3 est ici un isomorphisme de groupes.

Corollaire 4.- Le groupe analytique réel K^* est isomorphe au produit des groupes analytiques réels S_3 et R_+^*.

Proposition 4.- Soient H un hyperplan de R^n passant par O, a un point d'intersection de S_{n-1} avec la droite orthogonale à H passant par O, $A = S_{n-1} - \{a\}$. La projection stéréographique de point de vue a est un isomorphisme de A sur H.

En effet, on peut supposer que H est défini par l'équation $x_n = 0$ et que $a = (0,\ldots,0,1)$. Alors, si $y \in H$ correspond à $x \in A$, on a

$$y = \frac{1}{1-x_n}(x - x_n a) \qquad x = \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}\,a + \frac{2}{\|y\|^2+1}\,y$$

de sorte que les applications $x \to y$ et $y \to x$ sont analytiques.

2. <u>Tores</u>.- Faisons opèrer Z dans R par les translations. On obtient un groupe proprement discontinu d'automorphismes de R . Il existe donc une variété quotient. On définit ainsi sur le tore T une structure de variété à une dimension qui en fait un groupe analytique réel quotient du groupe analytique réel R .

Le groupe T^n, muni de sa structure de groupe analytique produit, s'identifie canoniquement au groupe analytique quotient R^n/Z^n .

<u>Proposition 5</u>.- <u>L'application</u> $x \to e(x)$ <u>est un homomorphisme (pour les structures de groupe et de variété) de</u> R <u>sur</u> U . <u>L'application déduite de la précédente par passage au quotient modulo</u> Z <u>est un isomorphisme de</u> T <u>sur</u> U .

En effet, l'application $x \to e(x)$ est une application analytique de R dans $C=R^2$, partout de rang 1, et applique R sur U . Ceci prouve la première assertion, et la deuxième résulte aussitôt de la première.

On identifie le plus souvent les groupes analytiques T et U par l'isomorphisme de la prop.5 .

3. <u>Espaces projectifs réels</u>.- L'application $x \to -x$ de S_n sur S_n a pour carré l'identité. On peut ainsi faire opèrer le groupe $Z/(2)$ dans S_n , et on obtient un groupe proprement discontinu d'automorphismes de la variété S_n . Il existe donc une variété quotient, ce qui définit sur l'espace projectif réel P_n une structure de variété analytique réelle à n dimensions. La variété S_n est fibrée principale, de base P_n, de groupe structural $Z/(2)$ (§ 6, prop.8).

Rappelons d'autre part que P_n s'identifie aussi à un quotient de R^*_{n+1}.

<u>Proposition 6.- La variété</u> R_n^* <u>est fibrée principale de base</u> P_{n-1}, <u>de groupe structural</u> R^* , <u>la projection de</u> R_n^* <u>sur</u> P_{n-1} <u>étant la projection canonique, le repère général étant l'application</u> $(t,x) \to tx$ <u>de</u> $R^* \times R_n^*$ <u>dans</u> R_n^* .

La projection canonique p de R_n^* sur P_{n-1} est composée de la projection centrale de R_n^* sur S_{n-1} et de la projection canonique q de S_{n-1} sur P_{n-1} . D'autre part, soit $x \in P_{n-1}$. Soit y un point de S_{n-1} tel que $q(y)=x$. Soient U un voisinage ouvert de x dans P_{n-1} et V un voisinage ouvert de y dans S_{n-1} tel que la restriction de q à V soit un isomorphisme de V sur U, et soit g l'application réciproque de U sur V . Pour $u \in U$ et $t \in R^*$, posons $f(u,t)=tg(u)$. Il est clair que f est une application de $U \times R^*$ sur $\overset{-1}{p}(U) \subset R_n^*$. Soit f_1 l'application de $\overset{-1}{p}(U)$ sur $U \times R^*$ définie par $f_1(z)=(q(\frac{z}{\|z\|}), \varepsilon_z \|z\|)$, ε_z étant égal à +1 si $\frac{z}{\|z\|} \in V$, à -1 si $\frac{z}{\|z\|} \in -V$. Alors, f et f_1 sont des applications réciproques l'une de l'autre, et toutes deux analytiques (on notera en particulier que ε_z est constant au voisinage de chaque point de $\overset{-1}{p}(U)$). Enfin, on a $p(f(u,t))=u$ et $f(u,t)t'= t'tg(u)=f(u,tt')$, ce qui achève la démonstration.

Les variétés fibrées principales S_n et R_{n+1}^* de base P_n ne sont pas isomorphes à des variétés fibrées principales triviales puisqu'elles sont connexes et de groupes structuraux non connexes.

Une application linéaire projective de de P_n dans P_n provient d'une application linéaire biunivoque de R^{n+1} dans R^{n+1} par restriction à R_{n+1}^* et passage aux quotients, donc est différentiable. En particulier, une transformation linéaire projective de P_n est un automorphisme de la variété P_n .

Une variété linéaire projective V à p dimension de P_n provient par passage au quotient d'un sous-espace W à p+1 dimension de R^{n+1} privé de l'origine. Comme W est une sous-variété de R^*_{n+1}, V peut être munie d'une structure de variété qui en fait une sous-variété (fermée) de P_n à p dimensions (§ 5, prop.8). En outre, comme un automorphisme de R^{n+1} transforme W en R^*_{p+1}, on voit que la variété V est isomorphe à P_p.

Proposition 7.- Dans P_n, le complémentaire d'un hyperplan projectif H est isomorphe à R^n.

Par une transformation linéaire projective, on se ramène au cas où H provient par passage au quotient de R^*_n. L'ensemble $\complement H$ est alors l'image canonique dans P_n de l'hémisphère A de S_n défini par $x_{n+1} < 0$, et la restriction à A de la projection canonique de S_n sur P_n est un isomorphisme. Donc $\complement H$ est isomorphe à A. D'autre part, la restriction à A de la projection stéréographique de S_n sur R^n est un isomorphisme de A sur une boule ouverte de R^n. La proposition résulte alors de la prop.1.

Proposition 8.- L'application $t \to 2t$ de R sur R définit par passage aux quotients une application de $T = S_1$ sur S_1, puis un isomorphisme de P_1 sur S_1.

Soit p l'application canonique de R sur $T=S_1$. Soit φ l'application de S_1 sur S_1 déduite par passage aux quotients de l'application $t \to 2t$; elle est différentiable et partout de rang 1. Si $u=p(t)$ et $u'=p(t')$ ont même image canohique dans P_1, on a $t \equiv t'$ (mod.1) ou $t \equiv t' + \frac{1}{2}$ (mod.1), donc $2t \equiv 2t'$ (mod.1) et par suite $p(2t)=p(2t')$. Réciproquement, $p(2t)=p(2t')$ entraîne que u et u' ont même image canonique dans P_1. D'où l'existence d'une application biunivoque de P_1 sur S_1, déduite de φ par passage au quotient, donc différentiable et partout de rang 1. Cette application est un isomorphisme de la variété P_1 sur la variété S_1 (§ 1, cor.2 de la prop.13).

Ce dont on pourrait encore parler : espaces projectifs complexes, grassmanniennes, variétés de Stiefel, groupes classiques, ~~xxxxxxx~~ fibrations de sphères en sphères ...

Exercices

1. Soient φ la projection canonique de R sur T, α un nombre irrationnel, ψ l'application $x \to (\varphi(x), \varphi(\alpha x))$ de R dans T^2. Montrer que ψ est une injection analytique partout de rang 1. Montrer que, pour tout nombre réel a , la restriction de ψ à $]-a, +a[$ est un isomorphisme de $]-a, +a[$ sur une sous-variété de T^2 qui est un ensemble rare dans T^2 . Montrer que ψ est un isomorphisme du groupe analytique R sur un groupe analytique G plongé dans T^2. Montrer que G est maigre et partout dense dans T^2, et n'est pas une sous-variété de T^2. Montrer que, pour tout point $x \in G$, il existe un voisinage ouvert U de x dans T^2 tel que les composantes connexes de $U \cap G$ (pour la topologie de T^2) soient relativement compactes (pour la topologie de G). En déduire que, si on munit G d'une structure de variété analytique de dimension $\geqslant 1$ qui en fasse une variété plongée dans T^2, cette structure est identique à la structure précédente (utiliser l'exerc. 1 du § 4).

2. Dans R^2, soit R la relation d'équivalence $pr_1 z = pr_1 z'$. Soit R' la relation d'équivalence induite par R sur S_1 . Montrer qu'il n'existe pas de variété quotient de S_1 par R'. (Comparer avec la prop.8 du § 5).

Résultats qui doivent figurer aux Chap. I-II dans les cas indéfiniment différentiable et analytique.

Soient O une partie ouverte de K^n, $(O_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de O, φ une application de O dans $K^{n'}$. Pour que φ soit différentiable, il faut et il suffit que les restrictions de φ aux O_ι soient différentiables.

La composée de deux applications différentiables est différentiable.

Les applications multilinéaires sont différentiables.

Soit φ une application différentiable biunivoque d'une partie ouverte de K^n sur une partie ouverte de $K^{n'}$. Si $\overset{-1}{\varphi}$ est différentiable, on a $n=n'$.

Les applications $(x,y) \rightarrow x+y$ et $x \rightarrow x^{-1}$ de $K \times K$ dans K et de K^* dans K^* sont différentiables. Fonctions exponentielle, logarithmique, puissance pour $K=R$.

Soient $O, O_1, O_2, \ldots, O_p$ des parties ouvertes d'espaces $K^n, K^{n_1}, \ldots, K^{n_p}$. Pour qu'une application φ de O dans $O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_p$ soit différentiable, il faut et il suffit que les applications $pr_i \circ \varphi$ soient différentiables.

Rang $(\varphi \circ \psi) \leqslant \min$ (rang φ, rang ψ). Cas où rang $(\varphi \circ \psi) =$ rang φ ou rang ψ. Le rang est fonction semi-continue inférieurement.

Théorème des fonctions implicites (la partie "unicité" du théorème étant énoncée comme dans la présente rédaction : elle me paraît préférable à celle de l'Etat 3 du chap. I).

Une application de rang nul est constante (dans les bons cas).

Les prop. 13 et 15 du § 1 dans le cas des parties ouvertes de K^n.