RÉDACTION N° 174

COTE : NBR 077

TITRE : ALGÈBRE DE LIE SEMI-SIMPLES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 106

NOMBRE DE FEUILLES : 106

Samuel

(174)

ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES.

1$^{\text{ère}}$ Partie

Critère de semi-simplicité de Cartan.

§ 1 - Algèbres résolubles et algèbres nilpotentes.

1 - Définitions.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (sur le corps complexe, i.e. ...). On pose

$$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad ; \quad \mathfrak{g}'' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \quad ; \ldots$$
$$\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad ; \quad \mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1] \quad ; \ldots$$

On dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble si $\mathfrak{g}^{(n)}=0$ pour un entier n ; on dit que $\mathfrak{g}$ est nilpotente si $\mathfrak{g}_n = 0$ pour un entier n .

Pour que $\mathfrak{g}$ soit résoluble, il est nécessaire et suffisant qu'on puisse trouver une suite décroissante de sous-algèbres

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \quad \ldots \supset \mathfrak{a}_n = 0$$

telle que chaque terme de la suite soit un idéal dans le précédent et que $\mathfrak{a}_{i-1} / \mathfrak{a}_i$ soit abélien.

Il s'ensuit qu'une algèbre nilpotente est résoluble. On notera aussi que, pour que $\mathfrak{g}$ soit nilpotente, il est nécessaire et suffisant qu'il existe un entier n tel que

$$\mathrm{ad}(X_1)\ldots\mathrm{ad}(X_n) = 0$$

quels que soient les $X_i \in \mathfrak{g}$.

Si V est un espace vectoriel, l'expression "soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie dans V" sera utilisée au lieu de "soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ " .

2 - Théorème de Lie.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie dans V ; une forme linéaire λ sur $\mathfrak{g}$ est dite un poids si le sous-espace $V(\lambda)$ formé des $\underline{a} \in V$ vérifiant

$$X\underline{a} = \lambda(X)\underline{a} \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g} \quad \text{n'est pas nul.}$$

Lemme 1 - Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie dans V de dimension finie, $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, λ un poids de $\mathfrak{n}$; alors le sous-espace $V(\lambda)$ est invariant par $\mathfrak{g}$.

Soit en effet $\underline{a} \in V(\lambda)$ non nul, et posons

$$\underline{a}_k = X^k\underline{a}$$

pour un $X \in \mathfrak{g}$. Montrons par récurrence sur k qu'on a

$$(1) \qquad N\underline{a}_k \equiv \lambda(N).\underline{a}_k \qquad \text{mod. } \underline{a}_0, \ldots, \underline{a}_{k-1}$$

pour tout $N \in \mathfrak{n}$; la relation est triviale pour k=0 puisque $\underline{a} \in V(\lambda)$; si elle est démontrée pour k-1, il vient

$$N\underline{a}_k = NX\underline{a}_{k-1} = [N,X]\,\underline{a}_{k-1} + XN\underline{a}_{k-1}$$
$$\equiv \lambda([N,X])\underline{a}_{k-1} + \lambda(N)X\underline{a}_{k-1} \quad (\text{mod. } \underline{a}_0, \ldots, \underline{a}_{k-2}, X\underline{a}_{k-2})$$

d'où immédiatement (1).

Ceci dit désignons par k le plus petit entier tel que $\underline{a}_k$ soit combinaison linéaire de $\underline{a}_0, \ldots, \underline{a}_{k-1}$; le sous-espace E engendré par ceux-ci est alors invariant par X (trivial), et d'après (1) il l'est aussi par N ; de plus il est clair d'après (1) que, dans E, N se représente par une matrice triangulaire dont la diagonale principale est formée de termes tous égaux à $\lambda(N)$; donc on a $Tr_E(N) = k.\lambda(N)$; mais comme N et X conservent E on a $Tr_E([N,X]) = 0$; on en conclut que

$$\lambda([N,X]) = 0$$

quels que soient $N \in \mathfrak{n}$, $X \in \mathfrak{g}$.

Etant donné qu'on a la relation

$$NX\underline{a} = [N,X]\,\underline{a} + XN\underline{a} = \lambda([N,X])\underline{a} + \lambda(N)X\underline{a}$$

le lemme est donc démontré.

Théorème 1 (Lie). Toute algèbre de Lie résoluble dans un espace vectoriel V possède au moins un poids.

Soit en effet une algèbre résoluble $\mathfrak{g}$ de dimension n dans V ; pour n=1 le théorème est trivial (lemme de Schur) ; supposons-le démontré pour les algèbres de dimension $< n$. Comme $\mathfrak{g}'$ est $\neq \mathfrak{g}$, on peut trouver dans $\mathfrak{g}$ un sous-espace $\mathfrak{h}$ de dimension n-1 contenant $\mathfrak{g}'$; il est clair que $\mathfrak{h}$ est une algèbre résoluble, auquel s'applique donc le théorème. Soit λ un poids de $\mathfrak{h}$; le sous-espace $V(\lambda)$ correspondant est invariant par $\mathfrak{g}$ (lemme 1) ; soit alors $X \in \mathfrak{g}$ non dans $\mathfrak{h}$; X possède au moins un vecteur propre $\underline{a}$ dans $V(\lambda)$; on a donc des relations

$$H\underline{a} = \lambda(H)\underline{a} \quad \text{pour } H \in \mathfrak{h} \quad ; \quad X\underline{a} = \lambda_{\circ}\underline{a} \quad ;$$

comme $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{h}$ et des multiples scalaires de X il est clair que $\underline{a}$ est un vecteur propre pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, d'où le théorème.

Corollaire 1 - Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre résoluble dans V ; il existe une base de V par rapport à laquelle les matrices des $X \in \mathfrak{g}$ sont toutes triangulaires.

Si $\dim(V)=1$, c'est clair. Supposons alors $\dim(V)=n$ et le théorème démontré pour n-1 ; soit $\underline{a}$ un vecteur propre commun aux $X \in \mathfrak{g}$; soit V' le sous-espace formé des multiples de $\underline{a}$. Comme V' est invariant par $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ définit une algèbre de Lie dans V/V', laquelle, étant un quotient de $\mathfrak{g}$, est évidemment résoluble. Comme $\dim(V/V')=n-1$ on peut donc trouver une base de V/V' par rapport à laquelle les éléments de cette nouvelle algèbre sont triangulaires. Il est clair que le corollaire résulte de là .

Corollaire 2 - Toute représentation irréductible d'une algèbre résoluble est de dimension un .

Résulte trivialement du théorème de Lie et du fait que l'image d'une algèbre résoluble par une représentation est encore résoluble.

3 – <u>Théorème d'Engel.</u>

<u>Lemme 2</u> - <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie</u> ; <u>si tous les opérateurs</u> ad(X), $X \in \mathfrak{g}$, <u>sont nilpotents alors</u> $\mathfrak{g}$ <u>est nilpotente</u>.

Montrons d'abord que $\mathfrak{g}$ est résoluble. Pour cela désignons par $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre résoluble maximale de $\mathfrak{g}$; les opérateurs $\mathrm{ad}(H), H \in \mathfrak{h}$, conservent $\mathfrak{h}$, donc agissent sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, de sorte qu'on définit ainsi une représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; comme $\mathfrak{h}$ est résoluble cette représentation conserve au moins un sous-espace de dimension 1 de (dans l'hypothèse où $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ n'est pas nul). Donc il existe $X \in \mathfrak{g}$ non nul tel qu'on ait des relations

$[H,X] \equiv \lambda(H)X \mod. \mathfrak{h}$, et même $\equiv 0 \mod. \mathfrak{h}$ car ad(H) est nilpotent, pour tout $H \in \mathfrak{h}$. Il est clair que le sous-espace engendré par $\mathfrak{h}$ et X est alors une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{h}$ était maximale, on aboutit à une contradiction en supposant $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ non nul. Donc $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Cela dit, le corollaire 1 du théorème de Lie montre l'existence d'une base A_i de $\mathfrak{g}$ telle qu'on ait des relations de la forme

$$\mathrm{ad}(X)A_i \equiv \lambda_i(X)A_i \quad \mathrm{mod.} A_1,\ldots,A_{i-1}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$; comme ad(X) est nilpotent il vient en fait

$$\mathrm{ad}(X)A_i \equiv 0 \quad \mathrm{mod.}\ A_1,\ldots,A_{i-1} \quad ;$$

si $\mathfrak{g}$ est de dimension n on a donc $\mathrm{ad}(X_1)\ldots\mathrm{ad}(X_n)=0$ quels que soient les X_i, d'où le lemme.

<u>Lemme 3</u>.- <u>Soit</u> X <u>un endomorphisme nilpotent dans</u> V ; <u>alors</u> ad(X) <u>est nilpotent dans</u> $\mathfrak{gl}(V)$.

Car $\mathrm{ad}(X)^p A$ est une somme de termes de la forme $\pm X^i A X^j$ avec $i+j=p$.

<u>Théorème 2</u> (Engel) - <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie dans</u> V ; <u>si tout</u> $X \in \mathfrak{g}$ <u>est nilpotent</u>, $\mathfrak{g}$ <u>est nilpotente</u>.

Cela résulte aussitôt des lemmes 2 et 3 .

4.- Algèbres de Lie nilpotentes d'endomorphismes.

Soit A un endomorphisme d'un vectoriel V (de dimension finie, comme toujours jusqu'à nouvel ordre). Etant donné un scalaire λ , on désigne par $V(A;\lambda)$ ou simplement par $V(\lambda)$ l'ensemble des $\underline{x} \in V$ tels qu'il existe n vérifiant

$$(A-\lambda)^n \underline{x} = 0 .$$

Il est connu que $V(\lambda)$ est un sous-espace, et que V est somme directe des divers $V(\lambda)$ non nuls. De plus, $V(\lambda)$ est invariant par A , et $A-\lambda$ est nilpotent dans $V(\lambda)$, en sorte que la seule valeur propre de A dans $V(\lambda)$ est λ .

Lemme 4 - *Soient A et B deux endomorphismes de V tels que*

$$ad(A)^k B = 0$$

pour un entier k ; alors B conserve les sous-espaces $V(A;\lambda)$.

(on pose d'une manière générale $ad(A)B = [A,B]$).

Si $k=1$ c'est trivial puisqu'alors B permute à A . Supposons alors le lemme démontré pour $k-1$. L'opérateur $C = [A,B]$ vérifiant $ad(A)^{k-1} C = 0$ conserve $V(A;\lambda)$. D'autre part, on a dans $V(A;\lambda)$ une relation $(A-\lambda)^p=0$; utilisant l'identité

$$(A-\lambda)^q B = B(A-\lambda)^q + \sum_{s=0}^{q-1} (A-\lambda)^{q-s-1} C(A-\lambda)^s$$

on voit immédiatement, en raison du fait que C conserve $V(A;\lambda)$, que $(A-\lambda)^q B = 0$ dans $V(A;\lambda)$ pour $q = 2p$. Donc B conserve $V(A;\lambda)$.

Théorème 3 - *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente dans V ; pour chaque poids λ de $\mathfrak{g}$, soit $V(\lambda)$ l'ensemble des $\underline{a} \in V$ qui pour un n convenable vérifient*

$$(X-\lambda(X))^n \underline{a} = 0 \qquad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g} .$$

Alors les $V(\lambda)$ sont des sous-espaces, et V est somme directe de ces $V(\lambda)$.

Le fait que $V(\lambda)$ soit un sous-espace est trivial ; de

$$(X-\lambda(X))^p \underline{a} = 0 \qquad \text{et} \qquad (X-\lambda(X))^q \underline{b} = 0$$

résulte en effet

$$(X-\lambda(X))^{p+q}(\underline{a}+\underline{b}) = 0 .$$

Pour démontrer que V est somme directe des $V(\lambda)$ il faut tout d'abord montrer que ces sous-espaces sont linéairement indépendants. Or désignons par $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ les divers poids, choisissons un $\underline{a}_i$ dans chaque $V(\lambda_i)$, et supposons $\underline{a}_1 + \ldots + \underline{a}_r = 0$. Comme les formes linéaires λ_i sont deux à deux distinctes, il existe un $X \in \mathfrak{g}$ tel que les nombres $\lambda_i = \lambda_i(X)$ sont deux à deux distincts ; il est clair que $\underline{a}_i \in V(X;\lambda_i)$; mais les $V(X;\lambda)$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes de X sont indépendants ; donc il vient $\underline{a}_i = 0$, ce qui prouve notre assertion.

Reste à montrer que V est la somme des $V(\lambda)$, ce qu'on va faire par récurrence sur $n = \dim(V)$. Supposons tout d'abord que chaque $X \in \mathfrak{g}$ possède <u>une seule</u> valeur propre dans V ; alors il est clair que $\mathfrak{g}$ ne possède qu'un poids λ et que, pour $X \in \mathfrak{g}$, $\lambda(X)$ est <u>la</u> valeur propre de X dans V ; on a alors $V = V(\lambda)$ d'après le résultat correspondant sur les matrices. Supposons maintenant qu'on puisse trouver $A \in \mathfrak{g}$ possédant au moins deux valeurs propres distinctes dans V . Comme $\mathfrak{g}$ est nilpotente on a $ad(B)^k A = 0$ pour tout $B \in \mathfrak{g}$ et un k convenable ; donc (Lemme 4) les sous-espaces $V(A;\lambda)$ sont invariants par $\mathfrak{g}$; comme ils sont de dimension $< n$, le théorème s'applique dans chacun d'eux, d'où évidemment le résultat cherché pour V lui-même.

§ 2 - Sous-algèbres de Cartan.

1 - Décomposition d'une algèbre de Lie par une sous-algèbre nilpotente.

Dans ce § , on désigne par $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et par $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$.

Etant donné une forme linéaire α sur $\mathfrak{h}$, on désigne par $\mathfrak{g}(\alpha)$ le sous-espace des $X \in \mathfrak{g}$ tels qu'il existe n vérifiant

$$(\mathrm{ad}(H)-\alpha(H))^n X = 0 \qquad \text{pour tout} \quad H \in \mathfrak{h} .$$

On dit que α est une racine si $\mathfrak{g}(\alpha) \neq 0$.

D'après le Théorème 3, $\mathfrak{g}$ est somme directe des divers $\mathfrak{g}(\alpha)$.

Il faut aussi remarquer que, ad(H) étant nilpotent dans $\mathfrak{h}$, le sous-espace $\mathfrak{g}(0)$ associé à la racine 0 contient $\mathfrak{h}$. Le but principal de ce § est de montrer qu'on peut choisir $\mathfrak{h}$ de telle sorte que $\mathfrak{g}(0)=\mathfrak{h}$; on dit alors que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre nilpotente régulière ou une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Lemme 5 - On a $[\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(\beta)] \subset \mathfrak{g}(\alpha+\beta)$ quelles que soient α et β .

En effet on a d'une manière générale

$$(\mathrm{ad}(H)-\alpha(H)-\beta(H))[X,Y] = [(\mathrm{ad}(H)-\alpha(H))X,Y] + [X,(\mathrm{ad}(H)-\beta(H))Y]$$

d'où plus généralement résulte que $(\mathrm{ad}(H)-\alpha(H)-\beta(H))^p[X,Y]$ est combinaison linéaire des crochets de la forme $[(\mathrm{ad}(H)-\alpha(H))^k X, (\mathrm{ad}(H)-\beta(H))^{p-k} Y]$ $0 \leq k \leq p$. Le lemme résulte trivialement de là .

Corollaire - $\mathfrak{g}(0)$ est une sous-algèbre ; $\mathfrak{g}(\alpha)$ et $\mathfrak{g}(\beta)$ commutent lorsque $\alpha+\beta$ n'est pas racine.

2 - Sous-algèbre de Cartan engendrée par un élément régulier.

Pour démontrer l'existence de sous-algèbres de Cartan, nous aurons besoin de la notion suivante (analogue à celle de "point générique") ;

Définition - Soit $X \in \mathfrak{g}$; soit $\mathfrak{g}_0(X)$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ associé à la valeur propre 0 de ad(X), i.e. l'ensemble des Y vérifiant $ad(X)^n Y = 0$ pour au moins un n ; on dit que X est un élément régulier de $\mathfrak{g}$ si la dimension de $\mathfrak{g}_0(X)$ est minimum.

Théorème 4 - Si la sous-algèbre nilpotent $\mathfrak{h}$ contient un élément régulier H , alors la sous-algèbre $\mathfrak{g}(0)$ est nilpotente et on a $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{g}_0(H)$.

(i). Posons

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}(\alpha) .$$

D'après le lemme 5, le sous-espace $\tilde{\mathfrak{g}}$ est invariant par $\mathfrak{g}(0)$. Pour $X \in \mathfrak{g}(0)$, soit D(X) le déterminant dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ de ad(X), et soit E l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}(0)$ tels que $D(X) \neq 0$. Comme D(X) est évidemment un polynôme en X, E est un sous-ensemble ouvert de $\mathfrak{g}(0)$.

(ii). E n'est pas vide. En effet, les racines α étant en nombre fini il existe $H \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha(H) \neq 0$ pour toute racine $\alpha \neq 0$; il est clair qu'alors ad(H) ne possède dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ que des valeurs propres non nulles, donc est inversible dans $\tilde{\mathfrak{g}}$; d'où $H \in E$ et notre assertion.

(iii). Pour $X \in E$, considérons le sous-espace $\mathfrak{g}_0(X)$. Puisque ad(X) conserve les sous-espaces $\mathfrak{g}(0)$ et $\tilde{\mathfrak{g}}$, supplémentaires l'un de l'autre, et comme ad(X) est inversible dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, il est clair que $\mathfrak{g}_0(X) \subset \mathfrak{g}(0)$. Il est par ailleurs clair que $H \in \mathfrak{h}$ implique $\mathfrak{g}_0(H) \supset \mathfrak{g}(0)$.

(iv). Soit alors H un élément régulier de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{h}$. Pour $X \in E$ on a d'après (iii) la relation $\mathfrak{g}_0(X) \subset \mathfrak{g}(0) \subset \mathfrak{g}_0(H)$; comme $\mathfrak{g}_0(H)$ est de dimension minimum il s'ensuit que $\mathfrak{g}_0(X) = \mathfrak{g}(0)$ pour tout $X \in E$. Donc, ad(X) est nilpotent dans $\mathfrak{g}(0)$ pour tout $X \in E$.

On voit aussi que $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{g}_0(H)$.

(v). Pour $X \in \mathfrak{g}(0)$ désignons par $\rho(X)$ la restriction de $ad(X)$ à $\mathfrak{g}(0)$. Si $X \in E$ on a d'après (iv) les relations $Tr\ \rho(X)^p = 0$ pour $p = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}(0)$; or le premier membre est un polynôme en $X \in \mathfrak{g}(0)$; puisqu'il s'annule sur E ouvert non vide il est identiquement nul.

Donc $\rho(X)$ est nilpotent pour tout $X \in \mathfrak{g}(0)$, de sorte que $\mathfrak{g}(0)$ est nilpotente (Lemme 2).

Corollaire - Soit H un élément régulier de $\mathfrak{g}$; alors $\mathfrak{g}_0(H)$, ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ vérifiant une relation de la forme $ad(H)^k X = 0$, est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

En effet, soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente maximale contenant H (l'existence de $\mathfrak{h}$ est évidente) ; d'après le théorème 4, la sous-algèbre $\mathfrak{g}(0)$ associée à $\mathfrak{h}$ est nilpotente ; comme elle contient $\mathfrak{h}$, on a donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(0)$ de sorte que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan. Comme d'après le Théorème 4 on a $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{g}_0(H)$, le Corollaire est démontré.

§ 3 - Critères de Cartan.

1 - Forme de Killing.

On introduit sur $\mathfrak{g}$ le produit scalaire ("forme de Killing")

$$\langle X,Y \rangle = Tr\left[ad(X)ad(Y)\right]$$

on a naturellement l'identité

$$\langle ad(X)Y,Z \rangle = -\langle Y,ad(X)Z \rangle \ .$$

Lemme 6 - Soit $\mathfrak{u}$ un idéal de $\mathfrak{g}$; sur $\mathfrak{u}$, la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ coïncide avec celle de $\mathfrak{u}$.

Soit en effet A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ une base de $\mathfrak{g}$ dont les r premiers éléments constituent une base de $\mathfrak{u}$. Soit (c_{ij}) la matrice de $ad(X)ad(Y)$ par rapport à cette base. Si $X,Y \in \mathfrak{u}$, $ad(X)ad(Y)$ applique chaque A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dans $\mathfrak{u}$; on a donc $c_{ij}=0$ pour $i > r$, d'où le lemme.

On choisit une fois pour toutes une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{h}$, on a donc une décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}(\alpha)$$

de $\mathfrak{g}$ en somme directe. On désigne par $\nu(\alpha)$ la dimension de $\mathfrak{g}(\alpha)$.

Lemme 7 - Pour $X,Y \in \mathfrak{h}$ on a

$$\langle X,Y \rangle = \sum \nu(\alpha).\alpha(X)\,\alpha(Y) \quad .$$

Par polarisation on peut supposer $X = Y$. Alors $ad(X)ad(Y) = ad(X)^2$ possède dans $\mathfrak{g}(\alpha)$ la seule valeur propre $\alpha(X)^2$; la formule à démontrer est donc triviale.

Lemme 8 - Soient α et β deux racines, $\alpha \neq 0$; soit p (resp. q) le plus petit (resp. le plus grand) entier tel que $\beta+p.\alpha$ (resp. $\beta+q.\alpha$) soit racine. On a alors

$$\sum_{k=p}^{k=q} \nu(\beta+k.\alpha)\left\{\beta(H)+k.\alpha(H)\right\} = 0$$

pour tout $H \in [\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(-\alpha)]$.

Formons en effet le sous-espace V, somme directe des $\mathfrak{g}(\beta+k.\alpha)$ pour $p \leqslant k \leqslant q$, et supposons $H = [X,Y]$ avec $X \in \mathfrak{g}(\alpha), Y \in \mathfrak{g}(-\alpha)$. Comme $ad(X)$ applique $\mathfrak{g}(\gamma)$ dans $\mathfrak{g}(\gamma+\alpha)$, et comme $\mathfrak{g}(\beta+q\alpha+\alpha)=0$, on voit que V est invariant par $ad(X)$; et par $ad(Y)$ pour une raison analogue. Comme $ad(H) = [ad(X),ad(Y)]$ on en conclut que $Tr_V\, ad(H) = 0$. Or $ad(H)$ possède dans $\mathfrak{g}(\beta+k.\alpha)$ la seule valeur propre $\beta(H)+k.\alpha(H)$; d'où le lemme.

2 - Algèbres dont la forme de Killing est nulle.

Théorème 5 - Toute algèbre de Lie dont la forme de Killing est nulle est résoluble.

Soit en effet $\mathfrak{g}$ une telle algèbre. Il suffit de faire voir qu'alors $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$; car si c'est démontré, puisque la forme de Killing de $\mathfrak{g}'$ est aussi nulle (lemme 6) on aura $\mathfrak{g}'' \neq \mathfrak{g}'$, et ainsi de suite, et $\mathfrak{g}$ sera résoluble.

Supposons alors $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$; alors on a $\mathfrak{g} = \sum \left[\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(\beta)\right]$ (on inclut dans la sommation $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{h}$), et comme $\left[\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(\beta)\right] \subset \mathfrak{g}(\alpha+\beta)$ on en déduit immédiatement que

$$(*) \qquad \mathfrak{h} = \sum \left[\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(-\alpha)\right] = \left[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}\right] + \sum_{\alpha \neq 0} \left[\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(-\alpha)\right] .$$

On va en déduire que $\mathfrak{g}$ n'admet que la racine 0 - donc que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, ce qui évidemment démontrera le théorème car $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ contredit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$.

Soit en effet β une racine. Il existe au moins un $X \in \mathfrak{g}$ non nul vérifiant $[H,X] = \beta(H)X$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$ (théorème de Lie) ; on en déduit déjà que <u>toute racine s'annule sur</u> $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Reste à montrer, d'après (*), que toute racine s'annule sur $\left[\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(-\alpha)\right]$ quel que soit $\alpha \neq 0$.

Or soit $H \in \left[\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(-\alpha)\right]$; d'après le lemme 8 on a une relation de la forme

$$\beta(H) = c_{\alpha,\beta} \cdot \alpha(H)$$

où $c_{\alpha,\beta}$ est un nombre <u>rationnel</u>. De l'hypothèse $\langle H,H \rangle = 0$ et du lemme 7 résulte donc $\alpha(H)^2 \sum_{\beta} \nu(\beta) c_{\alpha,\beta}^2 = 0$, d'où $\alpha(H)=0$, et par suite aussi $\beta(H)=0$, ce qui achève la démonstration.

3 - <u>Algèbres semi-simples</u>.

<u>Théorème 6</u> - <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie</u> ; <u>les deux propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(I) : $\mathfrak{g}$ <u>ne contient aucun idéal résoluble</u> ;

(II) : <u>la forme de Killing de</u> $\mathfrak{g}$ <u>est non dégénérée</u>.

Soit $\mathfrak{u}$ l'ensemble des X tels que $\langle X,Y \rangle = 0$ pour tout Y ; il est immédiat de vérifier que $\mathfrak{u}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$; la forme de Killing de $\mathfrak{u}$ est nulle (lemme 6) ; donc $\mathfrak{u}$ est résoluble (Théorème 5). Par suite I implique II .

Supposons réciproquement que $\mathfrak{g}$ possède un idéal résoluble $\mathfrak{n}$. Alors $\mathfrak{g}$ possède un idéal abélien non nul ; soit en effet p le plus grand entier tel que $\mathfrak{n}^{(p)} \neq 0$; il est clair que $\mathfrak{n}^{(p)}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, et est abélien puisque $\mathfrak{n}^{(p+1)} = [\mathfrak{n}^{(p)},\mathfrak{n}^{(p)}]$ est nul.

Ceci dit, soit $\mathfrak{n}$ un idéal abélien non nul de $\mathfrak{g}$; soient $X \in \mathfrak{n}$, $Y \in \mathfrak{g}$; soit λ une valeur propre de $ad(X)ad(Y)$, et U un vecteur propre correspondant ; on a $[X,[Y,U]] = \lambda U$; mais comme $\mathfrak{n}$ est un idéal on a $U \in \mathfrak{n}$ si $\lambda \neq 0$, donc $[Y,U] \in \mathfrak{n}$, donc $[X,[Y,U]] \in [\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = 0$ puisque $\mathfrak{n}$ est abélien ; donc $\lambda = 0$. Par suite, on a $\mathrm{Tr}\,ad(X)ad(Y)=0$ quels que soient $X \in \mathfrak{n}$, $Y \in \mathfrak{g}$, de sorte que (II) implique (I).

Une algèbre possédant les propriétés énoncées au Théorème 6 est dite <u>semi-simple</u>.

On dit qu'une algèbre $\mathfrak{g}$ est <u>simple</u> si elle est de dimension >1 et n'admet aucun idéal non trivial. Une telle algèbre est semi-simple ; sinon elle contiendrait un idéal résoluble non nul, donc serait résoluble, donc contiendrait des idéaux non triviaux.

Comme tout produit direct d'algèbres semi-simples est semi-simple, ainsi qu'il résulte de la condition (II) du Théorème 6, il est clair que tout produit d'algèbres simples est semi-simple. Réciproquement :

<u>Théorème 6 bis</u> - <u>Toute algèbre de Lie semi-simple est isomorphe à un produit direct d'algèbres de Lie simples</u>.

Montrons d'abord que <u>la représentation adjointe d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$ est complètement réductible</u>. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}$ invariant par les $ad(X)$, i.e. un idéal de $\mathfrak{g}$; soit $\mathfrak{b}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ orthogonaux à $\mathfrak{a}$ relativement à la forme de Killing de $\mathfrak{g}$; il est évident que $\mathfrak{b}$ est aussi un idéal de $\mathfrak{g}$ et que $\dim(\mathfrak{a})+\dim(\mathfrak{b}) \geqslant \dim(\mathfrak{g})$; donc tout revient, pour montrer que $\mathfrak{b}$ est un supplémentaire de $\mathfrak{a}$, à établir que $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est nul. Or $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, sur lequel la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est évidemment nulle ; donc (Lemme 6 et Th.5) $\mathfrak{n}$ est résoluble, d'où $\mathfrak{n} = 0$ et la complète réductibilité de la représentation adjointe.

Cela dit, on peut décomposer $\mathfrak{g}$ en somme directe d'idéaux minimaux $\mathfrak{g}_i$; comme $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = 0$ pour $i \neq j$, l'ensemble des $ad(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, coïncide sur $\mathfrak{g}_i$ avec l'ensemble des $ad(X)$, $X \in \mathfrak{g}_i$; donc la sous-algèbre $\mathfrak{g}_i$ est <u>simple</u>, et comme les $\mathfrak{g}_i$ commutent deux à deux le théorème est démontré.

$2^{\text{ème}}$ Partie.

Structure des algèbres semi-simples.

§ 4 - Décomposition de $\mathfrak{g}$ par une sous-algèbre de Cartan.

Dans tout ce § on désigne par $\mathfrak{g}$ une algèbre semi-simple sur le corps complexe et par $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Pour chaque racine α de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ il existe, dans le sous-espace $\mathfrak{g}(\alpha)$ correspondant (défini au § 2), un élément E_α vérifiant

(1) $$[H,E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$$

pour tout $H \in \mathfrak{h}$ (théorème de Lie) ; dans ce qui suit on suppose E_α choisi une fois pour toutes.

<u>Lemme 9</u>.- $\mathfrak{g}(\alpha)$ <u>est orthogonal à</u> $\mathfrak{g}(\beta)$ <u>pour</u> $\alpha+\beta \neq 0$.

Soient en effet $X \in \mathfrak{g}(\alpha)$, $Y \in \mathfrak{g}(\beta)$. Alors $\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)$ applique $\mathfrak{g}(\gamma)$ dans $\mathfrak{g}(\alpha+\beta+\gamma)$; si donc on prend une base de $\mathfrak{g}$ "adaptée" à la décomposition suivant les $\mathfrak{g}(\gamma)$ on voit que tous les termes diagonaux de $\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)$ sont nuls. Donc $\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y) = 0$, ce qui démontre le lemme.

<u>Lemme 10</u> - <u>La restriction à</u> $\mathfrak{h}$ <u>de la forme de Killing de</u> $\mathfrak{g}$ <u>est non dégénérée</u>.

Car si un $H \in \mathfrak{h}$ est orthogonal à $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(0)$, il est orthogonal à $\mathfrak{g}$ d'après le lemme 9 ; donc $H = 0$.

<u>Lemme 11</u> - <u>Soit</u> r <u>la dimension de</u> $\mathfrak{h}$; <u>il existe</u> r <u>racines linéairement indépendantes</u>.

Dans le cas contraire, il existerait un H non nul tel que $\alpha(H)=0$ pour toute racine α ; mais comme on a la formule

(2) $$\langle H,H'\rangle = \sum \nu(\alpha).\alpha(H)\alpha(H')$$

(lemme 7) on voit que H serait orthogonal à $\mathfrak{h}$, contrairement au lemme 10.

<u>Lemme 12</u> - $\mathfrak{h}$ <u>est une sous-algèbre abélienne maximale de</u> $\mathfrak{g}$.

En effet, il est clair que toute racine s'annule sur $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$; donc $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = 0$ d'après le lemme 11. Que $\mathfrak{h}$ soit abélienne <u>maximale</u> résulte alors de la relation $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(0)$, laquelle montre en particulier que tout élément permutant à $\mathfrak{h}$ est dans $\mathfrak{h}$.

<u>Lemme 13</u> - <u>Si</u> α <u>est racine, il en est de même de</u> $-\alpha$.

Cela résulte du lemme 9 et du fait que la forme de Killing est non dégénérée.

En raison du lemme 10, on peut identifier l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$ et son dual $\mathfrak{h}^*$; autrement dit, pour toute forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$, il existe un $H'_\lambda \in \mathfrak{h}$ et un seul tel que

(3) $$\lambda(H) = \langle H, H'_\lambda \rangle$$

pour tout $H \in \mathfrak{h}$. On a en particulier des éléments H'_α associés aux racines α . D'autre part, on peut définir un produit scalaire dans $\mathfrak{h}^*$ à l'aide de la formule

(3') $$\langle \lambda, \mu \rangle = \langle H'_\lambda, H'_\mu \rangle .$$

<u>Lemme 14</u> - <u>Si</u> E_α <u>vérifie</u> (1) <u>et si</u> $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}(-\alpha)$ <u>on a</u>

(4) $$[E_\alpha, X_{-\alpha}] = \langle E_\alpha, X_{-\alpha} \rangle . H'_\alpha .$$

Soit H le premier membre ; il est dans $\mathfrak{h}$ en vertu de $[\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(-\alpha)] \subset \mathfrak{g}(0) = \mathfrak{h}$. Pour $H' \in \mathfrak{h}$ on a

$$\langle H, H' \rangle = \langle [E_\alpha, X_{-\alpha}], H' \rangle = \langle [H', E_\alpha], X_{-\alpha} \rangle = \alpha(H') \langle E_\alpha, X_{-\alpha} \rangle ;$$

(4) résulte donc de l'unicité de H' .

<u>Lemme 15</u> - <u>On a</u> $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$ <u>pour toute racine non nulle</u> α .

Comme E_α n'est pas orthogonal à $\mathfrak{g}(-\alpha)$ (ceci parce que dans le cas contraire E_α serait nul, en vertu du lemme 9), on peut choisir $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}(-\alpha)$ tel que l'on ait

(5) $$\left[E_\alpha, X_{-\alpha}\right] = H'_\alpha$$

(utiliser le lemme précédent).

Soit alors β une racine non nulle ; la relation (5) montre qu'on peut appliquer le lemme 8 à H'_α , d'où résulte que $\beta(H'_\alpha)$ est le produit de $\alpha(H'_\alpha)$ par un nombre rationnel. Le lemme 15 résulte donc du Lemme 11.

<u>Lemme 16</u> - <u>Pour toute racine</u> α <u>non nulle</u>, <u>le sous-espace</u> $\mathfrak{g}(\alpha)$ <u>est de dimension</u> un .

Tout revient à prouver que chaque $Y \in \mathfrak{g}(\alpha)$ est proportionnel à E_α. Pour cela, choisissons $X_{-\alpha}$ de façon à avoir (5), et posons

$$Y_k = \mathrm{ad}(E_\alpha)^k Y \qquad ; \qquad H = \mathrm{ad}(X_{-\alpha})Y$$

de sorte que $H \in \mathfrak{h}$ et que Y_k appartient à la racine $(k+1)\alpha$. Utilisant les formules de commutation (1) et (5) on vérifie sans peine qu'on a

(6) $$\mathrm{ad}(X_{-\alpha})Y_1 = -\alpha(H)E_\alpha - \mathrm{ad}(H'_\alpha)Y$$

(7) $$\mathrm{ad}(X_{-\alpha})Y_k = \tfrac{1}{2}k(k-1)\alpha(H'_\alpha)Y_{k-1} - k.\mathrm{ad}(H'_\alpha)Y_{k-1} \quad , \qquad k \geqslant 2 .$$

Mais comme il n'y a qu'un nombre fini de racines, il existe un k tel que $Y_{k-1} \neq 0$, $Y_k = 0$. Si $k \geqslant 2$, la formule (7) s'applique et montre que Y_{k-1} est un vecteur propre de $\mathrm{ad}(H'_\alpha)$, associé à la valeur propre $\frac{1}{2}(k-1)\alpha(H'_\alpha)$; mais $Y_{k-1} \in \mathfrak{g}(k.\alpha)$, et dans ce sous-espace la seule valeur propre de $\mathrm{ad}(H'_\alpha)$ est $k.\alpha(H'_\alpha)$; comme $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$ on doit donc avoir $\frac{1}{2}(k-1)=k$, ce qui contredit l'hypothèse que $k \geqslant 2$. Donc on a $k=1$, i.e. $Y_1=0$, ce qui d'après (6) montre qu'on a

$$\left[H'_\alpha , Y\right] = -\alpha(H)E_\alpha \quad ;$$

de là et de (1) résulte que l'élément

$$Z = \alpha(H'_\alpha)Y + \alpha(H)E_\alpha$$

de $\mathfrak{g}(\alpha)$ vérifie $\left[H'_\alpha, Z\right] = 0$; la seule valeur propre de $\mathrm{ad}(H'_\alpha)$ dans $\mathfrak{g}(\alpha)$ étant $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$ on en conclut que $Z=0$, et comme $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$ on a démontré que Y est proportionnel à E_α .

Samuel

(174)

17

Remarque - Les résultats qu'on a obtenus montrent que les sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ possèdent les propriétés suivantes :

(i) : $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$;
(ii) : les opérateurs $ad(H)$ sont semi-simples.

Réciproquement, toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ vérifiant (i) et (ii) est une sous-algèbre de Cartan ; car $\mathfrak{h}$ étant abélienne est nilpotente ; de plus, les opérateurs $ad(H)$ étant semi-simples, le sous-espace $\mathfrak{g}(0)$, formé d'une manière générale des $X \in \mathfrak{g}$ vérifiant une relation $ad(H)^k X = 0$ quel que soit $H \in \mathfrak{h}$, est évidemment formé des X tels que $ad(H)X = 0$, i.e. des X qui commutent à $\mathfrak{h}$; comme $\mathfrak{h}$ est abélienne maximale on a donc $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{h}$, ce qui démontre notre assertion.

Lemme 17 - Soient α et β deux racines non nulles ; supposons que β ne soit pas un multiple entier de α. Soient p et q le plus petit et le plus grand entier tels que $\beta+p.\alpha$ et $\beta+q.\alpha$ soient racines. Alors $\beta+k.\alpha$ est racine pour $p\leqslant k\leqslant q$; on a

(8) $$-2\,\frac{\beta(H'_\alpha)}{\alpha(H'_\alpha)} = p+q \quad ;$$

en particulier,

(9) $$\beta - 2\,\frac{\beta(H'_\alpha)}{\alpha(H'_\alpha)}\,.\alpha$$

est aussi racine.

Désignons en effet par $[p',q']$ le plus grand intervalle contenant 0 et tel que $\beta+k.\alpha$ soit racine pour tout $k\in[p',q']$; on peut alors appliquer au sous-espace somme des $\mathfrak{g}(\beta+k.\alpha)$, $p'\leqslant k\leqslant q'$, le raisonnement du lemme 8 ; d'où la relation

$$\sum_{k=p'}^{k=q'} \nu(\beta+k.\alpha)\left\{\beta(H'_\alpha)+k.\alpha(H'_\alpha)\right\} = 0 \quad ;$$

mais comme β n'est pas un multiple entier de α on a $\nu(\beta+k.\alpha)=1$ (lemme 16), de sorte qu'il vient

$$(10) \qquad \sum_{k=p'}^{k=q'} \left\{ \beta(H'_\alpha)+k.\alpha(H'_\alpha) \right\} = 0 \quad ;$$

maintenant, soit p le plus petit entier tel que $\beta+p.\alpha$ soit racine. On a évidemment $p\leqslant p'$, et on peut encore appliquer le raisonnement du lemme 8 au sous-espace somme des $\mathfrak{g}(\beta+k.\alpha)$ pour $p\leqslant k\leqslant q'$; il en résulte, si $p'>p$ et en tenant compte de (10), qu'on a

$$(11) \qquad \sum_{k=p}^{k=p'-1} \nu(\beta+k.\alpha)\left\{ \beta(H'_\alpha)+k.\alpha(H'_\alpha) \right\} = 0 .$$

Or (10) implique comme on le voit facilement

$$(12) \qquad \beta(H'_\alpha) = -\frac{1}{2}(p'+q')\alpha(H'_\alpha) \quad ;$$

posant $\frac{1}{2}(p'+q')=n$ on voit que (11) s'écrit, d'après $\alpha(H'_\alpha)\neq 0$:

$$\sum_{k=p}^{k=p'-1} (k-n).\ \nu(\beta+k.\alpha) = 0 \quad ;$$

mais c'est absurde puisque tous les termes de cette somme sont des entiers $\leqslant 0$, et qu'un au moins d'entre eux (celui pour lequel $k=p$) est <0.

On a donc $p=p'$; de la même manière on montre que $q=q'$. La formule (8) résulte alors de (12). D'autre part comme $p\leqslant 0\leqslant q$ le premier membr de (8) est un entier k compris entre p et q ; par suite, (9) est racine.

<u>Lemme 18</u> - <u>α et $-\alpha$ sont les seules racines proportionnelles à</u> α.

Soit en effet $\beta = c.\alpha$ ~~xxx~~ une racine proportionnelle à α. Si c n'est pas entier le lemme 17 s'applique, et montre que 2c est entier ; donc 2c est entier dans tous les cas. Puisque $\alpha = c^{-1}.\beta$, il en résult aussi que 2/c est entier. Donc c ne peut prendre que les valeurs $\frac{1}{2}$, 1, 2 et leurs opposées. On va exclure le cas $c=2$ (ce qui excluera $c=-2$ en vertu du fait que $-\alpha$ est racine, $c=\frac{1}{2}$ en vertu du fait que $\alpha = c^{-1}\beta$, et finalement démontrera le lemme).

Or soit q le plus grand entier tel que $q.\alpha$ soit racine. Considérons le sous-espace $V = \mathfrak{g}(-\alpha)+\ldots+\mathfrak{g}(q.\alpha)$; choisissons $E_\alpha\in\mathfrak{g}(\alpha)$ et

$E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}(-\alpha)$ tels que $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H'_\alpha$. Puisque $\mathfrak{g}(q\alpha+\alpha)=0$, V est invariant par $ad(E_\alpha)$; puisque $ad(E_{-\alpha})$ annule $\mathfrak{g}(-\alpha)$ en vertu du fait que $\mathfrak{g}(-\alpha)$ est de dimension 1, on voit que V est aussi invariant par $ad(E_{-\alpha})$. Il s'ensuit que $Tr_V\, ad(H'_\alpha)=0$, autrement dit qu'on a

$$-\alpha(H'_\alpha) + \alpha(H'_\alpha) + \sum_{k=2}^{k=q} \nu_k \cdot k \cdot \alpha(H'_\alpha) = 0 \quad \text{où} \quad \nu_k = \nu(k\alpha).$$

Comme $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$ il vient donc $2\nu_2 + \dots + q\nu_q = 0$, ce qui est absurde et démontre que $q = 1$; d'où le lemme.

<u>Lemme 19</u> - <u>Si</u> α, β <u>et</u> $\alpha+\beta$ <u>sont des racines non nulles on a</u> $[\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(\beta)] = \mathfrak{g}(\alpha+\beta)$.

Supposons en effet que $ad(E_\alpha)$ annule $\mathfrak{g}(\beta)$; soient p et q comme dans le lemme 17 et formons $V = \mathfrak{g}(\beta+p\alpha) + \dots + \mathfrak{g}(\beta)$; V est trivialement invariant par $ad(E_{-\alpha})$, et par $ad(E_\alpha)$ en vertu de l'hypothèse faite ; donc $Tr_V\, ad(H'_\alpha) = 0$, ce qui donne

$$\sum_{k=p}^{k=0} \left\{ \beta(H'_\alpha) + k \cdot \alpha(H'_\alpha) \right\} = 0 \;;$$

on a donc

$$\beta(H'_\alpha) = -\frac{1}{2}\, p \cdot \alpha(H'_\alpha) \;;$$

comparant avec (8) on voit que l'on doit avoir $p+q = p$, i.e. $q=0$; mais cela contredit le fait que $\beta+\alpha$ est racine.

Résumant (partiellement) les résultats obtenus, nous pouvons donc énoncer le

<u>Théorème 7</u> - <u>Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre semi-simple et</u> $\mathfrak{h}$ <u>une sous-algèbre de Cartan de</u> $\mathfrak{g}$. <u>Alors</u> $\mathfrak{h}$ <u>est une sous-algèbre abélienne maximale de</u> $\mathfrak{g}$, <u>et les opérateurs</u> $ad(H)$, $H \in \mathfrak{h}$, <u>sont tous semi-simples</u>.

<u>En outre, pour chaque racine non nulle</u> α <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>par rapport à</u> $\mathfrak{h}$, <u>il existe un</u> $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ <u>et un seul tel que</u>

$$\alpha(H_\alpha) = 2$$

<u>et tel que la forme linéaire</u> $H \to \langle H, H_\alpha \rangle$ <u>soit proportionnelle à</u>

$H \to \alpha(H)$. On peut en outre trouver des $X_\alpha \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g}$ soit soustendu par $\mathfrak{h}$ et les X_α, et tels qu'on ait des formules de commutation de la forme suivante :

$$[H,X_\alpha] = \alpha(H).X_\alpha$$

$$[X_\alpha,X_{-\alpha}] = H_\alpha$$

$$[X_\alpha,X_\beta] = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha+\beta \text{ n'est pas racine ;} \\ N_{\alpha,\beta}.X_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta \text{ est racine, avec } N_{\alpha,\beta} \neq 0 . \end{cases}$$

Enfin, si α et β sont racines, il en est de même de $\beta-\beta(H_\alpha).\alpha$.

Bien entendu, tout a été démontré - sauf l'existence des H_α ; ceux-ci sont donnés par

$$H_\alpha = \frac{2}{\alpha(H'_\alpha)} .H'_\alpha \quad .$$

---

§ 5 - Systèmes fondamentaux de racines.

Lemme 20 - Soit $\mathfrak{h}_0$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des H_α ; alors la restriction à $\mathfrak{h}_0$ de la forme de Killing est une forme quadratique rationnelle et définie-positive ; la dimension de $\mathfrak{h}_0$ sur le corps rationnel est égale à celle de $\mathfrak{h}$ sur le corps complexe.

D'après le lemme 7 et le fait que les sous-espaces $\mathfrak{g}(\alpha)$ sont de dimension un, on a

$$(13) \qquad \langle H,H'\rangle = \sum \beta(H)\ \beta(H') = \sum \langle H,H'_\beta\rangle . \langle H',H'_\beta\rangle$$

pour $H,H' \in \mathfrak{h}$; d'autre part le lemme 17 montre qu'on a

$$(14) \qquad \langle H'_\alpha, H'_\beta\rangle = c_{\alpha,\beta} . \langle H'_\beta, H'_\beta\rangle$$

où les $c_{\alpha,\beta}$ sont des nombres rationnels. Appliquant (13) pour $H = H' = H'_\alpha$ et utilisant (14) on voit déjà que les nombres $\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle$ sont rationnels, donc aussi les nombres $\langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle$, donc aussi les nombres $\langle H_\alpha, H_\beta \rangle$; il s'ensuit que $\langle H, H' \rangle$ est rationnel pour $H, H' \in \mathfrak{h}_0$. Pour $H \in \mathfrak{h}_0$ on voit aussi que les $\langle H, H'_\beta \rangle$ sont rationnels, en sorte que, d'après (13) on a $\langle H, H' \rangle \geqslant 0$ pour $H \in \mathfrak{h}_0$, et que $\langle H, H \rangle = 0$ implique $\langle H, H'_\beta \rangle = 0$ pour tout β, donc implique $H=0$ d'après le lemme 11.

Enfin, soient α_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ r racines linéairement indépendantes sur $\underline{C}$; les produits scalaires $\langle H_\alpha, H_\beta \rangle$ étant rationnels il est clair que tout H_α est combinaison linéaire à coefficients rationnels des H_{α_i}, qui engendrent donc $\mathfrak{h}_0$; d'où la relation $\dim(\mathfrak{h}_0) = r$.

Nous supposerons maintenant qu'on a muni $\mathfrak{h}_0$ d'une <u>relation d'ordre</u> total <u>compatible avec sa structure vectorielle</u> (par exemple, l'ordre lexicographique par rapport à une base de $\mathfrak{h}_0$). Au moyen du produit scalaire, cette relation se transporte au dual $\mathfrak{h}_0^*$ de $\mathfrak{h}_0$: une forme λ sur $\mathfrak{h}_0$ sera dite > 0 si l'élément H'_λ correspondant est > 0.

Relativement à cette relation d'ordre, une racine <u>positive</u> sera dite <u>simple</u> (Dynkin) si on ne peut la représenter de facon non triviale comme somme de deux autres racines positives. Comme toute racine non nulle est soit > 0, soit < 0, et comme $-\alpha$ est racine en même temps que α, il existe des racines > 0, donc aussi des racines simples (par exemple la plus petite racine > 0).

<u>Théorème 8</u> - <u>Il existe exactement</u> r <u>racines simples</u> α_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$; <u>elles sont linéairement indépendantes</u> ; <u>toute racine</u> α <u>est de la forme</u>

(15) $$\alpha = k_1\alpha_1 + \ldots + k_r\alpha_r$$

<u>où les</u> k_i <u>sont des entiers tous</u> $\geqslant 0$ <u>ou tous</u> $\leqslant 0$; <u>enfin les nombres</u>

(16) $$a_{ij} = -2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle / \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = -\alpha_j(H_{\alpha_i})$$

sont des entiers $\geqslant 0$ pour $i \neq j$; de façon précise, a_{ij} est le plus grand entier tel que $\alpha_j + a_{ij}\alpha_i$ soit racine.

Montrons d'abord l'existence pour toute racine β d'une décomposition (15). On peut supposer $\beta > 0$. Soit alors $n(\beta)$ le nombre de "partitions" de β en racines positives. Si $n(\beta)=0$, β est simple et le théorème est trivial ; dans le cas contraire, on peut écrire $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_p$ où les β_i sont des racines > 0, pour lesquelles évidemment on a $n(\beta_i)\ \ n(\beta)$; (15) s'obtient donc par récurrence sur le nombre $n(\beta)$.

Démontrons maintenant (16). Soient α_i et α_j deux racines simples distinctes ; soient p et q les entiers minimum et maximum tels que $\alpha_j + p.\alpha_i$ et $\alpha_j + q.\alpha_i$ soient racines ; d'après le lemme 17, le second membre de (16) est égal à $p+q$; mais on a $p=0$, car dans le cas contraire $\alpha_j + k\alpha_i$, étant racine pour $p \leqslant k \leqslant q$, serait racine pour $k = -1$; on aurait donc

$$\alpha_j = \alpha_i + \beta$$

pour une racine β ; comme α_j est simple, on ne peut avoir $\beta > 0$ - ni $\beta < 0$ comme on le voit en permutant i et j ; donc il y a contradiction, et $p=0$.

Il nous reste donc à établir l'existence de r racines simples, ou, ce qui revient au même d'après l'existence de relations (15), que des racines simples distinctes sont toujours linéairement indépendantes. Cela va résulter du fait qu'on a

$$\langle \alpha_i , \alpha_j \rangle \leqslant 0$$

pour $i \neq j$ (ce qui résulte de $\langle \alpha_i , \alpha_i \rangle > 0$ et de $a_{ij} \geqslant 0$). Considérons en effet une relation entre des racines simples ; on peut

l'écrire

$$\sum a_i\alpha_i = \sum b_j\,\beta_j$$

où les a_i, b_j sont des entiers tous >0 , et où les α_i, β_j sont des racines simples deux à deux distinctes ; soit alors γ la valeur commune des deux membres de la relation précédente ; on a évidemment $\langle\gamma,\gamma\rangle = \sum a_i b_j \langle\alpha_i,\beta_j\rangle \leqslant 0$ puisque α_i est distincte de β_j ; mais comme γ est dans $\mathfrak{h}_0$ et n'est évidemment pas nul, on a, d'après le lemme 20, $\langle\gamma,\gamma\rangle > 0$, d'où une contradiction.

Définition - On dit que r racines α_i forment un système fondamental si toute racine de $\mathfrak{g}$ est combinaison linéaire des α_i, avec des coefficients tous positifs ou tous négatifs.

Le théorème 8 démontre l'existence de système fondamentaux, et de plus les donne tous ; car si α_i est un système fondamental de racines, et si l'on munit $\mathfrak{h}_0^*$ de la relation d'ordre lexicographique par rapport à la base α_i , alors les racines simples (relativement à cette relation d'ordre total) ne sont autres que les α_i . Désignons en effet pour un moment par α'_j le système fondamental formé par ces racines simples ; alors on a des relations

$$\alpha_i = \sum a_i^j\,\alpha'_j \qquad ; \qquad \alpha'_j = \sum b_j^k\,\alpha_k$$

où les coefficients a_i^j , b_j^k sont tous $\geqslant 0$ (soit par définition, soit d'après le théorème 8) ; mais comme on a des relations

$$\sum_j a_i^j b_j^k = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq k$$

on voit qu'on doit avoir

$$a_i^j b_j^k = 0 \qquad \text{pour tout } j \text{ dès que } \; i \neq k \;;$$

si donc $a_i^j \neq 0$ pour un couple i,j on aura $b_j^k = 0$ pour tout $k \neq i$, en sorte qu'alors la racine α'_j sera proportionnelle à α_i , donc égale à α_i en vertu du lemme 16. Il résulte de là, comme annoncé, que le système α'_j est identique (à l'ordre près) au système α_i .

Dans ces conditions, on peut appliquer le théorème 8 à tout système fondamental de racines, et énoncer le

Théorème 8 bis - Soit α_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ un système fondamental de racines ; alors toute racine est combinaison à coefficients entiers des α_i ; les nombres $a_{ij} = -\alpha_j(H_{\alpha_i})$ sont des entiers positifs pour $i \neq j$, et a_{ij} est le plus grand entier tel que $\alpha_j + a_{ij}\alpha_i$ soit racine.

On remarquera que d'après la définition des H_α on a d'une manière générale $\alpha(H_\alpha) = 2$, et par conséquent $a_{ii} = -2$.

Soit α_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ un système fondamental de racines. Nous poserons

$$H_i = H_{\alpha_i} \quad ; \quad X_i = X_{\alpha_i} \quad ; \quad Y_i = X_{-\alpha_i} \quad ;$$

on a alors les relations suivantes :

$$(17) \qquad \begin{gathered} [H_i, X_j] = -a_{ij}X_j \quad ; \quad [H_i, Y_j] = a_{ij}Y_j \\ [H_i, H_j] = 0 \\ [X_i, Y_i] = H_i \quad ; \quad [X_i, Y_j] = 0 \quad (i \neq j) . \end{gathered}$$

Celles de la première ligne résultent évidemment de $[H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha$ et de la définition des a_{ij} ; celle de la seconde ligne est évidente, de même que la première relation de la troisième ligne ; enfin, la dernière provient de ce que $\alpha_i - \alpha_j$ n'est pas racine, puisque toute racine est combinaison des α_k avec des coefficients tous de même signe.

En raison de $a_{ii} = -2$ on a en particulier

$$(18) \qquad [H_i, X_i] = 2X_i \quad ; \quad [H_i, Y_i] = -2Y_i \quad ; \quad [X_i, Y_i] = H_i$$

ce qui montre que X_i, Y_i, H_i engendrent une sous-algèbre de dimension 3 de $\underline{g}$.

Lemme 21 - La plus petite sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant les éléments X_i, Y_i, H_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ est $\mathfrak{g}$ elle-même.

Soit en effet $\mathfrak{a}$ cette sous-algèbre. Soit α la plus petite racine >0 telle que $\mathfrak{a}$ ne contienne pas X_α ; comme $\mathfrak{a}$ contient X_α pour α simple, on voit que α ne peut être simple ; donc on peut écrire $\alpha = \beta+\gamma$ pour deux racines $\beta,\gamma > 0$; comme β et γ sont $<\alpha$, $\mathfrak{a}$ contient X_β et X_γ, donc aussi $\left[X_\beta, X_\gamma\right]$; or cette dernière expression vaut $N_{\beta,\gamma}\, X_\alpha$ avec $N_{\beta,\gamma} \neq 0$; donc $X_\alpha \in \mathfrak{a}$, ce qui démontre le lemme.

En raison du lemme 21, on dit que les éléments X_i, Y_i, H_i forment <u>un système canonique de générateurs</u> de $\mathfrak{g}$.

---

§ 6 - Groupe de Weyl.

Soit λ une forme linéaire sur $\mathfrak{h}_0$, donc de la forme

$$\lambda(H) = \langle H, H'_\lambda \rangle$$

pour un $H'_\lambda \in \mathfrak{h}_0$; nous désignerons par H_λ l'élément de $\mathfrak{h}_0$ proportionnel à H'_λ et vérifiant $\lambda(H_\lambda)=2$. Soit P_λ l'hyperplan de $\mathfrak{h}'_0$ orthogonal à H_λ ; c'est donc l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{h}'_0$ telles que $\langle \lambda, \mu \rangle = 0$, ou encore telles que $\mu(H_\lambda)=0$. Soit S_λ l'opération : symétrie par rapport à P_λ . Si $\mu \in \mathfrak{h}'_0$, alors $S_\lambda(\mu)$ est évidemment caractérisé par les deux conditions suivantes :

(i) $S_\lambda(\mu)-\mu$ est orthogonal à P_λ , donc proportionnel à λ ;

(ii) $\frac{1}{2}\left[S_\lambda(\mu)+\mu\right]$ appartient à P_λ .

Posant $S_\lambda(\mu) = \mu + c.\lambda$ la condition (ii) s'écrit

$$\langle H_\lambda , 2\mu + c.\lambda \rangle = 0$$

i.e. $2\langle H_\lambda , \mu \rangle + 2c = 0$, d'où $c = -\langle H_\lambda ,\mu\rangle = -\mu(H_\lambda)$. En conséquence, la symétrie S_λ est donnée par

$$S_\lambda : \mu \longrightarrow \mu-\mu(H_\lambda).\lambda \qquad .$$

En particulier, soient α et β deux racines, $\alpha \neq 0$; alors S_α transforme β en $\beta-\beta(H_\alpha).\alpha$; or (Théorème 7) $\beta-\beta(H_\alpha).\alpha$ est aussi une racine.

Si donc on désigne par W le groupe de transformations de $\mathfrak{h}'_0$ engendré par les symétries S_α associées aux différentes racines $\alpha \neq 0$, on voit que les opérations de W permutent les racines entre elles. Comme les racines engendrent $\mathfrak{h}'_0$ on voit que W est représenté fidèlement comme groupe de permutations des racines ; donc W est un groupe fini. C'est le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$.

Théorème 9 - Soit α_i $(1 \leq i \leq r)$ un système fondamental de racines. Alors les symétries $S_i = S_{\alpha_i}$ engendrent le groupe de Weyl, et toute racine non nulle est transformée d'une α_i par un $S \in W$.

Nous désignerons par U l'ensemble obtenu en retranchant de $\mathfrak{h}'_0$ les hyperplans P_α associés aux diverses racines non nulles ; nous appellerons chambre toute partie convexe maximale de U ; il est clair que tout $w \in U$ appartient à une chambre et à une seule, et que W permute les chambres entre elles.

L'ensemble C_0 des w telles que $\langle w, \alpha_i \rangle < 0$ pour tout i est une chambre.

C'est en effet une partie convexe de U ; si de plus $w' \in U$ n'appartient pas à C_0, alors pour tout $w \in C_0$ il existe un i au moins tel que $\langle w, \alpha_i \rangle$ et $\langle w', \alpha_i \rangle$ aient des signes opposés ; donc le segment $[w, w']$ rencontre l'hyperplan $P_i = P_{\alpha_i}$, ce qui montre que C_0 est une partie convexe maximale de U.

Soit W' le sous-groupe de W engendré par les S_i. Toute chambre C est transformée de C_0 par un $S \in W'$. Choisissons en effet un $w_0 \in C_0$ et un $w \in C$, et parmi les $S(w)$, $S \in W'$, soit w' un point dont la distance à w_0 est minimum ; on a donc $\| S(w)-w_0 \| \geq \| w'-w_0 \|$ pour tout $S \in W'$;

prenant $S = S_i$ on voit que w_0 et w' sont du même côté de l'hyperplan P_i ; donc $w' \in C_0$; posant $w' = S(w)$ on voit que $S(C)$ rencontre C_0, donc lui est identique, d'où notre assertion.

Tout hyperplan P_α *est transformé d'un* P_i *par un* $S \in W'$. En effet, les P_α étant en nombre fini, il existe un $w \in P_\alpha$ qui n'appartient à aucun autre P_β ; prenant w' suffisamment voisin de w on voit que l'on peut trouver un $w' \in U$ tel que $\langle w, \beta \rangle$ et $\langle w', \beta \rangle$ soient de même signe pour toute racine $\beta \neq \alpha$. D'après ce qu'on a démontré plus haut il existe un $S \in W'$ qui envoie la chambre C contenant w' sur la chambre C_0 ; de plus, S transforme P_α en $P_{S(\alpha)}$. Supposons alors $S(\alpha) \neq \alpha_i$ pour tout i ; alors d'après le choix de w et w' on voit que $\langle S(w), \alpha_i \rangle$ aura strictement le même signe que $\langle S(w'), \alpha_i \rangle$ pour tout i, donc que $S(w) \in C_0$. Mais c'est absurde puisque C_0 ne rencontre aucun des hyperplans P_α.

Toute racine α *est de la forme* $S(\alpha_i)$ *avec* $S \in W'$. En effet d'après ce qui précède il existe $S \in W'$ et i tels que $P_\alpha = S(P_i) = P_{S(\alpha_i)}$; donc α est proportionnelle à $S(\alpha_i)$, de sorte qu'on a soit $\alpha = S(\alpha_i)$, soit $\alpha = -S(\alpha_i)$; mais le dernier cas se ramène au premier si l'on observe que $S_i(\alpha_i) = -\alpha_i$.

Il nous reste à établir que $W' = W$; mais cela résulte de ce qui précède et de la formule $S_\alpha = S S_i S^{-1}$ pour $\alpha = S(\alpha_i)$. D'où le théor. 9.

Soient (α_i) et (α_i') deux systèmes fondamentaux de racines ; comme on l'a vu dans la démonstration, ces systèmes déterminent des chambres C_0 et C_0' ; de plus, il existe $S \in W$ tel que $C_0' = S(C_0)$; posons $\beta_i = S(\alpha_i)$. Comme les α_i sont linéairement indépendantes il existe pour tout i un $w_i \in P_{\alpha_i}$ qui vérifie $\langle w_i, \alpha_j \rangle < 0$ pour tout $j \neq i$, et il est clair que w_i appartient à la frontière de C_o ; donc $S(w_i)=w_i'$ appartient à la frontière de C_o' ; mais il est visible que celle-ci est contenue dans la réunion des $P_{\alpha_i'}$; on en déduit immédiatement que S transforme P_{α_i} en un $P_{\alpha_j'}$, donc transforme α_i en une racine proportionnelle à α_j', et en fait en α_j' elle-même comme on le voit en examinant les signes des produits scalaires.

On peut donc compléter le Théorème 9 en disant que <u>deux systèmes fondamentaux de racines peuvent toujours se déduire l'un de l'autre par une opération du groupe de Weyl suivie d'une permutation</u>.

$3^{\text{ème}}$ partie.

Représentations irréductibles de dimension finie des algèbres semi-simples.

§ 7 - Poids d'une représentation.

Soit $X \rightarrow \rho(X)$ une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V de dimension <u>finie ou infinie</u>. On dit qu'une forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$ est un <u>poids</u> de cette représentation si le sous-espace $V(\lambda)$ formé des $\underline{a} \in V$ vérifiant

(19) $$\rho(H)\underline{a} = \lambda(H)\underline{a} \qquad \text{pour tout } H \in \mathfrak{h}$$

n'est pas réduit à 0. Il est clair que ces $V(\lambda)$ sont linéairement indépendants.

Dans tout ce qui suit nous supposerons choisi une fois pour toutes un système fondamental de racines α_i ; on a alors un système canonique de générateurs H_i, X_i, Y_i ; d'autre part, les α_i formant une base de de $\mathfrak{h}_o^*$ on peut ordonner $\mathfrak{h}_o^*$ lexicographiquement par rapport à la base en question.

Nous désignerons par $\underline{G}$ l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$; c'est une algèbre associative possédant les propriétés suivantes : (i) : $\mathfrak{g}$ s'identifie à un sous-espace de $\underline{G}$; (ii) $\underline{G}$ est engendrée par 1 et $\mathfrak{g}$; (iii) pour $X,Y \in \mathfrak{g}$ on a $X,Y = XY-YX$, où XY désigne le produit dans $\underline{G}$; (iv) toute représentation ρ de $\mathfrak{g}$ dans un espace V se prolonge en une représentation (qu'on notera encore ρ) de $\underline{G}$ dans V .

Lemme 22 - Soit X_i, Y_i, H_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ un système canonique de générateurs de $\mathfrak{g}$; alors $\underline{G}$ est soustendue par les éléments de la forme

$$z(Q,M,P) = Y_{j_1} \ldots Y_{j_q} H_1^{m_1} \ldots H_r^{m_r} X_{i_1} \ldots X_{i_p}$$

où les m_i sont des entiers $\geqslant 0$ et où les suites $P = \{i_1, \ldots, i_p\}$ et $Q = \{j_1, \ldots, j_q\}$ sont arbitraires (éventuellement vides).

Soit $\underline{A}$ la sous-algèbre engendrée par les X_i, Y_i, H_i et 1 ; comme $\underline{A} \cap \mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie contenant le système canonique de générateurs, on voit que $\underline{A}$ contient $\mathfrak{g}$ (Lemme 21) ; donc $\underline{A} = \underline{G}$. $\underline{G}$ est donc soustendu par les monômes (non commutatifs) en les X_i, Y_i, H_i ; que l'on puisse se borner aux monômes particuliers indiqués dans l'énoncé provient évidemment des formules de commutation (17).

Lemme 23 - Soit ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V ; pour toute racine α et tout poids λ de ρ on a $\rho(X_\alpha)V(\lambda) \subset V(\lambda+\alpha)$; en particulier, $\rho(X_\alpha)V(\lambda) = 0$ si $\lambda+\alpha$ n'est pas un poids de ρ .

Démonstration triviale en vertu de l'identité $HX_\alpha = X_\alpha H + \alpha(H)X_\alpha$.

Lemme 24 - Soit ρ une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ dans un vectoriel V de dimension finie. Alors $V = \sum V(\lambda)$, et pour toute racine α l'opérateur $\rho(X_\alpha)$ est nilpotent.

D'après le théorème de Lie appliqué à la représentation ρ de $\mathfrak{h}$ dans V , l'un au moins des $V(\lambda)$ n'est pas nul ; comme l'espace $\sum V(\lambda)$ est invariant (lemme 23) on a donc bien $V = \sum V(\lambda)$ en utilisant l'irréductibilité de ρ . Par ailleurs, prenons $\underline{a} \in V(\lambda)$ et une racine α ; alors $\rho(X_\alpha)^k\underline{a}$ appartient au poids $\lambda + k.\alpha$; comme il n'y a évidemment qu'un nombre fini de poids, on a donc $\rho(X_\alpha)^k\underline{a} = 0$ pour k assez grand ; $\rho(X_\alpha)$ est donc nilpotent.

Remarque - Comme on démontrera plus loin que toute représentation de dimension finie est complètement réductible, le lemme 24 s'applique auss à ces représentations ; mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat plus général.

Lemme 25 - Soit ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel arbitraire V ; pour une racine α de $\mathfrak{g}$, supposons que, quel que soit $\underline{a} \in V$, il existe un entier k tel que $\rho(X_\alpha)^k\underline{a} = \rho(X_{-\alpha})^k\underline{a} = 0$. Alors, si λ est un poids de ρ, il existe des entiers p et q possédant les propriétés suivantes :

(a) : $q \leqslant 0 \leqslant p$; (b) : $-\lambda(H_\alpha) = p+q$; (c) : $\lambda + k.\alpha$ est un poids de ρ pour $q \leqslant k \leqslant p$.

Choisissons un vecteur non nul $\underline{a}$ appartenant au poids λ , et désignon par m et n les plus grands entiers positifs tels que

$$\underline{b} = \rho(X_\alpha)^m\underline{a} \neq 0 \quad ; \quad \underline{c} = \rho(X_{-\alpha})^n\underline{a} \neq 0 .$$

Posons $\underline{b}_k = \rho(X_{-\alpha})^k\underline{b}$, et soit r le plus grand entier tel que $\underline{b}_r \neq 0$. Montrons d'abord qu'on a des relations de la forme

$$\rho(X_\alpha)\underline{b}_k = \nu_k\underline{b}_{k-1} \quad ;$$

(on pose $\underline{b}_{-1}=0$) ; pour $k = 0$ c'est évident vu que $\rho(X_\alpha)\underline{b} = 0$; si l'existence de la k-ème relation est démontrée, on peut écrire

$$\rho(X_\alpha)\underline{b}_{k+1} = \rho(X_\alpha X_{-\alpha})\underline{b}_k = \rho(H_\alpha)\underline{b}_k + \rho(X_{-\alpha})\,\rho(X_\alpha)\underline{b}_k$$
$$= \rho(H_\alpha)\underline{b}_k + \nu_k \underline{b}_k \quad ;$$

mais il est clair que $\underline{b}_k$ appartient au poids $\lambda + (m-k)\alpha$; d'où la (k+1)-ème relation, avec en outre

$$\nu_{k+1} = \nu_k + \lambda(H_\alpha) + (m-k)\alpha(H_\alpha) = \nu_k + \lambda(H_\alpha) + 2(m-k) \ .$$

Etant donné que $\nu_0 = 0$, on déduit de là que

$$\nu_{k+1} = \sum_{j=0}^{j=k} \left[\lambda(H_\alpha)+2(m-j)\right] = (k+1)\left[\lambda(H_\alpha)+2m\right]-(1+2+\ldots+k)2$$
$$= (k+1)\left[\lambda(H_\alpha)+2m\right] - k(k+1)$$

d'où finalement

$$\nu_{k+1} = (k+1)\left[\lambda(H_\alpha)+2m-k\right] \quad ,$$

mais comme $\underline{b}_{r+1} = 0$ on a $\nu_{r+1}=0$ et par conséquent

(*) $$\lambda(H_\alpha) = r-2m \quad ;$$

en outre, les $\underline{b}_k$ étant $\neq 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant r$ on voit que $\lambda + k.\alpha$ est un poids de ρ pour

(**) $$m-r \leqslant k \leqslant m \ .$$

Considérons maintenant les vecteurs $\underline{c}_k = \rho(X_\alpha)^k\underline{c}$, et soit s le plus grand entier tel que $\underline{c}_s \neq 0$. Comme plus haut, on montre qu'on a des relations de la forme

$$(X_{-\alpha})\underline{c}_k = \tau_k \underline{c}_{k-1} \quad ;$$

pour calculer les τ_k , il suffit d'observer que, dans le calcul des ν_k fait plus haut, tout revient à remplacer α par $-\alpha$, m par n , et r par s ; donc on a $\lambda(H_{-\alpha}) = s-2n$, i.e.

(***) $$\lambda(H_\alpha) = 2n - s$$

et $\lambda - k.\alpha$ est un poids pour $n-s \leqslant k \leqslant n$; autrement dit, $\lambda + k.\alpha$ est un poids pour

(****) $$-n \leqslant k \leqslant s-n \quad .$$

Distinguons alors deux cas.

1°) $\lambda(H_\alpha) \geqslant 0$; alors (*) montre que $r-2m \geqslant 0$, d'où $m-r \leqslant -m \leqslant 0$; posant $q = m-r$, $p = m$ on voit que $q \leqslant 0 \leqslant p$, que $-\lambda(H_\alpha) = p+q$, qu'enfin d'après (**) $\lambda + k.\alpha$ est un poids pour $q \leqslant k \leqslant p$.

2°) $\lambda(H_\alpha) \leqslant 0$; alors (***) montre que $2n-s \leqslant 0$, d'où $s-n \geqslant n \geqslant 0$; posant $q = -n$, $p = s-n$ on a les mêmes résultats d'après (****).

Le lemme est donc entièrement démontré.

Pour simplifier le langage, nous dirons qu'un endomorphisme A d'un espace vectoriel V est <u>localement nilpotent</u> si, pour tout $\underline{a} \in V$, on a $A^k \underline{a} = 0$ pour un entier k .

<u>Lemme 26</u> - <u>Soit</u> ρ <u>une représentation de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans un espace vectoriel</u> V , <u>et soit</u> H_i, X_i, Y_i <u>un système canonique de générateurs de</u> $\mathfrak{g}$; <u>supposons que les opérateurs</u> $\rho(X_i)$, $\rho(Y_i)$ <u>soient localement nilpotents pour tout</u> i . <u>Alors l'ensemble des poids de</u> ρ <u>est invariant par le groupe de Weyl de</u> $\mathfrak{g}$.

Cela résulte évidemment du lemme 25 et du fait que le groupe de Weyl est engendré par les symétries associées aux racines α_i du système fondamental correspondant au système canonique de générateurs considéré.

En vertu du lemme 24, le lemme 26 s'applique en particulier à toute représentation <u>irréductible et de dimension finie</u> de $\mathfrak{g}$. De plus, si λ est un poids d'une telle représentation, les nombres $\lambda(H_i)$ sont entiers (lemme 25) en sorte que λ est combinaison linéaire à coefficients <u>rationnels</u> des racines α_i du système fondamental. Par conséquent on peut appliquer à ces poids la relation d'ordre lexicographique par rapport à ce système fondamental, et puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de poids, on peut parler du <u>plus haut</u> et du plus bas poids de ρ .

Théorème 10 - Soit ρ une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ dans un espace V de dimension finie ; soit λ_0 le plus haut poids de ρ . Alors les nombres $\lambda_0(H_i)$ sont des entiers positifs ; le poids λ_0 est de multiplicité un ; tout poids de ρ est de la forme $\lambda_0 - \sum c_i\alpha_i$ avec des entiers positifs c_i ; l'ensemble des poids de ρ est invariant par le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$.

D'après les lemmes 24 et 25, les nombres $\lambda_0(H_i)$ sont des entiers ; comme de plus le lemme 26 montre que $\lambda_0 - \lambda_0(H_i).\alpha_i$ est un poids de ρ , et comme ce poids doit être $\leqslant \lambda_0$, on voit que $\lambda_0(H_i) \geqslant 0$ pour tout i . Choisissons maintenant un vecteur non nul $\underline{a}$ appartenant à λ_0 ; comme $\rho(X_i)\underline{a}$ appartient à $\lambda_0 + \alpha_i > \lambda_0$, on a $\rho(X_i)\underline{a} = 0$ pour tout i ; donc (lemme 22) V est sous-tendu par les vecteurs $\rho(Y_{j_1}\ldots Y_{j_q})\underline{a}$ et par $\underline{a}$; il s'ensuit immédiatement que tout poids est de la forme $\lambda_0 - (\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_q}) = \lambda_0 - \sum c_i\alpha_i$ avec des entiers $c_i \geqslant 0$, et que le seul vecteur de poids λ_0 est, à un facteur constant près, le vecteur $\underline{a}$. Le fait que l'ensemble des poids de ρ soit invariant par le groupe de Weyl résulte du lemme 26. Le théorème est donc démontré.

Remarque - On démontrera plus loin que, si deux poids de ρ se déduisent l'un de l'autre par une opération du groupe de Weyl, ils ont même multiplicité ; cela résultera du fait que toute opération du groupe de Weyl est induite par un automorphisme de $\mathfrak{g}$. H. Weyl (Math. Zeitschrift, 1925) donne du fait que mult. (λ) = mult. $(S(\lambda))$ une démonstration "élémentaire" ; malheureusement, le rédacteur ne l'a absolument pas comprise, et n'est en aucune façon convaincu qu'elle soit correcte. Il est du reste utile d'observer que la propriété en question ne figure pas dans le rapport Chevalley (ce qui est un tort), ni dans l'article de Harish-Chandra sur le sujet (même remarque).

Bien entendu, l'utilité de la propriété en question est de montrer que les caractères des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ sont invariants par le groupe de Weyl.

§ 8 - Remarques sur les représentations des algèbres associatives.

Soit $\underline{G}$ une algèbre associative avec unité ; soit ρ une représentation de $\underline{G}$ dans un espace vectoriel arbitraire V . Désignant par V^* le dual de V , on appelle *coefficient de* ρ toute forme linéaire θ sur $\underline{G}$ donnée par une relation

$$\theta(g) = \langle \rho(g)\underline{a}, \underline{a}^* \rangle$$

avec $\underline{a} \in V$, $\underline{a}^* \in V^*$. On désignera souvent par $\theta_{\underline{a},\underline{a}^*}$ le coefficient de ρ défini par la formule précédente. Il est clair qu'on a la relation

(20) $$\theta\,(g)_{\underline{a},\underline{a}^*}(g') = \theta_{\underline{a},\underline{a}^*}(g',g) .$$

Désignant par $\underline{G}^*$ le dual de l'espace vectoriel $\underline{G}$, cela nous conduit à définir une représentation de $\underline{G}$ dans $\underline{G}^*$ de la façon suivante : pour tout $g \in \underline{G}$ l'opérateur $\pi(g)$ associé à g par cette représentation consiste à transformer toute forme linéaire θ sur $\underline{G}$ en la forme $\theta' = \pi(g)\theta$ donnée par

$$\theta'(g') = \theta(g',g) .$$

Nous dirons pour abréger (et bien que ce ne soit pas conforme à la terminologie classique) que π est la *représentation régulière de $\underline{G}$ dans son dual*.

Lemme 27 - Soit ρ *une représentation irréductible de* $\underline{G}$; *soit* θ *un coefficient non nul de* ρ , *et désignons par* E *le sous-espace invariant de* $\underline{G}^*$ *engendré par* θ . *Alors la représentation* ρ *est équivalente à la représentation de* $\underline{G}$ *induite dans* E *par la représentation régulière de* $\underline{G}$ *dans* $\underline{G}^*$.

Posons en effet

$$\theta(g) = \langle \rho(g)\underline{a}, \underline{a}^* \rangle$$

où $\underline{a} \in V$ et $\underline{a}^* \in V^*$ sont $\neq 0$; et à tout vecteur $\underline{b} \in V$ associons la forme linéaire

(21) $$\theta_{\underline{b}}(g) = \langle \rho(g)\underline{b}, \underline{a}^* \rangle \qquad ;$$

d'après la formule (20), la formule $\underline{b} \to \theta_{\underline{b}}$ définit une application linéaire u de V sur E , vérifiant $u \circ \rho(g) = \pi(g) \circ u$ pour tout $g \in \underline{G}$; comme ρ est irréductible et u non nulle il s'ensuit (lemme de Schur) que u est une application biunivoque de V sur E , et que u transforme ρ en la représentation π de $\underline{G}$ dans E ; d'où le lemme.

<u>Corollaire</u> - <u>Si deux représentations irréductibles de $\underline{G}$ ont un coefficient commun elles sont équivalentes</u>.

Comme application nous pouvons démontrer le résultat suivant :

<u>Théorème 11</u> - <u>Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple</u> ; <u>il existe</u> (à une équivalence près) <u>au plus une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}$ ayant un plus haut poids donné</u>.

En effet prenons un système canonique de générateurs H_i, X_i, Y_i de $\mathfrak{g}$; soit ρ une représentation irréductible de plus haut poids λ . Choisissant un vecteur $\underline{a}$ non nul dans $V(\lambda)$ on a les relations

(22) $$\rho(H)\underline{a} = \lambda(H)\underline{a} \quad ; \quad \rho(X_i)\underline{a} = 0 \quad ;$$

maintenant, soit V^* le dual de V ; la formule $X \to -{}^t\rho(X)$ définit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V^* ; soit $\underline{a}^*$ un vecteur non nul appartenant au <u>plus bas</u> poids de celle-ci ; on aura alors des formules

(23) $${}^t\rho(Y_i)\underline{a}^* = 0 \; .$$

Cela dit, étendons ρ à l'algèbre enveloppante $\underline{G}$ de $\mathfrak{g}$, et considérons le coefficient

$$\theta(g) = \langle \rho(g)\underline{a},\underline{a}^* \rangle$$

de ρ ; les formules (22) et (23) montrent qu'on a

(24) $\qquad \theta(gH) = \lambda(H)\theta(g) \quad ; \quad \theta(gX_i) = \theta(Y_i g) = 0 \quad ;$

si l'on suppose $\theta(1) = 1$ -ce qui est évidemment permis, car sinon θ serait identiquement nulle d'après (24) - on voit donc en utilisant le lemme 22 que la connaissance de λ détermine parfaitement le coefficient θ ; d'où le théorème.

§ 9 - Lemme fondamental.

Notre objet dans ce § et le suivant est de démontrer l'existence d'une représentation irréductible de dimension finie possédant un plus haut poids donné λ_o pourvu que les $\lambda_o(H_i)$ soient des entiers $\geqslant 0$ (cette dernière condition est nécessaire d'après le Théorème 10). La méthode que nous utiliserons est la suivante : on construira tout d'abord une forme linéaire θ sur l'algèbre enveloppante $\underline{G}$, forme vérifiant les conditions (24) ainsi que $\theta(1)=1$; puis on formera le sous-espace invariant E de $\underline{G}^*$ engendré par θ, d'où une représentation de $\mathfrak{g}$ dans E par l'intermédiaire de la représentation régulière ; ensuite, on vérifiera que E est de dimension finie et que θ, considéré comme élément de E, appartient au poids λ_o ; la représentation irréductible cherchée sera alors construite.

La principale difficulté étant de démontrer que E est de dimension finie, nous allons dès maintenant établir un résultat général qui permettra d'établir ce point :

<u>Lemme fondamental</u> - <u>Soit</u> ρ <u>une représentation de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans un espace vectoriel</u> V . <u>Supposons qu'il existe une forme linéaire</u> λ_o <u>sur</u> $\mathfrak{h}$ <u>et un vecteur</u> <u>a</u> <u>de</u> V <u>vérifiant les conditions suivantes</u> :

(i) : <u>le sous-espace invariant engendré par</u> <u>a</u> <u>est</u> V <u>tout entier</u> ;

(ii) : <u>on a</u> $\rho(H)\underline{a} = \lambda_o(H)\underline{a}$; $\rho(X_i)\underline{a} = 0$;

(iii) : <u>pour tout</u> i <u>il existe un entier</u> k <u>tel que</u> $\rho(Y_i^k)\underline{a} = 0$.

<u>Alors</u> V <u>est de dimension finie.</u>

La démonstration de ce lemme va elle-même se décomposer en plusieurs propositions.

<u>Lemme a</u> - V <u>est somme directe des sous-espaces</u> $V(\lambda)$; λ_o <u>est le plus haut poids de</u> ρ , <u>et tout poids de</u> ρ <u>est de la forme</u> $\lambda_o - \sum c_i\alpha_i$ <u>où les</u> c_i <u>sont des entiers positifs</u> ; $V(\lambda_o)$ <u>est de dimension</u> un .

Cela résulte, comme le théorème 10, du fait que V est soustendu par les vecteurs

$$\underline{a}_{j_1\ldots j_q} = \rho(Y_{j_1}\ldots Y_{j_q})\underline{a} \quad .$$

<u>Lemme b</u> - <u>Pour tout</u> $\underline{b}\in V$ <u>et tout</u> i <u>il existe un entier</u> k <u>tel que</u> $\rho(X_i^k)\underline{b} = 0$.

On peut se borner au cas où <u>b</u> appartient à un poids λ ; si $\rho(X_i)^k\underline{b}$ n'est pas nul, $\lambda + k.\alpha_i$ est un poids de ρ d'où (lemme a)
$\lambda + k.\alpha_i = \lambda_o - \sum c_j\alpha_j$ avec des entiers $c_j \geqslant 0$; mais on a aussi $\lambda = \lambda_o - \sum c_j^o\alpha_j$ avec des entiers $c_j^o \geqslant 0$; comparant les deux relations obtenues il vient $k = c_i^o - c_i$, ce qui prouve que k est borné supérieurement et démontre le lemme.

<u>Lemme c</u> - <u>Quels que soient</u> i,j $(1\leqslant i,j\leqslant r)$ <u>et l'entier</u> $k\geqslant 0$, <u>on a une relation de la forme</u>

(25) $$Y_i^k Y_j = Y_j Y_i^k + \sum_{s=1}^{s=k} Y_{ij}^{(s)} Y_i^{k-s}$$

<u>où les</u> $Y_{ij}^{(s)} \in \mathcal{G}$ <u>appartiennent à la racine</u> $-\alpha_j - s.\alpha_i$.

Le lemme est évident pour $k=1$; supposons-le alors démontré jusqu'à k , et montrons qu'il est vrai pour $k+1$. On a par hypothèse (25) ; donc on a

$$Y_i^{k+1} Y_j = Y_i Y_j Y_i^k + \sum Y_i Y_{ij}^{(s)} Y_i^{k-s} \qquad ;$$

mais $Y_i Y_j = Y_j Y_i$ + un élément de $\mathcal{G}$ appartenant à $-\alpha_j - \alpha_i$; et de même $Y_i Y_{ij}^{(s)} = Y_{ij}^{(s)} Y_i$ + un élément de $\mathcal{G}$ appartenant à $-\alpha_j - (s+1)\alpha_i$; d'où le lemme.

<u>Lemme d</u> - <u>Pour tout</u> $\underline{b} \in V$ <u>et tout</u> i <u>il existe un entier</u> k <u>tel que</u> $\rho(Y_i^k)\underline{b} = 0$.

On peut se borner au cas où

(26) $$\underline{b} = \underline{a}_{j_1 \dots j_q} = \rho(Y_{j_1} \dots Y_{j_q})\underline{a} \ .$$

Si la suite $(j_1, \dots j_q)$ est vide, $\underline{b} = \underline{a}$ et le lemme se réduit à l'hypothèse (iii) du lemme fondamental ; on peut donc procèder par récurrence sur q . Nous supposerons donc le théorème démontré pour l'élément (26), et allons en déduire qu'il subsiste pour

(27) $$\underline{c} = \underline{a}_{jj_1 \dots j_q} = \rho(Y_j)\underline{b} \ .$$

D'après le lemme c, on peut écrire

(28) $$\rho(Y_i^k)\underline{c} = \sum_{s=0}^{s=k} \rho(Y_{ij}^{(s)})\, \rho(Y_i^{k-s})\underline{b}$$

où $Y_{ij}^{(s)}$ appartient à $-(\alpha_j + s.\alpha_i)$ pour $0 \leqslant s \leqslant k$.

Mais par hypothèse le s-ème terme de (28) est nul dès que $k-s \geqslant k_o$, où k_o est défini par la condition que $\rho(Y_i^{k_o})\underline{b} = 0$. D'autre part, si $Y_{ij}^{(s)} \neq 0$ alors $\alpha_j + s.\alpha_i$ est racine, de sorte qu'alors $s \leqslant a_{ij}$;

ceci dit prenons $k \geqslant k_o + a_{ij}$; alors pour chaque terme de (28) on aura soit $s > a_{ij}$ soit $k-s \geqslant k_o$; donc tous les termes de (28) sont nuls, et le lemme est démontré.

Il résulte des lemmes b et d, et du lemme 26, que <u>l'ensemble des poids de ρ est invariant par le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$</u>. En particulier, $S(\lambda_o)$ est un poids pour tout $S \in W$; nous désignerons par μ_o le <u>plus bas</u> poids de la forme $S(\lambda_o)$, et par $\underline{b}$ un vecteur non nul appartenant à μ_o.

<u>Lemme e</u> - $\mu_o - \alpha_i$ <u>n'est pas un poids de</u> ρ.

Supposons en effet que $\mu_o - \alpha_i$ soit un poids ; comme on a évidemment $S_i(\mu_o) \geqslant \mu_o$ par construction de μ_o, on voit que $\mu_o(H_i) \leqslant 0$ (en effet, $S_i(\mu_o) = \mu_o - \mu_o(H_i)\alpha_i$). Mais appliquons le lemme 25 à μ_o et i ; on voit que $\mu_o(H_i) = -p-q$ avec $q \leqslant 0 \leqslant p$ et où $\mu_o + k.\alpha_i$ est un poids pour $q \leqslant k \leqslant p$; comme $\mu_o(H_i) \leqslant 0$, on a soit $\mu_o(H_i) < 0$ - et alors $p > 0$, en sorte que $\mu_o + \alpha_i$ est un poids - soit $\mu_o(H_i) = 0$ - auquel cas $\mu_o + \alpha_i = S_i(\mu_o - \alpha_i)$ est encore un poids. Donc de l'hypothèse que $\mu_o - \alpha_i$ est un poids résulte que $\mu_o + \alpha_i$ est aussi un poids. Posons alors $\lambda_o = S_o(\mu_o)$; l'ensemble des poids étant invariant par le groupe de Weyl, on voit que les formes $\lambda_o + S_o(\alpha_i)$ <u>et</u> $\lambda_o - S_o(\alpha_i)$ sont des poids ; ceci est évidemment contraire au fait que λ_o est le <u>plus haut</u> poids de ρ.

<u>Lemme f</u> - V <u>est de dimension finie</u>.

Soit en effet E le sous-espace invariant engendré par $\underline{b} \in V(\mu_o)$; d'après le lemme e, $\underline{b}$ est annulé par les $\rho(Y_i)$, en sorte que E est soustendu par $\underline{b}$ et les vecteurs

(29) $$\underline{b}_{i_1 \dots i_p} = \rho(X_{i_1} \dots X_{i_p})\underline{b} \quad ;$$

puisque le plus haut poids de ρ est λ_o, ces vecteurs ne peuvent être $\neq 0$ que si

$$\mu_o + \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_p} \leqslant \lambda_o \quad ;$$

or posons $\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_p} = \sum a_i \alpha_i$ où les a_i sont des entiers $\geqslant 0$; puisque tout poids de ρ est de la forme $\lambda_o - \sum c_i \alpha_i$ avec des c_i entiers $\geqslant 0$ on voit, en posant $\mu_o = \lambda_o - \sum b_i \alpha_i$, que si (29) n'est pas nul on aura une relation de la forme

$$\lambda_o - \sum b_i \alpha_i + \sum a_i \alpha_i = \lambda_o - \sum c_i \alpha_i$$

d'où, en vertu de l'indépendance linéaire des α_i, les relations $a_i = b_i - c_i$; il s'ensuit que les a_i sont des entiers positifs bornés supérieurement, donc qu'ils ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs.

Les vecteurs (29) non nuls sont donc en nombre fini. Par conséquent E est de dimension finie.

Considérons alors la représentation ρ de $\mathfrak{g}$ dans E ; puisqu'elle possède dans E le poids μ_o, elle possède aussi le poids $S(\mu_o)$ pour tout $S \in W$ (lemme 26) ; en particulier λ_o est un poids ; mais $V(\lambda_o)$ est de dimension un (lemme a) ; donc E contient $\underline{a}$, ce qui montre que E = V et démontre le lemme f .

Le lemme fondamental est donc entièrement démontré.

---

§ 10 - Théorème d'existence.

<u>Lemme 28</u> - <u>Soit</u> λ_o <u>une forme linéaire sur</u> $\mathfrak{h}$; <u>alors il existe sur</u> G <u>une forme linéaire</u> θ <u>et une seule vérifiant</u> $\theta(1) = 1$ <u>et</u>

(30) $$\theta(gH) = \theta(g)\lambda_o(H) \; ; \quad \theta(gX_i) = 0 \quad ; \quad \theta(Y_i g) = 0 \; .$$

Désignons en effet par $\mathfrak{a}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ soustendue par $\mathfrak{h}$ et les X_α correspondant aux racines $\alpha > 0$, et par $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre sous-tendue par les X_α correspondant aux racines $\alpha < 0$; il est clair que $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}$ (somme de sous-espaces). D'après Birkhoff-Witt l'espace vectoriel $\underline{G}$ s'identifie donc au produit tensoriel $\underline{B} \otimes \underline{A}$ des algèbres enveloppantes de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$, l'identification en question induisant un isomorphisme des <u>algèbres</u> $\underline{A}$ et $\underline{B}$ dans $\underline{G}$ et transformant l'élément $b \otimes a$ de $\underline{B} \otimes \underline{A}$ en ba.

D'autre part, prolongeons λ_0 à l'algèbre $\mathfrak{a}$ par la condition que $\lambda_0(X_\alpha) = 0$; il est clair qu'on définit ainsi une représentation de dimension un de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$; cette représentation s'étend donc en un homomorphisme $a \to \lambda_0(a)$ de $\underline{A}$ sur le corps de base, avec $\lambda_0(1) = 1$.

Désignons d'autre part par $\varepsilon(b)$ l'homomorphisme de $\underline{B}$ sur le corps de base qui envoie 1 sur 1 et $\mathfrak{b}$ sur 0 ; l'application $(b,a) \to \varepsilon(b)\,\lambda_0(a)$ est bilinéaire sur $\underline{B} \times \underline{A}$; donc il existe une forme linéaire θ sur $\underline{B} \otimes \underline{A}$ qui vérifie

$$\theta(b \otimes a) = \varepsilon(b)\,\lambda_0(a) \quad ;$$

identifiant $\underline{B} \otimes \underline{A}$ et $\underline{G}$ comme il a été dit il est clair qu'on obtient la forme linéaire cherchée sur $\underline{G}$.

Considérons la forme θ du lemme 28, et le sous-espace invariant E de $\underline{G}^*$ qu'elle engendre ; pour la représentation régulière π de $\underline{G}$ dans E, il est clair d'après la définition de θ qu'on a les propriétés suivantes :

(i) le sous-espace invariant de E engendré par θ est E tout entier ;

(ii) on a $\quad \pi(H)\theta = \lambda_0(H)\theta \quad ; \quad \pi(X_i)\theta = 0$.

D'après le lemme fondamental du § précédent, il suffit donc, pour montrer que E est de dimension finie, de faire voir qu'on a des relations de la forme

(31) $$\pi(Y_i{}^k)\theta = 0 \quad ;$$

c'est à quoi va servir l'hypothèse que les nombres $\lambda_o(H_i)$ sont des entiers positifs.

Posons d'une manière générale

$$z(Q,M,P) = Y_{j_1}\dots Y_{j_q}\, H_1^{m_1}\dots H_r^{m_r} X_{i_1}\dots X_{i_p}$$

où l'on écrit $M = \{m_1,\dots,m_r\}$; $P = \{i_1,\dots,i_p\}$; $Q = \{j_1,\dots,j_q\}$

(les suites P,Q peuvent être vides, et la suite M ne comporter que des zéros). Les éléments $z(Q,M,P)$ soustendent $\underline{G}$ (lemme 22) ; donc pour établir (31) il suffit de vérifier l'existence d'un $k > 0$ tel que l'on ait

(32) $$\theta\left[z(Q,M,P)Y_i{}^k\right] = 0$$

quels que soient P,Q,M . Nous distinguerons plusieurs cas.

<u>1^er^ cas</u> : <u>la suite</u> P <u>est vide</u>. Alors (32) a lieu dès que $k \geqslant 1$.

En effet, les formules

$$\left[H_i, Y_j\right] = a_{ij}Y_j$$

entraînent immédiatement que quels que soient $k \geqslant 1$ et $m \geqslant 0$ l'élément $H_j^m Y_i{}^k$ appartient à l'idéal à droite engendré dans $\underline{G}$ par les Y_j ; or il est clair d'après (30) que θ est nulle sur cet idéal à droite.

<u>2ème cas</u> : <u>la suite</u> P <u>n'est pas vide</u>. On a alors une relation

$$z(Q,M,P) = gX_j$$

pour un $g \in \underline{G}$ et un j , d'où résulte que

$$z(Q,M,P)Y_i^k = gY_i^k X_j + g\left[X_j, Y_i^k\right] \quad ;$$

mais il est clair d'après (30) que θ est nulle sur l'idéal à gauche engendré dans $\underline{G}$ par les X_i ; par conséquent, il vient

(33) $$\theta\left[z(Q,M,P)Y_i^k\right] = \theta(g.\left[X_j,Y_i^k\right]) .$$

Si $j \neq i$, X_j commute avec Y_i , donc avec Y_i^k , de sorte que dans ce cas le premier membre de (33) est nul quel que soit $k \geqslant 1$.

Reste à examiner le cas où $j = i$. Or des formules de commutation

$$\left[X_i, Y_i\right] = H_i \quad ; \quad \left[H_i,X_i\right] = 2X_i \quad ; \quad \left[H_i,Y_i\right] = -2Y_i$$

résulte qu'on a plus généralement la relation

(34) $$\left[X_i, Y_i^k\right] = kY_i^{k-1}(H_i-k+1) \quad ;$$

en effet (34) est vraie pour $k=1$, ce qui permet de raisonner par récurence et d'obtenir sans peine le cas général.

Ceci dit, le premier membre de (33) vaut donc

$$k.\theta(gY_i^{k-1}(H_i-k+1)) \;;$$

faisant usage de $\theta(gH) = \lambda_0(H)\theta(g)$ il vient

$$k(\lambda_0(H_i)-k+1)\theta(gY_i^{k-1}) \;;$$

il suffit alors de prendre

$$k = \lambda_0(H_i)+1$$

pour annuler (33).

En conséquence, la relation (31) est démontrée, et on a même obtenu explicitement une valeur de k pour laquelle elle est vérifiée.

D'après le lemme fondamental, nous avons donc construit une représentation π de $\underline{G}$ dans E qui est de dimension finie et admet λ_0 pour plus haut poids. Si cette représentation n'est pas irréductible (ce qui n'est pas le cas, comme on le verra dans un instant) elle admet des sous-espaces invariants non triviaux ; aucun de ceux-ci ne contient θ , puisque θ engendre E . Si donc E_0 désigne un sous-espace invariant $\neq$ E et de de dimension maximum, on voit que l'image $\tilde{\theta}$ de θ dans E/E_0 n'est pas nulle ; comme E_0 est invariant la représentation π définit une représentation $\tilde{\pi}$ dans E/E_0 , laquelle est évidemment irréductible, de dimension finie, <u>et admet</u> λ_0 <u>pour plus haut poids</u> ; en effet, il est bien évident d'après $E = \sum E(\lambda)$ que tout poids de $\tilde{\pi}$ est un poids de π , donc que le plus haut poids de $\tilde{\pi}$ est $\leqslant \lambda_0$; mais comme $\tilde{\theta}$ n'est pas nul et appartient au poids λ_0 , notre assertion est démontrée. Donc :

<u>Théorème 12</u> - <u>Soit</u> λ_0 <u>une forme linéaire sur</u> $\mathfrak{h}$ <u>telle que les</u> $\lambda_0(H_i)$ <u>soient des entiers positifs</u> ; <u>alors</u> $\mathfrak{g}$ <u>possède une représentation irréductible de dimension finie</u>, <u>et une seule</u>, <u>de plus haut poids</u> λ_0 .

Mais on a vu au § 8 que cette représentation irréductible, si elle existe, est équivalente à la représentation π de $\mathfrak{g}$ dans le sous-espace E engendré par θ ; il s'ensuit que cette représentation π est elle-même irréductible, bien que nous n'ayons pas pu le prouver à priori. Ceci n'est d'ailleurs qu'une confirmation supplémentaire du théorème d'existence ...

<u>Commentaires sur la méthode adoptée</u>.

Le procédé de démonstration utilisé ici est directement inspiré de la notion de <u>représentation induite</u>.

Soient G un groupe et A un sous-groupe de G ; soit $a \rightarrow \lambda(a)$ une représentation de A dans un vectoriel L ; soit V l'ensemble des applications de G dans L qui vérifient

$$\theta(ag) = \lambda(a)\theta(g) \qquad (a \in A \; ; \; g \in G) \; ;$$

on définit alors une représentation ρ de G dans V par

$$\rho(g)\theta(g') = \theta(g'g) \quad .$$

Soient maintenant G une algèbre associative et A une sous-algèbre de G ; soit λ une représentation de A dans un vectoriel L ; soit V l'ensemble des applications linéaires de G dans L qui vérifient

$$\theta(ag) = \lambda(a)\theta(g) \quad ;$$

alors la formule

$$\rho(g)\theta(g') = \theta(g'g)$$

définit encore une représentation de G dans V , dite "induite" par la représentation λ de A .

Si A est engendrée par une algèbre de Lie résoluble il résulte trivialement du théorème de Lie que toute représentation irréductible de dimension finie de G est contenue dans une représentation induite par une représentation de dimension un de A . C'est évidemment ce principe qu'on a utilisé pour démontrer le Théorème 12. Son importance est du reste considérablement plus grande ; si G est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple et si A est la sous-algèbre engendrée par les H_i et les X_i , il semble en effet résulter des théorèmes annoncés récemment par Haresh-Chandra que le principe en question s'étend aux représentations irréductibles infinies de G (tout au moins à celles qui sont raisonnables, i.e. ont un sens topologique).

En tous cas, toutes les représentations étudiées par Gelfand et Naïmark sont construites de cette façon, sans la moindre exception.

A ce sujet la remarque suivante est intéressante. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, d'algèbre enveloppante G ; soit H_i, X_i, Y_i un système canonique de générateurs. Pour une forme linéaire λ sur la sous-algèbre de Cartan engendrée par les H_i, désignons par V_λ l'ensemble des formes linéaires θ sur G telles que

$$\theta(Hg) = \lambda(H)\theta(g) \quad ; \qquad \theta(Y_i g) = 0 \quad ;$$

on a alors une représentation π_λ de $\mathfrak{g}$ dans V_λ , par restriction de la représentation régulière de G dans son dual.

Si λ est "générique" il y a tout lieu de croire que π_λ est irréductible, ou tout au moins se décompose en représentations irréductibles infinies. Mais si les $\lambda(H_i)$ sont des entiers positifs les composantes irréductibles sont de dimension finie.

Les représentations de dimension finie apparaissent donc comme des dégénérescences de représentations infinies. C'est en tout cas ce que la théorie topologique tend à confirmer.

Phénomène analogue (en fait, lié directement au précédent) : fonctions de Legendre P_ν et polynômes de Legendre P_n .

Samuel

(174)

47

4$^{\text{ème}}$ Partie.

Détermination d'une algèbre semi-simple par ses entiers de Cartan.

---

§ 11 - Théorème d'unicité.

Commentaires - Il s'agit dans ce § de démontrer que deux algèbres de Li ayant les mêmes entiers de Cartan sont isomorphes, résultat fort importan La démonstration qu'on en donne est essentiellement celle de Harish-Chandra ; elle comporte de nombreux points communs avec celle du théorème d'existence des représentations irréductibles, à telle enseigne que Harish-Chandra (comme du reste Chevalley) démontre les deux choses en même temps, et par dessus le marché démontre aussi l'existence d'une algèbre ayant des entiers de Cartan donnés à l'avance. On a trouvé préférable de séparer nettement les deux démonstrations, afin de ne pas embrouiller outre mesure une situation déjà peu simple ; le fait qu'on est obligé de la sorte à répéter plus ou moins textuellement des démonstratio déjà faites, n'a pas paru rédibitoire au rédacteur ; au contraire, c'est un avantage du point de vue pédagogique, vu que les démonstrations en question ont tout intérêt à être bien comprises... Quant à l'existence d'une algèbre ayant des entiers de Cartan donnés, c'est évidemment un canular ; cela ne peut servir, jusqu'à nouvel ordre, qu'à la classification - mais cela ne dispense pas de la faire (quand on s'y intéresse) et alors on obtient beaucoup plus que le pâle théorème d'existence en questio à savoir une construction explicite de l'algèbre ayant un système d'entier de Cartan simple donné.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur le corps complexe (i.e.,..); pour étudier les représentations de $\mathfrak{g}$ nous avons utilisé l'algèbre enveloppante universelle $\underline{G}$ de $\mathfrak{g}$; on va maintenant montrer qu'on aurait aussi bien pu utiliser une autre algèbre $\underline{A}$, algèbre dont la construction mettra en évidence qu'elle ne dépend que des entiers de Cartan de $\mathfrak{g}$ (relativement à un système canonique donné de générateurs).

Pour cela, soit X_i, Y_i, H_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ un système canonique de générateurs de $\mathfrak{g}$; on a donc des relations de commutation

(35) $$[H_i, X_j] = -a_{ij}X_j \quad ; \quad [H_i, Y_j] = a_{ij}Y_j \quad ;$$
$$[H_i, H_j] = 0 \quad ;$$
$$[X_i, Y_j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ H_i & \text{si } i = j \end{cases} \quad ;$$

noter de plus que, α_i désignant le système fondamental de racines correspondant, on a les relations $a_{ij} = -\alpha_j(H_i)$; comme les α_i sont linéairement indépendantes cela montre que

(36) $$\text{dét}(a_{ij}) \neq 0 .$$

Cela dit, nous désignerons par $\underline{A}$ l'algèbre associative "universelle" relative aux relations (35), i.e. l'algèbre associative définie par générateurs et relations au moyen des identités (35). Les générateurs de $\underline{A}$ seront désignés par x_i, y_i, h_i afin de les distinguer des éléments correspondants de $\mathfrak{g}$. En vertu du caractère "universel" de $\underline{A}$ il est clair que l'algèbre $\underline{G}$ est un <u>quotient</u> de $\underline{A}$ (d'ailleurs non trivial, car il est clair que, dans $\underline{G}$, les X_i par exemple sont soumis à des relations qui ne se déduisent pas de (35) ; par exemple, l'algèbre de Lie engendré par les X_i a un centre non nul - considérer le X_α correspondant à la <u>plus haute</u> racine positive). Dans ces conditions, toute représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ définit une représentation irréductible de $\underline{A}$, mais la réciproque n'est pas évidente ; c'est cependant ce qu'on va montrer pour les représentations de dimension <u>finie</u>. Autrement dit, on va établir le résultat suivant : <u>soit ρ une représentation irréductible de dimension finie de $\underline{A}$; alors il existe une représentation irréductible ρ' de $\mathfrak{g}$ telle que</u>

$$\rho(x_i) = \rho'(X_i) \; ; \quad \rho(h_i) = \rho'(H_i) \; ; \quad \rho(y_i) = \rho'(Y_i) \, .$$

Cela entraînera, comme on le verra, le théorème d'unicité.

Nous désignerons par $\mathfrak{h}$ le sous-espace vectoriel de $\underline{A}$ engendré par les h_i (le rédacteur regrette la confusion avec le $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ ...) ; d'après (35) il existe des formes linéaires α_i (mêmes regrets ...) sur $\mathfrak{h}$ tels que l'on ait

(37) $$\left[h, x_i \right] = \alpha_i(h) \cdot x_i \quad ; \quad \left[h, y_i \right] = -\alpha_i(h) \cdot y_i$$

pour tout $h \in \mathfrak{h}$; on a évidemment $\alpha_i(h_j) = -a_{ji}$ ce qui, en raison de (36), montre que les α_i et donc aussi les h_j sont linéairement indépendants ; donc $\mathfrak{h}$ est de dimension r , et toute forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ est combinaison des α_i .

Soit maintenant ρ une représentation irréductible de $\underline{A}$ dans un vectoriel V de dimension finie. Une forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$ sera un poids de ρ si le sous-espace $V(\lambda)$ des $\underline{a} \in V$ tels que

$$\rho(h)\underline{a} = \lambda(h) \cdot \underline{a}$$

est non nul. Comme les $h \in \mathfrak{h}$ commutent, il existe toujours au moins un poids ; de plus il ne peut y avoir qu'un nombre fini de poids, puisque V est de dimension finie. Or il résulte évidemment de (37) que si $\underline{a}$ appartient à λ , alors $\rho(x_i)\underline{a}$ appartient à $\lambda + \alpha_i$ et $\rho(y_i)\underline{a}$ à $\lambda - \alpha_i$; comme A est soustendu par les monômes (non commutatifs) en les x_i, y_i, h_i il résulte immédiatement de là et de l'irréductibilité de ρ que V <u>est somme directe des divers</u> $V(\lambda)$ (cf. lemme 24).

Montrons maintenant qu'il existe un poids λ_0 de ρ tel que $\lambda_0+\alpha_i$ ne soit un poids de ρ pour aucune valeur de i. S'il n'en était pas ainsi, alors pour tout poids λ on pourrait trouver un i_1 tel que $\lambda+\alpha_{i_1}$ soit un poids ; appliquant le résultat à $\lambda+\alpha_{i_1}$ on trouverait un i_2 tel que $\lambda+\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}$ soit un poids ; poursuivant le procédé indéfiniment on voit que pour tout entier $n>0$ il existerait un poids de la forme $\lambda+\sum c_i\alpha_i$ avec des entiers $c_i \geqslant 0$ de somme égale à n ; cela contredit évidemment le fait que ρ ne possède qu'un nombre fini de poids, et l'indépendance linéaire des α_i.

Du résultat précédent découle évidemment l'existence d'un vecteur non nul $\underline{a}\in V$ vérifiant des relations

$$\rho(h)\underline{a} = \lambda_0(h)\underline{a} \quad ; \quad \rho(x_i)\underline{a} = 0 . \tag{38}$$

On va montrer que les nombres $\lambda_0(h_i)$ sont des entiers positifs. En effet $\rho(y_i)^k\underline{a}$ appartient à $\lambda_0-k.\alpha_i$; d'où un k tel que $\rho(y_i)^k\underline{a}\neq 0$, $\rho(y_i)^{k+1}\underline{a}=0$; posons alors

$$\underline{a}_p = \rho(y_i)^p\underline{a} \qquad (p=0,\dots,k)$$

et soit E le sous-espace soustendu par ces $\underline{a}_p$; il est trivialement invariant par $\rho(y_i)$; il l'est aussi par $\rho(x_i)$ comme on le voit immédiatement en utilisant $[x_i,y_i]=h_i$; donc, et en vertu de cette dernière relation, la restriction à E de $\rho(h_i)$ a une trace nulle, ce qui donne

$$\sum_{p=0}^{p=k}\left\{\lambda_0(h_i)-p.\alpha_i(h_i)\right\}=0 \quad ;$$

vu que $\alpha_i(h_i)=-a_{ii}=2$ il s'ensuit que

$$\lambda_0(h_i)=k$$

ce qui démontre notre assertion.

Considérons maintenant la représentation ${}^t\rho$ dans le dual V^* de V de l'algèbre opposée à $\underline{A}$; par des raisonnements analogues on démontre l'existence dans V^* d'un vecteur non nul $\underline{a}^*$ vérifiant entre autres les relations

$$\rho(y_i)\underline{a}^* = 0$$

pour tout i. Si donc on considère le coefficient

$$\theta(u) = \langle \rho(u)\underline{a}, \underline{a}^* \rangle$$

de la représentation ρ de $\underline{A}$, on voit que cette forme linéaire θ sur $\underline{A}$ vérifie les identités

(39) $\qquad \theta(uh_i) = \theta(u)\lambda_0(h_i) \quad ; \quad \theta(ux_i) = \theta(y_i u) = 0 \quad ;$

mais en vertu des relations de commutation (35), $\underline{A}$ est soustendu par les monômes de la forme $y_{j_1}\dots y_{j_q} h_1^{m_1}\dots h_r^{m_r} x_{i_1}\dots x_{i_p}$; les relations (39) déterminent donc θ à un facteur constant près, et comme ρ est irréductible on voit, comme dans le Th. 11, que <u>la donnée du poids λ_0 détermine ρ à une équivalence près</u>.

Or comme les $\lambda_0(h_i)$ sont des entiers positifs, il existe une représentation irréductible ρ' de $\mathfrak{g}$ dans un vectoriel V' admettant λ_0 pour plus haut poids. Cette représentation ρ' de $\mathfrak{g}$ définit canoniquement une représentation irréductible ρ' de $\underline{A}$ dans V', et si $\underline{a}'$ est un vecteur non nul de V' appartenant au plus haut poids λ_0 de la représentation ρ' de $\mathfrak{g}$ il est clair qu'on aura

$$\rho'(h)\underline{a}' = \lambda_0(h)\underline{a}' \quad ; \qquad \rho'(x_i)\underline{a}' = 0 \quad ;$$

en vertu du résultat immédiatement précédent on en conclut que la représentation ρ donnée de $\underline{A}$ est équivalente à la représentation ρ' ; cela achève de démontrer la propriété que nous avions en vue, à savoir que $\underline{A}$ ne possède pas d'autre représentation irréductible de dimension finie que celles qui s'obtiennent à partir de représentations de $\mathfrak{g}$.

Bien entendu, ce résultat s'étend de lui-même aux représentations <u>complètement réductibles et de dimension finie</u> de <u>A</u> .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal :

<u>Théorème 13 - Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>et</u> $\mathfrak{g}'$ <u>deux algèbres de Lie semi-simples complexes; soient</u> H_i, X_i, Y_i <u>et</u> H_i', X_i', Y_i' <u>deux systèmes canoniques de générateurs de</u> $\mathfrak{g}$ <u>et</u> $\mathfrak{g}'$ <u>ayant le même nombre d'éléments</u> ; <u>supposons que les systèmes d'entiers de Cartan de</u> $\mathfrak{g}$ <u>et</u> $\mathfrak{g}'$ <u>relativement à ces systèmes soient les mêmes</u> : $a_{ij} = a_{ij}'$; <u>alors il existe un isomorphisme de</u> $\mathfrak{g}$ <u>sur</u> $\mathfrak{g}'$ <u>qui applique</u> H_i, X_i, Y_i <u>sur</u> H_i', X_i', Y_i' .

Reprenons en effet l'algèbre <u>A</u> considérée plus haut ; sa construction ne faisant intervenir que les entiers de Cartan, elle fonctionne pour $\mathfrak{g}'$ comme pour $\mathfrak{g}$. D'autre part, les opérateurs $ad(X_i'), ad(Y_i'), ad(H_i')$ vérifient évidemment les relations de commutation imposées aux x_i, y_i, h_i il existe une représentation linéaire ρ de <u>A</u> dans le vectoriel $\mathfrak{g}'$ qui envoie x_i, y_i, h_i sur ces opérateurs ; comme $\mathfrak{g}'$ est semi-simple sa représentation adjointe, donc aussi la représentation ρ de <u>A</u> , est complètement réductible. D'après le résultat obtenu avant le théorème 13 il existe donc une représentation ρ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans le vectoriel $\mathfrak{g}'$ qui envoie X_i, Y_i, H_i sur $ad(X_i')$, $ad(Y_i')$, $ad(H_i')$; la représentation adjointe de $\mathfrak{g}'$ étant fidèle on en déduit l'existence d'un homomorphisme π de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$ (<u>sur</u> parce que $\mathfrak{g}'$ est engendrée par son système canonique) qui envoie X_i, Y_i, H_i sur X_i', Y_i', H_i' ; mais en sens inverse on a pour les mêmes raisons un homomorphisme π' de $\mathfrak{g}'$ sur $\mathfrak{g}$ qui envoie X_i', Y_i', H_i' sur X_i, Y_i, H_i ; utilisant le grand théorème de Weil sur les homomorphismes réciproques on obtient le théorème 13.

§ 12 - Rationalité des algèbres semi-simples.

Les considérations du § précédent entraînent le résultat suivant, important non seulement en soi mais aussi parce qu'on l'utilisera plus loin dans l'étude des sous-algèbres compactes :

<u>Théorème 14</u> - <u>Toute algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ sur un corps algébriquement clos s'obtient</u>, <u>par extension du corps de base</u>, <u>à partir d'une algèbre semi-simple sur le corps rationnel</u>.

Nous supposerons $\mathfrak{g}$ simple ; cette hypothèse n'est évidemment pas restrictive. Soit alors X_i, Y_i, H_i un système canonique de générateurs de $\mathfrak{g}$, et formons comme au § précédent l'algèbre associative $\underline{A}$ à $3r$ générateurs x_i, y_i, h_i ; comme $\mathfrak{g}$ est simple sa représentation adjointe est irréductible, et fidèle, de sorte que l'on peut trouver une représentation irréductible ρ de $\underline{A}$ dans un vectoriel V ($= \mathfrak{g}$!) de dimension finie telle que $\mathfrak{g}$ soit, à un isomorphisme près, l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs $\rho(x_i)$, $\rho(y_i)$, $\rho(h_i)$. Nous identifierons $\mathfrak{g}$ avec cette dernière algèbre, et désignerons par $\underline{T}$ l'image de $\underline{A}$ par ρ, i.e. l'algèbre associative engendrée par les opérateurs en question. On sait de plus que la représentation ρ s'obtient comme suit à une équivalence près : soit λ le plus haut poids de ρ, et soit θ la forme linéaire sur $\underline{A}$ définie par les conditions

$$\theta(uh_i) = \theta(u)\lambda(h_i) \quad ; \quad \theta(ux_i) = \theta(y_i u) = 0$$

pour tout $u \in \underline{A}$; soit enfin V le sous-espace du dual de $\underline{A}$ formé par les formes $u \longrightarrow \theta(uv)$, $v \in \underline{A}$; alors $\rho(v)$, pour $v \in \underline{A}$, est l'endomorphisme de V qui fait passer de $f(u)$ à $f(uv)$ (translation à droite).

En vertu de la définition de θ, il est clair que V est soustendu par les vecteurs de la forme $(y_{j_1} \cdots y_{j_q})\theta$; par conséquent, on peut trouve une base θ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ de V formée de vecteurs de cette forme. On va montrer que, relativement à cette base, les opérateurs $\rho(x_i)$, $\rho(y_i)$, $\rho(h_i)$ ont des matrices à coefficients <u>rationnels</u>. Pour $\rho(h_i)$ c'est clair, car chaque θ_k appartient à un poids de ρ, de sorte que la matrice de $\rho(h_i)$ est diagonale et à coefficients entiers. Maintenant, posons

$$\rho(x_i)\theta_k = \sum \alpha_{ikh}\theta_h \quad ;$$

pour tout $u \in \underline{A}$ on a donc

$$\theta_k(ux_i) = \sum \alpha_{ikh}\theta_h(u) \quad .$$

Or $\underline{A}$ étant soustendu par les monômes $y_{j_1} \dots x_{i_p}$ et les formes θ_k étant linéairement indépendantes sur K (corps de base) on peut trouver, parmi ces monômes, n éléments u_k tels que $\text{dét}(\theta_k(u_h)) \neq 0$; les α_{ikh} sont alors définis par le système d'équations linéaires

$$\sum \theta_h(u_1)\alpha_{ikh} = \theta_k(u_1 x_i) \quad ;$$

mais il est clair, puisque les $\lambda(h_i)$ sont entiers, que θ prend des valeurs entières sur tout monôme $y_{j_1} \dots x_{i_p}$; il en est de même des θ_k en vertu du fait que, d'après les formules de commutation entre les générateurs de $\underline{A}$ (lesquelles sont à coefficients <u>entiers</u>), on peut exprimer, pour tout monôme u, l'élément $uy_{j_1} \dots y_{j_q}$ comme combinaison linéaire à coefficients <u>entiers</u> de monômes ; or $\theta_k(u)$ est par construction de la forme $\theta(uy_{j_1} \dots y_{j_q})$, d'où notre assertion. Cela fait, on voit que les α_{ikh} sont solutions d'un système linéaire à coefficients rationnels, donc sont rationnels. Une démonstration analogue s'applique aux $\rho(y_i)$.

Cela étant, considérons l'algèbre associative $\underline{T}$ engendrée par les $\rho(x_i)$, $\rho(y_i)$, $\rho(h_i)$; elle possède une base formée de monômes en ces opérateurs, i.e. d'opérateurs ayant des matrices <u>rationnelles</u> ;

il s'ensuit que, relativement à cette base, les constantes de structures de $\underline{T}$ sont rationnelles ; donc $\underline{T}$ se déduit par extension du corps de base d'une algèbre associative sur le corps rationnel. Il s'ensuit évidemment une propriété analogue pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ engendrée dans $\underline{T}$ par les $\rho(x_i)$, $\rho(y_i)$, $\rho(h_i)$, d'où le théorème.

On notera qu'on a d'ailleurs démontré beaucoup plus, à savoir que <u>toute représentation irréductible de</u> $\mathfrak{g}$ <u>s'effectue dans le corps des nombres rationnels</u>.

§ 13 - Applications au groupe de Weyl.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{g}$, α_i un système fondamental de racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$, X_i, Y_i, H_i un système canonique de générateurs correspondant à ce système fondamental. Soit d'autre part s une opération du groupe de Weyl ; s est défini comme opérateur sur le dual de $\mathfrak{h}$, et peut donc être considéré - ce que nous ferons - comme automorphisme de l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{h}$. Cela dit, posons $H_i' = s(H_i)$ et $\alpha_i' = s^{-1}(\alpha_i)$; comme on le sait (§ 6) les α_i' forment un nouveau système fondamental de racines et comme il est clair que $H_i' = H_{\alpha_i'}$ on voit qu'à ce nouveau système fondamental correspond un système canonique de générateurs de $\mathfrak{g}$ de la forme X_i', Y_i', H_i'. Les entiers de Cartan a_{ij}' relatifs au nouveau système sont égaux à ceux du premier système ; en effet, a_{ij} (resp. a_{ij}') est, pour $i \neq j$, le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $\alpha_i + a_{ij}\alpha_j$ (resp. $\alpha_i' + a_{ij}'\,\alpha_j'$) soit racine ; mais on sait (§ 6) que le groupe de Weyl permute les racines, d'où évidemment notre assertion.

Utilisant le théorème 13 on voit donc qu'il existe un automorphisme S de $\mathfrak{g}$ qui applique H_i sur H_i', etc... ; donc :

Théorème 15 - Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, s une opération du groupe de Weyl de par rapport à $\mathfrak{h}$; alors il existe un automorphisme S de $\mathfrak{g}$ qui conserve $\mathfrak{h}$ et qui induit s sur $\mathfrak{h}$.

Remarque - La réciproque du Théorème 15 n'est pas exacte. Soit $A(\mathfrak{g})$ le groupe des autom. de $\mathfrak{g}$; soit $A_o(\mathfrak{g})$ la composante connexe (mort aux algébristes) de l'unité dans $A(\mathfrak{g})$; alors pour qu'un $S \in A(\mathfrak{g})$ laissant invariant $\mathfrak{h}$ induise une substitution du groupe de Weyl il faut et il suffit que S soit dans $A_o(\mathfrak{g})$, résultat plus précis que le Théorème 15, et dont le rédacteur ne connaît pas de démonstration purement algèbrique (à la différence sans doute de Chevalley, qui ferait bien de fournir un rapport sur la question).

Les notations restant les mêmes que celles du début de ce §, considérons une représentation irréductible ρ de $\mathfrak{g}$ dans un vectoriel V de dimension finie ; on sait depuis longtemps que l'ensemble des poids de est invariant par le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$; on va montrer plus :

Théorème 16 - Soient ρ une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}$, λ un poids de ρ, s une opération du groupe de Weyl ; alors λ et $s(\lambda)$ interviennent dans ρ avec la même multiplicité.

Formons en effet comme au § 11 l'algèbre associative $\underline{A}$, engendrée par des éléments x_i, y_i, h_i. Au premier système canonique de générateurs X_i, Y_i, H_i correspond une représentation π de $\underline{A}$ telle que

$$\pi(x_i) = \rho(X_i), \quad \text{etc....} \quad ;$$

de même au système X_i', Y_i', H_i' déduit du premier par l'automorphisme S de $\mathfrak{g}$ correspondant par le théorème 14 à s correspond une représentation π' de $\underline{A}$ telle que $\quad \pi'(x_i) = \rho(X_i'), \quad$ etc ... .

Cela fait, désignons par λ un poids de ρ et par μ la forme linéaire en les h_i définie par $\mu(h_i) = \lambda(H_i)$. Le sous-espace $V(\lambda)$ de la représentation ρ est l'ensemble des solutions $\underline{\underline{a}}$ de $\rho(H_i)\underline{\underline{a}} = \lambda(H_i)\underline{\underline{a}}$, donc

$$\underline{\underline{a}} \in V(\lambda) \text{ équivaut à } \pi(h_i)\underline{\underline{a}} = \mu(h_i)\underline{\underline{a}} \quad ;$$

d'autre part, posant $\lambda' = s(\lambda)$, $V(\lambda')$ est l'ensemble des solutions $\underline{\underline{a}}'$ de $\rho(H_i)\underline{\underline{a}}' = \lambda'(H_i)\underline{\underline{a}}'$, ou encore de $\rho(H_i')\underline{\underline{a}}' = \lambda'(H_i')\underline{\underline{a}}'$; comme $\lambda'(H_i') = \lambda(H_i)$ on voit que

$$\underline{\underline{a}}' \in V(\lambda') \text{ équivaut à } \pi'(h_i)\underline{\underline{a}}' = \mu(h_i)\underline{\underline{a}}' \quad .$$

Pour démontrer que $V(\lambda)$ et $V(\lambda')$ ont même dimension il suffira donc de faire voir que les représentations π et π' de $\underline{\underline{A}}$ sont équivalentes. C'est ce qu'on va faire en calculant leurs "plus hauts" poids.

Pour cela, soit λ_0 le plus haut poids de ρ relativement à la base H_i de $\mathfrak{h}$; soit μ_0 la forme linéaire en les h_i donnée par $\mu_0(h_i) = \lambda_0(H_i)$; si $\underline{\underline{a}}_0 \in V(\lambda_0)$ il est clair qu'on a

$$\pi(h_i)\underline{\underline{a}}_0 = \mu_0(h_i)\underline{\underline{a}}_0 \quad ; \quad \pi(x_i)\underline{\underline{a}}_0 = 0 \quad ,$$

de sorte que le plus haut poids de π est μ_0. De même, si λ_0' est le plu[s] haut poids de ρ relativement à la base H_i' de $\mathfrak{h}$, il est clair que le plus haut poids de π' est donné par $h_i \rightarrow \lambda_0'(H_i')$; mais comme la substitution s du groupe de Weyl envoie H_i sur H_i' et permute entre eux les poids de ρ il est évident que $\lambda_0' = s(\lambda_0)$; donc $\lambda_0'(H_i') = \lambda_0(H_i)$ ce qui montre comme annoncé que les représentations π et π' de $\underline{\underline{A}}$ ont le même plus haut poids, donc sont équivalentes d'après les considération[s] du § 11. Ceci démontre le Théorème 16.

On a même démontré un peu plus ; en effet, π et π' étant équivalente[s] il existe un automorphisme u du vectoriel V dans lequel s'effectue ρ qui transforme $\pi(h_i)$, $\pi(x_i)$, $\pi(y_i)$ en $\pi'(h_i)$, $\pi'(x_i)$, $\pi'(y_i)$;

en d'autres termes, si S désigne l'un des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui induisent s sur $\mathfrak{h}$, il existe un automorphisme u du vectoriel V tel que l'on ait

(40) $$\rho(S(X)) = u \circ \rho(X) \circ u^{-1}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ (en fait on ne l'a démontré que pour X appartenant au système canonique H_i, X_i, Y_i ; mais comme celui-ci engendre $\mathfrak{g}$ ...). Naturellement ce résultat est évident dans la théorie topologique, une fois qu'on sait que S correspond à un automorphisme intérieur du groupe compact simplement connexe dont l'algèbre de Lie complexifiée est $\mathfrak{g}$.

Noter que l'autom. S de $\mathfrak{g}$ se prolonge en un automorphisme (que nous noterons encore S) de l'algèbre enveloppante $\underline{G}$ de $\mathfrak{g}$; la relation (40) est évidemment encore valable pour tout $X \in \underline{G}$. Son utilité est entre autres d'entraîner le résultat suivant. Appelons caractère de ρ la forme linéaire

$$\chi_\rho(x) = \mathrm{Tr}(\rho(x))$$

sur $\underline{G}$; alors χ_ρ est invariant par le groupe de Weyl, i.e. vérifie

(41) $$\chi_\rho(S(x)) = \chi_\rho(x) \quad .$$

En particulier si $\underline{H}$ est la sous-algèbre de $\underline{G}$ engendrée par $\mathfrak{h}$ ($\underline{H}$ s'identifie à l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$, i.e. à l'algèbre - commutative - des polynômes en les H_i) on a $\chi_\rho(s(h)) = \chi_\rho(h)$ pour tout $h \in \underline{H}$ et tout $s \in W$, résultat fort important quand on cherche à calculer à explicitement les caractères en question.

§ 14 - Invariance des sous-algèbres de Cartan.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur un corps algèbriquement clos, et X un élément régulier de $\mathfrak{g}$, i.e. (§ 2) pour lequel la multiplicité de la valeur propre 0 de ad(X) est minimum. On a vu (§ 2) que X engendre une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$; la dimension de celle-c étant égale précisément à la multiplicité r de 0 dans ad(X), on voit que toutes les sous-algèbres de Cartan obtenues de cette façon ont même dimension r . On va maintenant démontrer un résultat qui implique, entre autres choses, que toute sous-algèbre de Cartan peut être obtenue par le procédé en question - ce qu'on ne savait pas jusqu'ici.

<u>Théorème 17</u> - <u>Soient</u> $\mathfrak{h}$ <u>et</u> $\mathfrak{h}'$ <u>deux sous-algèbres de Cartan de</u> $\mathfrak{g}$; <u>il existe un automorphisme de</u> $\mathfrak{g}$ <u>qui applique</u> $\mathfrak{h}$ <u>sur</u> $\mathfrak{h}'$.

La démonstration qu'on va donner est extraite essentiellement des dernières pages du rapport Chevalley.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Nous choisirons un système fondamental de racines, d'où une base H_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ de $\mathfrak{h}$, pour chaque racine α , un X_α appartenant à α . Soit n la dimension de $\mathfrak{g}$.

K désignant le corps de base de $\mathfrak{g}$, on choisira une extension algèbriquement close L de K , ayant sur K le degré de transcendance n , et nous formerons l'algèbre $\mathfrak{g}^L$ déduite de $\mathfrak{g}$ par extension à L du corps de base. Un élément de $\mathfrak{g}^L$ sera dit <u>générique</u> si ses coordonnées par rapport à une base de $\mathfrak{g}$ sont algèbriquement libres sur K ; cette définition ne dépend évidemment pas de la base choisie dans $\mathfrak{g}$.

<u>Lemme 29</u> - <u>Soit</u> D <u>une dérivation nilpotente d'une algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}$; <u>alors</u> exp(D) <u>est un automorphisme de</u> $\mathfrak{g}$.

On a en effet

$$\exp(D)[X,Y] = \sum \frac{D^n}{n!}[X,Y] = \sum_{n=0} \sum_{p+q=n} [D^pX, D^qY]/p!q!$$

d'où le lemme.

En vertu du Lemme 29, on peut, pour toute racine α et tout $t \in L$, former l'automorphisme $\exp(\mathrm{ad}(t\,X_\alpha))$ de $\mathfrak{g}^L$. Nous désignerons par G le groupe engendré par ces automorphismes.

Lemme 30 - Soient des $u_i \in L$ algèbriquement libres sur K ; alors il existe un $s \in G$ qui transforme $\sum u_i H_i$ en un élément générique.

Désignons en effet par $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ $(l = n-r)$ les racines de $\mathfrak{g}$ rangées dans un ordre quelconque, et posons

$$s(t) = s(t_1,\ldots,t_l) = \exp(\mathrm{ad}(t_1X_{\alpha_1}))\ldots\exp(\mathrm{ad}(t_lX_{\alpha_l})) ;$$

la matrice de $s(t)$ par rapport à la base H_i, X_α est évidemment formée de polynômes en les t_j à coefficients dans K ; si donc on pose

$$s(t)(\sum u_iH_i) = \sum P_i(u,t)H_i + \sum Q_j(u,t)X_{\alpha_j}$$

il est clair que les P_i et Q_j sont des polynômes en les u_i, t_j à coefficients dans K, polynômes qui sont d'ailleurs linéaires en les u_i. Pour établir le Lemme 30, il suffit de montrer que ces polynômes sont algèbriquement libres sur K, autrement dit que leur déterminant fonctionnel ne s'annule pas identiquement. On va le calculer pour les valeurs $t_j=0$ des variables.

Posons $P_i(u,t) = \sum u_kP_{ik}(t)$, $Q_j(u,t) = \sum u_kQ_{jk}(t)$; comme $s(t)$ se réduit à l'identité pour $t=0$, on a $P_{ik}(0) = \delta_{ik}$, $Q_{jk}(0)=0$; donc

$$\frac{\partial P_i}{\partial u_k}(u,0) = \delta_{ik} \quad ; \quad \frac{\partial Q_j}{\partial u_k}(u,0) = 0 .$$

Pour calculer les dérivées par rapport à t_j, on peut supposer les autres variables t nulles ; alors $s(t)$ se réduit à $\exp(\mathrm{ad}(t_jX_{\alpha_j}))$; mais on a

$$\mathrm{ad}(t_j X_{\alpha_j})H = -t_j\left[H, X_{\alpha_j}\right] = -t_j\ \alpha_j(H) X_{\alpha_j}$$

d'où, au point considéré,

$$s(t)(\sum u_i H_i) = \sum u_i H_i - t_j \alpha_j\ (\sum u_i H_i) X_{\alpha_j}$$

de sorte que pour cette valeur de t les polynômes P_i, Q_k se réduisent à u_i, $\delta_{jk} t_j \alpha_j\ (\sum u_i H_i)$; on a donc

les dérivées cherchées sont donc données par

$$\frac{\partial P_i}{\partial t_j}(u,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Q_k}{\partial t_j}(u,0) = \delta_{jk}\alpha_j(\sum u_i H_i) \ .$$

En conséquence le déterminant fonctionnel $D(u,t)$ cherché vérifie

$$D(u,0) = \prod \alpha_j(\sum u_i H_i)$$

ce qui prouve qu'il n'est pas nul ; d'où le lemme 30 .

<u>Lemme 31</u> - <u>Toutes les sous-algèbres de Cartan de</u> $\mathfrak{g}$ <u>ont même dimension</u> r ; <u>pour tout élément générique</u> X <u>de</u> $\mathfrak{g}^L$, ad(X) <u>admet</u> 0 <u>pour valeur propre de multiplicité</u> r .

Tout d'abord, soient $X = \sum u_i H_i + \sum v_\alpha X_\alpha$ et $X' = \sum u_i' H_i + \sum v_\alpha' X_\alpha$ deux éléments génériques de $\mathfrak{g}^L$; les u_i, v_α d'une part, les u_i', v_α' d'autre part, étant algébriquement libres sur K , il existe un K-automorphisme de L qui transforme u_i en u_i' , v_α en v_α' ; celui-ci définit un automorphisme de $\mathfrak{g}^L$ qui transforme X en X'. Donc, pour X générique, la multiplicité de 0 dans ad(X) est indépendante de X . D'après le lemme 30, c'est aussi la multiplicité de 0 dans $\mathrm{ad}(\sum u_i H_i)$; les u_i étant algébriquement libres sur K , cette multicité est donc égale à $\dim(\mathfrak{h})$, d'où le lemme.

L'entier r s'appelle le <u>rang</u> de $\mathfrak{g}$; c'est évidemment la multiplicité de la valeur propre 0 de ad(X) pour tout élément <u>régulier</u> X de $\mathfrak{g}$.

Noter que les résultats déjà obtenus prouvent que toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ contient (et donc est engendrée par) un élément régulier H : il suffit de choisir H de telle sorte que les nombres $\alpha(H)$ soient tous $\neq 0$, ce qui est possible sur un corps contenant une infinité d'éléments...

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 17. Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$, H_i et H'_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ des bases de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ correspondant à des systèmes fondamentaux de racines ; choisissons r éléments u_i de L algèbriquement libres sur K, et soient (lemme 30) X et X' deux éléments génériques de $\mathfrak{g}^L$ respectivement transformés de $\sum u_i H_i$ et de $\sum u_i H'_i$ par G. Les valeurs propres non nulles de ad(X) sont celles de $ad(\sum u_i H_i)$, i.e. sont les $\sum u_i \alpha(H_i)$ où α varie dans l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$; de même celles de ad(X') sont les $\sum u_i\, \beta(H'_i)$ où β varie dans l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}'$. Mais X' se déduit de X par un K-automorphisme σ de L ; donc σ transforme les valeurs propres de ad(X) en celles de ad(X'). Il s'ensuit qu'à toute racine α de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ correspond biunivoquement une racine α' de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}'$ telle que $\sum u_i \alpha'(H'_i) = \sigma(\sum u_i\, \alpha(H_i))$ ce qui montre, puisque σ laisse fixes les éléments de K, qu'<u>on peut établir entre les racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ et les racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}'$ une correspondance biunivoque préservant les relations linéaires à coefficients rationnels</u> ; par suite, l'image par cette correspondance d'un système fondamental (α_i) $(1 \leqslant i \leqslant r)$ relatif à $\mathfrak{h}$ est un système fondamental (α'_i) relatif à $\mathfrak{h}'$, et pour ces deux systèmes les entiers de Cartan sont évidemment égaux ; le Théorème résulte donc du Théorème 13.

NBR077 63

Samuel (174)

Le Théorème 17 a la conséquence suivante. Soit X un élément <u>régulier</u> de $\mathfrak{g}$ i.e. (§ 2) tel que la multiplicité de 0 dans ad(X) soit minimum, donc égale à r , rang de $\mathfrak{g}$; on sait (§ 2) que X appartient à une sous-algèbre de Cartan. Donc, <u>pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et tout élément régulier X de $\mathfrak{g}$ il existe un automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui envoie X dans $\mathfrak{h}$</u> .

Soit X un élément arbitraire de $\mathfrak{g}$; on appelle <u>polynôme de Killing</u> de X le polynôme caractéristique dét$(\lambda-\mathrm{ad}(X))$ de l'opérateur ad(X) ; comme il admet 0 pour racine de multiplicité $\geqslant r$, on peut l'écrire sous la forme

$$f_X(\lambda) = \text{dét}(\lambda-\mathrm{ad}(X)) = \lambda^n + \psi_1(X)\lambda^{n-1} + \ldots + \psi_{n-r}(X)\lambda^r$$

où les $\psi_i(X)$ sont évidemment des polynômes en X ; les éléments <u>réguliers</u> sont évidemment ceux pour lesquels $\psi_{n-r}(X) \neq 0$. Soit X un élément régulier ; on peut le plonger dans une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, et alors il est clair que les racines non nulles du polynôme de Killing de X sont les nombres $\alpha(X)$, où α décrit toutes les racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$; on en déduit qu'on peut trouver r racines $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ de ce polynôme telles que toutes les autres soient de la forme $\sum c_i\lambda_i$ avec des c_i entiers tous de même signe ; autrement dit, <u>les racines de f_X forment un système de rang $\leqslant r$ sur le corps rationnel</u>. Nous dirons que X est <u>très régulier</u> si ce rang est exactement r , autrement dit, si f_X possède r racines linéairement indépendantes sur $\underline{Q}$; l'existence de tels éléments est claire puisque le corps de base, étant algébriquement clos, est de dimension infinie sur $\underline{Q}$. Soit $X \in \mathfrak{h}$ très régulier ; on peut trouver r racines α_i de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ telles que les $\alpha_i(X)$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et telles que toute autre racine de f_X soit combinaison à coefficients entiers tous de même signe des nombres $\lambda_i = \alpha_i(X)$ (car on peut d'une part trouver r racines de f_X linéairement indépendantes, et d'autre part en trouver r dont les autres soient combinaisons à coefficients entiers tous de même signe - c'est donc que les r racines qui vérifient cette dernière propriété sont indépendantes sur $\mathbb{Q}$) ; il est clair qu'alors les α_i forment un système fondamental de racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$; de façon plus précise, pour vérifier une relation $\sum \nu_\alpha . \alpha = 0$ entre les racines α, il suffit de vérifier la relation $\sum \nu_\alpha . \alpha(X)=0$, pourvu bien entendu que les ν_α soient rationnels ; en effet, on a des relations $\alpha(X) = \sum c_{\alpha,i}.\alpha_i(X)$ avec des $c_{\alpha,i}$ rationnels et même entiers ; donc $\sum \nu_\alpha .\alpha(X)=0$ implique $\sum c_{\alpha,i}. \nu_\alpha .\alpha_i(X)=0$, donc d'après l'indépendance linéaire des $\alpha_i(X)$, implique $\sum c_{\alpha,i}.\nu_\alpha =0$ pour tout i, d'où évidemment notre assertion. Il en résulte en particulier que, relativement au système fondamental de racines α_i, les entiers de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont définis comme suit : a_{ij} est, pour $i \neq j$, le plus grand entier tel que $\lambda_j + a_{ij}.\lambda_i$ soit encore racine de f_X.

Cela permet de démontrer le résultat relativement intéressant que voici :

<u>Théorème 18</u> - <u>Soient</u> X <u>et</u> X' <u>deux éléments très réguliers de</u> $\mathfrak{g}$; <u>pour qu'ils se déduisent l'un de l'autre par un automorphisme de</u> $\mathfrak{g}$, <u>il faut et il suffit que leurs polynômes de Killing aient les mêmes racines</u>.

Soient en effet $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ les sous-algèbres de Cartan contenant X et X' ; on a vu que toute relation linéaire rationnelle $\sum \nu_\alpha.\alpha = 0$ entre les racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ est équivalente à la relation $\sum \nu_\alpha.\alpha(X)=0$; on en déduit déjà (en considérant les relations $\alpha-\beta = 0$) que les racines non nulles de f_X sont deux à deux distinctes, i.e. toutes simples ; même propriété pour X'. Donc à toute racine α de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ correspond biunivoquement une racine α' de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}'$, par la condition que $\alpha(X) = \alpha'(X')$; il est clair de cette façon qu'on établit entre les α et les α' une correspondance préservant les relations à coefficients rationnels. Donc il existe un automorphisme s de $\mathfrak{g}$ appliquant $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}'$ et X sur un $Y \in \mathfrak{h}'$ tel que $\alpha(X) = \alpha'(Y)$ pour toute racine ; d'où évidemment $Y = X'$, ce qui démontre le théorème.

On voit donc que, pour X et X' très régulier, les relations $\psi_i(X) = \psi_i(X')$ $(1 \leq i \leq n-r)$ sont nécessaires <u>et suffisantes</u> pour que X' se déduise de X par un automorphisme (en général, "extérieur") de $\mathfrak{g}$.

Noter que l'on a du reste $\psi_1(X)=0$, vu que $\psi_1(X)= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X))$ est une forme linéaire <u>invariante</u> sur $\mathfrak{g}$, donc nulle sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

§ 15 - Préliminaires à la construction des formes réelles compactes.

Poursuivant sans faiblir l'exposé des conséquences du Théorème 13, nous allons maintenant nous orienter vers la démonstration (qui sera faite au § suivant) d'un théorème disant que toute algèbre semi-simple complexe possède une forme réelle compacte, résultat dont l'importance est non négligeable. Les purs, que cette intervention des corps réel et complexe ne marquera pas de scandaliser, sont priés de relire le Chapitre des corps ordonnés si ça les amuse (ce que le rédacteur s'est bien gardé de faire) (précisément parce que ça ne l'amuserait pas).

Dans ce § on va seulement donner des résultats préliminaires dont l'intérêt est de rendre naturelle la méthode de démonstration utilisée au § suivant, et aussi de fournir sur les algèbres compactes des renseignements à peu près aussi détaillés que ceux qu'on a obtenus au § 4 pour les algèbres complexes.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe ; par une <u>forme réelle</u> de $\mathfrak{g}$ on entend toute algèbre de Lie réelle dont la complexification est isomorphe à $\mathfrak{g}$; évidemment ces formes réelles sont toutes semi-simples (i.e. ont une forme fondamentale non dégénérée). Par ailleurs, une algèbre semi-simple réelle est dite <u>compacte</u> si sa forme fondamentale est <u>définie négative</u>. $\mathfrak{g}$ désignant une algèbre semi-simple complexe, nous allons montrer comment on obtient toutes les formes réelles compactes de $\mathfrak{g}$, en supposant bien entendu démontrée l'existence de ces dernières. On va en effet établir le résultat suivant :

<u>Théorème 19</u> - <u>Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie semi-simple complexe et</u> $\mathfrak{g}_u$ <u>une forme compacte de</u> $\mathfrak{g}$ (considérée comme sous-algèbre réelle de $\mathfrak{g}$). <u>Alors il existe une sous-algèbre de Cartan</u> $\mathfrak{h}$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>et, pour toute racine</u> α <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>par rapport à</u> $\mathfrak{h}$, <u>un élément</u> X_α <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>appartenant à</u> α, <u>de telle sorte que</u> $\mathfrak{g}_u$ <u>soit l'ensemble des éléments de</u> $\mathfrak{g}$ <u>de la forme</u> $\sum u_\alpha H_\alpha + \sum v_\alpha X_\alpha$ <u>avec</u> u_α <u>imaginaire pur et</u> $v_{-\alpha} = -\overline{v_\alpha}$.

Pour démontrer ce théorème, considérons une forme réelle $\mathfrak{g}_u$ de $\mathfrak{g}$ (on ne suppose pas $\mathfrak{g}_u$ compacte pour le moment), et désignons par $\mathfrak{g}_0$ l'algèbre réelle déduite de $\mathfrak{g}$ par restriction du corps des scalaires ; on peut identifier $\mathfrak{g}_u$ à une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_0$, avec $\dim(\mathfrak{g}_0) = 2.\dim(\mathfrak{g}_u)$; si l'on désigne par J l'endomorphisme du vectoriel $\mathfrak{g}_0$ qui, dans $\mathfrak{g}$, se réduit à la multiplication par $i = (-1)^{\frac{1}{2}}$ (on ne précise pas le signe ...) alors il est clair que $\mathfrak{g}_0$ est somme directe de $\mathfrak{g}_u$ et de $J(\mathfrak{g}_u)$; tout $X \in \mathfrak{g}$ s'écrit donc avec unicité sous la forme

$$X = Y + J(Z) \qquad \text{où} \qquad Y, Z \in \mathfrak{g}_u \ ;$$

si l'on pose

$$\bar{X} = Y - J(Z)$$

il n'est pas difficile de vérifier que $X \to \bar{X}$ est un <u>automorphisme involutif de</u> $\mathfrak{g}_o$, et $\mathfrak{g}_u$ n'est autre que l'ensemble des points fixes de cet automorphisme.

D'autre part, nous appellerons <u>sous-algèbres de Cartan</u> de $\mathfrak{g}_u$ toute sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{h}_u$ de $\mathfrak{g}_u$ telle que, pour tout $H \in \mathfrak{h}_u$, l'opérateur $ad(H)$ soit semi-simple (il importe peu de préciser si l'on considère $ad(H)$ dans $\mathfrak{g}$ ou seulement dans $\mathfrak{g}_u$; rappelons qu'un endomorphisme A d'un vectoriel V sur un corps k est semi-simple si l'algèbre associative engendrée par A est semi-simple ; si l'on étend le corps k, cette propriété est conservée trivialement vu le critère de Cartan pour les algèbres associatives ; mais bien entendu si k n'est pas algébriquement clos la semi-simplicité de A n'implique pas la réductibilité à la forme diagonale !). Si $\mathfrak{h}_u$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_u$, désignons par $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{h}_u$, ensemble des $H + iH'$ avec $H, H' \in \mathfrak{h}_u$; il est évident que pour tout $H \in \mathfrak{h}$, $ad(H)$ est semi-simple dans $\mathfrak{g}$, que $\mathfrak{h}$ est abélienne, et même que $\mathfrak{h}$ est abélienne maximale dans $\mathfrak{g}$ (si un système linéaire homogène à coefficients dans k a une solution dans $K \supset k$, il a une solution dans k...); autrement dit, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}_u$ soit <u>compacte</u>. La restriction à $\mathfrak{g}_u$ de la forme fondamentale de $\mathfrak{g}$ est donc définie négative, d'où une structure d'espace euclidien sur $\mathfrak{g}_u$; en raison de l'identité $\langle ad(X)Y, Z\rangle = -\langle Y, ad(X)Z\rangle$ on voit que si l'on choisit une base orthonormale de $\mathfrak{g}_u$ la matrice de $ad(X)$ par rapport à cette base sera, pour $X \in \mathfrak{g}_u$, réelle et symétrique gauche ; donc celle de $i.ad(X)$ sera hermitienne ; il s'ensuit que $ad(X)$ est semi-simple pour tout $X \in \mathfrak{g}_u$ si $\mathfrak{g}_u$ est compacte. Pour une algèbre semi-simple réelle compacte, les sous-algèbres de Cartan ne sont donc autre que les sous-algèbres abéliennes maximales de $\mathfrak{g}_u$.

Supposons toujours $\mathfrak{g}_u$ compacte et choisissons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_u$ de $\mathfrak{g}_u$; soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan engendrée par $\mathfrak{h}_u$ dans $\mathfrak{g}$. Soient α une racine de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$, et X_α un élément de $\mathfrak{g}$ appartenant à α . Comme $\mathfrak{h}$ est évidemment invariante (globalement) par $X \rightarrow \overline{X}$ il est clair que

(42) $$\overline{\alpha}(H) = \overline{\alpha(\overline{H})}$$

est encore une racine et que $\overline{X_\alpha}$ appartient à cette racine (ceci ne suppose pas $\mathfrak{g}_u$ compacte) ; de plus, pour $H \in \mathfrak{h}_u$, $\alpha(H)$ est une valeur propre de $ad(H)$ donc, puisque $ad(H)$ est réelle et symétrique gauche, est imaginaire pur ; il existe donc un élément H^u_α de $\mathfrak{h}_u$ tel que $\alpha(H) = i.\langle H, H^u_\alpha \rangle$ pour tout $H \in \mathfrak{h}_u$ donc aussi pour tout $H \in \mathfrak{h}$; il s'ensuit immédiatement que l'élément H_α de $\mathfrak{h}$ qui, d'après les résultats du § 4, définit la racine α , vérifie

(43) $$i.H_\alpha \in \mathfrak{h}_u \quad , \quad \text{d'où} \quad \overline{H_\alpha} = -H_\alpha \quad ;$$

enfin, la relation (42) s'écrit, pour $H \in \mathfrak{h}_u$, sous la forme $\overline{\alpha}(H) = -\alpha(H)$ puisque $\overline{H} = H$ et puisque $\alpha(H)$ est imaginaire pur ; par suite, de la compacité de $\mathfrak{g}_u$ résulte que

(44) $$\overline{\alpha} = -\alpha \quad .$$

Choisissons alors un système fondamental de racines, et ordonnons en conséquence les racines α de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$; choisissons arbitrairement les X_α correspondant aux racines α positives ; alors il est clair d'après les résultats précédents qu'on peut prendre

(45) $\qquad X_{-\alpha} = -\overline{X_\alpha}$

Comme les H_α et les X_α soustendent $\mathfrak{g}$ (sur le corps complexe) et comme $\mathfrak{g}_u$ est soustendu par les éléments de la forme $X + \overline{X}$, on voit en vertu de (43) et (45) que $\mathfrak{g}_u$ est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des éléments

$$(-1)^{\frac{1}{2}} H_\alpha \quad ; \quad X_\alpha - X_{-\alpha} \quad ; \quad (-1)^{\frac{1}{2}} (X_\alpha + X_{-\alpha}) \quad ;$$

ceci démontre le Théorème 19.

Nous allons maintenant montrer que, <u>les X_α étant choisis d'après (45), on peut de plus leur imposer de vérifier la condition</u> $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. En effet si cette condition n'est pas remplie on aura en tout cas une relation de la forme

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \lambda . H_\alpha \quad ;$$

il est facile de calculer λ ; en effet, si H'_α est l'élément de $\underline{h}$ tel que $\alpha(H) = \langle H, H'_\alpha \rangle$ on a (§ 4, Lemme 14) $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle . H'_\alpha$ et par ailleurs $H_\alpha = 2H'_\alpha / \alpha(H'_\alpha)$; donc

$$\lambda = \langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle . \langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle / 2 \quad .$$

On va montrer que λ est <u>positif</u>. Comme on a $\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle > 0$ (§ 5, Lemme 20) il suffit d'établir que $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle$ est positif ; ~~or comme~~ $\cancel{X_\alpha = X_{-\alpha}}$ ~~est positif~~ ; or comme $X_\alpha - X_{-\alpha}$ est dans $\mathfrak{g}_u$ on a $\langle X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\alpha - X_{-\alpha} \rangle < 0$; le premier membre étant égal à $-2\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle$ en vertu du fait que X_α et $X_{-\alpha}$ sont isotropes, notre assertion est démontrée.

Cela dit, remplaçons X_α et $X_{-\alpha}$ par $\lambda^{-\frac{1}{2}} X_\alpha$ et $\lambda^{-\frac{1}{2}} X_{-\alpha}$; cela ne détruit évidemment pas (45), d'où comme annoncé la possibilité de choisir les X_α de telle sorte que l'on ait

(45) $\qquad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha \quad .$

On notera que, si l'on multiplie X_α par un scalaire ρ, il faut multiplier $X_{-\alpha}$ par $\overline{\rho}$ pour préserver (43) en sorte que si l'on veut préserver (43) <u>et</u> (45) on doit prendre ρ de module 1. Par conséquent, <u>les X_α sont déterminés à des facteurs de module 1 près pour</u> $\alpha > 0$.

Noter d'autre part qu'en transformant la relation $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta}$ par $X \to \overline{X}$ il vient, en tenant compte de (43), la relation

(46) $$N_{-\alpha,-\beta} = -\overline{N_{\alpha\beta}} .$$

Nous allons maintenant démontrer, pour les formes compactes, un théorème d'invariance analogue à celui qu'on a établi pour les sous-algèbres de Cartan :

<u>Théorème 20 - Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe ; deux formes réelles compactes de $\mathfrak{g}$ peuvent toujours se déduire l'une de l'autre par un automorphisme de $\mathfrak{g}$</u>.

Soient en effet $\mathfrak{g}_u$ et $\mathfrak{g}'_u$ deux telles formes (plongées dans $\mathfrak{g}$, bien entendu). On peut les construire d'après le Théorème précédent à partir de sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$. Or il existe un automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui envoie $\mathfrak{h}'$ sur $\mathfrak{h}$; on peut donc supposer $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$, ce que nous ferons.

Dans ces conditions, le Théorème 19 montre qu'on peut supposer $\mathfrak{g}_u$ soustendue par les $(-1)^{\frac{1}{2}} H_\alpha$, $X_\alpha - X_{-\alpha}$, $(-1)^{\frac{1}{2}}(X_\alpha + X_{-\alpha})$ en choisissant convenablement les X_α, et l'on peut supposer réalisées les relations

(45) $$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \overline{H_\alpha}$$

(46) $$N_{-\alpha,-\beta} = -\overline{N_{\alpha\beta}} ;$$

de plus les X_α sont pour $\alpha > 0$ déterminés par $\mathfrak{g}_u$ à des facteurs de module 1. De même on peut supposer $\mathfrak{g}'_u$ engendrée par les $(-1)^{\frac{1}{2}} H_\alpha$, $X'_\alpha - X'_{-\alpha}$, $(-1)^{\frac{1}{2}}(X'_\alpha + X'_{-\alpha})$ avec des relations analogues à (45) et (46), à savoir

(45') $\qquad [X'_\alpha , X'_{-\alpha}] = H_\alpha$;

(46') $\qquad N'_{-\alpha,-\beta} = -\overline{N'_{\alpha\beta}}$;

ici encore les X'_α sont pour $\alpha > 0$ déterminés par $\mathfrak{g}'_u$ à des facteurs de module 1 . Si nous établissons l'existence d'un automorphisme de $\mathfrak{g}$ envoyant H_α sur H_α et chaque X_α sur X'_α (en choisissant convenablement ces éléments) il est clair que le théorème sera démontré.

Or on a des relations de la forme

$$X'_\alpha = c_\alpha . X_\alpha$$

avec des scalaires c_α. Comme les X'_α sont déterminés modulo des facteurs de module 1 on peut supposer

(47) $\qquad c_\alpha > 0$

pour toute racine $\alpha > 0$. Or (45) et (45') montrent que l'on a

(48) $\qquad c_\alpha . c_{-\alpha} = 1$;

par suite, (47) est vrai pour toute racine α , positive ou non.

D'autre part, il est immédiat de voir que les constantes de structures $N'_{\alpha\beta}$ sont données par les relations

$$N'_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta} \frac{c_\alpha . c_\beta}{c_{\alpha+\beta}} \quad ;$$

la relation (46') s'écrit alors

$$N_{-\alpha,-\beta} . c_{-\alpha} c_{-\beta} / c_{-\alpha-\beta} = -\overline{N_{\alpha\beta}} . c_\alpha c_\beta / c_{\alpha+\beta} \quad ;$$

tenant compte de (48) il vient donc

$$c_\alpha c_\beta / c_{\alpha+\beta} = c_{-\alpha} c_{-\beta} / c_{-\alpha-\beta} \quad ;$$

mais d'après (47) et (48) le premier membre de cette relation est > 0 et égal à l'inverse du second ; donc $c_\alpha c_\beta / c_{\alpha+\beta} = 1$, en sorte que $N'_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}$. Cela démontre évidemment l'existence d'un automorphisme de $\mathfrak{g}$ envoyant X_α sur X'_α pour toute racine α , et H_α sur H_α, d'où le Théorème.

Le Théorème 20 est naturellement faux si l'on omet l'hypothèse de compacité. Par exemple, les formes de Killing de deux formes réelles de $\mathfrak{g}$ peuvent avoir des signatures différentes, comme l'examen des divers groupes orthogonaux permet de le constater ; on ne peut donc pas dire que deux formes réelles de $\mathfrak{g}$ soient isomorphes (même en faisant abstraction de la façon dont elles sont "plongées" dans $\mathfrak{g}$).

<u>Corollaire</u> - <u>Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie semi-simple réelle compacte</u>, <u>et</u> $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ <u>deux sous-algèbres abéliennes maximales de</u> $\mathfrak{g}$; <u>il existe un automorphisme de</u> $\mathfrak{g}$ <u>qui applique</u> $\mathfrak{h}$ <u>sur</u> $\mathfrak{h}'$. <u>En particulier</u>, <u>tout</u> $X \in \mathfrak{g}$ <u>est transformé d'un élément de</u> $\mathfrak{h}$ <u>par un automorphisme de</u> $\mathfrak{g}$.

En effet, soit $\hat{\mathfrak{g}}$ la complexification de $\mathfrak{g}$, et soient $\hat{\mathfrak{h}}$, $\hat{\mathfrak{h}}'$ celles de $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$, et appliquons le Théorème 20 en prenant $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_u' = \mathfrak{g}$; désignant par X_α les éléments de $\hat{\mathfrak{g}}$ qui vérifient le Théorème 19 pour $\hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}$ et $\hat{\mathfrak{h}}$, et par X_α' ceux qui vérifient le Théorème 19 pour $\hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}$ et $\hat{\mathfrak{h}}'$ on voit qu'il y a un automorphisme S de $\mathfrak{g}$ qui envoie $\hat{\mathfrak{h}}$ sur $\hat{\mathfrak{h}}'$ (donc iH_α sur iH_α'), et X_α sur X_α' si ces éléments sont bien choisis. Il est alors clair que S conserve $\mathfrak{g}$, d'où le corollaire.

§ 16 - Propriétés des constantes $N_{\alpha\beta}$; existence de formes réelles compactes.

Dans ce § on désigne par $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre semi-simple complexe $\mathfrak{g}$; pour chaque racine α on choisit un X_α appartenant à α , de telle sorte que l'on ait

(~~50~~ 49) $$\left[X_\alpha, X_{-\alpha}\right] = H_\alpha \quad ;$$

on ne fait dans les lemmes 32 et 33 aucune autre hypothèse sur ces X_α .

Lemme 32 -Soient α, β, γ trois racines non nulles telles que $\alpha+\beta+\gamma=0$. Alors on a

$$N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta} \quad .$$

On a en effet, puisque $ad(X_\alpha)$ est une dérivation :

$$\begin{aligned}[X_\alpha,[X_\beta, X_\gamma]] &= [[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma] + [X_\beta,[X_\alpha, X_\gamma]] \\ &= N_{\alpha\beta}[X_{-\gamma},X_\gamma] + N_{\alpha\gamma}[X_\beta, X_{-\beta}] \\ &= -N_{\alpha\beta} H_\gamma + N_{\alpha\gamma} H_\beta \quad ;\end{aligned}$$

mais d'autre part

$$[X_\alpha ,[X_\beta, X_\gamma]] = [X_\alpha, N_{\beta\gamma} X_{-\alpha}] = N_{\beta\gamma} H_\alpha = -N_{\beta\gamma} H_\beta - N_{\beta\gamma} H_\gamma \quad ;$$

comparant les résultats obtenus il vient

$$(N_{\alpha\beta} - N_{\beta\gamma})H_\gamma = (N_{\alpha\gamma} + N_{\beta\gamma})H_\beta \quad ;$$

comme β et γ ne sont pas proportionnelles (sinon on aurait soit $\beta=\gamma$ d'où $\alpha=-2\beta$, absurde, ou bien $\beta=-\gamma$ d'où $\alpha=0$, contraire à l'hypothèse) on voit que $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma}$, d'où le résultat par permutation circulaire.

Lemme 33 - Soient α, β, γ trois racines non nulles telles que $\alpha+\beta+\gamma=0$. Soient p et q le plus petit et le plus grand entier k tel que $\beta+k.\alpha$ soit racine. Alors on a

$$N_{\alpha\beta} N_{-\alpha,-\gamma} = -q(p-1) \quad .$$

Posons en effet

$$\underline{a}_k = ad(X_\alpha)^k X_\beta \qquad \text{pour} \quad k \geqslant 0 \quad ;$$

$$\underline{a}_k = ad(X_{-\alpha})^{-k} X_\beta \qquad \text{pour} \quad k < 0 \quad ,$$

d'où une série de vecteurs $\underline{a}_p,\dots,\underline{a}_q$ dans $\underline{g}$, avec $\underline{a}_0 = X_\beta$. D'après le Lemme 17 du § 4 on sait que $\beta+k.\alpha$ est racine pour $p \leqslant k \leqslant q$;

en vertu du fait général que $N_{\alpha\beta}$ est $\neq 0$ si $\alpha+\beta$ est racine (Lemme 19) on voit que les $\underline{a}_k$ sont $\neq 0$ pour $p \leqslant k \leqslant q$. Comme de plus les racines sont de multiplicité un, on a des relations de la forme

$$\mathrm{ad}(X_\alpha)\underline{a}_k = \mu_k \underline{a}_{k+1} \qquad ; \qquad \mathrm{ad}(X_{-\alpha})\underline{a}_k = \nu_k \underline{a}_{k-1}$$

avec bien entendu

(50) $$\mu_q = 0 \qquad ; \qquad \nu_p = 0 \quad ;$$

on a donc aussi

(51) $$\mathrm{ad}(X_{-\alpha})\mathrm{ad}(X_\alpha)\underline{a}_k = \rho_k \underline{a}_k$$

avec

(52) $$\rho_k = \nu_{k+1}\,\mu_k \quad .$$

Cela dit, il vient

$$\begin{aligned}\mu_k \mathrm{ad}(X_{-\alpha})\underline{a}_{k+1} &= \mathrm{ad}(X_{-\alpha})\mathrm{ad}(X_\alpha)\underline{a}_k = -\mathrm{ad}(H_\alpha)\underline{a}_k + \mathrm{ad}(X_\alpha)\mathrm{ad}(X_{-\alpha})\underline{a}_k \\ &= -\left[\beta(H_\alpha)+k.\alpha(H_\alpha)\right]\underline{a}_k + \mu_{k-1}\,\nu_k\,\underline{a}_k\end{aligned}$$

et comme le premier membre vaut $\mu_k\,\nu_{k+1}\underline{a}_k$ il vient, d'après (54), la relation

$$\rho_k = \rho_{k-1} - \left[\beta(H_\alpha)+k.\alpha(H_\alpha)\right]$$

ou, en tenant compte du fait que $\alpha(H_\alpha)=2$:

$$\rho_{k-1} = \rho_k + \beta(H_\alpha)+2k \quad .$$

Comme (50) implique $\rho_q=0$ on voit que

$$\rho_k = \sum_{j=k+1}^{j=q} \left\{\beta(H_\alpha) + 2j\right\} \; ;$$

en particulier

$$\rho_o = \sum_1^q \left\{\beta(H_\alpha)+ 2j\right\} = q.\beta(H_\alpha)+ q(q+1) \; .$$

Mais le lemme 17 joint au fait que $\alpha(H_\alpha)=2$ montre que

$$\beta(H_\alpha) = -(p+q) \quad ;$$

par conséquent il vient $\rho_o = q(q+1)-q(p+q) = -q(p-1)$, i.e.

(53) $$\mathrm{ad}(X_{-\alpha})\mathrm{ad}(X_\alpha)X_\beta = -q(p-1)X_\beta \quad .$$

Or on a directement

$$\mathrm{ad}(X_{-\alpha})\mathrm{ad}(X_\alpha)X_\beta = N_{\alpha\beta}\left[X_{-\alpha},X_{\alpha+\beta}\right] = N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}X_\beta \quad ;$$

donc il vient

(54) $$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta} = -q(p-1) \quad .$$

Cela démontre le Lemme 33.

<u>Lemme 34</u> - <u>On peut choisir les</u> X_α <u>de telle sorte qu'on ait</u> (49) <u>et en outre</u>

(55) $$N_{-\alpha,-\beta} = N_{\alpha\beta} \quad ;$$

<u>les constantes</u> $N_{\alpha\beta}$ <u>sont alors imaginaires pures.</u>

Soit en effet X_i, Y_i, H_i un système canonique de générateurs ; il en est évidemment de même du système $X_i' = Y_i$, $Y_i' = X_i$, $H_i' = -H_i$, et il est trivial de vérifier que les entiers de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont les mêmes pour ces deux systèmes. Par suite il existe un automorphisme S de $\mathfrak{g}$ qui envoie X_i, Y_i, H_i sur Y_i, X_i, $-H_i$, donc qui envoie H_α sur $-H_\alpha$, donc qui envoie X_α sur un multiple de $X_{-\alpha}$;

$$S(X_\alpha) = X_{-\alpha}\cdot u_\alpha$$

(on suppose les X_α choisis de façon à vérifier (51) seulement) ; remplaçons alors X_α par $Y_\alpha = \rho_\alpha \cdot X_\alpha$; pour préserver (51) il faut que $\rho_\alpha \cdot \rho_{-\alpha} = 1$; de plus on a

$$S(Y_\alpha) = \rho_\alpha u_\alpha X_{-\alpha} = \frac{\rho_\alpha}{\rho_{-\alpha}} u_\alpha Y_{-\alpha} = \rho_\alpha^2 u_\alpha Y_{-\alpha} \quad ;$$

cela dit, prenons $\rho_\alpha = u_\alpha^{-\frac{1}{2}}$ pour $\alpha > 0$ (c'est possible, le corps de base étant algèbriquement clos) ; on aura alors $S(Y_\alpha) = Y_{-\alpha}$ pour $\alpha > 0$; mais comme on a évidemment $S^2=1$ cette relation sera vraie aussi pour $\alpha < 0$.

En définitive, on peut choisir les X_α de telle sorte qu'on ait à la fois (49) et $S(X_\alpha) = X_{-\alpha}$; comme S est un automorphisme cela entraîne trivialement la relation $N_{-\alpha,-\beta} = N_{\alpha\beta}$. Mais posant $\alpha+\beta = -\gamma$ on a d'après le lemme précédent

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\gamma} = -q(p-1) < 0$$

et d'autre part $N_{-\alpha,-\gamma} = N_{\alpha\gamma}$, donc $= N_{\beta\alpha}$ d'après le lemme 32 ; finalement il vient

(56) $$(N_{\alpha\beta})^2 = -q(p-1)$$

de sorte que les $N_{\alpha\beta}$ sont imaginaires purs.

<u>Théorème 21</u> - <u>Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$</u> . <u>Pour chaque racine α de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$</u> , <u>choisissons un X_α appartenant à α de telle sorte qu'on ait les relations</u>

(49) $$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$$

(55) $N_{-\alpha,-\beta} = N_{\alpha\beta}$ <u>dès que</u> $\alpha+\beta$ <u>est racine</u>.

<u>Alors l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}$ qui sont de la forme</u>

$$\sum u_\alpha \cdot H_\alpha + \sum v_\alpha \cdot X_\alpha$$

<u>avec</u>

$$\overline{u_\alpha} = -u_\alpha \quad ; \quad v_{-\alpha} = -\overline{v_\alpha}$$

<u>est une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$</u> .

En effet, on sait d'après le lemme précédent que les $N_{\alpha\beta}$ sont imaginaires purs, d'où $N_{\alpha\beta} = (-1)^{\frac{1}{2}} M_{\alpha\beta}$ avec des $M_{\alpha\beta}$ <u>réels</u>. Cela dit, il est clair que l'ensemble $\mathfrak{g}_u$ du théorème est soustendu sur <u>R</u> par les éléments

$$(-1)^{\frac{1}{2}} H_\alpha \; ; \quad U_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha} \quad ; \quad V_\alpha = (X_\alpha + X_{-\alpha})/i \quad ; \qquad (\alpha > 0)$$

or, on a les formules de commutation suivantes :

$$\begin{cases} [iH_\alpha, U_\beta] = -\beta(H_\alpha).V_\beta & ; \\ [iH_\alpha, V_\beta] = \beta(H_\alpha).U_\beta & ; \\ \left.\begin{array}{l} [U_\alpha, U_\beta] = -M_{\alpha\beta}V_{\alpha+\beta} + M_{\alpha,-\beta}V_{\alpha-\beta} \quad ; \\ [V_\alpha, V_\beta] = M_{\alpha\beta}V_{\alpha+\beta} + M_{\alpha,-\beta}V_{\alpha-\beta} \quad ; \\ [U_\alpha, V_\beta] = M_{\alpha\beta}U_{\alpha+\beta} + M_{\alpha,-\beta}U_{\alpha-\beta} \quad ; \end{array}\right\} & (\alpha-\beta>0) \\ [U_\alpha, V_\alpha] = -2\, iH_\alpha & ; \end{cases}$$

cela montre que $\mathfrak{g}_u$ est une algèbre de Lie réelle ; comme la dimension réelle de $\mathfrak{g}_u$ est évidemment égale à la dimension complexe de $\mathfrak{g}$, on voit donc que $\mathfrak{g}_u$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$. Donc la forme fondamentale de $\mathfrak{g}_u$ est induite par celle de $\mathfrak{g}$.

Or soit $X = \sum u_\alpha H_\alpha + \sum v_\alpha X_\alpha$ un élément de $\mathfrak{g}_u$; vu que X_α est orthogonal à X_β pour $\alpha+\beta$ non nul, on voit immédiatement que

$$\langle X,X\rangle = \sum \langle H_\alpha, H_\beta\rangle . u_\alpha u_\beta + \sum \langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle . v_\alpha v_{-\alpha} \qquad ;$$

étant donné que le premier $\sum$ est défini positif lorsque les u_α sont réels (Lemme 20) on voit qu'il est défini négatif pour X dans $\mathfrak{g}_u$; d'autre part, pour $X \in \mathfrak{g}_u$ on a $v_\alpha v_{-\alpha} = -|v_\alpha|^2$; donc pour achever la démonstration tout revient à établir que les produits scalaires $\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle$ sont >0.

Or soit H'_α l'élément de $\mathfrak{h}$ tel que $\alpha(H) = \langle H, H'_\alpha\rangle$; on a les relations $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle . H'_\alpha$ et $H_\alpha = 2H'_\alpha/\alpha(H'_\alpha)$; par suite et en tenant compte de (51) il vient $\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle = 2/\alpha(H'_\alpha)$, en sorte que la propriété à démontrer résulte encore du Lemme 20 ; ce qui achève la démonstration.

Samuel (174)

NBR 077 78

§ 17 - Applications aux algèbres semi-simples réelles.

Soit $\mathfrak{g}_0$ une algèbre semi-simple réelle. On a alors dans sa complexification $\mathfrak{g}$ un semi-automorphisme involutif $X \to \bar{X}$ dont l'ensemble des points fixes est précisément $\mathfrak{g}_0$; nous désignerons encore ce semi-automorphisme par σ_0. On va établir le résultat suivant :

Théorème 22 - Soit $\mathfrak{g}$ la complexification d'une algèbre semi-simple réelle $\mathfrak{g}_0$; il existe alors une forme compacte $\mathfrak{g}_u$ de $\mathfrak{g}$ invariante globalement par σ_0 ; $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_u$ est l'ensemble des points fixes d'un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_0$; enfin $\mathfrak{g}_0$ est somme directe du sous-espace $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_u$ et d'une sous-algèbre résoluble $\mathfrak{n}_0$ de $\mathfrak{g}_0$.

Le résultat précédent est à la base : 1° du théorème disant que les propriétés topologiques des groupes de Lie se déduisent trivialement de celles de leurs ~~sous-sup~~ sous-groupes compacts maximaux ; 2° de la théorie des espaces de Riemann symétriques ; 3° de celle des fonctions sphériques et représentations de dimension infinie. C'est dire qu'il a une certaine importance.

La démonstration se décompose naturellement en trois parties.

I - Existence de $\mathfrak{g}_u$ (ce qui suit est la reproduction textuelle de la démonstration de Mostow).

Choisissons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ (il en existe ; prendre un $H \in \mathfrak{g}_0$ régulier, ce qui est possible puisque ces éléments sont définis dans $\mathfrak{g}$ par une inégalité algèbrique, et l'ensemble $\mathfrak{h}_0$ des $H' \in \mathfrak{g}_0$ qui commutent à H). Nous désignerons par $\mathfrak{h}$ sa complexification, qui est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (§ 15). Comme on l'a vu au § 15, à toute racine α de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ correspond une racine $\bar{\alpha}$ définie par la condition que

(57) $\qquad \bar{\alpha}(H) = \overline{\alpha(H)} \qquad$ pour tout $H \in \mathfrak{h}_0$;

posant $\alpha(H) = \langle H, H'_\alpha \rangle$ il est clair que $\overline{H'_\alpha} = H'_{\bar{\alpha}}$; comme $H_\alpha = 2H'_\alpha/\alpha(H'_\alpha)$ il s'ensuit immédiatement que

(58) $$\overline{H_\alpha} = H_{\bar{\alpha}} .$$

Cela dit, nous choisirons pour chaque racine α un élément X_α de telle sorte qu'on ait (Lemme 34)

(49) $$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha \quad ;$$

(55) $$N_{-\alpha,-\beta} = N_{\alpha\beta} \quad .$$

On va montrer qu'on peut imposer aux X_α des conditions supplémentaires.

Lemme 35 - Les relations (49) et (55) impliquent

$$N_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \pm N_{\alpha\beta} \quad .$$

En effet, soient p et q les entiers minimum et maximum tels que $\beta + k.\alpha$ soit racine ; on a la relation (56) du § précédent :

(56) $$(N_{\alpha\beta})^2 = -q(p-1) \quad ;$$

mais il est évident par transport de structure que si l'on remplace α et β par $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$, p et q ne sont pas changés ; donc $(N_{\alpha\beta})^2 = (N_{\bar{\alpha}\bar{\beta}})^2$, d'où le lemme.

Lemme 36 - On peut choisir les X_α de telle sorte qu'on ait (49), (55) et

(59) $$\overline{X_\alpha} = \tau_\alpha . X_{\bar{\alpha}} \qquad \text{avec} \qquad |\tau_\alpha| = 1 .$$

En effet, on a déjà des relations

(60) $$\overline{X_\alpha} = \rho_\alpha . X_{\bar{\alpha}}$$

avec des facteurs $\rho_\alpha \neq 0$. On va montrer que les éléments

(61) $$Y_\alpha = |\rho_\alpha|^{-\frac{1}{2}} . X_\alpha$$

vérifient les conditions du Lemme.

Tout d'abord, en itérant (60) il vient trivialement

(62) $$\overline{\rho_\alpha} . \rho_{\bar{\alpha}} = 1 \quad ;$$

donc $\overline{Y_\alpha} = |\rho_\alpha|^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho_\alpha \cdot X_{\overline{\alpha}} = |\rho_\alpha|^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho_\alpha \cdot |\rho_{\overline{\alpha}}|^{\frac{1}{2}} \cdot Y_{\overline{\alpha}} = \dfrac{\rho_\alpha}{|\rho_\alpha|} \cdot Y_{\overline{\alpha}}$

ce qui montre déjà que (59) est vérifié.

D'autre part, transformons la relation $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ par σ_0 ; il vient d'après (60) : $\tau_\alpha \cdot \tau_{-\alpha} \cdot H_{\overline{\alpha}} = \overline{H_\alpha}$, d'où d'après (58) :

(63) $\tau_\alpha \cdot \tau_{-\alpha} = 1$.

Il s'ensuit évidemment que les Y_α vérifient aussi (49).

Enfin, transformons par σ_0 la relation $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha\beta} \cdot X_{\alpha+\beta}$; il vient aussitôt en tenant compte de (60) la relation $\tau_{\alpha+\beta} \cdot \overline{N_{\alpha\beta}} = \tau_\alpha \cdot \tau_\beta \cdot N_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}$; comme (Lemme 35) $N_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = N_{\alpha\beta}$ au signe près, et comme $N_{\alpha\beta}$ est imaginaire pur (Lemme 34) on voit que $\tau_{\alpha+\beta} = \pm \tau_\alpha \cdot \tau_\beta$; donc $|\tau_{\alpha+\beta}|^{-\frac{1}{2}} = |\tau_\alpha|^{-\frac{1}{2}} \cdot |\tau_\beta|^{-\frac{1}{2}}$; il s'ensuit que le passage des X_α aux Y_α ne modifie pas les constantes $N_{\alpha\beta}$. Le lemme 36 est donc démontré.

Nous pouvons maintenant établir l'existence d'une forme compacte $\mathfrak{g}_u$ invariante par σ_0 . Pour cela, choisissons les X_α conformément au Lemme qu'on vient de démontrer, et soit $\mathfrak{g}_u$ le sous-espace réel sous-tendu par les éléments

$$(-1)^{\frac{1}{2}} H_\alpha \quad ; \quad U_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha} \quad ; \quad V_\alpha = (X_\alpha + X_{-\alpha})/i \quad ;$$

d'après le Théorème 21 c'est une forme compacte de $\mathfrak{g}$; reste à établir qu'elle est invariante par σ_0 . Il est tout d'abord clair que $\sigma_0((-1)^{\frac{1}{2}} H_\alpha) = -(-1)^{\frac{1}{2}} H_\alpha$ est encore dans $\mathfrak{g}_u$; d'autre part on a $\sigma_0(U_\alpha) = \tau_\alpha X_\alpha - \tau_{-\alpha} \cdot X_{-\overline{\alpha}}$; or d'après (62) et $|\tau_\alpha| = 1$ on a $\tau_{-\alpha} = \overline{\tau_\alpha}$; ceci met en évidence le fait que $\sigma_0(U_\alpha) \in \mathfrak{g}_u$; démonstration analogue pour V_α .

II - Existence de l'automorphisme de $\mathfrak{g}_0$ (démonstration dûe à Papa Cartan...)

Considérons la restriction de σ_0 à $\mathfrak{g}_u$; c'est un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_u$; il est donc possible de choisir une base $(U_1,\dots,U_s,\ V_1,\dots,V_t)$ de $\mathfrak{g}_u$ de telle sorte qu'on ait les relations

(64) $\sigma_0(U_i) = U_i \quad ; \quad \sigma_0(V_j) = -V_j$.

Comme $\mathfrak{g}_0$ est l'ensemble des points fixes de $\mathfrak{g}$, i.e. des éléments de la forme $\frac{1}{2}(X+\sigma_0(X))$ avec $X \in \mathfrak{g}$, i.e. X combinaison à coefficients complexes des U_i, V_j on en conclut que $\mathfrak{g}_0$ admet pour base les éléments $(U_1,\dots,U_s,(-1)^{\frac{1}{2}}\ V_1,\dots,(-1)^{\frac{1}{2}}\ V_t)$.

Cela fait, désignons par σ_u le semi-automorphisme de $\mathfrak{g}$ défini par $\mathfrak{g}_u$; il transforme les U_i, V_j en eux-mêmes, donc laisse $\mathfrak{g}_0$ invariante ; il est alors clair que la restriction de σ_u à $\mathfrak{g}_0$ est un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_0$ dont l'ensemble des points fixes est $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_u$.

Avant de passer à la troisième partie de la démonstration, faisons quelques remarques intéressantes. Les raisonnements qu'on vient de faire montrent que la forme réelle $\mathfrak{g}_0$ est parfaitement déterminée par la donnée de l'automorphisme involutif σ_0 de $\mathfrak{g}_u$, et il est bien évident que, réciproquement, à tout automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_u$ correspond une forme réelle de $\mathfrak{g}$, résultat qui est à la base de la classification des algèbres réelles semi-simples.

L'automorphisme σ_0 de $\mathfrak{g}_u$ possède évidemment la propriété de laisser invariante une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_u$, à savoir (avec les notations de la partie I de la démonstration) la sous-algèbre $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{g}_u \cap \mathfrak{h}$ soustendue par les éléments $(-1)^{\frac{1}{2}}\ H_\alpha$. On peut donc trouver une base H_i' $(1 \leqslant i \leqslant r)$ de $\mathfrak{h}_u$ formée d'éléments vérifiant les relations

(65) $\sigma_0(H'_i) = -H'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$; $\sigma_0(H'_i) = +H'_i$ pour $m+1 \leqslant i \leqslant r$;

il est facile d'interprèter l'entier m . En effet de (65) résulte que la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ dont nous sommes partis est soustendue par les éléments $(-1)^{\frac{1}{2}} H'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, H'_j $(m+1 \leqslant j \leqslant r)$ donc est formée des éléments $H = \sum \lambda_i H'_i$ avec λ_i imaginaire pur pour $1 \leqslant i \leqslant m$, réel pour $i > m$. D'autre part, comme σ_0 laisse invariante la forme fondamentale de $\mathfrak{g}_u$, on peut supposer que les H'_i forment une base orthonormale de $\mathfrak{h}_u$ relativement à cette forme ; comme celle-ci est définie négative, cela veut dire qu'on peut supposer

$$\langle H'_i, H'_j \rangle = -\delta_{ij} \quad ;$$

cela dit, pour $H = (-1)^{\frac{1}{2}} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \xi_i H'_i + \sum_{j > m} \xi_j H'_j$ on aura manifestement

$$\langle H, H \rangle = \xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 - \xi_{m+1}^2 - \dots - \xi_r^2 \quad ;$$

en conséquence, <u>la restriction à $\mathfrak{h}_0$ de la forme fondamentale de $\mathfrak{g}_0$ se décompose en</u> m <u>carrés positifs et</u> r-m <u>carrés négatifs</u>. Cela montre évidemment que l'entier m dépend du choix de $\mathfrak{h}_0$.

III - <u>Existence de la sous-algèbre résoluble</u> $\mathfrak{n}_0$ (Iwasawa).

Pour établir cette existence, nous ne partirons pas d'une sous-algèbre $\mathfrak{h}_0$ quelconque ; on va la choisir de façon que l'entier m soit maximum.

De façon précise, considérons les sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{g}_u$ qui sont invariantes par σ_0 (il en existe !) et sur lesquelles σ_0 se réduit à la multiplication par -1 , et parmi ces sous-algèbres prenons-en une <u>maximale</u> ; soit $H'_1, \dots, H'_m$ une base de celle-ci ; on a donc les propriétés suivantes :

(A) : $\sigma_0(H'_i) = -H'_i$ <u>pour</u> $1 \leqslant i \leqslant m$;

(B) : <u>tout</u> $X \in \mathfrak{g}_u$ <u>qui commute aux</u> H'_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ <u>et vérifie</u> $\sigma_0(X) = -X$ <u>est une combinaison linéaire des</u> H'_i .

Désignons par $\mathfrak{h}_u$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}_u$ contenant les H'_i. Comme $\mathfrak{g}_u$ est compacte, la complexification $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{h}_u$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Lemme 37 - La sous-algèbre $\mathfrak{h}_u$ est stable par σ_0.

Car soit $H \in \mathfrak{h}_u$; H commute aux H'_i, donc aussi $\sigma_0(H)$; comme $X = H-\sigma_0(H)$ vérifie $\sigma_0(X)=-X$ et commute aux H'_i on voit que X est combinaison des H'_i, d'où $\sigma_0(H) \in \mathfrak{h}_u$, ce qui démontre le Lemme.

En vertu du Lemme 37, on peut adjoindre, aux m éléments H'_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, $r-m$ éléments H'_i $(m+1 \leqslant i \leqslant r)$ de $\mathfrak{h}_u$ de façon à obtenir une base de $\mathfrak{h}_u$, et de façon que l'on ait les relations (65). Les éléments $(-1)^{\frac{1}{2}} H'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, H'_j $(m+1 \leqslant j \leqslant r)$ forment alors une base de $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$, et il est clair que $\mathfrak{h}_0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$.

D'après les résultats du § 15, on peut trouver, pour chaque racine α de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$, un X_α appartenant à α de telle sorte que $\mathfrak{g}_u$ soit engendré par les éléments

$$(-1)^{\frac{1}{2}} H_\alpha \quad ; \quad U_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha} \quad ; \quad V_\alpha = (X_\alpha + X_{-\alpha})/i \quad .$$

A toute racine α correspond de plus par σ_0 une racine $\overline{\alpha}$.

Lemme 38 - Soit α une racine telle que $\overline{\alpha} = -\alpha$; alors on a $\overline{X_\alpha} = -X_{-\alpha}$.

En effet, on a d'une façon générale $\overline{\alpha}(H)=\overline{\alpha(\overline{H})}$, d'où $\overline{\alpha}(H'_i)=-\overline{\alpha(H'_i)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$; comme H'_i est dans $\mathfrak{g}_u$, $\alpha(H_i)$ est imaginaire pur ; par suite il vient $\overline{\alpha}(H'_i) = \alpha(H'_i)$, en sorte que $\overline{\alpha} = -\alpha$ implique $\alpha(H'_i)=0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, et donc implique

$$[X_\alpha, H'_i] = 0 \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant m . \tag{66}$$

L'élément X_α commute donc avec les m premi rs H'_i, ainsi bien entendu que $X_{-\alpha}$; donc U_α et V_α commutent avec ces H'_i, et d'après la propriété (A) il en est donc de même de $\overline{U_\alpha}$ et de $\overline{V_\alpha}$; donc $U_\alpha - \overline{U_\alpha} = X$ est dans $\mathfrak{g}_u$

commute aux m premiers H_i' , et vérifie trivialement $\overline{X} = -X$; d'après la propriété (B) il s'ensuit que $U_\alpha - \overline{U_\alpha}$ est dans $\mathfrak{h}_u$; mais comme U_α est combinaison de X_α et $X_{-\alpha}$, il est clair que $U_\alpha - \overline{U_\alpha}$ est combinaison linéaire de X_α et de $X_{-\alpha}$ aussi ; donc $U_\alpha - \overline{U_\alpha} = 0$, i.e. $\overline{U_\alpha} = U_\alpha$; de même on a $\overline{V_\alpha} = V_\alpha$; mais on a visiblement $X_\alpha = \frac{1}{2}(U_\alpha + iV_\alpha)$, $X_{-\alpha} = -\frac{1}{2}(U_\alpha - iV_\alpha)$; d'où immédiatement le lemme.

Posons maintenant

$$H_i = (-1)^{\frac{1}{2}} H_i' \qquad (1 \leq i \leq r) \quad ;$$

il est clair que les H_i forment une base du sous-espace <u>réel</u> engendré par les H_α, et qu'on a les formules

$$(67) \qquad \overline{H_i} = H_i \quad (1 \leq i \leq m) \; ; \quad \overline{H_j} = -H_j \qquad (M+1 \leq j \leq r) \; ;$$

cela fait, nous munirons l'ensemble des racines α de la relation d'ordre lexicographique par rapport à la base H_i .

<u>Lemme 39</u> - <u>Pour toute racine</u> $\alpha > 0$, <u>on a soit</u> $\overline{\alpha} > 0$ <u>soit</u> $\overline{\alpha} = -\alpha$.

En effet, comme α est > 0 , on a une relation

$$\alpha(H_1) = \ldots = \alpha(H_{p-1}) = 0 \; , \qquad \alpha(H_p) > 0 \quad ;$$

si $p \leq m$ il résulte de (67) que l'on a

$$\overline{\alpha}(H_1) = \ldots = \overline{\alpha}(H_{p-1}) = 0 \; , \qquad \overline{\alpha}(H_p) = \alpha(H_p) > 0$$

d'où $\overline{\alpha} > 0$; si au contraire $p > m$, on a $\overline{\alpha}(H_p) = -\alpha(H_p), \ldots, \overline{\alpha}(H_r) = -\alpha(H_r)$ d'où $\overline{\alpha} = -\alpha$.

Désignons maintenant par η le sous-espace (complexe) de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathfrak{h}$ et par les X_α pour lesquels on a à la fois $\alpha > 0$, $\overline{\alpha} > 0$. Comme les relations $\alpha > 0$, $\overline{\alpha} > 0$, $\beta > 0$, $\overline{\beta} > 0$ entraînent des propriétés analogues pour $\alpha + \beta$, on voit que η est une <u>sous-algèbre</u> de $\mathfrak{g}$, visiblement <u>résoluble</u> (car elle est contenue dans l'algèbre résoluble engendrée par $\mathfrak{h}$ et les X_α pour toutes les racines $\alpha > 0$) ; elle est en outre <u>invariante par</u> σ_0 puisque sa définition fait intervenir α et $\overline{\alpha}$

de façon symétrique. On va montrer que $\mathfrak{g}_0$ est somme (non directe) de $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_u$ et de $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{n}$. Il suffit évidemment, vu l'invariance de $\mathfrak{g}_u$ et de $\mathfrak{n}$ par σ_0, d'établir que $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_u + \mathfrak{n}$. Or soit un $X \in \mathfrak{g}_0$; on peut l'écrire sous la forme

$$X = H + \sum u_\alpha X_\alpha + i \sum v_\alpha X_\alpha$$

où les sommes sont étendues à toutes les racines, et où les u_α, v_α sont réels. Tenant compte des relations $X_{-\alpha} = X_\alpha - U_\alpha$, $(-1)^{\frac{1}{2}} X_{-\alpha} = (-1)\ X_\alpha - V_\alpha$ on voit qu'on a une relation de la forme

$$X = X_u + H + \sum_{\alpha>0} \rho_\alpha X_\alpha \text{ , avec } X_u \in \mathfrak{g}_u \text{ ,}$$

et comme $X = \overline{X} = \frac{1}{2}(X + \overline{X})$ on a même une relation de la forme

$$(68) \qquad X = X_u + H + \sum_{\alpha>0} (\rho_\alpha X_\alpha + \overline{\rho_\alpha} \cdot \overline{X_\alpha}) \text{ .}$$

Mais pour $\overline{\alpha} = -\alpha$ on a $\overline{X_\alpha} = -X_{-\alpha}$ (Lemme 38) en sorte qu'alors

$$\rho_\alpha \cdot X_\alpha + \overline{\rho_\alpha} \cdot \overline{X_\alpha} = \rho_\alpha \cdot X_\alpha - \overline{\rho_\alpha} \cdot X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_u \text{ ;}$$

donc on peut écrire

$$X = X_u + H + \sum_{\substack{\alpha>0 \\ \overline{\alpha}>0}} \rho_\alpha \cdot X_\alpha$$

ce qui démontre bien que $\mathfrak{g}_0$ est contenu dans $\mathfrak{g}_u + \mathfrak{n}$.

Pour achever la démonstration, observons que l'intersection de $\mathfrak{n}$ et de $\mathfrak{g}_u$ se réduit à $\mathfrak{h}_u$ (car si $H + \sum x_\alpha X_\alpha$ appartient à cette intersection, on doit avoir $x_\alpha = 0$ pour $\alpha < 0$ vu la définition de $\mathfrak{n}$, et $x_{-\alpha} = -\overline{x_\alpha}$ pour $\alpha > 0$ vu celle de $\mathfrak{g}_u$), et par conséquent que celle de $\mathfrak{g}_u \cap \mathfrak{g}_0$ et de $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_0$ se réduit à $\mathfrak{h}_u \cap \mathfrak{h}_0$; la sous-algèbre $\mathfrak{n}_0$ cherchée s'obtient alors en substituant à $\mathfrak{h}_0$, dans $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_0$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{h}_u$ dans $\mathfrak{h}_0$ (de façon plus explicite ; on prend la sous-algèbre $\mathfrak{p}$ engendrée par les X_α avec $\alpha > 0$, $\overline{\alpha} > 0$, et $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0$ + un supplémentaire de $\mathfrak{h}_u \cap \mathfrak{h}_0$ dans $\mathfrak{h}_0$).

Remarque - L'algèbre $\mathfrak{g}_u \cap \mathfrak{g}_o$ n'est pas nécessairement compacte ; il est cependant facile de voir que sa forme fondamentale est semi-définie négative, en sorte que $\mathfrak{g}_u \cap \mathfrak{g}_o$ est au moins réductive .

D'une manière générale, soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre d'une algèbre compacte $\mathfrak{g}_u$; alors la forme fondamentale de $\mathfrak{a}$ est semi-définie négative et $\mathfrak{a}$ est réductive. En effet la représentation adjointe de laisse invariante la restriction à $\mathfrak{a}$ de la forme fondamentale de $\mathfrak{g}_u$, i.e. une forme quadratique définie négative ; donc les $ad(X)$, $X \in \mathfrak{a}$, ont dans $\mathfrak{a}$ des valeurs propres imaginaires pures, d'où $Tr\left[ad(X)^2\right] \leq 0$ comme annoncé ; de plus $Tr\left[ad(X)^2\right] = 0$ équivaut à $ad(X)=0$ (valeurs propres nulles !) ; donc $\mathfrak{a}$ est somme directe de son centre et d'une sous-algèbre compacte.

5ème Partie.

Théorème de complète réductibilité.
Invariants. Caractères.

---

§ 18 - Opérateurs de Casimir.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps k de caractéristique nulle, mais non nécessairement algèbriquement clos. Rappelons que $\mathfrak{g}$ est dite semi-simple si la forme de Killing

$$\langle X,Y\rangle = \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}(X)\ \mathrm{ad}(Y)$$

de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée. Il en est évidemment de même de toutes les algèbres déduites de $\mathfrak{g}$ par extension du corps de base, en particulier de l'algèbre obtenue en remplaçant k par sa clôture algèbrique $\overline{k}$.

Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, il est clair que toute forme bilinéaire f sur $\mathfrak{g}$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme

$$f(X,Y) = \langle u(X),Y\rangle$$

où u est un endomorphisme du vectoriel $\mathfrak{g}$. On dira que f est <u>invariante</u> si l'identité

$$f(\mathrm{ad}(X),Y,Z) + f(Y,\mathrm{ad}(X)Z) = 0$$

est vérifiée ; il est évident que cela équivaut au fait que l'endomorphisme u commute aux opérateurs $\mathrm{ad}(X)$.

Soit X_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ une base de $\mathfrak{g}$; il existe une "base duale" X^i, caractérisée par les relations

$$(X_i,X^j) = \delta_i^j \quad , \text{ symbole de Kronecker.}$$

Etant donnée une forme bilinéaire invariante f sur $\mathfrak{g}$, associée comme il a été dit à un endomorphisme u permutable aux $\mathrm{ad}(X)$, on appelle par abus de langage <u>opérateur de Casimir de</u> f l'élément

$$\Gamma_f = u(X_i)X^i$$

de l'algèbre enveloppante $\underline{G}$ de $\mathfrak{g}$ (on utilise ici comme dans la suite les conventions de sommation usuelles). Il est évident que celui-ci ne dépend pas du choix de la base. De plus, <u>l'opérateur de Casimir de f appartient au centre de</u> $\underline{G}$.

 88

En effet, pour $Y \in \mathfrak{g}$ posons

$$ad(Y)X_i = a_i^j X_j \quad ;$$

on a alors

$$\langle X_i, ad(Y)X^j \rangle = -\langle ad(Y)X_i, X^j \rangle = -a_i^j$$

d'où

$$ad(Y)X^j = -a_i^j X^i \quad ;$$

utilisant le fait que u commute à ad(Y) il vient donc

$$[Y, \Gamma_f\rangle = ad(Y)u(X_i).X^i + u(X_i)ad(Y)X^i$$
$$= a_i^j u(X_j)X^i - a_j^i u(X_i)X^j = 0 ,$$

ce qui prouve notre assertion.

Nous aurons besoin dans la suite du résultat suivant :

Lemme 40 - Soit ρ une représentation non nulle de dimension finie de $\mathfrak{g}$; il existe un opérateur de Casimir Γ_f tel que $\rho(\Gamma_f)$ ne soit pas nul.

Il est clair qu'on peut se borner au cas où le corps de base est algèbriquement clos. Cela dit, supposons d'abord $\mathfrak{g}$ simple et ρ irréductible, et considérons la forme bilinéaire, évidemment invariante,

$$f(X,Y) = \mathrm{Tr}\ \rho(X)\ \rho(Y) = \langle u(X), Y \rangle \quad ;$$

comme $\mathfrak{g}$ est simple, la représentation adjointe est irréductible, de sorte que u se réduit à un scalaire (Lemme de Schur) ; donc on a une identité

$$f(X,Y) = k. \langle X,Y \rangle \quad ;$$

considérons alors l'opérateur de Casimir

$$\Gamma = X_i X^i$$

de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$; on a visiblement

$$\mathrm{Tr}\ \rho(\Gamma) = f(X_i, X^i) = n.k$$

où n est la dimension de $\mathfrak{g}$. Donc tout revient à établir que k n'est pas nul. Mais soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$; soit V l'espace de ρ ; relativement à $\mathfrak{h}$ on a une décomposition de V en somme directe de de sous-espace $V(\lambda)$, chaque $H \in \lambda$ se réduisant dans $V(\lambda)$ à un scalaire $\lambda(H)$; donc

$$f(H,H) = \sum_{\lambda} \lambda(H)^2.\dim V(\lambda) \quad ;$$

de plus, pour H bien choisi, les $\lambda(H)$ sont des nombres entiers non tous nuls ; cela établit évidemment notre assertion.

Passons maintenant au cas où $\mathfrak{g}$ et ρ sont quelconques. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_p$ une décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe d'idéaux simples ; prenons un i tel que la représentation $\rho(\mathfrak{g}_i)$ ne soit pas nulle et, dans l'espace V de la représentation ρ de $\mathfrak{g}$, soit U un sous-espace vectoriel invariant par $\mathfrak{g}_i$, non annulé par $\mathfrak{g}_i$, et de dimension minimum. La représentation ρ de $\mathfrak{g}_i$ dans U est évidemment irréductible ; si donc on désigne par Γ_i l'opérateur de Casimir de la forme de Killing de $\mathfrak{g}_i$, on voit que l'opérateur $\rho(\Gamma_i)$ n'est pas nul dans U et donc ne l'est pas dans V.

Comme la forme de Killing de $\mathfrak{g}_i$ peut être considérée de façon évidente comme une forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$, le lemme 40 est démontré.

§ 19 - Théorème de complète réductibilité.

<u>Théorème 23 - Toute représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple sur un corps de caractéristique 0 est complètement réductible</u>

Soit ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ semi-simple dans un vectoriel E de dimension finie. Soit U un sous-espace invariant de E, et soit V un supplémentaire de U dans E. Pour tout $\underline{a} \in V$ on a une relation

$$(X)\underline{a} = \varphi(X)\underline{a} + \psi(X)\underline{a} \quad \text{avec} \quad \varphi(X)\underline{a} \ V, \quad \psi(X)\underline{a} \in U \quad ;$$

il est clair que l'on définit ainsi une application linéaire

$$\psi : X \rightarrow \psi(X) \quad \text{de } \mathfrak{g} \text{ dans le vectoriel } L = \mathcal{L}(V,U) .$$

Supposons maintenant le problème résolu ; alors on peut trouver un supplémentaire <u>invariant</u> W de U ; pour $\underline{a} \in V$ on a une relation

$$\underline{a} = p(\underline{a}) + q(\underline{a}) \quad \text{avec} \quad p(\underline{a}) \in U \ , \ q(\underline{a}) \in W \ ;$$

appliquant $\rho(X)$ à cette relation et tenant compte de l'invariance de U et W il vient $\rho(X)p(\underline{a}) + \rho(X)q(a) = p[\varphi(X)\underline{a}] + q[\varphi(X)\underline{a}] + \psi(X)\underline{a}$ d'ou 'n en particulier la relation

$$\psi(X) = \rho(X)\circ p - p\circ\varphi(X) \ .$$

Réciproquement, supposons trouvé un élément p de $L = \mathcal{L}(V,U)$ vérifiant l'identité précédente, et soit W l'ensemble des $\underline{a} - p(\underline{a})$, $\underline{a} \in V$; alors W est un supplémentaire invariant de U. Que W soit un supplémentaire de U est clair. Quant à l'invariance de W elle résulte du calcul suivant:

$$\begin{aligned}\rho(X)(\underline{a}-p(\underline{a})) &= \rho(X)\underline{a} - \rho(X)\circ p(\underline{a}) = \varphi(X)\underline{a} + \psi(X)\underline{a} - \rho(X)\circ p(\underline{a}) \\ &= \varphi(X)\underline{a} - p\circ\varphi(X)\underline{a} = \underline{b} - p(\underline{b}) \quad \text{où} \quad \underline{b} = \varphi(X)\underline{a} \ .\end{aligned}$$

Tout revient donc à établir l'existence d'un $p \in L$ tel qu'on ait la relation précédente. Pour cela, remarquons d'abord que, si l'on désigne par $\pi(X)$ l'endomorphisme

$$u \longrightarrow \rho(X)\circ u - u\circ\varphi(X)$$

de $L = \mathcal{L}(V,U)$, on définit une <u>représentation</u> π de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans L ; cela résulte immédiatement du fait que $X \to \rho(X)$ et $X \to \varphi(X)$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$ dans U et V respectivement (la seconde pouvant encore s'interprèter comme la représentation évidente de $\mathfrak{g}$ dans l'espace quotient E/U). Nous sommes donc ramenés à résoudre le problème suivant :

<u>Soient</u> π <u>une représentation de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans un vectoriel</u> L <u>de dimension finie, et</u> ψ <u>une application linéaire de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans</u> L ; <u>à quelle condition existe-t-il un</u> $\underline{a} \in L$ <u>tel que</u> $\psi(X) = \pi(X)\underline{a}$ <u>pour tout</u> $X \in \mathfrak{g}$?

Il est naturellement immédiat de trouver une condition <u>nécessaire</u> de possibilité, à savoir

$$(*) \qquad \pi(X)\psi(X) - \pi(Y)\psi(X) = \psi([X,Y]) \quad .$$

Il est également facile de constater que cette condition est remplie dans le cas particulier qui nous occupe. Donc le théorème de complète réductibilité sera démontré si nous établissons que la condition précédente est non seulement nécessaire mais aussi <u>suffisante</u> dans le cas semi-simple.

Pour démontrer ce résultat ("premier lemme de Whitehead") nous procèderons en trois étapes. Supposons tout d'abord la représentation π <u>irréductible</u> et <u>non nulle</u>. D'après le lemme 40 il existe un opérateur de Casimir

$$\Gamma = u(X_i)X_i = Y_iX^i$$

tel que $\pi(\Gamma)$ ne soit pas nul - donc soit inversible puisque $\pi(\Gamma)$ commute à π et que π est irréductible. Considérons alors l'élément

$$\underline{b} = \pi(Y_i)\psi(X^i)$$

de L ; pour $Z \in \mathfrak{g}$ on aura

$$\begin{aligned}\pi(Z)\underline{b} &= \pi(Z)\pi(Y_i)\psi(X^i) = \pi([Z,Y_i])\psi(X^i) + \pi(Y_i)\pi(Z)\psi(X^i)\\ &= \pi([Z,Y_i])\psi(X^i) + \pi(Y_i)(\pi(X^i)\psi(Z) - \psi([X^i,Z]))\\ &= \pi(\Gamma)\psi(Z) + \pi([Z,Y_i])\psi(X^i) - \pi(Y_i)\psi([X^i,Z])\end{aligned}$$

(on a utilisé (*)). Mais en posant

$$[Z,X_i] = a_i^jX_j$$

on a vu au § précédent qu'on avait

$$[Z,Y_i] = a_i^jY_j \quad ; \quad [Z,X^i] = -a_j^iX^j \quad ;$$

il s'ensuit immédiatement que

$$\pi(Z)\underline{b} = \pi(\Gamma)\psi(Z) \quad .$$

Comme $\pi(\Gamma)$ est inversible et commute aux $\pi(Z)$ il vient

$$\psi(Z) = \pi(Z)\underline{a} \qquad \text{avec} \qquad \underline{a} = \pi(\Gamma)^{-1}\underline{b}$$

ce qui démontre le lemme de Whitehead dans ce cas.

Supposons maintenant que π soit <u>identiquement nulle</u>. Alors (*) montre que ψ est nulle sur l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$; mais $\mathfrak{g}$ étant semi-simple coïncide avec $\mathfrak{g}'$ (il suffit de le voir pour $\mathfrak{g}$ simple, auquel cas c'est trivial) ; donc ψ est nulle sur $\mathfrak{g}$, d'où évidemment la possibilité d'écrire $\psi(X) = \pi(X)\underline{a}$.

Dans le cas général, nous procéderons par récurrence sur la dimension de l'espace L de la représentation π. Si π n'est pas irréductible, soit M un sous-espace invariant non trivial de dimension maximum. La représentation évidente de $\mathfrak{g}$ dans L/M est irréductible non nulle, ou bien identiquement nulle, de sorte qu'on peut lui appliquer le résultat précédent. Comme l'application canonique de L sur L/M conserve l'identité (*) on voit donc qu'il existe $\underline{a} \in L$ tel que

$$\psi(X) \equiv \pi(X)\underline{a} \quad \text{modulo } M \ ;$$

posant $\psi(X) = \pi(X)\underline{a} + \psi'(X)$ on définit une application ψ' de $\mathfrak{g}$ dans M qui vérifie encore (*) ; d'après l'hypothèse de récurrence on a donc $\psi'(X) = \pi(X)\underline{a}'$, et tout est démontré.

Le théorème de complète réductibilité s'étend trivialement aux représentations de $\mathfrak{g}$ dans un vectoriel V de dimension infinie, telles que pour tout $\underline{a} \in V$ le sous-espace invariant engendré par $\underline{a}$ soit de dimension finie ; nous dirons qu'une telle représentation est <u>rationnelle</u>

Soit ρ une représentation rationnelle de $\mathfrak{g}$ dans un vectoriel V, et soit $V = \sum V_i$ une décomposition de V en somme directe de sous-espaces invariants minimaux V_i ; soit $\rho_i(X)$ la restriction de $\rho(X)$ à V_i.

Samuel (174) NBR077 93

Pour chaque classe ϑ de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$, désignons par $V(\vartheta)$ la somme des V_i pour lesquels ρ_i appartient à ϑ. Il est connu que les sous-espaces $V(\vartheta)$ ne dépendent pas de la décomposition utilisée pour les définir ; d'ailleurs, les éléments de $V(\vartheta)$ peuvent se caractériser comme suit : a appartient à $V(\vartheta)$ si et seulement si la restriction de ρ au sous-espace invariant engendré par a se décompose en représentations irréductibles appartenant toutes à ϑ. Nous dirons qu'un tel vecteur "se transforme suivant ϑ par ρ". Evidemment, V est somme directe des divers $V(\vartheta)$, et il est utile d'observer que tout endomorphisme de V qui commute aux $\rho(V)$ laisse chaque $V(\vartheta)$ invariant.

On donnera plus loin une autre caractérisation de $V(\vartheta)$, utilisant le caractère de ϑ.

Remarque - La démonstration du théorème de complète réductibilité n'utilise que les propriétés les plus élémentaires des représentations, à savoir le fait que $\mathrm{Tr}\left[\rho(H)^2\right]$ n'est pas identiquement nul pour ρ irréductible (cf. Lemme 40). On aurait donc pu la donner aussitôt après les résultats du § 7.

§ 20.- Théorème des invariants.

Etant donnée une représentation ρ d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$ dans un vectoriel V, on appelle invariants de V, ou de ρ, les $\underline{a} \in V$ tels que $\rho(X)\underline{a} = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Ils forment évidemment un sous-espace vectoriel invariant par ρ.

Si V est de dimension finie, plus généralement si ρ est complètement réductible, ce sous-espace V_0 admet donc un sous-espace supplémentaire W également invariant. Nous allons montrer qu'on peut caractériser W très simplement (et qu'en particulier W est unique). Tout d'abord, pour tout $\underline{a} \in V$, on a $\underline{a} = \underline{a}_0 + \underline{b}$ avec $\underline{a}_0 \in V_0$, $\underline{b} \in W$, d'où $\rho(X)\underline{a} = \rho(X)\underline{b}$; donc W contient tous les vecteurs de la forme $\rho(X)\underline{a}$. Nous allons montrer que W est même <u>engendré</u> par ces vecteurs. Soit en effet E le sous-espace sous-tendu par les $\rho(X)\underline{a}$, $X \in \underline{g}$, $\underline{a} \in V$; il est contenu dans W , et visiblement invariant ; on peut donc écrire $W = E \oplus F$ où F est invariant ; pour $\underline{a} \in F$ on a $\rho(X)\underline{a} \in E$ par définition de E , et $\rho(X)\underline{a} \in F$ par l'invariance de F , d'où $\rho(X)\underline{a} = 0$, d'où $\underline{a} \in W \cap V_0 = 0$; donc F est nul, ce qui démontre notre assertion.

Autrement dit :

<u>Lemme 41</u> - <u>Soit</u> ρ <u>une représentation complètement réductible de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans un vectoriel</u> V ; <u>alors le sous-espace</u> V_0 <u>des invariants admet un et un seul supplémentaire invariant</u>, <u>à savoir le sous-espace soustendu par les vecteurs</u> $\rho(X)\underline{a}$ $(X \in \mathfrak{g}$, $\underline{a} \in V)$.

Dans la pratique, il est souvent utile de considérer des représentations de dimension infinie. Par exemple, soit ρ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ dans un vectoriel V , et désignons par $\underline{S}(V)$ l'algèbre des fonctions polynômes sur V (algèbre symétrique de V^*) . Il est bien connu que, pour tout endomorphisme u de V , il existe une dérivation D_u de $\underline{S}(V)$ et une seule qui est donnée par $D_u f(\underline{a}) = -f(u(\underline{a}))$ lorsque f est une <u>forme linéaire</u> sur V ; on a trivialement $[D_u, D_v] = D_{[u,v]}$. Si donc on associe à chaque $X \in \mathfrak{g}$ la dérivation $\pi(X)$ de $\underline{S}(V)$ définie par l'endomorphisme $\rho(X)$ de V , on définit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\underline{S}(V)$, avec évidemment les propriétés suivantes :

a) chaque $\pi(X)$ est une dérivation de $\underline{S}(V)$;

b) pour tout n, le sous-espace $\underline{S}^n(V)$ des polynômes homogènes de degré n est invariant par π.

En vertu de la seconde propriété, il est clair que la représentation π est rationnelle, et par suite complètement réductible si $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Considérons d'une manière générale une algèbre $\underline{S}$ avec unité, associative mais non nécessairement commutative, et une représentation π d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans $\underline{S}$, telle sur les $\pi(X)$ soient des <u>dérivations</u> de $\underline{S}$. Il est clair qu'alors le sous-espace des invariants, i.e. le sous-espace $\underline{S}(\vartheta_0)$ où ϑ_0 désigne la représentation unité de $\mathfrak{g}$, est une <u>sous-algèbre</u> de $\underline{S}$. Si π est complètement réductible, on peut plus généralement considérer, pour toute classe ϑ de représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$, le sous-espace $\underline{S}(\vartheta)$ des éléments qui se transforment suivant ϑ par π ; $\underline{S}(\vartheta)$ <u>est un module sur</u> $\underline{S}(\vartheta_0)$, à gauche et à droite ; car si $f \in \underline{S}$ est invariant, l'identité $\pi(X)(fg) = f.\pi(X)g$ montre que l'opérateur $g \rightarrow fg$ commute aux $\pi(X)$, donc conserve chaque $\underline{S}(\vartheta)$ (§ précédent). D'autre part, d'après le Lemme 41 tout élément f de $\underline{S}$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme

$$f = f^{\natural} + \sum X_i g_i \tag{69}$$

où $f^{\natural}$ est <u>invariant</u> (on utilise maintenant la notation Xg pour désigner $\pi(X)g$; elle est particulièrement commode dans ce genre de questions) ; l'application $f \longrightarrow f^{\natural}$ est évidemment une <u>projection sur</u> le sous-espace des invariants ; de plus, comme les opérateurs $f \longrightarrow fg$ et $f \longrightarrow gf$ commutent aux X pour g invariant, on voit tout de suite qu'on a l'identité

(70) $(fg)^\natural = f^\natural . g$ pour g invariant

ainsi que $(gf)^\natural = g.f^\natural$; cela peut encore s'écrire

(71) $(fg^\natural)^\natural = f^\natural g^\natural$, $(f^\natural g)^\natural = f^\natural g^\natural$

sans faire d'hypothèse sur f et g .

Revenant au cas où $\underline{S}$ est l'algèbre des polynômes sur un vectoriel V , nous allons démontrer le résultat suivant :

<u>Théorème 24 - Soit ρ une représentation d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$ dans un vectoriel V de dimension finie ; alors les polynômes sur V invariants par ρ forment une algèbre à un nombre fini de générateurs, et, pour toute classe ϑ de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$, les polynômes qui par ρ se transforment suivant ϑ forment un module de type fini sur l'algèbre des invariants.</u>

Soit $\underline{S}$ l'algèbre des polynômes sur V . Pour $X \in \mathfrak{g}$ et $f \in \underline{S}$ on notera Xf le polynôme obtenu en transformant f par X ; $f \to Xf$ est donc une dérivation de $\underline{S}$. Comme le sous-espace $\underline{S}^n$ des polynômes homogènes de degré n est stable et de dimension finie, il est clair que la représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\underline{S}$ est somme directe de représentations irréductibles de dimension finie ; cela permet de considérer la sous-algèbre $\underline{S}(\vartheta_o)$ des invariants et les $\underline{S}(\vartheta_o)$-modules $\underline{S}(\vartheta)$. On a en outre une application $f \to f^\natural$ de $\underline{S}$ sur $\underline{S}(\vartheta_o)$ vérifiant (71).

Soit I l'idéal de $\underline{S}$ engendré par les invariants sans terme constant. Comme $\underline{S}$ est noethérienne, il possède un système fini de générateurs, qu'on peut évidemment supposer être <u>invariants</u> et <u>homogènes</u> ; soit f_i $(1 \leq i \leq N-1)$ un tel système de générateurs de I ; nous poserons f_N = élément unité de $\underline{S}$. Il est alors clair que tout invariant f est de la forme $f = \sum g_i f_i$; on peut supposer les g_i <u>invariants</u> en en observant que d'après (71) on a

$$f = f^{\natural} = \sum g_i^{\natural} \cdot f_i \quad .$$

Comme de plus les composantes homogènes d'un invariant sont des invariants, il est clair que dans la représentation $f = \sum g_i f_i$ on peut supposer que degré$(g_i f_i) \leqslant$ degré(f) pour tout i , donc que degré $(g_i) <$ $<$ degré(f) pour $1 \leqslant i \leqslant N-1$; on peut aussi trivialement supposer g_N constant.

Si f est de degré 1, les g_i sont donc constants, en sorte qu'alors f appartient non seulement à l'idéal mais à l'<u>algèbre</u> engendrée par les f_i. Supposant la même propriété démontrée pour degré$(f) \leqslant n-1$, et supposant f de degré n, la relation $f = \sum g_i f_i$ avec g_i invariant de degré $\leqslant n-1$ démontre que f vérifie encore la propriété en question.

$\underline{S}(\vartheta_0)$ est donc l'algèbre engendrée par les f_i, d'où la première assertion du Théorème.

Considérons maintenant une classe ϑ quelconque. Nous la supposerons réalisée comme représentation irréductible π de $\mathfrak{g}$ dans un vectoriel L de dimension finie, et choisirons une base $(\underline{e}_i)$ de L, ainsi que la base duale $\underline{e}^i$ de L^* ; on a alors des formules

$$\pi(X)\underline{e}_i = a_i^j(X)\underline{e}_j \quad ,$$

et la représentation contragrédiente $\pi^* = -{}^t\pi$ de $\mathfrak{g}$ dans L^* est donnée par

(72) $$\pi^*(X)\underline{e}^j = -a_i^j(X)\underline{e}^i \quad .$$

Si l'on désigne par $\underline{T}$ l'algèbre des polynômes sur L, la représentation de $\mathfrak{g}$ dans L permet de définir Xg pour $X \in \mathfrak{g}$, $g \in \underline{T}$; pour g <u>linéaire</u>, donc de la forme $g(\underline{a}) = (\underline{a}, \underline{a}^*)$ avec $\underline{a}^* \in L^*$, on a

$$Xg(\underline{a}) = -g(\pi(X)\underline{a}) = (\underline{a}, \pi^*(X)\underline{a}^*) \quad ;$$

si donc on désigne par g^i la forme linéaire définie par le vecteur $\underline{e}^i$ de L^* on aura d'après (72) les relations

(73) $$Xg^j = -a^j_i(X)g^i \quad .$$

Cela dit, considérons dans $\underline{S}(\vartheta)$ des polynômes f_i vérifiant

(74) $$Xf_i = a^j_i(X)f_j \quad ;$$

dans le vectoriel $V \times L$ formons la représentation λ de $\mathfrak{g}$, somme directe de ρ et π ; l'algèbre $\underline{U}$ des polynômes sur $V \times L$ s'identifie de façon évidente au produit tensoriel $\underline{S} \otimes \underline{T}$, et les dérivations X de $\underline{U}$ définies par la représentation $\lambda = \rho \oplus \pi$ de $\mathfrak{g}$ dans $V \times L$ sont évidemment données par

(75) $$X(f \otimes g) = (Xf) \otimes g + f \otimes (Xg) \quad .$$

Comparant (73) et (74) on en déduit que $f_i \otimes g^i$ <u>est un invariant de</u> λ.

Or l'ensemble des invariants de λ est engendré par un système fini d'invariants homogènes h_k . Puisque d'autre part les monômes en les formes linéaires g^i soustendent $\underline{T}$, on peut écrire les h_k sous la forme suivante :

$$h_k = f_{ko} \otimes 1 + f_{ki} \otimes g^i + f_{kij} \otimes g^i g^j + \ldots$$

avec des f_{ko}, f_{ki}, f_{kij},... dans $\underline{S}$, homogènes, et parfaitement déterminés si l'on impose à ces $f_{kij\ldots}$ d'être symétriques en les indices $ij\ldots$. D'après (75) il est évident que les f_{ko} sont des invariants de ρ , et que pour chaque k les f_{ki} vérifient les relations (74), donc que les f_{ki} sont dans $\underline{S}(\vartheta)$.

Ecrivons alors que $f_i \otimes g_i = P(h)$ où P est un polynôme en les h_k ; on voit alors que f_i s'écrit sous la forme

$$f_i = P^{kj}_i(f_o)f_{kj}$$

où $P^{kj}_i(f_o)$ désigne un polynôme en les f_{ko}, i.e. un invariant de ρ . En conséquence, les f_i appartiennent au $\underline{S}(\vartheta_o)$-module (de type fini !) engendré par les f_{ki} .

Mais si f est dans $\underline{S}(\vartheta)$ il est clair qu'on peut trouver un nombre fini de systèmes tels que f_i, de sorte que f s'exprime linéairement par rapport aux divers f_i utilisés. On en conclut que $\underline{S}(\vartheta)$ est identique au $\underline{S}(\vartheta_o)$-module engendré par les f_{kj} , ce qui termine la démonstration.

<u>Remarque</u> - Il est utile dans les applications d'avoir le théorème pour une représentation ρ complètement réductible d'une algèbre $\mathfrak{g}$ non nécessairement semi-simple (par exemple, réductive : groupes compacts !). Il faut alors vérifier que la représentation dans $\underline{S}$ est complètement réductible.

Le Théorème 24 s'étend parfois à des algèbres $\underline{S}$ plus générales. On va examiner un cas qui est particulièrement important dans les applications à la théorie des représentations infinies.

Démontrons tout d'abord un lemme :

<u>Lemme 42</u> - <u>Soit</u> D <u>une dérivation d'une algèbre de Lie</u> $\mathfrak{a}$; <u>alors</u> D <u>se prolonge en une dérivation de l'algèbre enveloppante</u> $\underline{A}$ <u>de</u> $\mathfrak{a}$.

Soient en effet $\underline{T}$ l'algèbre tensorielle du vectoriel $\mathfrak{a}$ et I l'idéal de $\underline{T}$ engendré par les éléments $X\otimes Y - Y\otimes X - [X,Y]$; D se prolonge trivialement en une dérivation D de $\underline{T}$; celle-ci conserve I en vertu du fait que

$$D(X\otimes Y-Y\otimes X-[X,Y]) = (DX)\otimes Y-Y\otimes (DX)-[DX,Y] + X\otimes(DY)-(DY)\otimes X-[X,DY] ;$$

d'où par passage au quotient une dérivation de $\underline{A}$ se réduisant à D sur $\underline{a}$.

Cela dit, considérons une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, son algèbre enveloppante $\underline{A}$, et une représentation linéaire π d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$ dans le vectoriel $\mathfrak{a}$, telle que les opérateurs $\pi(X)$ soient des <u>dérivations</u> de $\mathfrak{a}$. D'après le Lemme 42 on peut prolonger π en une représentation (qu'on notera encore π) de $\mathfrak{g}$ dans le vectoriel $\underline{A}$.

Pour chaque entier $n \geqslant 0$, désignons par $\underline{A}^n$ le sous-espace des $x \in \underline{A}$ qui peuvent s'écrire comme polynôme (non commutatif, mais symétrique) homogène et de degré n en les éléments de $\mathfrak{a}$; il est clair que $\underline{A}^n$ est de dimension finie ; d'après Birkoff-Witt on sait que $\underline{A}$ est somme directe des divers $\underline{A}^n$; il est de plus immédiat de vérifier (voir d'ailleurs un peu plus loin) que les $\underline{A}^n$ sont stables par la représentation π de $\mathfrak{g}$ dans $\underline{A}$. Celle-ci est donc complètement réductible, et même somme directe de représentations de dimension finie ; on peut par suite considérer les sous-espaces $\underline{A}(\vartheta)$ pour toute classe ϑ de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Cela dit, nous allons montrer que l'algèbre $\underline{A}(\vartheta_o)$ est à engendrement fini et que chaque $\underline{A}(\vartheta)$ est un $\underline{A}(\vartheta_o)$-module de type fini.

Pour cela désignons par V le dual de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ et par $\underline{S}$ l'algèbre des polynômes sur V . Soit X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ une base de $\mathfrak{a}$, et soit f_i la forme linéaire sur V définie par X_i . A tout élément

$$f = \alpha + \alpha^i f_i + \alpha^{ij} f_i f_j + \dots$$

de $\underline{S}$, écrit sous forme symétrique $(\alpha^{ij} = \alpha^{ji}$, etc...) faisons correspondre l'élément

$$\tilde{f} = \alpha.1 + \alpha^i X_i + \alpha^{ij} X_i X_j + \dots$$

de $\underline{A}$; on obtient ainsi une application linéaire de $\underline{S}$ sur $\underline{A}$, laquelle est indépendante du choix de la base, et qui, tout en n'étant pas multiplicative, possède néanmoins la propriété suivante : si $h = fg$ avec f et g homogènes de degrés p,q alors on a $\tilde{h} \equiv \tilde{f}\tilde{g}$ modulo $\underline{A}^o + \dots + \underline{A}^{p+q-1}$

(On rappelle que l'on suppose traité Birkoff-Witt sous toutes ses formes).

De plus, considérons la représentation ρ de $\mathfrak{g}$ dans V, contragrédiente de la représentation donnée de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}$; elle permet de définir Xf pour $X \in \mathfrak{g}$ et $f \in \underline{S}$. On a alors entre les représentations ρ de $\mathfrak{g}$ dans V et π de $\mathfrak{g}$ dans $\underline{A}$ la relation

$$\pi(X)(\tilde{f}) = \widetilde{Xf}$$

- en d'autres termes, l'application $f \longrightarrow \tilde{f}$ est compatible avec les représentations en question. Il suffit de le démontrer pour f homogène :

$$f = \alpha^{ijk\cdots} f_i f_j f_k \cdots \qquad ;$$

or posons

$$\pi(X)X_i = c_i^j(X)X_j \qquad \text{d'où} \quad Xf_i = c_i^j(X)f_j \qquad ;$$

le polynôme $g = Xf$ est donné par

$$g = \beta^{ijk\cdots} f_i f_j f_k \cdots$$

avec

$$\beta^{ijk\cdots} = c_h^i(X)\alpha^{hjk\cdots} + c_h^j(X)\alpha^{ihk\cdots} + c_h^k(X)\alpha^{ijh\cdots} + \cdots$$

ce qui met en évidence le fait que les coefficients $\beta^{ijk\cdots}$, comme ceux de f, sont symétriques ; donc

$$\tilde{g} = \beta^{ijk\cdots} X_i X_j X_k \cdots \qquad ;$$

tenant compte du fait que les opérateurs $\pi(X)$ sont des dérivations on parvient trivialement au résultat cherché.

(Le rédacteur suppose bien que de pareils calculs feront hurler certains lecteurs, qui ne sont pas contents sans leur dose quotidienne de calculs "intrinsèques" ; néanmoins, le rédacteur persiste à croire que le calcul tensoriel, et en tous cas ses conventions d'écriture, n'ont pas été inventés pour les chiens exclusivement, et qu'il est parfois agréable de pouvoir calculer : 1) sans réfléchir ; 2) avec la certitude de ne pas se tromper ; 3) avec celle d'écrire - mais oui - des choses invariantes).

De ce qui précède résulte évidemment que, pour chaque ϑ, le sous-espace $\underline{A}(\vartheta)$ est l'image par $f \to \tilde{f}$ du sous-espace $\underline{S}(\vartheta)$. C'est ce qui va nous conduire au résultat.

Prenons en effet dans $\underline{S}(\vartheta)$ des éléments f_i en nombre fini tel que $\underline{S}(\vartheta)$ soit le $\underline{S}(\vartheta_o)$-module engendré par ceux-ci (Théorème 24). On peut évidemment supposer les f_i homogènes de degré n_i. Considérons les éléments $\tilde{f}_i$ de $\underline{A}(\vartheta)$, et prenons un $\tilde{f} \in \underline{A}(\vartheta)$ de degré n. On peut écrire $f = g_i f^i$ où les g_i sont des invariants de degré $n-n_i$. On a alors $\tilde{f} = \tilde{g}_i \tilde{f}^i$ + un élément de degré $\leqslant n-1$ de $\underline{A}(\vartheta)$; d'où par récurence sur n le fait que le $\underline{A}(\vartheta_o)$-module $\underline{A}(\vartheta)$ est engendré par les $\tilde{f}_i$. Un raisonnement analogue montre que si l'algèbre $\underline{S}(\vartheta_o)$ est engendrée par des invariants homogènes f_j alors l'algèbre $\underline{A}(\vartheta_o)$ est engendrée par les $\tilde{f}_j$.

En conséquence on a le théorème suivant :

<u>Théorème 24 bis</u> - <u>Soient</u> $\mathfrak{a}$ <u>une algèbre de Lie</u>, $\underline{A}$ <u>son algèbre enveloppante</u>, $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie semi-simple</u>, π <u>une représentation linéaire de</u> $\mathfrak{g}$ <u>par des dérivations de</u> $\mathfrak{a}$; <u>pour</u> $X \in \mathfrak{g}$, <u>soit</u> $\pi(X)$ <u>la dérivation de</u> $\underline{A}$ <u>qui prolonge la dérivation</u> $\pi(X)$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$, <u>et considérons la représentation</u> π <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans</u> $\underline{A}$. <u>Alors la sous-algèbre</u> $\underline{A}(\vartheta_o)$ <u>des invariants de</u> π <u>admet un système fini de générateurs</u>, <u>et les</u> $\underline{A}(\vartheta_o)$-<u>modules</u> $\underline{A}(\vartheta)$ <u>sont de type fini</u>.

<u>Remarque</u> - Si l'algèbre $\mathfrak{a}$ est abélienne, on retrouve évidemment le Théorème 24.

§ 21 - Propriétés des caractères.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre semi-simple sur le corps complexe, d'algèbre enveloppante $\underline{G}$. Etant donné une représentation irréductible ρ de $\mathfrak{g}$ dans un vectoriel V de dimension n finie, nous appellerons caractère de ρ la forme linéaire

$$\chi_\rho(x) = \frac{1}{n} . \mathrm{Tr}\left[\rho(x)\right]$$

sur $\underline{G}$ (ce n'est pas conforme à la définition classique, mais est plus utile car cette définition s'étend, comme on le verra, aux représentations de dimension infinie pas trop déraisonnables).

Désignant par $\underline{Z}$ le centre de $\underline{G}$, il est évident qu'on a les propriétés suivantes :

(76) $\chi_\rho(xy) = \chi_\rho(yx)$ pour $x,y \in \underline{G}$;

(77) $\chi_\rho(zx) = \chi_\rho(z)\,\chi_\rho(x)$ pour $x \in \underline{G}$, $z \in \underline{Z}$,

la seconde provenant du fait que $\rho(z)$ est un scalaire pour z dans $\underline{Z}$ (lemme de Schur). Rappelons aussi (§ 13) que χ_ρ est invariant par le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ relativement à une sous-algèbre de Cartan quelconque.

Pour parvenir à des résultats plus intéressants, nous utiliserons le lemme suivant :

<u>Lemme 43 - L'algèbre $\underline{G}$ est somme directe de son centre $\underline{Z}$ et du sous-espace sous-tendu par les</u> $xy-yx$ $(x,y \in \underline{G})$.

En effet, considérons la représentation adjointe $X \to \mathrm{ad}(X)$ de $\mathfrak{g}$ dans $\underline{G}$; elle est rationnelle, et $\underline{Z}$ est évidemment l'ensemble de ses invariants ; donc $\underline{G}$ est somme directe de $\underline{Z}$ et du sous-espace $\underline{G}'$ soustendu par les $Xy-yX$ $(X \in \underline{g}$, $y \in \underline{G})$. Désignant par $x^\natural$ la composante suivant $\underline{Z}$ (relativement à cette décomposition) d'un $x \in \underline{G}$ on a donc $(Xy)^\natural = (yX)^\natural$, d'où par itération la relation $(xy)^\natural = (yx)^\natural$ quels que soient $x,y \in \underline{G}$; donc $\underline{G}'$ contient $xy-yx$, d'où le Lemme.

<u>Remarque</u> - Le théorème des invariants montre donc que $\underline{Z}$ admet un système fini de générateurs $z_1,\dots,z_p$. On démontre en fait qu'on peut choisir les z_i <u>algébriquement indépendants</u>, et qu'alors $p=r$, rang de $\mathfrak{g}$.

Le lemme 43 et la relation (76) montrent que, pour déterminer χ_ρ , il suffit de connaître sa restriction au centre $\underline{Z}$ de $\underline{G}$; cette restriction est de plus un homomorphisme de $\underline{Z}$ dans le corps de basé d'après (77), qui bien entendu n'est pas quelconque. Noter qu'on peut aussi, en tenant compte de la relation évidente

(78) $$\chi_\rho(x) = \chi_\rho(x^\flat) ,$$

écrire (77) sous la forme

(79) $$\chi_\rho(x^\flat y) = \chi_\rho(x)\, \chi_\rho(y) \qquad \text{pour} \quad x, y \in \underline{G} \;;$$

(79) est appelée l'équation fonctionnelle des caractères ; elle est bien entendu vérifiée non seulement par les caractères des représentations de dimension finie mais plus généralement par toute solution de (76) et (77) ; de façon précise, (79) est équivalent à l'ensemble des relations (76) et (77).

Nous allons maintenant démontrer un résultat disant que χ_ρ dépend "rationnellement" de la représentation ρ.

Théorème 25 (Harish-Chandra) - Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et (α_i) un système fondamental de racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$; alors pour tout $x \in \underline{G}$ il existe sur le dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$ un polynôme f_x tel que, pour toute représentation irréductible ρ de dimension finie on ait

(80) $$\chi_\rho(x) = f_x(\lambda_\rho)$$

où λ_ρ désigne le plus haut poids de ρ relativement au système fondamental (α_i).

En vertu de (78) on peut évidemment se borner au cas où $x = z \in \underline{Z}$. Cela fait, désignons par $\beta_1, \ldots, \beta_\ell$ $(\ell = (\dim(\mathfrak{g}) - r)/2)$ les diverses racines positives, et pour chaque j choisissons un X_j de $\mathfrak{g}$ appartenant à β_j, ainsi qu'un Y_j appartenant à $-\beta_j$; soient $H_1, \ldots, H_r$ les éléments de $\mathfrak{h}$ correspondant au système fondamental (α_i).

Etant données trois suites d'entiers

$$Q = (k_1,\dots,k_\ell) \ ; \quad M = (m_1,\dots,m_r) \ ; \quad P = (j_1,\dots,j_\ell)$$

nous poserons

$$u(Q,M,P) = Y_1^{k_1}\dots Y_1^{k_1} H_1^{m_1}\dots H_r^{m_r} X_1^{j_1}\dots X_1^{j_1} \quad ;$$

comme les X_j, Y_j, H_i forment une base de $\mathfrak{g}$, ces $u(Q,M,P)$ forment une base de $\underline{G}$ (autre forme de Birkoff-Witt) ; il est de plus clair que pour $H \in \mathfrak{h}$ on a

$$[H, u(Q,M,P)] = w_{QP}(H).u(Q,M,P)$$

où la forme linéaire $w_{QP}(H)$ est donnée par

$$w_{QP} = \sum_s (j_s - k_s).\beta_s \quad .$$

Cela dit, prenons dans $\underline{Z}$ un élément

$$z = \sum \alpha(Q,M,P).u(Q,M,P) \quad ;$$

comme $[H,z] = 0$ et comme les $u(Q,M,P)$ sont linéairement indépendants on voit que $\alpha(Q,M,P)=0$ pour $P \neq Q$; donc $z = \sum \alpha(P,M,P).u(P,M,P)$; autrement dit, z <u>est congru</u>, <u>modulo l'idéal à gauche engendré par les</u> X_j, <u>à un élément de $\underline{H}$</u>, sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{h}$; bien entendu cet élément de $\underline{H}$ n'est autre que $\sum \alpha(0,M,0).u(0,M,0)$.

Ecrivons donc

$$(81) \qquad z = h + \sum u_j X_j \quad ;$$

soit ρ une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ dans V de dimension finie, et soit $\underline{a}$ un élément de V appartenant au plus haut poids de ρ ; comme $\underline{a}$ est annulé par les $\rho(X_j)$ la relation (81) montre qu'on a $\rho(z)\underline{a} = \rho(h)\underline{a}$, et comme $\rho(z)$ se réduit au scalaire $\chi_\rho(z)$; on voit que $\chi_\rho(z).\underline{a} = \rho(h)\underline{a}$; mais comme h est un polynôme en les H_i, soit $f_z(H_1,\dots,H_r)$ il est clair d'après $\rho(H_i)\underline{a} = \lambda_\rho(H_i).\underline{a}$ que l'on a $\rho(h)\underline{a} = f_z(\lambda_\rho).\underline{a}$; d'où le théorème.

<u>Remarque</u> - Les polynômes f_x ne sont pas arbitraires ; désignant par ω la $\frac{1}{2}$-somme des racines <u>positives</u> de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$, on démontre (Harish-Chandra) que, <u>modulo la translation</u> $\lambda \longrightarrow \lambda + \omega$ <u>sur</u> $\mathfrak{h}^*$,

l'ensemble des f_x n'est autre que l'algèbre des invariants du groupe de Weyl. La démonstration n'est pas très compliquée mais repose malheureusement sur les formules explicites donnant les caractères.

Autre remarque - Il est facile de vérifier que $\underline{G}$ possède un système complet de représentations de dimension finie (ceci parce que c'est le cas de $\mathfrak{g}$, bien entendu, cela n'a rien à voir avec la semi-simplicité, à ceci près que pour $\mathfrak{g}$ semi-simple Ado n'est pas difficile...), et que par suite l'application $z \to f_z$ de $\underline{Z}$ dans l'ensemble des polynômes sur $\mathfrak{h}^*$ est biunivoque. C'est donc un isomorphisme d'algèbres vu la propriété multiplicative des caractères.

Dernière remarque - Les deux remarques précédentes donnent un moyen de réaliser $\underline{Z}$ comme algèbre des invariants du groupe de Weyl. Ce procédé n'est naturellement pas intrinsèque ; mais il est d'une importance absolument capitale dans la théorie des représentations infinies.

Autre dernière remarque - Appelons caractère de $\underline{G}$ toute forme linéaire χ vérifiant (76) et (77), ou, si l'on veut, (79). Alors, pour toute forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$, la formule

$$\chi_\lambda(x) = f_x(\lambda)$$

définit un caractère - cela tient évidemment à ce que l'application $x \to f_x$ est une application $\natural$: elle vérifie $f_{x \natural y} = f_x f_y$. Les caractères obtenus se déduisent en somme de ceux des représentations de dimension finie par "prolongement algébrique". On démontre (Harish-Chandra) qu'il n'y en a pas d'autres ; c'est du reste facile modulo le résultat énoncé dans la Remarque ci-dessus.
