RÉDACTION N° 173

COTE : NBR 076

TITRE : ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES
CHAPITRE III (FIN) (ÉTAT 3)
CHAPITRE IV (ÉTAT 7)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 62

NOMBRE DE FEUILLES : 62

Archives Janv. 53. M. Dieudonné

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE III (fin) (Etat 3)

Sommaire

§ 4. Applications bilinéaires hypocontinues : 1. Applications bilinéaires séparément continues. 2. Applications bilinéaires hypocontinues. 3. Prolongement d'une application bilinéaire hypocontinue. 4. Ensembles équihypocontinus d'applications bilinéaires.

CHAPITRE IV (Etat 7)

LA DUALITÉ DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

Sommaire

§ 1. Topologies faibles : 1. Espaces vectoriels en dualité. 2. Topologies faibles. 3. Le théorème de prolongement. 4. Sous-espaces orthogonaux. 5. Sous-espaces et espaces quotients d'un espace muni d'une topologie faible. 6. Produits de topologies faibles. 7. Espaces linéairement compacts (en petits caractères).

§ 2. Ensembles polaires.

§ 3. Dual d'un espace localement convexe séparé : 1. Topologie affaiblie et topologie faible. 2. Propriétés du dual faible. 3. Topologies compatibles avec une dualité. 4. Caractérisation des formes linéaires faiblement continues dans un dual. 5. Dual d'un sous-espace ; dual d'un espace quotient.

§ 4. Topologie forte sur le dual d'un espace localement convexe séparé : 1. Définition de la topologie forte. 2. Propriétés du dual fort. 3. Bidual. Espaces réflexifs. 4. Espaces de Montel.

§ 5. Dualité des espaces de Banach : 1. Topologie faible et topologie forte sur le dual d'un espace de Banach. 2. Bidual d'un espace normé. Espaces de Banach réflexifs . 3. Dual fort d'un sous-espace et d'un espace quotient d'un espace de Banach.

§ 6. Continuité forte et continuité faible : 1. Transposée d'une application linéaire faiblement continue. 2. Continuité faible et continuité forte. 3. Dual d'un espace d'applications linéaires.

Commentaires.

En ce qui concerne la substance de cette rédaction, le rédacteur a suivi scrupuleusement les indications du Congrès de Pelvoux 1952, se gardant d'ajouter quoi que ce soit à ce qui se trouvait dans la rédaction Godement ; il y a toutefois une exception, les n°3 du § 6 du chap.IV, qui a été ajouté à la demande expresse de Dixmier. Pour la répartition des matières en §§ et n^{os}, le rédacteur a essayé de bloquer dans un seul paragraphe tout ce qui a trait aux espaces de Banach (§ 5) ; ce pourrait d'ailleurs être permuté avec le § 6 sans inconvénient. Dans le § 3, on a essayé de bien grouper au début les propriétés de la topologie faible d'une part, celles de la topologie affaiblie de l'autre, en évitant autant que possible de passer sans cesse de l'une à l'autre.

Le § 1 du chap.IV sera sans doute trouvé encore trop long ; le rédacteur serait heureux si quelqu'un arrivait à simplifier les démonstrations (toujours triviales, d'ailleurs, mais parfois un peu longues). Une des principales raisons de ces longueurs est qu'il faut redémontrer, pour les topologies <u>faibles</u> sur un corps <u>discret</u>, toutes les propriétés vues au chap.I, § 2 et qui sont fausses pour une topologie <u>quelconque</u> sur un tel corps. On pourrait évidemment alléger en déclarant qu'on ne s'intéresse pas aux corps discrets, mais alors on renonce à parler des espaces linéairement compacts, dont les possibilités d'application en Algèbre ne paraissent pas négligeables. On simplifierait aussi, évidemment, en supprimant une fois de plus tout ce qui a trait aux sous-espaces et espaces quotients (non seulement au § 1, bien entendu, mais aussi dans tout le chapitre (§§ 3 et 5)) ; le rédacteur estime qu'on risquerait sérieusement de se canuler par la suite en prenant une telle décision.

---

§ 4. Applications bilinéaires hypocontinues (état 3).

1. Applications bilinéaires séparément continues.

Soient E,F,G trois espaces vectoriels topologiques. Pour toute application bilinéaire u de $E \times F$ dans G et tout $x \in E$ (resp. tout $y \in F$), on désignera par $u_{x.}$ (resp. $u_{.y}$) l'application linéaire $y \to u(x,y)$ (resp. $x \to u(x,y)$) de F (resp. E) dans G .

DÉFINITION 1.- On dit qu'une application bilinéaire u de $E \times F$ dans G est séparément continue si, pour tout $x \in E$, l'application linéaire $u_{x.}$ est continue et si, pour tout $y \in F$, l'application linéaire $u_{.y}$ est continue.

Cette définition entraîne immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION 1.- Pour qu'une application bilinéaire u de $E \times F$ dans G soit séparément continue, il faut et il suffit que, pour tout $y \in F$, $u_{.y}$ soit une application linéaire continue de E dans G , et que l'application linéaire $y \to u_{.y}$ soit continue quand on munit $\mathcal{L}(E,G)$ de la topologie de la convergence simple.

Une application bilinéaire séparément continue de $E \times F$ dans G n'est pas nécessairement continue dans $E \times F$ (exerc.4). On a toutefois l'importante proposition suivante :

PROPOSITION 2.- Soient E un espace vectoriel métrisable, F un espace localement convexe métrisable et tonnelé, G un espace localement convexe. Toute application bilinéaire séparément continue de $E \times F$ dans G est continue.

C'est en effet un cas particulier du th.3 du § 3 (appliqué à une seule application bilinéaire).

Nous allons dans ce qui suit définir une notion intermédiaire entre celle d'application bilinéaire continue et celle d'application bilinéaire séparément continue.

2. Applications bilinéaires hypocontinues.

PROPOSITION 3.- Soient E, F, G trois espaces vectoriels topologiques; $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble de parties bornées et équilibrées de E (resp. F) formant un recouvrement de E (resp. F). Soit u une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Les propositions suivantes sont équivalentes

a) pour tout ensemble $M \in \mathfrak{S}_1$ et tout ensemble $N \in \mathfrak{S}_2$, u est continue dans $M \times F$ et dans $E \times N$;

b) pour tout voisinage W de 0 dans G, tout ensemble $M \in \mathfrak{S}_1$ et tout ensemble $N \in \mathfrak{S}_2$, il existe un voisinage V de 0 dans F et un voisinage U de 0 dans E tels que les relations $x \in M$, $y \in V$ entraînent $u(x,y) \in W$ et que les relations $x \in U$, $y \in N$ entraînent $u(x,y) \in W$.

c) u est séparément continue, pour toute partie $M \in \mathfrak{S}_1$, l'image de M par l'application $x \to u_{x.}$ est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(F,G)$, et pour toute partie $N \in \mathfrak{S}_2$, l'image de N par l'application $y \to u_{.y}$ est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,G)$;

d) u est séparément continue, l'application $x \to u_{x.}$ de E dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_2}(F,G)$ est continue, et l'application $y \to u_{.y}$ de F dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_1}(E,G)$ est continue.

L'équivalence de b), c) et d) résulte immédiatement des définitions (compte-tenu de ce que $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont respectivement des recouvrements de E et de F). Supposons que u soit continue au point $(0,0)$ de $M \times F$; pour tout voisinage W de 0 dans G, il existe donc un voisinage U de 0 dans E et un voisinage V de 0 dans F tels que $u(x,y) \in W$ pour $x \in U \cap M$ et $y \in V$

Mais comme M est bornée, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda M \subset U$; comme $u(x,y)=u(\lambda x, \lambda^{-1}y)$, on voit que les relations $x \in M$, $y \in \lambda V$ entraînent $u(x,y) \in W$; ce raisonnement, et le raisonnement analogue où l'on échange les rôles de E et de F, prouvent que a) entraîne b). Inversement, supposons b) vérifiée, et soit (x_0,y_0) un point de $M \times F$; pour tout $(x,y) \in M \times F$, on peut écrire

$$u(x,y)-u(x_0,y_0) = u_{.y_0}(x-x_0)+u_{x.}(y-y_0) .$$

Mais b) entraîne que pour tout voisinage W de 0 dans G, il existe un voisinage U de 0 dans E et un voisinage V de 0 dans F tel que la relation $x-x_0 \in U$ entraîne $u_{.y_0}(x-x_0) \in W$ et que les relations $x \in M$, $y-y_0 \in V$ entraînent $u_{x.}(y-y_0) \in W$. On aura donc $u(x,y)-u(x_0,y_0) \in W+W$ pour tout point $(x,y) \in M \times F$ tel que $x-x_0 \in U$ et $y-y_0 \in V$, ce qui prouve la continuité de u dans $M \times F$; on prouve de même que u est continue dans $E \times N$, autrement dit que b) entraîne a).

DÉFINITION 2. <u>On dit qu'une application bilinéaire</u> u <u>de</u> $E \times F$ <u>dans</u> G <u>qui vérifie l'une des conditions équivalentes</u> a),b),c),d) <u>de la prop.3, est</u> $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-<u>hypocontinue</u>.

Lorsque l'on considère deux ensembles $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ de parties bornées de E et F respectivement, formant respectivement des recouvrements de E et F, mais non nécessairement équilibrées, on dira encore qu'une application bilinéaire u est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue si elle est $(\mathfrak{S}'_1, \mathfrak{S}'_2)$-hypocontinue, en désignant par $\mathfrak{S}'_1$ (resp. $\mathfrak{S}'_2$) l'ensemble des enveloppes équilibrées des ensembles de $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$).

Il est clair que toute application bilinéaire <u>continue</u> de $E \times F$ dans G est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue pour tout couple d'ensembles de parties bornées $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$; la réciproque est inexacte en général. (exerc.4).

 7

PROPOSITION 4.- Soit u une application bilinéaire $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue de $E \times F$ dans G. Pour tout couple d'ensembles $M \in \mathfrak{S}_1$, $N \in \mathfrak{S}_2$, u est uniformément continue dans $M \times N$. En outre, pour toute partie bornée Q (resp. P) de F (resp. E), $u(M \times Q)$ et $u(P \times N)$ sont bornés dans G.

En effet, on a $u(x_1,y_1)-u(x_2,y_2) = u_{.y_2}(x_1-x_2)+u_{x_1.}(y_1-y_2)$. Pour tout voisinage W de 0 dans G, il existe un voisinage U de 0 dans E et un voisinage V de 0 dans F tels que les relations $(x_1,y_1) \in M \times N$, $(x_2,y_2) \in M \times N$, $x_1-x_2 \in U$, $y_1-y_2 \in V$ entraînent $u_{.y_2}(x_1-x_2) \in W$ et $u_{x_1.}(y_1-y_2) \in W$, ce qui prouve que u est uniformément continue dans $M \times N$. D'autre part, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda Q \subset V$, d'où $\lambda\, u(M \times Q) = u(M \times (\lambda Q)) \subset W$, et on prouve de même que $u(P \times N)$ est borné.

Une application séparément continue est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue lorsqu'on prend pour $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ les ensembles de parties équilibrées et bornées de dimension finie dans E et F respectivement, mais non en général pour des ensembles $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ contenant des parties bornées de dimension infinie (exerc.3). On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 5.- Si F est un espace localement convexe tonnelé et $\mathfrak{S}_2$ un recouvrement de F, toute application bilinéaire $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue u de $E \times F$ dans G est aussi $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue, où $\mathfrak{B}_1$ est l'ensemble de toutes les parties bornées et équilibrées de E.

Il suffit en effet (prop.2c)) de prouver que l'image par $x \to u_{x.}$ de toute partie bornée M de E est équicontinue dans $\mathcal{L}(F,G)$. Or, (prop. 2d)), cette image est une partie simplement bornée de $\mathcal{L}(F,G)$, et comme F est tonnelé, toute partie simplement bornée de $\mathcal{L}(F,G)$ est équicontinue (§ 3, th.2).

3. Prolongement d'une application bilinéaire hypocontinue.

Dans ce qui suit, nous supposerons toujours que les ensembles de parties bornées des espaces vectoriels topologiques que nous considérerons sont formés de parties équilibrées, et que, pour un tel ensemble $\mathfrak{S}$, les relations $M \in \mathfrak{S}$, $N \in \mathfrak{S}$ entraînent $M+N \in \mathfrak{S}$ et $\lambda M \in \mathfrak{S}$ pour tout scalaire λ.

PROPOSITION 6.- Soient E_1, E_2, F trois espaces vectoriels topologiques, F étant supposé séparé et quasi-complet. Soient G_1 (resp. G_2) un sous-espace vectoriel partout dense de E_1 (resp. E_2), $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble de parties bornées de G_1 (resp. G_2) tel que tout point de E_1 (resp. E_2) soit adhérent à un ensemble de $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$). Soit $\overline{\mathfrak{S}}_1$ (resp. $\overline{\mathfrak{S}}_2$) l'ensemble des adhérences dans E_1 (resp. E_2) des ensembles de $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$). Alors toute application bilinéaire $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue u de $G_1 \times G_2$ dans F se prolonge d'une seule manière en une application bilinéaire $\overline{u}$ séparément continue de $E_1 \times E_2$ dans F, et cette application est $(\overline{\mathfrak{S}}_1, \overline{\mathfrak{S}}_2)$-hypocontinue.

Soient $M_1 \in \mathfrak{S}_1$ et $M_2 \in \mathfrak{S}_2$; comme u est uniformément continue dans $M_1 \times M_2$ (prop.4) et que F est séparé, u se prolonge d'une seule manière en une application uniformément continue u_{M_1,M_2} de $\overline{M}_1 \times \overline{M}_2$ dans le complété $\hat{F}$ de F (Top.gén.,chap.II, § 3,th.1) ; en outre, comme $u(M_1 \times M_2)$ est borné dans F (prop.4), son adhérence dans F est un sous-espace uniforme complet par hypothèse, donc u_{M_1,M_2} prend ses valeurs dans F. Il est clair en outre que si $M_1 \subset N_1$ et $M_2 \subset N_2$, où $N_1 \in \mathfrak{S}_1$ et $N_2 \in \mathfrak{S}_2$, le prolongement u_{M_1,M_2} est la restriction à $\overline{M}_1 \times \overline{M}_2$ du prolongement u_{N_1,N_2}. Comme tout point de $E_1 \times E_2$ est adhérent à un ensemble de la forme $M_1 \times M_2$ $(M_1 \in \mathfrak{S}_1, M_2 \in \mathfrak{S}_2)$; on définit ainsi une application $\overline{u}$ de $E_1 \times E_2$ tout entier dans F. Montrons que $\overline{u}$

est bilinéaire. En effet, soient $x \in E_1$, $y \in E_2$, $y' \in E_2$; soit $M_1 \in \mathfrak{S}_1$ un ensemble auquel x est adhérent, $M_2 \in \mathfrak{S}_2$ (resp. $M'_2 \in \mathfrak{S}_2$) un ensemble auquel y (resp. y') est adhérent ; comme 0 appartient à M_2 et M'_2, et que $N_2 = M_2 + M'_2 \in \mathfrak{S}_2$, on voit que les trois points y, y' et $y+y'$ sont adhérents à N_2 ; si alors s (resp. t, t') tend vers x (resp. y, y') en restant dans M_1 (resp. M_2, M'_2), $t+t'$ tend vers $y+y'$ en restant dans N_2, et en vertu de la continuité de $\overline{u}$ dans $\overline{M}_1 \times \overline{N}_2$, on peut passer à la limite dans la relation $u(s,t+t') = u(s,t) + u(s,t')$, ce qui donne $\overline{u}(x,y+y') = \overline{u}(x,y) + \overline{u}(x,y')$. On démontre de même les relations $\overline{u}(x+x',y) = \overline{u}(x,y) + \overline{u}(x',y)$ et $\overline{u}(\lambda x,y) = \overline{u}(x,\lambda y) = \lambda \overline{u}(x,y)$.

Nous allons enfin prouver que $\overline{u}$ est $(\overline{\mathfrak{S}}_1, \overline{\mathfrak{S}}_2)$-hypocontinue, et à fortiori séparément continue puisque $\overline{\mathfrak{S}}_1$ (resp. $\overline{\mathfrak{S}}_2$) est un recouvrement de E_1 (resp. E_2) ; comme G_1 (resp. G_2) est partout dense dans E_1 (resp. E_2), $\overline{u}$ sera bien la seule application bilinéaire séparément continue de $E_1 \times E_2$ dans F prolongeant u.

Soit donc $M_1 \in \mathfrak{S}_1$; par hypothèse, pour tout voisinage fermé W de 0 dans F, il existe un voisinage fermé V de 0 dans G_2 tel que, pour $x \in M_1$ et $y \in V$, on ait $u(x,y) \in W$. L'adhérence $\overline{V}$ de V dans E_2 est un voisinage de 0 dans E_2, puisque G_2 est partout dense dans E_2 ; soit U un voisinage de 0 dans E_2 tel que $U+U \subset \overline{V}$, et soit $a \in \overline{M}_1$, $b \in U$. Par hypothèse, b est adhérent à un ensemble $M_2 \in \mathfrak{S}_2$, donc aussi à $M_2 \cap (b+U)$; mais ce dernier ensemble est contenu dans $G_2 \cap (U+U)$, donc dans $G_2 \cap \overline{V} = V$; comme $\overline{u}(a,b)$ est adhérent à l'ensemble des $u(x,y)$, où $x \in M_1$ et $y \in M_2 \cap (b+U)$, on a bien $\overline{u}(a,b) \in W$. Ce raisonnement et le raisonnement analogue où on intervertit les rôles de E_1 et E_2 prouvent que $\overline{u}$ est $(\overline{\mathfrak{S}}_1, \overline{\mathfrak{S}}_2)$-hypocontinue.

5. Ensembles équihypocontinus d'applications bilinéaires.

La proposition suivante généralise la prop.3 :

PROPOSITION 7.- *Soient* E,F,G *trois espaces vectoriels topologiques*, $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) *un ensemble de parties bornées et équilibrées de* E (resp. F) *formant un recouvrement de* E (resp. F). *Soit* H *un ensemble d'applications bilinéaires de* $E \times F$ *dans* G . *Les propositions suivantes sont équivalentes* :

a) *pour tout ensemble* $M \in \mathfrak{S}_1$ *et tout ensemble* $N \in \mathfrak{S}_2$, H *est équicontinu dans* $M \times F$ *et dans* $E \times N$;

b) *pour tout voisinage* W *de* 0 *dans* G , *tout ensemble* $M \in \mathfrak{S}_1$ *et tout ensemble* $N \in \mathfrak{S}_2$, *il existe un voisinage* V *de* 0 *dans* F *et un voisinage* U *de* 0 *dans* E *tels que les relations* $x \in M$, $y \in V$ *entraînent* $u(x,y) \in W$ *pour tout* $u \in H$, *et que les relations* $x \in U$, $y \in N$ *entraînent* $u(x,y) \in W$ *pour tout* $u \in H$;

c) H *est formé d'applications séparément continues, pour toute partie* $M \in \mathfrak{S}_1$, *l'image de* $H \times M$ *par l'application* $(u,x) \rightarrow u_{x.}$ *est une partie équicontinue de* $\mathcal{L}(F,G)$, *et pour toute partie* $N \in \mathfrak{S}_2$, *l'image de* $H \times N$ *par l'application* $(u,y) \rightarrow u_{.y}$ *est une partie équicontinue de* $\mathcal{L}(E,G)$;

d) H *est formé d'applications séparément continues, et lorsque* u *parcourt* H , *l'ensemble des applications* $x \rightarrow u_{x.}$ *de* E *dans* $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_2}(F,G)$ *est équicontinu, et l'ensemble des applications* $y \rightarrow u_{.y}$ *de* F *dans* $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_1}(E,G)$ *est équicontinu*.

L'équivalence de b),c),d) est immédiate, et l'équivalence de a) et b) se démontre exactement comme dans la prop.2, en remarquant (avec les notations de cette proposition) qu'une fois donné W , les voisinages U et V peuvent être pris indépendamment de $u \in H$.

Lorsque H vérifie l'une des conditions équivalentes a),b),c),d) de la prop.7, on dit que l'ensemble H d'applications bilinéaires est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-*équihypocontinu*. Lorsque $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ se réduisent aux parties bornées et équilibrées de dimension *finie* dans E et F respectivement, un ensemble $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-équihypocontinu est encore appelé *séparément équicontinu*.

Nous laissons au lecteur la démonstration des propositions suivantes, qui généralisent respectivement les prop.4,5 et 2 :

PROPOSITION 8.- *Soit H un ensemble $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-équihypocontinu d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G. Pour tout couple d'ensembles $M \in \mathfrak{S}_1$, $N \in \mathfrak{S}_2$, H est uniformément équicontinu dans $M \times N$. En outre, pour toute partie bornée Q (resp. P) de F (resp. E), la réunion des ensembles $u(M \times Q)$ (resp. $u(P \times N)$) lorsque u parcourt H, est bornée dans G.*

PROPOSITION 9.- *Si F est un espace localement convexe tonnelé, tout ensemble $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-équihypocontinu d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G est aussi $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{S}_2)$-équihypocontinu, où $\mathfrak{B}_1$ est l'ensemble de toutes les parties bornées et équilibrées de E.*

PROPOSITION 10.- *Soient E un espace vectoriel métrisable, F un espace localement convexe métrisable et tonnelé, G un espace localement convexe. Tout ensemble séparément équicontinu d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G est équicontinu.*

CHAPITRE IV

LA DUALITÉ DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES (Etat 7)

§ 1. Topologies faibles.

1. Espaces vectoriels en dualité.

Soient K un corps (commutatif ou non), F un espace vectoriel à gauche sur K, G un espace vectoriel à droite sur K, et soit $(x,y) \rightarrow B(x,y)$ une forme bilinéaire (Alg., chap. III, App. II) sur le produit $F \times G$. On dit que la forme bilinéaire B met les espaces vectoriels F et G en dualité, ou que F et G sont en dualité (relativement à B) si B satisfait aux deux conditions suivantes :

(D_I) Quel que soit $x \neq 0$ dans F, il existe $y \in G$ tel que $B(x,y) \neq 0$.

(D_{II}) Quel que soit $y \neq 0$ dans G, il existe $x \in F$ tel que $B(x,y) \neq 0$.

Exemples.- 1) Soient E un espace vectoriel à gauche quelconque sur un corps K, et E^* le dual de E (espace de toutes les formes linéaires sur E), qui est un espace vectoriel à droite sur K (Alg., chap. II, § 4, n°1). La forme bilinéaire canonique $(x,x') \rightarrow \langle x,x' \rangle$ sur $E \times E^*$ (loc. cit.) met E et E^* en dualité : en effet, (D_{II}) est vrai par définition de la relation $x' \neq 0$, et on sait que, pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe une forme linéaire $x' \in E^*$ telle que $\langle x,x' \rangle \neq 0$ (Alg., chap. II, § 3, prop. 9), ce qui démontre (D_I).

2) Lorsque E est un espace vectoriel de dimension infinie, E' un sous-espace vectoriel du dual E^* de E, la restriction à $E \times E'$ de la forme bilinéaire canonique $\langle x,x' \rangle$ (qui vérifie toujours (D_{II})) peut encore satisfaire à (D_I) même lorsque $E' \neq E^*$. L'exemple le plus important, auquel sera consacrée la plus grande partie de ce chapitre, est celui où $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$, et où E est un espace localement convexe séparé,

et E' le sous-espace de E^* constitué par des formes linéaires <u>continues</u> sur E ; il résulte en effet du th. de Hahn-Banach que pour tout $x \neq 0$ dans E , il existe $x' \in E'$ telle que $\langle x,x' \rangle \neq 0$ (chap.II, § 3, cor.3 de la prop.4). L'espace vectoriel E' est appelé le <u>dual topologique</u> de E ; il dépend de la topologie donnée sur E , mais ne doit pas être considéré comme muni d'une topologie à moins que cette topologie n'ait été expressément mentionnée. Par abus de langage (l'espace E' intervenant beaucoup plus souvent que E^*) nous dirons simplement, le plus souvent, que E' est <u>le dual</u> de l'espace localement convexe séparé E ; quand il y a lieu alors de parler de l'espace E^* , on l'appelle <u>dual algèbrique</u> de E pour éviter des confusions.

3) Soient E et F deux espaces localement convexes séparés (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $E \otimes F$ leur produit tensoriel (<u>Alg</u>., chap.III, § 1, n°1), G l'espace vectoriel des formes bilinéaires <u>continues</u> sur $E \times F$. Pour tout élément $z = \sum_k x_k \otimes y_k$ de $E \otimes F$, et toute forme bilinéaire u sur $E \times F$, on sait (<u>Alg</u>., chap.III, § 1, n°2, scholie) que le nombre $\langle z,u \rangle = \sum_k u(x_k,y_k)$ est défini indépendamment de l'expression de z comme somme de produits tensoriels, et il est clair que $(z,u) \rightarrow \langle z,u \rangle$ est une forme bilinéaire sur $(E \otimes F) \times G$, qui satisfait à (D_{II}) par définition. Montrons qu'elle satisfait aussi à (D_I), et met par suite $E \otimes F$ et G en dualité : en effet, tout élément $z \neq 0$ de $E \otimes F$ peut s'écrire $z = \sum_{i,j} a_i \otimes b_j$, où les a_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sont linéairement indépendants dans E et les b_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ linéairement indépendants dans F (<u>Alg</u>., chap.III, § 1, cor.2 de la prop.7). Comme le sous-espace de E engendré par les a_i d'indice > 1 est fermé (chap.I, § 2, cor.1 du th.2), il existe une forme linéaire continue x'_1 sur E telle que $\langle a_1,x'_1 \rangle = 1$ et $\langle a_i,x'_1 \rangle = 0$ pour $i > 1$ (chap.II, § 3, cor.3 de la prop.4);

de même, il existe une forme linéaire continue y_1' sur F telle que $\langle b_1, y_1' \rangle = 1$, $\langle b_j, y_1' \rangle = 0$ pour $j > 1$. Alors $u = x_1' y_1'$ est une forme bilinéaire continue sur $E \times F$ telle que $\langle z, u \rangle = 1$, ce qui établit notre assertion.

Soient F et G deux espaces vectoriels sur un corps K , mis en dualité par une forme bilinéaire B ; pour tout $z \in G$, soit $B_{.z}$ la forme linéaire $y \to B(y,z)$ sur F . Il est clair que l'application $z \to B_{.z}$ est une application linéaire de G dans l'espace vectoriel (à droite) F^* , dual de F , et la condition (D_{II}) signifie que cette application est biunivoque, donc un <u>isomorphisme</u> de G dans F^* ; on identifiera le plus souvent G avec son image par cet isomorphisme. De même, pour $y \in F$, soit $B_{y.}$ la forme linéaire $z \to B(y,z)$ sur G ; $y \to B_{y.}$ est une application linéaire de F dans le dual G^* de G , et la condition (D_I) signifie que cette application est un <u>isomorphisme</u>, ce qui permet d'identifier F à son image par cet isomorphisme. Lorsqu'on fait ces identifications, on écrit $\langle y, z \rangle$ au lieu de $B(y,z)$.

2. Topologies faibles.

DÉFINITION 1.- <u>Soient</u> K <u>un corps topologique séparé</u> (<u>commutatif ou non</u>), F <u>un espace vectoriel à gauche sur</u> K , G <u>un espace vectoriel à droite sur</u> K , <u>mis en dualité par une forme bilinéaire</u> $(x,y) \to \langle x, y \rangle$. <u>On appelle topologie faible sur</u> F <u>définie par la dualité entre</u> F <u>et</u> G , <u>et on note</u> $\sigma(F,G)$, <u>la topologie la moins fine sur</u> F <u>rendant continues toutes les formes linéaires</u> $y \to \langle x, y \rangle$ <u>sur</u> G <u>lorsque</u> x <u>parcourt</u> F (F étant identifié à l'ensemble de ces formes linéaires).

On emploiera parfois l'adjectif "faible" et l'adverbe "faiblement" pour désigner des propriétés relatives à une topologie faible $\sigma(F,G)$, lorsqu'il ne pourra en résulter de confusion. On parlera par exemple de "convergence faible", de "fonction faiblement continue", etc.

Comme F est ainsi identifié à un sous-espace vectoriel de l'espace produit K_s^G (espace de toutes les applications de G dans K, muni de sa structure d'espace vectoriel à gauche sur K), la topologie faible $\sigma(F,G)$ est la ropologie induite sur F par la topologie produit sur K_s^G ; elle est donc compatible avec la structure d'espace vectoriel de F (chap.I, §1, n°7) et séparée ; en outre, elle est localement convexe lorsque $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$ et définie alors par les semi-normes $x \to |\langle x,y\rangle|$ où y parcourt G. Pour tout voisinage U de 0 dans K et tout ensemble fini de points y_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ de G, soit $W(y_1,\ldots,y_n;U)$ l'ensemble des $x\in F$ tels que $\langle x,y_i\rangle\in U$ pour $1\leqslant i\leqslant n$; ces ensembles (pour U, n et les y_i arbitraires) forment évidemment un système fondamental de voisinages de 0 pour $\sigma(F,G)$. On notera que $W(y_1,\ldots,y_n;U)$ contient le sous-espace de F, de codimension <u>finie</u>, défini par les équations $\langle x,y_i\rangle=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$; d'ailleurs, si K est discret, ce sous-espace est lui-même un voisinage de 0 pour $\sigma(F,G)$.

<u>Exemple</u>.- Si F est un espace de dimension finie n sur K, l'espace G, identifié à un sous-espace de F^*, est nécessairement <u>égal à</u> F^* : en ~~xxx~~ effet, comme F est alors canoniquement identifié au dual F^{**} de F^* (<u>Alg.</u>, chap.II, §4, n°4), si on avait $G\neq F^*$, il existerait $x_0\neq 0$ tel que $\langle x_0,y\rangle=0$ pour tout $y\in G$ (<u>Alg.</u>, chap.II, §3, prop.9), contrairement à (D_I). Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de F sur K, $(a_i')_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base duale de $G=F^*$; comme toute forme linéaire sur F est une combinaison linéaire

des a'_i , $\sigma(F,G)$ est aussi la topologie la moins fine rendant continues les n formes a'_i sur F ; l'application $(\xi_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$ est donc un <u>isomorphisme</u> de l'espace produit K_s^n sur l'espace F muni de $\sigma(F,G)$.

Lorsque K est un corps valué complet non discret, ce résultat est aussi une conséquence du th.2 du chap.I, § 2 .

On définit de la même manière la topologie faible $\sigma(G,F)$ sur G , en permutant dans la déf.1 les rôles de F et G ; cette remarque s'applique du reste à tous les résultats et définitions de ce paragraphe et du suivant, et ne sera pas répétée.

3. <u>Le théorème de prolongement</u>.

Le théorème suivant se substitue, pour les topologies faibles sur des espaces vectoriels sur un corps quelconque K , au th. de Hahn-Banach, avec lequel il se confond d'ailleurs (pour un espace muni d'une topologie faible) lorsque $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$;

THÉORÈME 1.- <u>Soient</u> F <u>et</u> G <u>deux espaces vectoriels en dualité sur un corps topologique séparé</u> K . <u>L'espace</u> F <u>étant muni de la topologie faible</u> $\sigma(F,G)$, <u>soient</u> M <u>un sous-espace vectoriel fermé de</u> F <u>et</u> x_0 <u>un point de</u> F <u>n'appartenant pas à</u> M . <u>Il existe alors</u> $y_0 \in G$ <u>tel que</u> $\langle x,y_0\rangle = 0$ <u>pour tout</u> $x \in M$ <u>et</u> $\langle x_0,y_0\rangle \neq 0$.

En effet, il résulte de l'hypothèse et de la définition des voisinages de 0 pour $\sigma(F,G)$ (n°2) qu'il existe un voisinage U de 0 dans K et un nombre fini de points y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de G tels que le voisinage $x_0+W(y_1,\dots,y_n;U)$ ne rencontre pas M . Soit N le sous-espace vectoriel de F , intersection des n hyperplans d'équations $\langle x,y_i\rangle = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; a fortiori la variété linéaire x_0+N ne rencontre pas M , ce qui équivaut à dire que x_0 n'appartient pas au sous-espace vectoriel $M+N$.

 17

Il en résulte que $M+N$ est contenu dans un hyperplan H de F ne contenant pas x_0 (Alg., chap.II, § 3, prop.9) ; mais comme $N \subset M+N \subset H$, H admet une équation de la forme $u(x)=0$, où u est une combinaison linéaire des n formes linéaires $x \to \langle x,y_i \rangle$ (Alg., chap.II, § 4, th.1) ; on a donc $u(x)=\langle x,y_0 \rangle$ pour un $y_0 \in G$, ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE 1 (théorème de prolongement).- L'espace F étant muni de la topologie faible $\sigma(F,G)$, toute forme linéaire continue sur un sous-espace vectoriel M de F est la restriction à M d'une forme linéaire $x \to \langle x,y \rangle$, où $y \in G$.

Comme K est séparé, f se prolonge par continuité à l'adhérence de M, et on peut donc se borner au cas où M est fermé dans F et où $f \neq 0$. Alors l'hyperplan N de l'espace M défini par $f(x)=0$ est fermé dans M, donc dans F ; si $x_0 \in M$ est tel que $f(x_0) \neq 0$, il existe en vertu du th.1 un point $y_0 \in G$ tel que $\langle x,y_0 \rangle = 0$ pour $x \in N$ et $\lambda = \langle x_0,y_0 \rangle \neq 0$; alors la forme linéaire $x \to \langle x,y_0\alpha \rangle$, où $\alpha = \lambda^{-1}f(x_0)$, est un prolongement de f à F.

COROLLAIRE 2.- Toute forme linéaire continue sur F (pour la topologie $\sigma(F,G)$) peut s'écrire d'une seule manière $x \to \langle x,y \rangle$, où $y \in G$.

L'existence de y résulte en effet du cor.1 appliqué à $M=F$, et son unicité de (D_{II}).

4. Sous-espaces orthogonaux.

Soient F et G deux espaces en dualité sur un corps K ; nous dirons qu'une partie A de F et une partie B de G sont orthogonales si l'on a $\langle x,y \rangle = 0$ pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$.

Etant donné un sous-espace vectoriel M de F, l'ensemble des $y \in G$ orthogonaux à M est un sous-espace vectoriel N de G, qu'on appelle le sous-espace totalement orthogonal à M (ou simplement le sous-espace orthogonal à M, par abus de langage). L'espace G étant identifié à un sous-espace du dual (algèbrique) F^* de F, N n'est autre que l'intersection de G et du sous-espace M^0 de F^* orthogonal à M (Alg., chap. II, § 4, n°2). Par abus de langage, toutes les fois qu'on n'aura à considèrer qu'un seul espace G en dualité avec F, on désignera encore par M^0 le sous-espace de G orthogonal à M.

On évitera par contre cette notation, qui prête à confusion lorsqu'il y aura à considèrer plusieurs topologies faibles distinctes sur le même espace F.

PROPOSITION 1.- *Pour tout sous-espace vectoriel* M *de* F, *le sous-espace* M^0 *de* G *est fermé pour la topologie* $\sigma(G,F)$; *si* $\overline{M}$ *est l'adhérence de* M *dans* F *pour la topologie* $\sigma(F,G)$, *on a* $(\overline{M})^0 = M^0$.

La proposition résulte aussitôt du fait que $x \rightarrow \langle x,y\rangle$ est continue pour $\sigma(F,G)$ et $y \rightarrow \langle x,y\rangle$ continue pour $\sigma(G,F)$.

PROPOSITION 2.- *Pour tout sous-espace vectoriel* M *de* F, *l'adhérence de* M *pour la topologie* $\sigma(F,G)$ *est égale à l'orthogonal* M^{00} *de l'orthogonal* M^0 *de* M.

En effet, M^{00} est fermé dans F (prop. 1) ; d'autre part, si $x_0 \in F$ n'appartient pas à l'adhérence $\overline{M}$ de M pour la topologie $\sigma(F,G)$, il existe $y_0 \in G$ orthogonal à M et non à x_0 (th. 1), ce qui prouve que $x_0 \notin M^{00}$, autrement dit que $M^{00} \subset \overline{M}$, d'où la proposition, puisque $M \subset M^{00}$.

COROLLAIRE 1.- *Tout hyperplan* H *de* F, *fermé pour* $\sigma(F,G)$, *a une équation de la forme* $\langle x, y_0\rangle = 0$, *où* $y_0 \in G$ *et* $y_0 \neq 0$.

En effet, on a alors $H = H^{00}$, et comme $H \neq F$, $H^0 \neq \{0\}$; il y a par suite un $y_0 \neq 0$ dans H^0, et on a $\langle x, y_0\rangle = 0$ pour tout $x \in H$, d'où le corollaire, puisque H est un hyperplan.

On observera que, pour un corps K valué non discret, ce corollaire résulte aussi du cor.2 du th.1 ci-dessus, et du th.1 du chap.I, §2.

COROLLAIRE 2.- Pour qu'une famille (a_ι) de points de F soit totale pour la topologie $\sigma(F,G)$, il faut et il suffit que, pour tout $y \in G$, non nul, il existe un indice ι tel que $\langle a_\iota, y\rangle \neq 0$.

Cela exprime en effet qu'aucun hyperplan fermé ne contient tous les a_ι.

COROLLAIRE 3.- Pour qu'une famille (a_ι) de points de F soit topologiquement libre pour la topologie $\sigma(F,G)$, il faut et il suffit que, pour tout indice ι, il existe un élément $b_\iota \in G$ tel que $\langle a_\iota, b_\iota\rangle \neq 0$ et $\langle a_\varkappa, b_\iota\rangle = 0$ pour tout indice $\varkappa \neq \iota$.

Cela exprime en effet que pour tout ι, il existe un hyperplan fermé contenant les $a_\varkappa$ d'indice $\varkappa \neq \iota$ et ne contenant pas a_ι.

PROPOSITION 3.- Soit M un sous-espace vectoriel de F, fermé pour $\sigma(F,G)$. Alors pour tout sous-espace vectoriel N de M, de dimension finie, M+N est fermé dans F (pour $\sigma(F,G)$).

Raisonnant par récurrence sur la dimension de N, on voit qu'il suffit de démontrer la proposition lorsque $N=Ka$ est de dimension 1, et que $a \notin M$; comme $M=M^{\circ\circ}$, a n'est pas orthogonal à M°. Le sous-espace $P=(M+N)^\circ$ est donc de codimension 1 dans M° ; montrons que $P^\circ = M+N$, ce qui prouvera que M+N est fermé. Or, soit b un point de M° n'appartenant pas à P ; on a $\langle a,b\rangle = \alpha \neq 0$; pour tout $x \in P^\circ$, en posant $\beta = \langle x,b\rangle$, on a $\langle x-\beta\alpha^{-1}a, b\rangle = 0$, et d'autre part $x-\beta\alpha^{-1}a$ est orthogonal à P ; $x-\beta\alpha^{-1}a$ est donc orthogonal à M°, ce qui prouve que $x \in M+N$.

COROLLAIRE.- Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de F est fermé pour $\sigma(F,G)$.

Lorsque K est un corps valué complet non discret, la prop.4 et son corollaire résultent aussi des cor.1 et 4 du th.2 du chap.I, § 2 .

5. Sous-espaces et espaces quotients d'un espace muni d'une topologie faible.

Soient F et G deux espaces vectoriels en dualité sur un corps K . Pour tout sous-espace vectoriel M de F , considérons le sous-espace orthogonal M^o dans G ; si y_1 et y_2 sont deux points de G congrus mod.M^o, on a $\langle x,y_1-y_2\rangle=0$ pour tout $x\in M$. Pour toute classe $\dot{y}$ mod.M^o (élément de l'espace quotient G/M^o), désignons par $\langle x,\dot{y}\rangle$ la valeur commune des éléments $\langle x,y\rangle$ de K lorsque y parcourt $\dot{y}$; il est clair que $(x,\dot{y})\rightarrow\langle x,y\rangle$ est une forme bilinéaire sur $M\times(G/M^o)$.

PROPOSITION 4.- Les espaces vectoriels M et G/M^o sont mis en dualité par la forme $\langle x,\dot{y}\rangle$.

La vérification de (D_{II}) résulte aussitôt de la définition de M^o . D'autre part, si $x\neq 0$ dans M , il existe $y\in G$ tel que $\langle x,y\rangle\neq 0$, d'où $\langle x,\dot{y}\rangle=\langle x,y\rangle\neq 0$.

PROPOSITION 5.- La topologie faible $\sigma(M,G/M^o)$ sur M est identique à la topologie induite sur M par la topologie faible $\sigma(F,G)$.

En effet, si y_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont des éléments de G , $\dot{y}_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ leurs classes mod.M^o, il est évident que dans M l'ensemble $W(\dot{y}_1,\ldots,\dot{y}_n;U)$ des x tels que $\langle x,\dot{y}_i\rangle\in U$ pour $1\leqslant i\leqslant n$ (U voisinage de 0 dans K) est identique à la trace sur M de $W(y_1,\ldots,y_n;U)$, d'où la proposition.

PROPOSITION 6.- Si M est un sous-espace fermé de F , la ropologie faible $\sigma(G/M^o,M)$ sur G/M^o est identique à la topologie quotient par M^o de la topologie faible $\sigma(G,F)$ sur G .

Pour toute suite finie $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points de F , et tout voisinage U de 0 dans K , soit $V(x_1, \ldots, x_n; U)$ l'ensemble des classes $\mathring{y} \in G/M^o$ telles que, pour un $y \in \mathring{y}$ au moins, on ait $\langle x_i, y \rangle \in U$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; les ensembles $V(x_1, \ldots, x_n; U)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans G/M^o pour la topologie quotient par M^o de $\sigma(G,F)$ (chap.I, §1, n°6). Tout revient à prouver qu'on obtient encore un système fondamental de voisinages pour cette topologie en ne considérant que les ensembles $V(x_1, \ldots, x_n; U)$ où les x_i appartiennent à M . Autrement dit, il faut prouver que, pour un ensemble $V(x_1, \ldots, x_n; U)$ quelconque, il existe des points t_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ de M tels que $V(t_1, \ldots, t_m; U)$ soit contenu dans $V(x_1, \ldots, x_n; U)$. Or, soit N le sous-espace de F , de dimension $\leqslant n$, engendré par les x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; N est somme directe de $N \cap M$ et d'un sous-espace P de dimension $q \leqslant n$; soit $(z_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ une base de P ; on peut écrire $x_i = t_i + \sum_{k=1}^{q} \lambda_{ik} z_k$, où $t_i \in N \cap M \subset M$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit alors $\mathring{y}$ un point de $V(t_1, \ldots, t_n; U)$; il existe donc $y \in \mathring{y}$ tel que $\langle t_i, y \rangle \in U$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Comme le sous-espace de F engendré par M et les z_h d'indice $h \neq k$ est fermé pour $\sigma(F,G)$ (prop.3), il existe $u_k \in G$ orthogonal à M et aux z_h d'indice $h \neq k$, et tel que $\langle z_k, u_k \rangle \neq 0$ (th.1) ; il existe donc un scalaire μ_k (dépendant de y) tel que $\langle z_k, u_k \mu_k \rangle = \langle z_k, y \rangle$. Posons $u = \sum_{k=1}^{q} u_k \mu_k$; u est orthogonal à M et on a $\langle z_k, u \rangle = \langle z_k, y \rangle$ pour $1 \leqslant k \leqslant q$; comme par ailleurs $\langle t_i, u \rangle = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $\langle t_i, y-u \rangle = \langle x_i, y \rangle \in U$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; mais $y-u$ appartient aussi à la classe $\mathring{y}$ puisque $u \in M^o$, et cela achève la démonstration.

COROLLAIRE.- Soit M un sous-espace fermé de F , de codimension finie ; pour tout sous-espace N de F supplémentaire de M , F est somme directe topologique de M et de N .

En effet, la topologie induite par $\sigma(F,G)$ sur N est la topologie faible $\sigma(N,G/N^0)$ (prop.5), et la topologie quotient de $\sigma(F,G)$ par M est la topologie faible $\sigma(F/M,M^0)$ (prop.2 et 6). Si $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de N, $(\dot{a}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base de F/M formée des classes mod.M des a_i, les applications $(\xi_i)\to\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i$ et $(\xi_i)\to\sum_{i=1}^{n}\xi_i\dot{a}_i$ sont des isomorphismes de K_s^n sur N et sur F/M respectivement (n°2, Exemple), ce qui prouve que la restriction à N de l'homomorphisme canonique de F sur F/M est un isomorphisme.

Lorsque K est un corps valué complet non discret, ce corollaire résulte aussi de la prop.3 du chap.I, § 2.

Remarque.- Si M est fermé et de codimension finie n dans F, F/M est en dualité avec M^0, donc (n°2, Exemple), M^0 est de dimension n.

Si N est de dimension finie m dans F, G/N^0 est en dualité avec N, donc (n° 2, Exemple), N^0 est de codimension m dans G.

6. Produits de topologies faibles.

PROPOSITION 7.- *Soit $(F_\iota, G_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de couples d'espaces vectoriels en dualité sur un corps K. Soit $F=\prod_{\iota\in I}F_\iota$ l'espace produit des F_ι, et G l'espace somme directe des G_ι ($\iota\in I$). Si, pour tout $x=(x_\iota)_{\iota\in I}\in F$ et tout $y=(y_\iota)_{\iota\in I}\in G$, on pose $\langle x,y\rangle=\sum_{\iota\in I}\langle x_\iota,y_\iota\rangle$ (somme qui n'a qu'un nombre fini de termes $\neq 0$), la forme bilinéaire $(x,y)\to\langle x,y\rangle$ met F et G en dualité, et la topologie $\sigma(F,G)$ est identique au produit des topologies $\sigma(F_\iota,G_\iota)$.*

En effet, pour tout $x=(x_\iota)\neq 0$ dans F, il y a au moins un indice ι tel que $x_\iota\neq 0$, donc un $y_\iota\in G_\iota$ tel que $\langle x_\iota,y_\iota\rangle\neq 0$; il suffit de prendre $y=y_\iota$ pour avoir $\langle x,y\rangle=\langle x_\iota,y_\iota\rangle\neq 0$: on montre de même que (D_{II}) est vérifiée. D'autre part, pour que $x\to\langle x,y\rangle$ soit continue pour une topologie $\mathcal{C}$ sur F, il faut et il suffit évidemment que chacune des applications $x \to \langle pr_\iota x, y_\iota \rangle$ soit continue pour $\mathcal{C}$ (y_ι arbitraire dans G_ι), c'est-à-dire (chap. I, § 1, n°9) que chacune des applications pr_ι (de F dans F_ι muni de $\sigma(F_\iota, G_\iota)$) soit continue, ce qui achève la démonstration.

Exemple.- Si $F=K_s^{(I)}$, $G=K_d^I=F^*$ (*Alg.*, chap. II, § 2, n°4), la topologie $\sigma(G,F)$ est identique à la topologie produit sur G. Pour tout espace vectoriel à gauche E sur K, soit $(a_\iota)_{\iota \in I}$ une base de E ; si, pour tout $x = \sum_{\iota \in I} \xi_i a_i \in E$, on pose $\overline{x} = (\xi_i) \in K_s^{(I)}$, et, pour tout $y \in E^*$ $\overline{y} = (\langle a_\iota, y \rangle) \in K_d^I$, $x \to \overline{x}$ est un isomorphisme de E sur $K_s^{(I)}$ et $y \to \overline{y}$ un isomorphisme de E^* sur K_d^I, tels que $\langle x,y \rangle = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$. On voit donc que E^*, muni de la topologie $\sigma(E^*,E)$ est *isomorphe à l'espace produit* K_d^I.

COROLLAIRE 1.- *Si l'espace* F (*muni de* $\sigma(F,G)$) *est somme directe topologique de deux sous-espaces* M, N, *l'espace* G (*muni de* $\sigma(G,F)$) *est somme directe topologique des sous-espaces* M^o, N^o *orthogonaux respectivement à* M *et* N.

En effet, pour tout $x \in F$, soit $x = p_1(x) + p_2(x)$ où $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont les composants de x dans M et N respectivement ; p_1 et p_2 sont continues, donc, pour tout $y \in G$, $x \to \langle p_1(x), y \rangle$ et $x \to \langle p_2(x), y \rangle$ sont des formes linéaires continues sur F, qui peuvent par suite s'écrire $x \to \langle x, y_1 \rangle$ et $x \to \langle x, y_2 \rangle$ respectivement (cor. 1 du th. 1), avec $y_1 \in N^o$ et $y_2 \in M^o$. Comme $y = y_1 + y_2$, G est somme de M^o et N^o et en vertu de (D_{II}), $M^o \cap N^o$ est réduit à 0, ce qui montre que G est somme directe de M^o et N^o. Comme $\langle x,y \rangle = \langle p_1(x), y_1 \rangle + \langle p_2(x), y_2 \rangle$, la prop. 7 prouve que $\sigma(G,F)$ est identique au produit des topologies $\sigma(N^o, M)$ et $\sigma(M^o, N)$ d'où la proposition, en vertu de la prop. 5.

COROLLAIRE 2.- Tout sous-espace M de F de dimension finie admet un supplémentaire topologique dans F .

En effet, si M est de dimension n , M^{o} est de codimension n dans G , et admet par suite un supplémentaire topologique N (cor. de la prop.6) ; comme $M=M^{oo}$ puisque M est fermé (prop.2), F est somme directe topologique de M et de N^{o} en vertu du cor.1 .

Lorsque $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$, le cor.2 de la prop.7 est encore une conséquence du cor.6 de la prop.4 du chap.II, § 3 .

7. Espaces linéairement compacts (en petits caractères).

Soit K un corps discret (commutatif ou non). On dit qu'un espace vectoriel topologique séparé E sur K (à droite ou à gauche) est linéairement topologisé s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 dans E formé de sous-espaces vectoriels de E . On dit qu'un espace vectoriel topologique séparé E sur K est linéairement compact s'il est linéairement topologisé, et si toute base de filtre sur E formée de variétés linéaires admet un point adhérent .

PROPOSITION 8.- Soient E un espace vectoriel linéairement topologisé sur un corps K discret, et soit E' le dual topologique de E, espace vectoriel des formes linéaires continues sur E . Les espaces E et E' sont mis en dualité par la forme bilinéaire fondamentale $(x,x') \rightarrow \langle x,x' \rangle$.

En effet, la condition (D_{II}) étant vérifiée par définition de la relation $x'=0$, tout revient à prouver que si $x \neq 0$ dans E , il existe une forme linéaire continue x' sur E telle que $\langle x,x' \rangle \neq 0$. Or, comme E est séparé, il existe un voisinage V de 0 ne contenant pas x et qui est un sous-espace vectoriel de E . Il existe donc un hyperplan H contenant V et ne contenant pas x (Alg., chap.II, § 3, prop.9) ; si $\langle y,x' \rangle = 0$

est une équation de H , x' est continue, puisque H contient un voisinage de 0 ; d'où la proposition.

PROPOSITION 9.- *Soient* E *un espace linéairement compact sur un corps discret* K . *Si* E' *est le dual topologique de* E , *on a* $E=E'^{*}$ *et la topologie de* E *est identique à la topologie faible* $\sigma(E,E')$.

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme.- *Tout espace linéairement compact et discret* F *sur un corps discret* K *est de dimension finie*.

En effet, soit $(e_\iota)_{\iota\in I}$ une base de F ; pour tout indice $\iota\in I$, soit V_ι la variété linéaire formée des $x\in F$ dont la coordonnée d'indice ι est égale à 1 ; V_ι est fermée puisque F est discret, et toute intersection d'un nombre fini de variétés linéaires V_ι est non vide. Les intersections finies des V_ι forment donc une base de filtre composée de variétés linéaires fermées, et comme F est linéairement compact, il existe un point $x\in F$ commun à tous les ensembles de cette base de filtre. Toutes les coordonnées de x étant égales à 1 , l'ensemble d'indices I est nécessairement fini.

Ce lemme étant établi, montrons d'abord que la topologie $\mathcal{T}$ de E est identique à $\sigma(E,E')$. En effet, soit V un sous-espace vectoriel de E qui soit un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$; comme V contient un point intérieur, il est ouvert dans E , et par suite aussi fermé (Top. gén., chap. III, § 2, prop. 4). L'espace quotient E/V est donc séparé ; soit φ l'application canonique de E sur E/V ; pour tout voisinage W de 0 dans E formé d'un sous-espace vectoriel , $\varphi(W)$ est un sous-espace vectoriel de E/V , qui est donc linéairement topologisé ; enfin, si $\mathfrak{B}$ est une base de filtre sur E/V formé de variétés linéaires fermées, l'image réciproque $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{B})$

est formée de variétés linéaires fermées dans E , donc a un point commun par hypothèse ; par suite il en est de même de $\mathcal{B}$, ce qui montre que E/V est <u>linéairement compact</u>. Mais comme V est ouvert dans E , E/V est <u>discret</u>, et le lemme prouve donc que V est de codimension <u>finie</u> dans E . Le sous-espace V est donc intersection d'un nombre fini d'hyperplans d'équations $\langle x,x'_i\rangle=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$; chacun de ces hyperplans étant ouvert dans E , les x'_i sont continues dans E , autrement dit appartiennent à E'. Comme K est discret, cela prouve que V est un voisinage de 0 pour la topologie $\sigma(E,E')$, et par suite que $\mathcal{C}$ est moins fine que $\sigma(E,E')$. Mais par ailleurs, $\mathcal{C}$ est plus fine que $\sigma(E,E')$ par définition de cette dernière topologie (n^o1), ce qui montre que $\mathcal{C}$ et $\sigma(E,E')$ sont identiques.

Prouvons enfin que $E=E'^*$. Soit $(a'_\iota)_{\iota\in I}$ une base de E', et soit x un point quelconque de E'^* ; nous allons montrer que $x\in E$. Remarquons d'abord que la topologie induite sur E par $\sigma(E'^*,E')$ est identique à $\sigma(E,E')$ par définition. Pour toute partie finie H de I, soit V_H le sous-espace vectoriel de E' engendré par les a'_ι d'indice $\iota\in H$, et soit V^o_H le sous-espace orthogonal à V_H dans E'^* ; V^o_H est fermé pour $\sigma(E'^*,E')$. Comme les formes linéaires a'_ι $(\iota\in H)$ sur E sont linéairement indépendantes, les équations $\langle y,a'_\iota\rangle=\langle x,a'_\iota\rangle$ $(\iota\in H)$ ont au moins une solution $y\in E$ (<u>Alg</u>.,chap.II, §4,n^o7) ; en d'autres termes, l'intersection $(x+V^o_H)\cap E$ n'est pas vide ; d'autre part, cette intersection est une variété linéaire fermée dans E , et ces variétés linéaire fermées forment une base de filtre, puisque la relation $H_1\subset H_2$ entraîne $V^o_{H_2}\subset V^o_{H_1}$. Comme E est linéairement compact, il existe un point $x_o\in E$ appartenant à toutes les variétés linéaires $x+V^o_H$, c'est-à-dire tel que $\langle x_0, a'_\iota \rangle = \langle x, a'_\iota \rangle$ pour tout $\iota \in I$, ce qui implique par définition $x_0 = x$, et achève la démonstration.

PROPOSITION 10.- <u>Pour qu'un espace vectoriel topologique à gauche</u> E <u>sur un corps discret</u> K <u>soit linéairement compact</u>, <u>il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un espace produit</u> K_s^I .

En effet, avec les notations de la démonstration de la prop.9, $E = E'^*$, muni de $\sigma(E'^*, E')$ est isomorphe à K_s^I (n°6, <u>Exemple</u>). Réciproquement, montrons que K_s^I est linéairement compact (pour tout ensemble d'indices I Il est clair que K_s^I est séparé et linéairement topologisé, puisqu'un système fondamental de voisinages de 0 est formé des produits partiels K_s^J , où J est une partie de I de complémentaire fini. Soit Φ l'ensemble des bases de filtre sur K_s^I formées de variétés linéaires fermées ; il est clair que Φ est un ensemble inductif quand on l'ordonne par inclusion ; en vertu du th. de Zorn, toute base de filtre $\mathfrak{B} \in \Phi$ est donc contenue dans une base de filtre <u>maximale</u> $\mathfrak{B}_0 \in \Phi$; la proposition sera établie si on prouve que toute base de filtre maximale $\mathfrak{B}_0 \in \Phi$ est <u>convergente</u> dans K_s^I . Or, pour tout $\iota \in I$, $pr_\iota(\mathfrak{B})$ est une base de filtre sur K (considéré comme espace vectoriel à gauche de dimension 1 sur lui-même), et elle est formée de variétés linéaires de K ; elle se compose donc, soit de l'unique ensemble K , soit de K et d'un point de K. Mais le premier cas ne peut se produire, car si ξ est un point de K , l'ensemble formé des $M \in \mathfrak{B}_0$ et des intersections des variétés linéaires fermées $M \in \mathfrak{B}_0$ et de l'hyperplan fermé $\overset{-1}{pr_\iota}(\xi)$ serait une base de filtre $\mathfrak{B} \in \Phi$ contenant $\mathfrak{B}_0$ et distincte de cette dernière. On en conclut que $pr_\iota(\mathfrak{B}_0)$ converge dans l'espace discret K , et par suite que $\mathfrak{B}_0$ converge dans K_s^I .

§ 2. Ensembles polaires.

DÉFINITION 1.- Soient F et G deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ en dualité. Pour toute partie M de F , on appelle polaire de M dans G l'ensemble des $y \in G$ tels que l'on ait $\langle x,y \rangle \leq 1$ pour tout $x \in M$.

Considérons maintenant deux espaces vectoriels F,G sur $\mathbb{C}$, en dualité, et soit F_0 l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ sous-jacent à F ; pour tout $y \in G$, soit y_0 l'élément du dual algèbrique F_0^* de F_0 tel que l'on ait $\langle x,y_0 \rangle = \mathcal{R}(\langle x,y \rangle)$ pour tout $x \in F$; on sait que l'application $y \to y_0$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire biunivoque de G sur un sous-espace vectoriel G_0 (sur $\mathbb{R}$) de F_0^* , y étant donné en fonction de y_0 par la relation $\langle x,y \rangle = \langle x,y_0 \rangle - i\langle ix,y_0 \rangle$ pour tout $x \in F$ (chap.II, § 6,n°1) ; cette dernière relation prouve d'ailleurs que F_0 et G_0 sont en dualité. On est ainsi amené à poser, pour les espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, la définition suivante :

DÉFINITION 2.- Soient F et G deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ en dualité. Pour toute partie M de F , on appelle polaire de M dans G l'ensemble des $y \in G$ tels que l'on ait $\mathcal{R}(\langle x,y \rangle) \leq 1$ pour tout $x \in M$.

En d'autres termes, l'ensemble polaire de M dans G est l'image de l'ensemble polaire de M dans G_0 par l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme $y \to y_0$ défini ci-dessus.

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on désigne l'ensemble polaire dans G d'une partie M de F par la notation M^0. On définit bien entendu de la même manière l'ensemble polaire dans F d'une partie de G . Dans tout ce qui suit, nous étudierons simultanément les propriétés des ensembles polaires pour les espaces vectoriels réels et les espaces vectoriels complexes.

Si M est un sous-espace vectoriel de F, pour tout $y \in M^o$, on doit avoir $\mathcal{R}(\lambda\langle x,y\rangle) \leqslant 1$ pour tout scalaire $x \in M$ et tout λ, ce qui n'est possible que si $\langle x,y\rangle = 0$; M^o est donc le sous-espace vectoriel de G orthogonal à M (§ 1, n°4), ce qui justifie la notation introduite pour les ensembles polaires.

Il est clair que pour tout scalaire λ et tout $M \subset F$, on a $(\lambda M)^o = \lambda^{-1} M^o$; la relation $M \subset N$ entraîne $N^o \subset M^o$; pour toute famille (M_α) de parties de F, l'ensemble polaire de $\bigcup_\alpha M_\alpha$ est l'intersection des ensembles polaires M_α^o.

PROPOSITION 1.- Pour toute partie M de F, l'ensemble polaire M^o est un ensemble convexe, fermé dans G pour la topologie $\sigma(G,F)$ et contenant 0.

La proposition est évidente à partir des définitions.

PROPOSITION 2.- Pour toute partie M de F, l'ensemble polaire M^{oo} de l'ensemble polaire M^o de M est identique à l'enveloppe convexe fermée (pour $\sigma(F,G)$) de M et de $\{0\}$, et on a $(M^{oo})^o = M^o$.

Si N est l'enveloppe convexe de M et de $\{0\}$, il est immédiat que $N^o = M^o$, et on peut donc se borner au cas où $N = M$. La prop. 1 montre que $M^{oo} \supset \overline{M}$; d'autre part, si $x_0 \in F$ n'appartient pas à $\overline{M}$, il existe un hyperplan réel fermé H qui sépare strictement x_0 et $\overline{M}$ (chap. II, § 3, prop. 4) ; comme H ne contient pas 0, il a une équation de la forme $\mathcal{R}(\langle x,y\rangle) = 1$, où $y \in G$ (§ 1, cor. 2 du th. 1), et on a par suite $\mathcal{R}(\langle x,y\rangle) < 1$ pour tout $x \in \overline{M}$, et $\mathcal{R}(\langle x_0,y\rangle) > 1$; cela signifie que $y \in M^o$ et $x_0 \notin M^{oo}$, d'où la relation $M^{oo} = \overline{M}$. Comme $M \subset M^{oo}$, on a $(M^{oo})^o \subset M^o \subset (M^o)^{oo} = (M^{oo})^o$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- Pour toute famille (M_α) de parties de F convexes, fermées (pour $\sigma(F,G)$) et contenant 0, l'ensemble polaire de l'intersection $M = \bigcap_\alpha M_\alpha$ est l'enveloppe convexe fermée (pour $\sigma(G,F)$) de la réunion des M_α^o

En effet, si N est cette enveloppe convexe, on a $N^o = \bigcap_\alpha M^{oo}_\alpha = \bigcap_\alpha M_\alpha = M$, d'où $N = N^{oo} = M^o$.

PROPOSITION 3.- <u>Pour toute partie équilibrée</u> M <u>de</u> F , M^o <u>est une partie équilibrée</u> (<u>convexe et faiblement fermée</u>) <u>de</u> G , <u>et est identique à l'ensemble des</u> $y \in G$ <u>tels que</u> $|\langle x,y\rangle| \leqslant 1$ <u>pour tout</u> $x \in M$.

On a en effet $\lambda M = M$ pour $|\lambda| = 1$, d'où aussi $\lambda M^o = M^o$; en outre, si $\mathcal{R}(\lambda\langle x,y\rangle) \leqslant 1$ pour tout λ tel que $|\lambda| = 1$, on a $|\langle x,y\rangle| \leqslant 1$

<u>Remarques</u>.- 1) Les espaces F et G étant supposés réels, soit M un <u>cône</u> dans F (de sommet 0) ; si $y \in M^o$, on a $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle \leqslant 1$ pour tout $\lambda > 0$, donc $\langle x,y\rangle \leqslant 0$. Ceci montre que M^o est un <u>cône convexe faiblement fermé</u> , défini comme l'ensemble des $y \in G$ tels que $\langle x,y\rangle \leqslant 0$ pour tout $x \in M$.

2) Tout voisinage de 0 pour $\sigma(F,G)$ contient un voisinage défini par un nombre fini d'inégalités $|\langle x,y_i\rangle| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (§ 1,n°2), où les y_i sont arbitraires dans G ; V n'est autre que l'ensemble polaire de l'enveloppe convexe équilibrée de l'ensemble des y_i dans G .

PROPOSITION 4.- <u>Pour qu'une partie équilibrée</u> M <u>de</u> F <u>soit bornée pour la topologie</u> $\sigma(F,G)$, <u>il faut et il suffit que</u> M^o <u>soit un tonneau pour la topologie</u> $\sigma(G,F)$.

En effet, pour que M soit bornée pour $\sigma(F,G)$, il faut et il suffit que, pour tout $y \in G$, on ait $\sup_{x \in M} |\langle x,y\rangle| \leqslant 1$ (chap.III, § 2,n°1) ; d'autre part, puisque M^o est convexe, équilibré et faiblement fermé dans G (prop.3) pour que M^o soit un tonneau, il faut et il suffit qu'il soit absorbant. Mais cela signifie que pour tout $y \in G$, il existe $\lambda > 0$

tel que $y \in \lambda M^0$, c'est-à-dire $|\langle x,y\rangle| \leqslant \lambda$ pour tout $x \in M$, d'où la proposition.

§ 3. Dual d'un espace localement convexe séparé.

Dans ce paragraphe et le suivant, il ne sera question que d'espaces localement convexes séparés (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), sauf mention expresse du contraire.

1. Topologie affaiblie et topologie faible.

Soit E un espace localement convexe séparé, $\mathcal{C}$ sa topologie. Rappelons que le dual (topologique) de E est le sous-espace E' du dual algébrique E^* de E, formé des formes linéaires continues sur E ; on a vu (§ 1, n°1, exemple 2) que E et E' sont en dualité pour la forme bilinéaire fondamentale $\langle x,x'\rangle$. Nous allons dans ce paragraphe étudier les relations entre la topologie $\mathcal{C}$ donnée sur E et les topologies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(E',E)$; rappelons que ces dernières sont localement convexes et séparées (§ 1, n°2). Sur E', on ne considèrera, dans ce paragraphe, que la seule topologie $\sigma(E',E)$, qui sera qualifiée de topologie faible. Au contraire, sur E, se trouvent définies deux topologies : la topologie $\mathcal{C}$, que nous appellerons encore la topologie initiale de E, et la topologie $\sigma(E,E')$, qui est par définition moins fine que $\mathcal{C}$, et que nous appellerons la topologie affaiblie (de $\mathcal{C}$) sur E.

On notera que si on munit E de la topologie $\sigma(E,E')$, son dual est encore E' (§ 1, cor. 2 du th. 1 ; cf. n°3 ci-dessous) ; la topologie affaiblie de $\sigma(E,E')$ est donc identique à $\sigma(E,E')$. Quand aucune confusion ne sera possible, on emploiera l'adjectif "faible" et l'adverbe "faiblement" pour désigner les propriétés se rapportant à la topologie faible sur E' ou à la topologie affaiblie sur E.

2. Propriétés du dual faible.

Dans tout ce qui suit, lorsque E est un espace localement convexe séparé, E' son dual, et qu'on parle de l'ensemble polaire M^o (resp. M'^o) d'une partie M de E (resp. M' de E'), il s'agit toujours, sauf mention expresse du contraire, du polaire de M (resp. M') dans E' (resp. E) relatif à la dualité entre E et E'.

Quand nous parlerons, dans ce paragraphe et les suivants, de parties équicontinues de E', cette notion se rapporte toujours à la topologie initiale de E . Bien entendu, elle est entièrement indépendante de toute topologie qu'on peut considèrer sur E' .

La topologie faible sur le dual E' d'un espace localement convexe séparé réel (resp. complexe) E n'est autre que la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$). On peut donc lui appliquer les résultats du chap.III, § 3 .

PROPOSITION 1.- Soit E un espace localement convexe séparé. Pour qu'une partie M' du dual E' de E soit équicontinue, il faut et il suffit que le polaire M'^o de M' soit un voisinage de 0 dans E (pour la topologie initiale) , ou (ce qui revient au même) que M' soit contenu dans le polaire V^o d'un voisinage V de 0 dans E (pour la topologie initiale).

En effet, tout voisinage de 0 dans le corps des scalaires contenant un homothétique du voisinage U défini par $|\xi| \leqslant 1$, pour que M' soit équicontinue, il faut et il suffit que l'intersection V des $\overset{-1}{x'}(U)$ soit un voisinage de 0 dans E lorsque x' parcourt M' (chap.III, § 3, n°5) ; mais cette intersection n'est autre que le polaire de l'enveloppe convexe équilibrée de M' (§ 2, prop.3), d'où la première assertion. On a alors évidemment $M' \subset V^o$; inversement si $M' \subset V^o$ pour un voisinage V de 0 dans E , on a $M'^o \supset V^{oo} \supset V$, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 2.- Soit E un espace localement convexe séparé. Toute partie équicontinue du dual E' de E est relativement compacte pour la topologie faible.

Cela résulte de la condition générale de compacité d'une partie équicontinue de $\mathcal{L}$(E,F) pour la topologie de la convergence simple (chap.III § 3, cor. de la prop.4), puisque toute partie bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est relativement compacte.

THEOREME 1.- Soit E un espace tonnelé séparé. Pour toute partie M' du dual E' de E , les propriétés suivantes sont équivalentes : a) M' est bornée pour la topologie faible ; b) M' est relativement compacte pour la topologie faible ; c) M' est équicontinue.

On vient de voir en effet que c) entraîne b) (prop.2), et d'autre part toute partie relativement faiblement compacte est faiblement bornée (chap. III, § 2,prop.3), donc b) entraîne a). Enfin, le fait que a) entraîne c) est un cas particuàier de l'identité des parties simplement bornées et des parties équicontinues dans $\mathcal{L}$(E,F) lorsque E est tonnelé (chap.III, § 3,th.2).

COROLLAIRE 1.- Soient E un espace tonnelé séparé, E' son dual muni de la topologie faible. L'enveloppe convexe fermée d'un ensemble compact de E' est compacte.

En effet, l'enveloppe convexe fermée d'une partie équicontinue de E' est équicontinue (chap.III, § 3,prop.4).

COROLLAIRE 2.- Le dual d'un espace tonnelé séparé est quasi-complet pour la topologie faible.

COROLLAIRE 3.- Soient E et F deux espaces localement convexes séparés ; on munit le dual F' de F de la topologie faible σ(F',F) on munit l'espa $\mathcal{L}$(E,F') des applications linéaires continues de E dans F', de la *topologie de la convergence simple. Alors, si F est tonnelé, toute partie équicontinue de* $\mathcal{L}(E,F')$ *est relativement compacte ; si E et F sont tous deux tonnelés, toute partie (simplement) bornée de* $\mathcal{L}(E,F')$ *est relativement compacte.*

En effet, toute partie bornée de F' (pour $\sigma(F',F)$) est alors relativement compacte, en vertu du th.1 ; la première partie du corollaire résulte alors de la caractérisation des parties relativement compactes dans $\mathcal{L}(E,F')$ pour la topologie de la convergence simple (chap.III, § 3, cor. de la prop.4) ; la seconde partie résulte de l'identité des parties simplement bornées et des parties équicontinues dans $\mathcal{L}(E,F')$ lorsque E est tonnelé (chap.III, § 3,th.2).

PROPOSITION 3.- *Soit E un espace localement convexe séparé, tel qu'il existe dans E un ensemble total dénombrable. Alors toute partie équicontinue du dual E' de E, fermée pour la topologie faible, est un espace compact métrisable pour cette topologie.*

C'est une conséquence immédiate de la prop.2 ci-dessus et de la proposition générale correspondante, relative aux parties équicontinues des espaces $\mathcal{L}(E,F)$ (chap.III, § 3,cor.2 de la prop.5) ; cette dernière s'applique du fait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces métrisables.

3. Topologies compatibles avec une dualité.

Soient E un espace localement convexe séparé, E' son dual. L'espace E' est encore le dual de E lorsqu'on munit E de la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$ (§ 1,cor.2 du th.1). Pour étudier les relations entre la topologie initiale de E et la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$, nous allons plus généralement considérer un couple (F,G) de deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en dualité ; nous dirons qu'une topologie localement convexe séparée $\mathcal{T}$ sur F est *compatible avec la dualité entre F et G* si G (identifié à un sous-espace de F^*) est identique au dual de l'espace localement convexe séparé obtenu en munissant F de $\mathcal{C}$. Toute relation entre une telle topologie et la topologie $\sigma(F,G)$ donnera aussitôt une relation entre la topologie initiale d'un espace localement convexe séparé et sa topologie affaiblie .

PROPOSITION 4.- Soient F et G deux espaces vectoriels en dualité sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les ensembles convexes fermés dans F sont les mêmes pour toutes les topologies localement convexes séparées compatibles avec la dualité entre F et G .

On peut évidemment se borner au cas où F et G sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Les formes linéaires continues sur F étant les mêmes pour toutes les topologies compatibles avec la dualité entre F et G, il en est de même des semi-espaces fermés (chap.I, § 2,th.1), et par suite aussi des ensembles convexes fermés, puisqu'un tel ensemble est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent (chap.II, § 3, cor.1 de la prop.4).

COROLLAIRE 1.- Pour toute partie convexe A de F , l'adhérence de A dans F est la même pour toutes les topologies localement convexes séparées compatibles avec la dualité entre F et G .

En effet, pour une telle topologie, l'adhérence de A est convexe (chap.II, § 1,prop.14), donc est l'intersection des ensembles convexes fermés contenant A .

En particulier :

COROLLAIRE 2.- Soient E un espace localement convexe séparé, E' son dual. L'adhérence d'une partie convexe de E est la même pour la topologie initiale de E et pour la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$.

COROLLAIRE 3.- *Pour toute partie convexe* A *de* E *contenant* 0 , A^{oo} *est l'adhérence de* A *pour la topologie initiale.*

On sait en effet que A^{oo} est l'adhérence de A pour $\sigma(E,E')$ (§ 2, prop.2)

Etant donnés deux espaces vectoriels F et G en dualité (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), F peut être identifié au *dual* $\mathcal{L}(G,\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{L}(G,\mathbf{C})$) de l'espace G lorsqu'on munit G de la topologie localement convexe séparée $\sigma(G,F)$ (§ 1, cor.2 du th.1). Pour tout ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de G (pour $\sigma(G,F)$), on peut donc considérer sur F la $\mathfrak{S}$ *-topologie* (chap.III, § 3, n°1) ; supposons que les homothétiques (de rapport $\neq 0$) de tout ensemble de $\mathfrak{S}$ appartiennent à $\mathfrak{S}$, ainsi que l'enveloppe convexe fermée (pour $\sigma(G,F)$) et équilibrée de la réunion d'un nombre fini d'ensembles de $\mathfrak{S}$; alors, la définition des voisinages de 0 pour la $\mathfrak{S}$-topologie (*loc.cit.*) montre que les *polaires* (dans F) des ensembles de $\mathfrak{S}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 pour cette topologie.

Cela étant, les topologies compatibles avec une dualité sont caractérisées par le théorème suivant :

THÉORÈME 2 (Mackey).- *Soient* F *et* G *deux espaces vectoriels en dualité sur* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$. *Pour qu'une topologie localement convexe séparée* $\mathcal{T}$ *sur* F *soit compatible avec la dualité entre* F *et* G , *il faut et il suffit que* $\mathcal{T}$ *soit identique à une* $\mathfrak{S}$ *-topologie, où* $\mathfrak{S}$ *est un recouvrement de* G *formé de parties convexes, équilibrées et compactes pour la topologie faible* $\sigma(G,F)$.

Montrons d'abord que la condition de l'énoncé est *nécessaire*. Supposons que G soit le dual de F lorsqu'on munit F d'une topologie localement convexe séparée $\mathcal{T}$. Soit $\mathfrak{U}$ un système fondamental, invariant par homothétie, de voisinages de 0 dans F , convexes, équilibrés et fermés (pour $\mathcal{T}$) dans F ; alors (cor.3 de la prop.4), pour tout ensemble $V \in \mathfrak{V}$, on a $V=V^{oo}$ (§ 2, prop.2) ; mais comme V^o est compact pour $\sigma(G,F)$ (prop.1 et 2), $\mathfrak{V}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour la $\mathfrak{S}$-topologie, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des polaires V^o des ensembles de $\mathfrak{V}$. D'ailleurs $\mathfrak{S}$ est un recouvrement de G , car pour tout $y \in G$, la continuité de $x \to \langle x,y \rangle$ dans F implique l'existence d'un voisinage $W \in \mathfrak{V}$ tel que $|\langle x,y \rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in W$, c'est-à-dire $y \in W^o$.

Prouvons maintenant que la condition de l'énoncé est suffisante. Soit donc $\mathfrak{S}$ un recouvrement de G , formé de parties convexes, équilibrées et compactes pour $\sigma(G,F)$; on peut toujours, sans changer la $\mathfrak{S}$-topologie, supposer que les homothétiques des ensembles de $\mathfrak{S}$ appartiennent à $\mathfrak{S}$, ainsi que l'enveloppe convexe équilibrée d'une réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{S}$ (chap.III, § 3, n°1, Remarque); cette dernière enveloppe est d'ailleurs compacte pour $\sigma(G,F)$ (chap.II, § 4, prop.1). La $\mathfrak{S}$-topologie $\mathcal{T}$ sur F est alors une topologie localement convexe séparée, puisque les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont bornés pour $\sigma(G,F)$ (chap.III § 2, prop.3) et que $\mathfrak{S}$ est un recouvrement de G . En outre, les polaires K^o dans F des ensembles K forment un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathcal{T}$.

Cela étant, soit F' le dual de l'espace F , quand on munit F de la topologie $\mathcal{T}$. Comme toute partie finie de G est contenue dans un ensemble de $\mathfrak{S}$, la topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que $\sigma(F,G)$, et par suite on peut identifier G à un sous-espacevectoriel de F' (§ 1, cor.2 du th.1). Prouvons que $G=F'$. En effet, soit $x' \in F'$; la continuité de x' implique l'existence d'un voisinage K^o de 0 dans F (où $K \in \mathfrak{S}$) tel que $|\langle x,x' \rangle| \leqslant 1$

pour tout $x \in K^0$; cela signifie que x' appartient au polaire K_1 <u>dans</u> F' de l'ensemble K^0. Mais K_1 est l'adhérence de K dans F' pour la topologie $\sigma(F',F)$ (§2, prop.2) ; comme la topologie induite par $\sigma(F',F)$ sur $G \subset F'$ est identique à $\sigma(G,F)$, K est compact pour $\sigma(F',F)$, donc fermé dans F' pour $\sigma(F',F)$, et par suite identique à K_1 ; ce qui prouve que $x' \in G$, et achève la démonstration.

COROLLAIRE.- <u>Pour qu'une topologie localement convexe séparée</u> $\mathcal{C}$ <u>sur</u> F <u>soit compatible avec la dualité entre</u> F <u>et</u> G, <u>il faut et il suffit que</u> $\mathcal{C}$ <u>soit plus fine que la topologie</u> $\sigma(F,G)$, <u>et moins fine que la topologie</u> $\tau(F,G)$ <u>de la convergence uniforme dans toutes les parties de</u> G <u>convexes, équilibrées et compactes pour</u> $\sigma(G,F)$.

La condition est évidemment nécessaire en vertu du th.2. Elle est suffisante, car si $\mathcal{C}$ est plus fine que $\sigma(F,G)$ et moins fine que $\tau(F,G)$, le dual de F pour la topologie $\mathcal{C}$ contient le dual F_1' de F pour la topologie $\sigma(F,G)$ et est contenu dans le dual F_2' de F pour la topologie $\tau(F,G)$; la proposition résulte donc de ce que $F_1'=F_2'=G$.

On dit que $\tau(F,G)$ est la <u>topologie de Mackey</u> sur F (correspondant à la dualité entre F et G).

<u>Remarque</u>.- La prop.1 montre que la topologie de Mackey $\tau(F,G)$ est <u>caractérisée</u> par la propriété suivante : pour qu'une partie <u>convexe</u> de G soit équicontinue, lorsque F est muni de la topologie $\tau(F,G)$, il faut et il suffit qu'elle soit relativement compacte pour la topologie $\sigma(G,F)$. Cette remarque, jointe au th.1, prouve en particulier que pour tout espace <u>tonnelé</u> séparé E, la topologie initiale de E est <u>identique</u> à la topologie de Mackey $\tau(E,E')$.

THÉORÈME 3 (Mackey).- Soient F et G deux espaces vectoriels en dualité sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les ensembles bornés dans F sont les mêmes pour toutes les topologies localement convexes séparées compatibles avec la dualité entre F et G.

En effet, l'ensemble $\mathfrak{S}$ des parties convexes, équilibrées et faiblement compactes de G est formé de parties complètes pour la topologie $\sigma(G,F)$; toute partie M de F, bornée pour la topologie faible $\sigma(F,G)$, est donc bornée pour la $\mathfrak{S}$-topologie (chap.III, § 3, th.1), c'est-à-dire pour la topologie de Mackey $\tau(F,G)$, d'où le théorème, en vertu du cor. du th.2.

COROLLAIRE.- Soient E un espace localement convexe séparé, E' son dual. Toute partie de E bornée pour la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$ est bornée pour la topologie initiale de E.

4. Caractérisation des formes linéaires faiblement continues dans un dual

Si E est un espace localement convexe séparé, E' son dual, toute forme linéaire sur E', continue pour la topologie faible, peut s'écrire d'une seule manière $x' \to \langle x,x'\rangle$ pour un $x \in E$ (§ 1, cor.2 du th.1). Ces formes peuvent dans certains cas être caractérisées par une propriété moins restrictive que la continuité faible :

THÉORÈME 4 (Banach).- Soient E un espace localement convexe séparé et complet, et E' son dual. Pour qu'une forme linéaire sur E' soit continue pour la topologie faible $\sigma(E',E)$, il suffit que sa restriction à toute partie équicontinue de E' soit continue (pour $\sigma(E',E)$).

Soit $F \subset E'^*$ l'ensemble des formes linéaires sur E' dont la restriction à toute partie équicontinue de E' soit continue pour $\sigma(E',E)$;

il est clair que F est un sous-espace vectoriel de E'^* qui contient E, et est en dualité avec E'. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties convexes, équilibrées, faiblement fermées et équicontinues de E' ; tout ensemble $B' \in \mathfrak{S}$ est compact pour $\sigma(E',E)$ (prop.2), et comme pour toute forme linéaire $u \in F$, la restriction de u à B' est continue par hypothèse, $u(B')$ est <u>borné</u> dans le corps des scalaires ; ceci prouve que la $\mathfrak{S}$-topologie $\mathcal{C}$ sur F est compatible avec la structure d'espace vectoriel de F (chap.III, § 3, prop.1). Il est clair en outre que la topologie $\mathcal{C}$ est localement convexe et séparée, et qu'un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathcal{C}$ est formé des polaires dans F des ensembles de $\mathfrak{S}$ (puisque $\mathfrak{S}$ est filtrant pour la relation $\subset$, et invariant par homothétie). Or, d'après la prop.1, la trace sur E du polaire dans F d'un ensemble $B' \in \mathfrak{S}$ est un voisinage de 0 pour la topologie initiale de E ; inversement, si V est un voisinage convexe, fermé et équilibré de 0 dans E pour la topologie initiale, son polaire B' dans E' appartient à $\mathfrak{S}$; comme le polaire de B' dans E est identique à V (cor.3 de la prop.4), V est la trace sur E du polaire de B' dans F ; on voit ainsi que la topologie induite sur E par $\mathcal{C}$ est identique à la topologie initiale de E. Comme E est supposé complet pour cette dernière topologie, il est <u>fermé</u> dans F pour la topologie $\mathcal{C}$.

Montrons maintenant que E' est le dual de F quand on munit F de la topologie $\mathcal{C}$. En vertu du th.2, il suffit de prouver que les ensembles $B' \in \mathfrak{S}$ sont compacts <u>pour la topologie</u> $\sigma(E',F)$. Or, soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre sur B' ; il converge par hypothèse vers un point $x'_0 \in B'$ pour la topologie $\sigma(E',E)$; mais pour tout $u \in F$, la restriction de u à B' est continue pour $\sigma(E',E)$, donc $u(\mathfrak{F})$ converge vers $u(x'_0)$.

Or, cela signifie par définition que $\mathcal{F}$ converge vers x'_0 pour la topologie $\sigma(E',F)$, ce qui établit notre assertion.

Cela étant, si on avait $E \neq F$, il existerait dans F un hyperplan fermé (pour $\mathcal{C}$) contenant E, et par suite un $x' \in E'$ orthogonal à E et $\neq 0$, ce qui est absurde.

Remarque.- S'il existe dans E un ensemble total dénombrable toute partie équicontinue de E' est métrisable pour la topologie faible (prop.3) ; pour vérifier qu'une forme linéaire u sur E' est faiblement continue, il suffit donc de vérifier que pour toute *suite* (x'_n) qui converge faiblement vers une limite x', on a

$$\lim_{n \to \infty} u(x'_n) = u(x').$$

5. Dual d'un sous-espace ; dual d'un espace quotient.

PROPOSITION 5.- *Soient* E *un espace localement convexe séparé*, E' *son dual*, M *un sous-espace vectoriel de* E, M° *le sous-espace de* E' *orthogonal à* M. *La topologie affaiblie de la topologie induite sur* M *par la topologie initiale de* E *est identique à la topologie* $(M,E'/M^\circ)$, *induite sur* M *par la topologie affaiblie* $\sigma(E,E')$ *de* E.

En effet, il résulte du th. de Hahn-Banach (chap. II, § 5, th. 1) que toute forme linéaire continue sur M est la restriction à M d'une forme linéaire continue sur E, d'où la proposition (cf. § 1, prop. 5).

PROPOSITION 6.- *Soient* E *un espace localement convexe séparé*, E' *son dual* M *un sous-espace vectoriel fermé de* E. *La topologie affaiblie de la topologie quotient par* M *de la topologie initiale de* E *est identique à la topologie* $\sigma(E/M,M^\circ)$, *quotient par* M *de la topologie affaiblie* $\sigma(E,E')$ *de* E.

En effet, si φ est l'application canonique de E sur E/M , l'application $u \to u\circ\varphi$ est un isomorphisme (algèbrique) du dual de E/M sur le sous-espace M^0 de E' orthogonal à M (cf. § 1, prop.6).

§ 4. Topologie forte sur le dual d'un espace localement convexe séparé.

1. Définition de la topologie forte.

Soient E un espace localement convexe séparé réel (resp. complexe), E' son dual. Comme $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ (resp. $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$), pour tout ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E , dont la réunion est totale dans E , la $\mathfrak{S}$-topologie sur E' est une topologie localement convexe séparée (chap. III, § 3, n^{os} 1 et 2). En particulier :

DÉFINITION 1.- Soient E un espace localement convexe séparé, E' son dual on appelle topologie forte sur E' la topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties bornées de E .

Comme tout homothétique d'une partie bornée de E est bornée, ainsi que l'enveloppe convexe d'une réunion finie d'ensembles bornés, la définition des voisinages de 0 pour une $\mathfrak{S}$-topologie (chap. III, § 3, n^{o}1) montre aussitôt qu'un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie forte sur E' est formé par les polaires des parties bornées de E (ou les polaires d'un système fondamental de parties bornées de E).

On emploiera parfois l'adjectif "fort" et l'adverbe "fortement" pour désigner des propriétés se rapportant à la topologie forte sur E'. L'espace E', muni de la topologie forte, sera parfois appelé "dual fort" de E .

Remarques.- 1) La topologie forte sur E' est définie par les semi-normes

$$|x'|_B = \sup_{x \in B} |\langle x, x' \rangle|$$

où B parcourt un système fondamental de parties bornées de E . En particulier, pour que cette topologie soit métrisable il faut et il suffit qu'il existe dans E un système fondamental dénombrable de parties bornées.

2) Il résulte immédiatement de la déf. 1 que lorsqu'on munit E' de la topologie forte, la forme bilinéaire canonique $(x,x') \to \langle x,x' \rangle$ est $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$-hypocontinue, $\mathfrak{S}$ étant l'ensemble des parties bornées de E et $\mathfrak{S}'$ l'ensemble des parties équicontinues de E'. Mais en général, cette forme n'est pas continue dans $E \times E'$ (exerc. 2).

3) Il est clair que la topologie forte sur E' est plus fine que la topologie faible $\sigma(E',E)$; elle est en général strictement plus fine (exerc. 1 et § 5, n°1).

2. Propriétés du dual fort.

Appliquant au dual E' d'un espace localement convexe séparé E les résultats du chap. III, § 3 sur les $\mathfrak{S}$-topologies, on voit que toute partie équicontinue de E' est fortement bornée (chap. III, § 3, prop. 6), et que toute partie fortement bornée de E' est faiblement bornée. On a en outre les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 1.- *Si E est un espace localement convexe séparé et quasi-complet, toute partie faiblement bornée du dual E' de E est fortement bornée.*

C'est un cas particulier du cor. 1 du th. 1 du chap. III, § 3 .

PROPOSITION 2.- *Si E est un espace localement convexe séparé et tonnelé, toute partie faiblement bornée du dual E' de E est fortement bornée (et équicontinue).*

Compte-tenu des remarques qui précèdent, ceci a déjà été démontré (§ 3,th.1). On peut donc dire que si E est tonnelé et séparé, les notions d'ensemble équicontinu, d'ensemble relativement faiblement compact, d'ensemble fortement borné et d'ensemble faiblement borné sont identiques dans le dual E' de E .

Scholie.- Si E est un espace tonnelé séparé , E' son dual fort, les polaires des voisinages de 0 dans l'un de ces deux espaces forment un système fondamental de parties bornées de l'autre, et les polaires des parties bornées de l'un de ces deux espaces forment un système fondamental de voisinages de 0 dans l'autre.

PROPOSITION 3.- Si E est un espace tonnelé séparé, son dual fort E' est quasi-complet.

C'est un cas particulier du cor.2 du th.4 du chap.III, § 3, relatif aux parties complètes d'un espace $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

3. Bidual. Espaces réflexifs.

Soient E un espace localement convexe séparé, E' son dual. Pour tout $x \in E$, soit $\tilde{x}$ la forme linéaire $x' \to \langle x,x' \rangle$ sur E' ; cette forme linéaire est continue pour la topologie faible $\sigma(E',E)$, donc a fortiori pour la topologie forte sur E' ; comme la relation $\tilde{x}=0$ signifie que $\langle x,x' \rangle = 0$ pour tout $x' \in E'$, elle entraîne $x=0$, puisque E et E' sont en dualité. Autrement dit, l'application $x \to \tilde{x}$ est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel (non topologique) de E sur celle d'un sous-espace du dual E" du dual fort E' ; on dit que E" est le bidual de E , et on considère toujours E (en tant qu'espace vectoriel non topologique) comme plongé dans E" par l'application $x \to \tilde{x}$ (dite canonique).

On n'a pas nécessairement E=E", autrement dit, il peut exister des formes linéaires sur E' qui sont fortement continues, mais non faiblement continues (§ 5, exerc.1). De façon précise :

THÉORÈME 1.- Soient E un espace localement convexe séparé, E' son dual. Pour que toute forme linéaire sur E' continue pour la topologie forte soit aussi continue pour la topologie faible $\sigma(E',E)$, (autrement dit, pour que $E=E''$), il faut et il suffit que toute partie bornée de E soit relativement compacte pour la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$.

Supposons en effet que E soit le dual de l'espace E' muni de la topologie forte ; pour toute partie bornée B de E, le polaire B^o de B dans E' est un voisinage de 0 pour la topologie forte. Par suite, le polaire B^{oo} de B^o dans le dual E de E' est compact pour la topologie $\sigma(E,E')$ (§ 3, prop. 1 et 2), et comme $B \subset B^{oo}$, B est relativement compact pour cette topologie.

Inversement, si toute partie bornée de E est relativement compacte pour $\sigma(E,E')$, la topologie forte sur E' est la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties convexes et équilibrées de E, compactes pour $\sigma(E,E')$ (à savoir, les parties convexes, bornées, équilibrées et fermées de E) ; il résulte du th. de Mackey (§ 3, th. 2) que E est le dual de E' lorsque ce dernier est muni de la topologie forte.

Remarques.- 1) Pour que $E=E''$, il faut et il suffit que dans E', toute partie convexe fortement fermée soit faiblement fermée. C'est en effet nécessaire d'après la prop. 4 du § 3 ; inversement, si tout hyperplan fortement fermé dans E' est faiblement fermé, toute forme linéaire fortement continue sur E' est faiblement continue (chap. I, § 2, th. 1), ce qui signifie que $E=E''$.

2) Si $E=E''$, toute suite de Cauchy (x_n) dans E pour la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$ admet une limite dans E pour cette topologie. En effet, l'ensemble des x_n est borné dans E, donc relativement faiblement compact ; la suite (x_n) admet par suite une valeur

d'adhérence pour $\sigma(E,E')$, et cette valeur est limite de (x_n) pour $\sigma(E,E')$ puisque (x_n) est une suite de Cauchy.

Lorsque $E=E''$, on peut évidemment envisager sur E , considéré comme dual de E', les $\mathfrak{S}$-topologies, où $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties de E', bornées pour la topologie forte. En particulier :

DÉFINITION 2.- *On dit qu'un espace localement convexe séparé* E *est réflexif s'il vérifie les conditions suivantes* :

1° *toute forme linéaire fortement continue sur le dual* E' *de* E *est faiblement continue* (autrement dit, E est identique à son bidual E") ;

2° *la topologie initiale sur* E *est identique à la topologie de la convergence uniforme dans les parties fortement bornées de* E' (autrement dit, la topologie forte sur E considéré comme dual de E').

THÉORÈME 2.- *Pour qu'un espace localement convexe séparé* E *soit réflexif, il faut et il suffit qu'il soit tonnelé et que toute partie bornée de* E *soit relativement compacte pour la topologie affaiblie* $\sigma(E,E')$.

En effet, si $E=E''$, toute partie faiblement bornée de E' est aussi fortement bornée (§ 3,th.3) ; or, dans E , les tonneaux (pour la topologie initiale) sont les polaires des parties faiblement bornées de E' (§ 2, prop.4 et § 3, cor.3 de la prop.4), et d'autre part les polaires des parties fortement bornées de E' forment un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie forte ; il en résulte immédiatement le théorème, compte tenu du th.1 .

PROPOSITION 4.- *Le dual fort d'un espace réflexif est réflexif.*

En effet, si E est réflexif, la topologie forte sur E (considéré comme dual de son dual fort E') est identique à la topologie initiale, donc E' est identique à son bidual ; la proposition résulte alors de la définition de la topologie forte sur E' et de la déf.2 ci-dessus.

4. Espaces de Montel.

DÉFINITION 3.- *On appelle espace de Montel un espace localement convexe séparé tonnelé et dans lequel tout ensemble borné est relativement compact.*

Exemples.- 1) Tout espace de dimension finie est un espace de Montel. On observera qu'un espace *normé* ne peut être un espace de Montel que s'il est de dimension finie, puisqu'il est alors localement compact (chap.I, § 2, th.3).

*2) Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques *indéfiniment dérivables* dans $\mathbb{R}$. Pour tout couple d'entiers $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, et toute fonction $f \in \mathcal{E}$, soit

$$p_{n,m}(f) = \sup_{-n \leqslant t \leqslant n} \left| f^{(m)}(t) \right|$$

Il est immédiat que les $p_{n,m}$ sont des *semi-normes* sur $\mathcal{E}$; la topologie qu'elles définissent sur $\mathcal{E}$ est la topologie de la *convergence compacte* pour les fonctions de $\mathcal{E}$ et toute leurs dérivées. On peut montrer que $\mathcal{E}$, muni de cette topologie, est un espace de Montel (et aussi, d'ailleurs, un espace de Fréchet) (voir le chapitre qui sera consacré aux distributions dans un Livre ultérieur).

3) L'espace des *fonctions holomorphes* dans une partie ouverte de $\mathbb{C}^n$, muni de la topologie de la convergence compacte, est un espace de Montel et un espace de Fréchet. Il en est de même de l'espace des *fonctions harmoniques* dans une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie de la convergence compacte .*

PROPOSITION 5.- *Soit* E *un espace de Montel : sur toute partie bornée* B *de* E , *les topologies induites par la topologie initiale et la topologie affaiblie sont identiques.*

On peut évidemment se limiter au cas où B est fermée (pour la topologie initiale) ; comme la topologie induite sur B par la topologie affaiblie est séparée et moins fine que la topologie induite par la topologie initiale, ces deux topologies induites sont identiques, puisque B est compacte pour la topologie initiale (Top.gén.,chap.I, §10, 2è éd., cor.2 du th.2).

COROLLAIRE.- Sur un espace de Montel E , tout filtre à base dénombrable qui converge vers un point x_o pour la topologie affaiblie converge aussi vers x_o pour la topologie initiale.

Il suffit de le démontrer lorsqu'il s'agit d'un filtre élémentaire associé à une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ (Top.gén., chap.I,2è éd., § 5,prop.10). Or, si la suite (x_n) converge vers x_o pour $\sigma(E,E')$, elle est bornée pour cette topologie, et par suite aussi pour la topologie initiale de E (§ 3,th.3) ; la topologie induite par la topologie initiale sur l'ensemble formé de x_o et des x_n $(n \geqslant 1)$ est alors identique à la topologie induite par $\sigma(E,E')$, d'où le corollaire.

La déf.3 et le th.2 montrent aussitôt qu'un espace de Montel est réflexif. En outre :

PROPOSITION 6.- Le dual fort d'un espace de Montel est un espace de Montel

En effet, soit E un espace de Montel, E' son dual fort. Comme E' est réflexif (prop.4), il est tonnelé. Soit d'autre part B une partie fermée et bornée de E' ; comme E est tonnelé, B est équicontinue (prop.2) ; il en résulte que la topologie induite sur B par la topologie faible $\sigma(E',E)$ coïncide avec la topologie induite par la topologie de la convergence compacte (chap.III, § 3,prop.5). Mais comme toute partie fermée et bornée de E est compacte, sur E' la topologie de la convergence compacte coïncide avec la topologie forte ; comme B est faiblement compacte (§ 3,prop.2), B est aussi fortement compacte, ce qui démontre la proposition.

§ 5. Dualité des espaces de Banach.

En raison de l'importance des espaces de Banach, nous allons, dans ce paragraphe, énoncer à nouveau pour ces espaces les résultats obtenus dans les paragraphes précédents, et les complèter par quelques propriétés spéciales aux espaces de Banach.

1. Topologie faible et topologie forte sur le dual d'un espace de Banach.

Soient E un espace normé, $\hat{E}$ l'espace de Banach complété de E ; on sait que le dual E' de E peut être canoniquement idantifié (en tant qu'espace vectoriel non topologique) au dual de $\hat{E}$; en outre, les topologies fortes sur E' sont les mêmes (que E' soit considéré comme dual de E ou de $\hat{E}$), et définies par la norme

(1) $$\|x'\| = \sup_{x\in E,\ \|x\|\leqslant 1} |\langle x,x'\rangle| = \sup_{x\in \hat{E},\ \|x\|\leqslant 1} |\langle x,x'\rangle|$$

(chap.III, § 3, n°3). Au contraire, si $\hat{E}\neq E$, les topologies faibles $\sigma(E',E)$ et $\sigma(E',\hat{E})$ sont distinctes (§ 1, cor.2 du th.1).

Si E est de dimension infinie, la topologie faible $\sigma(E',E)$ est strictement moins fine que la topologie forte sur E'. En effet, si $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une suite finie quelconque de points de E, il existe alors $x'\neq 0$ dans E tel que $\langle a_i,x'\rangle = 0$ pour $1\leqslant i\leqslant n$ (Alg., chap.II, § 4, th.1). On peut supposer que $\|x'\| = 1$; cela prouve que 0 est faiblement adhérent à la sphère d'équation $\|z'\| = 1$ dans E', alors que cette sphère est fermée pour la topologie forte.

La formule (1) montre que l'on a, quels que soient $x\in E$, $x'\in E'$

(1 bis) $$|\langle x,x'\rangle| \leqslant \|x\|\cdot\|x'\|$$

et par suite, la forme bilinéaire canonique $(x,x')\to\langle x,x'\rangle$ est continue dans $E\times E'$, quand E et E' sont munis de leur topologie d'espace normé (cf. § 4, exerc.2).

Remarque.- On déduit de la formule (1) la conséquence suivante : étant donné dans E un hyperplan fermé H d'équation $\langle x,x'\rangle = \alpha \; (x' \neq 0)$, la distance de 0 à H est donnée par la formule

$$d = |\alpha| / \|x'\| \quad .$$

En effet, pour tout $x \in H$, on a $\|x\| \geqslant |\alpha| / \|x'\|$ en vertu de (1 bis) ; d'autre part, quel que soit n, il existe y_n tel que $\|y_n\| = 1$ et $\langle y_n, x'\rangle \geqslant \|x'\| \, (1 - \frac{1}{n})$; si $\langle y_n, x'\rangle = \lambda_n$, et $x_n = \alpha y_n / \lambda_n$, on a $x_n \in H$ et $\|x_n\| = |\alpha| / |\lambda_n| \leqslant |\alpha| / \|x'\| \, (1 - \frac{1}{n})$, ce qui démontre notre assertion.

L'espace E', muni de la topologie forte, est complet (§ 4, prop.3), autrement dit, est un espace de Banach. Comme l'ensemble polaire, dans E', de la boule $\|x\| \leqslant 1$ dans E, est la boule $\|x'\| \leqslant 1$ les parties équicontinues de E' sont les parties fortement bornées. Par suite (§ 3,prop.2) :

PROPOSITION 1.- Dans le dual E' d'un espace normé E, toute boule fermée est compacte pour la topologie faible $\sigma(E',E)$.

On dit qu'un espace normé E est de type dénombrable s'il existe dans E un ensemble total dénombrable. La prop.3 du § 3 montre que :

PROPOSITION 2.- Dans le dual E' d'un espace normé E de type dénombrable, toute boule fermée est un espace compact métrisable pour la topologie faible $\sigma(E',E)$.

Si E est un espace de Banach, il est tonnelé (chap.III, § 1,cor. de la prop.1), donc toute partie de E' bornée pour la topologie faible $\sigma(E',E)$ est aussi fortement bornée ; on parle alors simplement de parties bornées dans E', sans préciser pour quelle topologie.

On notera que si E est un espace normé non tonnelé, il y a des parties faiblement bornées de E' qui ne sont pas fortement bornées (§ 4, exerc.5 b)).

PROPOSITION 3.- Soient E un espace de Banach, E' son dual. Pour qu'une forme linéaire sur E' soit continue pour la topologie faible $\sigma(E',E)$, il suffit que sa restriction à la boule $\|x'\| \leqslant 1$ soit continue (pour $\sigma(E',E)$).

Ce n'est autre que le th.4 du § 3, appliqué à un espace de Banach (toute partie bornée de E' étant contenue dans une boule homothétique de $\|x'\| \leqslant 1$).

2. Bidual d'un espace normé. Espaces de Banach réflexifs.

Le dual fort E' d'un espace normé E étant un espace de Banach, son dual fort E" est aussi un espace de Banach, pour la norme

$$\|x''\| = \sup_{x' \in E', \|x'\| \leqslant 1} |\langle x', x''\rangle| . \tag{2}$$

On sait (§ 4, n°3) que E peut être identifié (en tant qu'espace vectoriel non topologique) à un sous-espace de E". Mais ici, non seulement la topologie induite sur E par la topologie forte de E" est identique à la topologie initiale de E , mais la restriction à E de la norme $\|x''\|$ définie par (2) est identique à la norme donnée sur E ; autrement dit :

PROPOSITION 4.- Soient E un espace normé, E' son dual. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\| = \sup_{x' \in E', \|x'\| \leqslant 1} |\langle x, x'\rangle| . \tag{3}$$

D'après (1 bis), on a en effet $|\langle x,x'\rangle| \leqslant \|x\|$ pour $\|x'\| \leqslant 1$. On peut évidemment supposer $x \neq 0$; en appliquant le th. de Hahn-Ba-nach (chap.II, § 5,cor.2 du th.1) on voit qu'il existe une forme linéaire $x' \in E'$ telle que $\langle x,x'\rangle = \|x\|$ et $\|x'\| \leqslant 1$, d'où la relation (3).

La topologie induite sur E par la topologie faible $\sigma(E'',E')$ est évidemment la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$. Appliquant au couple d'espaces (E'',E') en dualité la prop.2 du §2, il vient :

PROPOSITION 5.- <u>Soient</u> E <u>un espace normé</u>, E' <u>son dual</u>, E" <u>son bidual</u>. <u>Pour la topologie faible</u> $\sigma(E'',E')$, <u>la boule</u> $\|x\| \leqslant 1$ <u>dans</u> E <u>est dense par rapport à la boule</u> $\|x''\| \leqslant 1$ <u>dans</u> E" .

Si E est un espace de Banach, E est <u>fermé</u> dans E" pour la topologie forte, mais <u>partout dense</u> pour la topologie faible $\sigma(E'',E')$, en vertu de la prop.5 .

La prop.4 ci-dessus, ainsi que le th.1 du § 4, montrent que :

PROPOSITION 6.- <u>Pour qu'un espace normé</u> E <u>soit réflexif</u>, <u>il faut et il suffit que la boule</u> $\|x\| \leqslant 1$ <u>dans</u> E <u>soit compacte pour la topologie affaiblie</u> $\sigma(E,E')$.

On notera que dans ce cas E est nécessairement <u>complet</u>, donc un espace de Banach, et que son dual E' est un espace de Banach réflexif (§ 4,prop4).

Il y a des espaces de Banach de dimension infinie qui ne sont pas réflexifs (exerc.1).

3. <u>Dual fort d'un sous-espace et d'un espace quotient d'un espace normé.</u>

Soient E un espace normé, M un sous-espace vectoriel fermé de E . On sait que la topologie de l'espace quotient E/M peut être définie par la norme $\|\dot{x}\| = \inf_{x \in \dot{x}} \|x\|$ (chap.II, § 5,n°7). D'autre part, en tant qu'espace vectoriel non topologique, le dual de l'espace normé E/M peut être canoniquement identifié au sous-espace M^0 du dual E' de E , orthogonal à M (§ 3,n°5). En outre, on a ici la proposition suivante :

PROPOSITION 7.- <u>La topologie forte sur</u> M^0 (considéré comme dual de E/M) <u>est identique à la topologie induite sur</u> M^0 <u>par la topologie forte de</u> E'.

De façon plus précise, montrons que, pour toute forme linéaire $x' \in M^o$, la norme $\|x'\|$ définie par (1) est égale à la norme de x' considérée comme forme linéaire sur E/M ; il suffit de montrer que

(4) $$\sup_{\dot{x} \in E/M, \|\dot{x}\| \leqslant 1} |\langle \dot{x},x' \rangle| = \sup_{x \in E, \|x\| \leqslant 1} |\langle x,x' \rangle| = \|x'\| .$$

Or, il est clair que pour $\|x\| \leqslant 1$, on a $\|\dot{x}\| \leqslant 1$, donc le second membre de (4) est au plus égal au premier. Mais d'autre part, par définition de $\|\dot{x}\|$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \dot{x}$ tel que $\|x\| \leqslant \|\dot{x}\| + \varepsilon$, donc, si $\|\dot{x}\| \leqslant 1$, $|\langle \dot{x},x' \rangle| = |\langle x,x' \rangle| \leqslant (1+\varepsilon)\|x'\|$, et comme ε est arbitraire, le premier membre de (4) est au plus égal au second, d'où la proposition.

On sait d'autre part qu'en tant qu'espace vectoriel non topologique, le dual du sous-espace M de E peut être canoniquement identifié à l'espace quotient E'/M^o (§ 3, n°5) ; on a en outre la proposition suivante :

PROPOSITION 8.- La topologie forte sur E'/M^o (considéré comme dual de M) est identique à la topologie quotient par M^o de la topologie forte de E'.

De façon plus précise, montrons que pour tout $\dot{x}' \in E'/M^o$ la norme $\|\dot{x}'\| = \inf_{x' \in \dot{x}'} \|x'\|$ est égale à la norme de $\dot{x}'$ considéré comme forme linéaire sur M, c'est-à-dire à la norme de la forme linéaire continue u sur M, restriction de toutes les formes linéaires $x' \in \dot{x}'$. Or, on a évidemment, pour tout $x' \in \dot{x}'$

$$\|u\| = \sup_{x \in M, \|x\| \leqslant 1} |\langle x,x' \rangle| \leqslant \sup_{x \in E, \|x\| \leqslant 1} |\langle x,x' \rangle| = \|x'\|$$

d'où $\|u\| \leqslant \|\dot{x}'\|$. Mais d'autre part, en vertu du th. de Hahn-Banach (chap. II, § 5, cor. 1 du th. 1), il existe une forme linéaire continue y' sur E prolongeant u et telle que $\|u\| = \|y'\|$; comme $y' \in \dot{x}'$, on a $\|u\| \geqslant \|\dot{x}'\|$, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 9.- *Si* E *est un espace de Banach réflexif, pour tout sous-espace vectoriel fermé* M *de* E , M *et* E/M *sont réflexifs*.

En effet, la topologie induite sur M par la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$ est la topologie affaiblie $\sigma(M,E'/M^{\circ})$ (§ 3, prop. 5), donc comme M est fermé pour $\sigma(E,E')$, l'intersection de M et de la boule S définie par $\|x\| \leqslant 1$ dans E est compacte pour $\sigma(M,E'/M^{\circ})$, ce qui prouve que M est réflexif (prop. 6). De même, la topologie quotient par M de $\sigma(E,E')$ est la topologie affaiblie $\sigma(E/M,M^{\circ})$ (§ 3, prop. 6), donc la boule $\|\dot{x}\| \leqslant 1$ dans E/M , image canonique de la boule S , est compacte pour $\sigma(E/M,M^{\circ})$, ce qui prouve que E/M est réflexif (prop. 6).

§ 6. Continuité forte et continuité faible.

1. *Transposée d'une application linéaire faiblement continue*.

DÉFINITION 1.- *Etant donnés deux couples* (F,G), (F_1,G_1) *d'espaces vectoriels en dualité sur un corps* K , *on dit qu'une application linéaire* u *de* F *dans* F_1 *est transposable s'il existe une application linéaire* v *de* G_1 *dans* G *telle que l'on ait*

$$(1) \qquad \langle u(y), z_1 \rangle = \langle y, v(z_1) \rangle$$

quels que soient $y \in F$ *et* $z_1 \in G_1$.

Si on identifie G et G_1 à des sous-espaces des duals algèbriques respectifs F^* et F_1^* de F et F_1, on a, en désignant par ${}^t u$ la transposée de u définie en Algèbre (*Alg.*, chap. II, § 4, n°9) $\langle u(y), z_1 \rangle = \langle y, {}^t u(z_1) \rangle$ quels que soient $y \in F$ et $z_1 \in G_1$; la relation (1) montre que si u est transposable, on a $\langle y, v(z_1) \rangle = \langle y, {}^t u(z_1) \rangle$ quels que soient $y \in F$ et $z_1 \in G_1$, ce qui entraîne par définition $v(z_1) = {}^t u(z_1)$ pour tout $z_1 \in G_1$; on voit donc que si u est transposable, on a nécessairement

${}^t u(G_1) \subset G$, et v est la restriction de ${}^t u$ à G_1 , et en particulier est unique. Inversement d'ailleurs, si ${}^t u(G_1) \subset G$, la restriction v de ${}^t u$ à G_1 vérifie (1), donc u est transposable. Lorsqu'il en est ainsi, on désigne le plus souvent par ${}^t u$ la restriction à G_1 de la transposée de u, et sauf mention expresse du contraire, c'est cette restriction qui est appelée la transposée de u .

Cette notion est donc essentiellement relative aux dualités données entre F et G d'une part, F_1 et G_1 de l'autre. La transposée relative aux couples (F,F^*), (F_1,F_1^*) n'est autre que la transposée définie en Algèbre.

PROPOSITION 1.- Soient (F,G), (F_1,G_1) deux couples d'espaces en dualité sur un corps topologique séparé K . Pour qu'une application linéaire u de F dans F_1 soit transposable, il faut et il suffit que u soit continue pour les topologies $\sigma(F,G)$ et $\sigma(F_1,G_1)$. Alors la transposée ${}^t u$ est continue pour les topologies $\sigma(G_1,F_1)$ et $\sigma(G,F)$, et on a ${}^t({}^t u)=u$.

En effet, si u est transposable, la relation (1) montre que, pour tout $z_1 \in G_1$, la fonction $y \to \langle u(y),z_1\rangle = \langle y,v(z_1)\rangle$ est continue dans F ; si z_i $(1\leq i\leq n)$ sont n points quelconques de G_1, et U un voisinage arbitraire de 0 dans K , il existe donc un voisinage de 0 dans F , pour la topologie $\sigma(F,G)$, tel que $x\in V$ entraîne $\langle u(x),z_1^i\rangle \in U$ pour $1\leq i\leq n$, ce qui démontre la continuité de u pour les topologies $\sigma(F,G)$ et $\sigma(F_1,G_1)$. Réciproquement, si u est continue pour ces topologies, pour tout $z_1\in G_1$, la fonction $y\to\langle u(y),z_1\rangle$ est une forme linéaire continue sur F , donc (§ 1, cor.2 du th.1) il existe un point $v(z_1)\in G$ et un seul tel que $\langle u(y),z_1\rangle=\langle y,v(z_1)\rangle$ quel que soit $y\in F$. Comme il est immédiat que v est linéaire, u est transposable.

La fin de la démonstration est immédiate, en échangeant les rôles joués par F et F_1 d'une part, G et G_1 de l'autre dans la démonstration qui précède.

COROLLAIRE.- Pour qu'une application linéaire u de F dans F_1 soit continue (pour les topologies $\sigma(F,G)$ et $\sigma(F_1,G_1)$), il faut et il suffit que, pour tout hyperplan $H \subset F_1$, fermé pour $\sigma(F_1,G_1)$, $\overset{-1}{u}(H)$ soit fermé dans F (pour $\sigma(F,G)$).

Il suffit en effet de prouver que pour tout $z_1 \in G_1$, la forme linéaire $y \to \langle u(y),z_1 \rangle$ est continue dans F ; mais l'équation $\langle u(y),z_1 \rangle = 0$ définit $\overset{-1}{u}(H)$, où H est l'hyperplan d'équation $\langle y_1,z_1 \rangle = 0$ dans F_1 ; comme $\overset{-1}{u}(H)$ est fermé, la forme linéaire $y \to \langle u(y),z_1 \rangle$ est continue dans F (§ 1, cor.1 de la prop.2).

PROPOSITION 2.- Soit u une application linéaire de F dans F_1, continue pour $\sigma(F,G)$ et $\sigma(F_1,G_1)$. Pour que $u(F)$ soit partout dense dans F_1 (pour la topologie $\sigma(F_1,G_1)$), il faut et il suffit que ${}^t u$ soit une application linéaire biunivoque de G_1 dans G.

En effet, les $z_1 \in G_1$ orthogonaux au sous-espace $u(F)$ de F_1 sont caractérisés, d'après (1) par la relation $\langle y, {}^t u(z_1) \rangle = 0$ pour tout $y \in F$, ce qui signifie ${}^t u(z_1) = 0$; la proposition en résulte compte-tenu de la condition pour qu'une partie de F_1 soit partout dense (§ 1, cor.2 de la prop.2).

2. Continuité faible et continuité forte.

PROPOSITION 3.- Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, E' et F' leurs duals respectifs. Toute application linéaire u de E dans F, continue pour les topologies initiales, est continue pour les topologies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F,F')$.

En effet, pour tout $y' \in F'$, la forme linéaire $x \to \langle u(x), y' \rangle$ est continue pour la topologie initiale de E, donc aussi pour la topologie $\sigma(E,E')$, d'où la proposition.

Inversement, une application linéaire u de E dans F, continue pour $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F,F')$, n'est pas nécessairement continue pour les topologies initiales sur E et F. Lorsque $\sigma(E,E') \neq \tau(E,E')$ on en a un exemple en prenant pour topologie initiale sur E la topologie $\sigma(E,E')$, en prenant pour F l'espace E muni de $\tau(E,E')$, et enfin pour u l'application identique de E. On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 4.- *Soient* E *un espace tonnelé séparé,* F *un espace localement convexe séparé,* E' *et* F' *les duals de* E *et* F *respectivement. Toute application linéaire* u *de* E *dans* F, *continue pour les topologies* $\sigma(E,E')$ *et* $\sigma(F,F')$, *est continue pour les topologies initiales de* E *et de* F.

En effet, soit V un voisinage de 0 dans F pour la topologie initiale, convexe, équilibré et fermé ; V est aussi fermé pour $\sigma(F,F')$ (§ 3, prop.4), donc $T = \overset{-1}{u}(V)$ est fermé pour $\sigma(E,E')$, et a fortiori pour la topologie initiale de E. D'autre part, comme V est absorbant, il en est de même de T, qui est évidemment convexe et équilibré, donc un tonneau pour la topologie initiale de E. En vertu de l'hypothèse, T est un voisinage de 0 dans E pour cette topologie, ce qui prouve la continuité de u pour les topologies initiales.

PROPOSITION 5.- *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes séparés,* E' *et* F' *leurs duals respectifs. Si une application linéaire* u *de* E *dans* F *est continue pour les topologies* $\sigma(E,E')$ *et* $\sigma(F,F')$, *sa transposée* $v = {}^{t}u$ *est continue pour les topologies fortes sur* F' *et* E'.

En effet, soit W un voisinage de 0 dans E' pour la topologie forte ; on peut toujours supposer que $W=B^{\circ}$, où B est un ensemble borné, convexe et équilibré ; comme la relation $|\langle u(x),y'\rangle| \leqslant 1$ est équivalente à $|\langle x,v(y')\rangle| \leqslant 1$ d'après (1), on a $\overset{-1}{v}(W)=(u(B))^{\circ}$ par définition des ensembles polaires (§ 2) ; mais u(B) est borné dans F (chap.III, § 2, de la prop.5) pour la topologie $\sigma(F,F')$, donc aussi pour la topologie initiale de F (§ 3,th.3) ; $(u(B))^{\circ}$ est donc un voisinage de 0 pour la topologie forte sur F', ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 1.- <u>Toute application linéaire</u> v <u>de</u> F' <u>dans</u> E', <u>continue pour les topologies faibles</u> $\sigma(F',F)$ <u>et</u> $\sigma(E',E)$, <u>est aussi continue pour les topologies fortes sur</u> F' <u>et</u> E' .

En effet, il résulte de la prop.1 que v est de la forme ${}^{t}u$, où u est une application linéaire de E dans F , continue pour les topologies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F,F')$.

COROLLAIRE 2.- <u>Si</u> u <u>est une application linéaire de</u> E <u>dans</u> F , <u>continue pour les topologies initiales</u>, <u>sa transposée est continue pour les topologies fortes sur</u> F' <u>et</u> E'.

C'est une conséquence immédiate des prop.3 et 5 .

Lorsque E et F sont des espaces normés, le corollaire précédent se précise comme suit :

PROPOSITION 6.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces normés</u>, u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F . <u>On a alors</u>

(2) $$\|{}^{t}u\| = \|u\| .$$

En effet, on a, par définition (chap.III, § 3, formule (2))

$$\|{}^t u\| = \sup_{\|y'\| \leqslant 1} \|{}^t u(y')\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1,\ \|y'\| \leqslant 1} |\langle x, {}^t u(y')\rangle| =$$

$$= \sup_{\|x\| \leqslant 1,\ \|y'\| \leqslant 1} |\langle u(x), y'\rangle| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| = \|u\|$$

compte tenu de la formule (3) du § 5 .

La réciproque du cor.1 de la prop.5 est inexacte en général : une application linéaire de F' dans E', continue pour les topologies fortes, ne l'est pas nécessairement pour les topologies faibles, comme le montre l'exemple où E est le corps des scalaires, F un espace localement convexe séparé non égal à son bidual. On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 7.- *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes séparés* ; *si* F *est identique à son bidual, toute application linéaire* v *de* F' *dans* E', *continue pour les topologies fortes, est continue pour les topologies faibles* $\sigma(E',E)$ *et* $\sigma(F',F)$.

En effet, pour tout $x \in E$, $y' \to \langle x, v(y')\rangle$ est une forme linéaire sur F' qui est fortement continue, donc aussi faiblement continue, en vertu de l'hypothèse sur F ; ceci démontre la proposition, en vertu de la prop.1 .

3. *Dual d'un espace d'applications linéaires.*

PROPOSITION 8.- *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes séparés*, G *l'espace* $\mathcal{L}(E,F)$ *des applications linéaires continues de* E *dans* F , *muni de la topologie de la convergence simple* (ch.III, § 3,n°1). *Toute forme linéaire continue sur* G *peut s'écrire* $u \to \sum_{i=1}^{n} \langle u(x_i), y'_i \rangle$, *où les* x_i (resp. y'_i) *sont des éléments de* E (resp. F').

Rappelons (chap.III, §3,n°1) que, pour tout voisinage W de O dans F , et toute partie finie $\{x_1, \dots, x_n\}$ de E , on désigne par $\mathrm{T}(x_1, \dots, x_n; W)$ le voisinage de O dans G formé des $u \in G$ tels que $u(x_i) \in W$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; ces voisinages forment un système fondamental de voisinages de O dans G .

<u>Lemme 1.- Les ensembles</u> $\mathcal{T}(a_1,\ldots,a_r;W)$, <u>où</u> W <u>est un voisinage convexe équilibré de</u> 0 <u>dans</u> F <u>et les</u> a_i <u>forment un système libre de vecteurs de</u> E, <u>constituent un système fondamental de voisinages de</u> 0 <u>dans</u> G.

En effet, soit $\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n;W)$ un voisinage de 0 dans G, où W est un voisinage convexe équilibré de 0 dans F. On peut écrire $x_i=\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}a_j$, où les a_j sont linéairement indépendants. Si $\alpha=\operatorname{Max}_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{r}|\lambda_{ij}|$, les conditions $u(a_j)\in\frac{1}{\alpha}W$ pour $1\leqslant j\leqslant r$ entraînent $u(x_i)\in W$ pour $1\leqslant i\leqslant n$, d'où le lemme.

<u>Lemme 2.- Soit</u> $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ <u>un système libre de vecteurs de</u> E ; <u>quels que soient les</u> r <u>points</u> b_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ <u>de</u> F, <u>il existe une application linéaire continue</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>telle que</u> $u(a_i)=b_i$ <u>pour</u> $1\leqslant i\leqslant r$.

En effet, en vertu du th. de Hahn-Banach, pour chaque indice i, il existe une forme linéaire continue x_i' sur E $(1\leqslant i\leqslant r)$ telle que $\langle a_i,x_j'\rangle=\delta_{ij}$ pour tout couple d'indices (i,j). Il suffit de prendre u telle que $u(x)=\sum_{j=1}^{r}\langle x,x_j'\rangle b_j$ pour répondre à la question.

Ces lemmes étant établis, soit f une forme linéaire continue sur G. Par définition, et en vertu du lemme 1, il existe un système libre $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de vecteurs de E et un voisinage convexe équilibré W de 0 dans F tels que l'on ait $|f(u)|\leqslant 1$ pour tout $u\in\mathcal{T}(a_1,\ldots,a_r;W)$. Soit $H\subset G$ l'ensemble des $u\in G$ tels que $u(a_i)=0$ pour $1\leqslant i\leqslant r$; H est évidemment un sous-espace vectoriel de G, et on a $H\subset\mathcal{T}(a_1,\ldots,a_r;W)$; on a donc $|f(\lambda u)|=|\lambda|\cdot|f(u)|\leqslant 1$ quels que soient λ et $u\in H$, donc $f(u)=0$ pour tout $u\in H$. Considérons alors l'application $u\rightarrow(u(a_i))_{1\leqslant i\leqslant r}$ de G dans F^r ; il résulte du lemme 2 que c'est une application linéaire φ de G <u>sur</u> F^r, dont le noyau est H ;

comme $f(u)=0$ dans H , on voit, par passage au quotient, qu'on peut écrire $f=g\circ\varphi$, où g est une forme linéaire sur F^r ; en outre, les relations $y_i \in W$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ entraînent $|g(y_1,\dots,y_r)|\leqslant 1$, et par suite g est continue dans l'espace produit F^r . Identifiant chacun des espaces facteurs F_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ de F^r à un sous-espace de F^r , on voit que la restriction de g à chacun des F_i est continue, donc de la forme $y_i \to \langle y_i, b_i'\rangle$, où $b_i' \in F'$; il en résulte immédiatement que l'on a $g(y_1,\dots,y_r)=\sum_{i=1}^{r}\langle y_i,b_i'\rangle$ et par suite $f(u)=\sum_{i=1}^{r}\langle u(a_i),b_i'\rangle$, ce qui démontre la proposition.

Il est clair inversement que $u \to \sum_{i=1}^{r}\langle u(a_i),b_i'\rangle$ est une forme linéaire continue sur G , quels que soient les $a_i \in E$ et les $b_i' \in F'$. Désignons par $f_{x,y'}$ la forme linéaire continue $u \to \langle u(x),y'\rangle$ sur G ; il est clair que l'application $(x,y') \to f_{x,y'}$ est une application bilinéaire de $E\times F'$ dans G' ; par suite (Alg., chap.III, § 1, n°2, Scholie), il existe une application linéaire et une seule φ du produit tensoriel $E\otimes F'$ dans G', telle que $\varphi(x\otimes y')=f_{x,y'}$. La prop.8 montre que φ est une application de $E\otimes F'$ sur G' ; montrons d'autre part que φ est biunivoque. En effet, si $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système libre de points de E, $(b_j')_{1\leqslant j\leqslant m}$ un système libre de points de F', tout revient à prouver que si on a $\sum_{i,j}\lambda_{ij}\langle u(a_i),b_j'\rangle=0$ pour toute application linéaire $u\in G$, on a nécessairement $\lambda_{ij}=0$ pour tout couple (i,j). Or, soit $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ un système libre de points de F tel que $\langle b_j,b_k'\rangle=\delta_{jk}$ (Alg., chap.II, § 4, n°7) ; en vertu du lemme 2, pour tout couple (i,j) il existe une application linéaire $u_{ij}\in G$ telle que $u_{ij}(a_i)=b_j$, $u_{ij}(a_h)=0$ pour $h\neq i$. La relation $\sum_{h,k}\lambda_{hk}\langle u_{ij}(a_h),b_k'\rangle=0$ donne alors $\lambda_{ij}=0$. En résumé :

COROLLAIRE.- Il existe un isomorphisme et un seul du produit tensoriel $E \otimes F'$ sur le dual G' de $G = \mathcal{L}(E,F)$ qui, à tout produit tensoriel $x \otimes y'$, fait correspondre la forme linéaire $u \rightarrow \langle u(x), y' \rangle$.

Soient maintenant E_0, F_0 les espaces E, F munis des topologies affaiblies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F,F')$, et soit G_0 l'espace $\mathcal{L}(E_0,F_0)$ des applications linéaires continues de E_0 dans F_0, muni de la topologie de la convergence simple. Il résulte de la prop.3 que l'on a $G \subset G_0$ (et si en outre E est tonnelé, $G_0 = G$ en vertu de la prop.4). On notera que la topologie de G est strictement plus fine que la topologie induite par celle de G_0 si les topologies de F_0 et de F ne sont pas identiques ; mais le cor. de la prop.8, appliqué aux couples (E,F) et (E_0,F_0), montre que toute forme linéaire continue sur G se prolonge d'une manière et d'une seule en une forme linéaire continue sur G_0 . On peut donc identifier canoniquement les duals G' et G_0' de G et G_0 ; la topologie affaiblie $\sigma(G,G')$ est induite sur G par la topologie affaiblie $\sigma(G_0,G_0')$; en outre, le th. de Hahn-Banach montre que G est partout dense dans G_0 .