RÉDACTION N° 169

TITRE : **COMPLÉMENTS CHEVALLEY À LA RÉDACTION WEIL SUR LES GROUPES DE LIE**

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 40

NOMBRE DE FEUILLES : 40

Archives
M. Chevalley - Juin 1952

NBR 070 169 2

COMPLEMENTS CHEVALLEY
A LA REDACTION WEIL SUR LES GROUPES DE LIE

1. Espaces fibrés associés à une variété.

1 . Soient V et V' des variétés de même dimension , x un point de V et x' un point de V' . On désigne alors par $\underline{F}(x,x';V,V')$ l'ensemble des isomorphismes F de sous-variétés ouvertes de V contenant x , sur des sous-variétés ouvertes de V' contenant x' , tels que $F(x)=x'$.

Soient V_i $(i=1,2,3,4)$ des variétés , toutes de même dimension , et , pour chaque i , x_i un point de V_i . Si $F_i \in \underline{F}(x_i,x_{i+1};V_i,V_{i+1})$ $(i=1,2,3)$, on a $F_2 \circ F_1 \in \underline{F}(x_1,x_3;V_1,V_3)$ et $F_3\circ(F_2\circ F_1)=(F_3\circ F_2)\circ F_1$. De plus , on a $\overset{-1}{F_i} \in \underline{F}(x_{i+1},x_i;V_{i+1},V_i)$ et $F_i\circ \overset{-1}{F_i}$ est l'application identique d'une sous-variété ouverte de V_{i+1} sur elle même , tandis que $\overset{-1}{F_i}\circ F_i$ est l'application identique d'une sous-variété ouverte de V_i sur elle-même .

2. Dans ce qui suit , nous introduirons deux symboles : ∞, Ω qui seront des objets n'appartenant pas à l'ensemble N des entiers $\geqslant 0$, et nous prolongerons la relation d'ordre de N à $N \cup \{\infty,\Omega\}$ en convenant que $m<\infty<\Omega$ pour tout entier $m \in N$. A partir de maintenant , le symbole m pourra représenter l'un quelconque des éléments de l'ensemble $N'=N\cup\{\infty,\Omega\}$. Soient V et V' deux variétés de même dimension , x un point de V et x' un point de V' . Nous allons définir des relations d'équivalence $R^{(m)}$ dans $\underline{F}(x,x';V,V')$. Soient F,F' des éléments de ce dernier ensemble ; $R^{(\Omega)}(F,F')$ (resp. $R^{(m)}(F,F')$, où $m\in N\cup\{\infty\}$) signifiera par définition qu'il y a une sous-variété ouverte U de V contenant x sur laquelle F et F' sont définies et telle que les restrictions de F,F' à U coïncident (resp. aient l'une avec l'autre un contact d'ordre m en x). Il est clair que les relations $R^{(m)}$ $(m\in N')$ sont des relations d'équivalence et que $R^{(m')}$ est plus fine que $R^{(m)}$ si $m'>m$. Nous poserons $\underline{F}^{(m)}(x,x';V,V')=\underline{F}(x,x';V,V')/R^{(m)}$. Si $m'>m$,

$\underline{F}^{(m)}(x,x';V,V')$ peut être considéré comme quotient de $\underline{F}^{(m')}(x,x';V,V')$ par la relation d'équivalence $R^{(m')}/R^{(m)}$.

Soient V_i $(i=1,2,3,4)$ des variétés de même dimension , et x_i un point de V_i . Nous avons vu plus haut que l'opération de composition des applications définit une loi de composition entre $\underline{F}(x_2,x_3;V_2,V_3)$ et $\underline{F}(x_1,x_2;V_1,V_2)$ à valeurs dans $\underline{F}(x_1,x_3;V_1,V_3)$. Cette loi est manifestement compatible avec la relation $R^{(m)}$; i.e., si $F_i,F'_i\in\underline{F}(x_i,x_{i+1};V_i,V_{i+1})$ $(i=1,2)$, les conditions $R^{(m)}(F_1,F'_1)$ et $R^{(m)}(F_2,F'_2)$ entraînent $R^{(m)}(F_2\circ F_1,F'_2\circ F'_1)$. On tire de là , par passage aux quotients , une loi de composition entre $\underline{F}^{(m)}(x_2,x_3;V_2,V_3)$ et $\underline{F}^{(m)}(x_1,x_2;V_1,V_2)$ à valeurs dans $\underline{F}^{(m)}(x_1,x_3;V_1,V_3)$; et , si $F_i\in\underline{F}^{(m)}(x_i,x_{i+1};V_i,V_{i+1})$ $(i=1,2,3)$, on a $(F_3\circ F_2)\circ F_1=F_3\circ(F_2\circ F_1)$. En particulier , si x est un point d'une variété V , on a une loi de composition associative dans $\underline{F}^{(m)}(x,x;V,V)$. Cette loi de composition admet un élément neutre , à savoir la classe suivant $R^{(m)}$ de l'application identique de V sur elle-même . Utilisant les mêmes notations que plus haut , désignons par I_i l'élément neutre de $\underline{F}^{(m)}(x_i,x_i;V_i,V_i)$; il résulte alors de ce que nous avons démontré que , si $F\in\underline{F}^{(m)}(x_1,x_2;V_1,V_2)$, il y a un élément $G\in\underline{F}^{(m)}(x_2,x_1;V_2,V_1)$ tel que $G\circ F=I_1$, $F\circ G=I_2$. En particulier , on voit que $\underline{F}^{(m)}(x,x;V,V)$ est un groupe . Il est clair que si $m'>m$, $\underline{F}^{(m)}(x,x;V,V)$ est un groupe quotient de $\underline{F}^{(m')}(x,x;V,V)$.

3. Soit n un entier >0 qui demeurera fixe dans ce qui suit , et soit V une variété de dimension n . Posons $\underline{G}^{(m)}=\underline{F}^{(m)}(0,0;R^n,R^n)$ et , pour tout $x\in V$, $\underline{P}_x^{(m)}(V)=\underline{F}^{(m)}(0,x;R^n,V)$; soit $\underline{P}^{(m)}(V)$ la réunion des $\underline{P}_x^{(m)}(V)$ pour tous les $x\in V$ Si $F\in\underline{P}_x^{(m)}(V)$, $s\in\underline{G}^{(m)}$, $F\circ s$ est un élément de $\underline{P}_x^{(m)}(V)$, que nous noterons désormais Fs . Il est clair que si s,s' sont dans $\underline{G}^{(m)}$, $F(ss')=(Fs)s'$; le groupe $\underline{G}^{(m)}$ opère donc à droite sur chaque $\underline{P}_x^{(m)}(V)$, et par suite aussi sur $\underline{P}^{(m)}(V)$ De plus , si F est un élément quelconque de $\underline{P}_x^{(m)}(V)$, $s\to Fs$ est une application

biunivoque de $\underline{G}^{(m)}$ sur $\underline{P}_x^{(m)}(V)$. On sait en effet qu'il y a un $G\in \underline{F}^{(m)}(0,x;V,R^n)$ tel que $G\circ F$ soit l'élément neutre de $\underline{G}^{(m)}$; on a alors $s=G\circ(Fs)$, ce qui montre que $s\to Fs$ est biunivoque . De plus , si $F'\in \underline{P}_x^{(m)}(V)$, $F'=F(F^{-1}\circ F')$, ce qui montre que $s\to Fs$ est une application sur . L'ensemble $\underline{P}^{(m)}(V)$ possède donc une structure d'ensemble fibré principal de groupe $\underline{G}^{(m)}$ et de base V .

Supposons maintenant que l'on ait donné une représentation du groupe $\underline{G}^{(\Omega)}$ dans le groupe des permutations d'un ensemble Z ; nous désignerons par $z\to sz$ la permutation de Z qui correspond à un élément $s\in \underline{G}^{(\Omega)}$. On sait qu'on peut alors associer à cet ensemble Z un ensemble fibré Z_V , de base V , de groupe $\underline{G}^{(\Omega)}$, de fibre typique Z . Rappelons que cet ensemble se définit comme suit Soit x un point de V ; formons le produit $\underline{P}_x^{(\Omega)}(V)\times Z$, et faisons-y opérer le groupe $\underline{G}^{(\Omega)}$ au moyen de la formule $s\circ(F,z)=(Fs^{-1},sz)$ (où $s\in \underline{G}^{(\Omega)}, F\in \underline{P}_x^{(\Omega)}(V)$, $z\in Z$). Soit $Z_x(V)$ l'ensemble des classes de transitivité de $\underline{P}_x^{(\Omega)}(V)\times Z$ par rapport à $\underline{G}^{(\Omega)}$; l'ensemble Z_V est alors la réunion des $Z_x(V)$ pour tous les $x\in V$. Si $F_o\in \underline{P}_x^{(\Omega)}(V)$, l'application qui à tout z fait correspondre la classe de transitivité de (F_o,z) est une application biunivoque de Z sur $Z_x(V)$, qui s'appelle le <u>repère</u> de l'ensemble fibré Z_V attaché à F_o . Si r est un repère de Z_V en un point x de V , les autres repères au même point x sont les $r\circ\rho(s)$, $s\in \underline{G}^{(\Omega)}$ où $\rho(s)$ désigne la permutation $z\to sz$. Si l'ensemble Z est muni d'une certaine structure $\underline{S}$ telle que les opérations $\rho(s)$ soient des automorphismes de cette structure , chaque ensemble $Z_x(V)$ est muni d'une structure $\underline{S}_x$ de la même espèce que $\underline{S}$, et tout repère en x est un isomorphisme de la structure $\underline{S}$ sur $\underline{S}_x$ .Plus généralement , soient $Z^{(1)},\dots,Z^{(h)}$ des ensembles sur chacun desquels $G^{(\Omega)}$ opère soit $\rho^{(i)}(s)$ la permutation de $Z^{(i)}$ qui correspond à un $s\in \underline{G}^{(\Omega)}$. Le groupe $\underline{G}^{(\Omega)}$ opère alors d'une manière naturelle sur le produit $Z=Z^{(1)}\times\dots\times Z^{(h)}$. L'ensemble fibré $Z(V)$ de fibre typique Z s'appelle le <u>produit fibré</u> des ensembles fibrés $Z^{(i)}(V)$ de fibres typiques $Z^{(i)}$. La fibre $Z_x(V)$ d'un $x\in V$ dans ce produit fibré s'identifie canoniquement au produit des fibres $Z_x^{(i)}(V)$ de x dans les ensembles fibrés $Z^{(i)}(V)$. Soient $\rho_i(s)$ $(i=1,..,h)$ les permutations des ensembles $Z^{(i)}$ qui correspondent à un $s\in \underline{G}^{(\Omega)}$. Rappelons qu'une application f de $Z^{(1)}\times \dots \times Z^{(h-1)}$ dans $Z^{(h)}$ est dite <u>covariante</u> par rapport à $\underline{G}^{(\Omega)}$ si on a $f(\rho_1(s).z_1,\dots,\rho_{h-1}(s).z_{h-1})=\rho_h(s).f(z_1,\dots,z_{h-1})$ quels que soient $s\in \underline{G}^{(\Omega)}$, $z_1\in Z^{(1)},\dots,z_{h-1}\in Z^{(h-1)}$. La donnée d'une pareille application permet de définir une certaine structure sur Z , invariante par $\underline{G}^{(\Omega)}$, donc , pour chaque $x\in V$ une structure de la même espèce sur $Z_x(V)$, et il en résulte que l'on peut associer à chaque x une application f_x de $Z_x^{(1)}\times \dots \times Z_x^{(h-1)}$ dans $Z_x^{(h)}$ telle que l'on ait $f_x(r_1.z,\dots,r_{h-1}.z_h)=r_h.f(z_1,\dots,z_{h-1})$, si $z_i\in Z^{(i)}$ $(1\leq i\leq h-1)$, les r_i $(1\leq i\leq h)$ étant les repères des $Z^{(i)}(V)$ qui sont associés à un même élément , d'ailleurs quelconque, de $\underline{P}_x^{(\ )}(V)$.

En particulier , on a les résultats suivants : si $\underline{G}^{(\Omega)}$ opère linéairement sur un espace vectoriel Z sur R , chaque $Z_x(V)$ a une structure d'espace vectoriel sur R . Si $\underline{G}^{(\Omega)}$ opère linéairement sur deux espaces vectoriels $Z^{(1)},Z^{(2)}$, et si f est une application linéaire covariante de $Z^{(1)}$ dans $Z^{(2)}$, on a , pour chaque $x\in V$, une application linéaire f_x de $Z_x^{(1)}$ dans $Z_x^{(2)}$. Si $Z^{(3)}=Z^{(1)}\otimes Z^{(2)}$ et si on fait opérer $\underline{G}^{(\Omega)}$ sur $Z^{(3)}$ au moyen de la formule $\rho_3(s)=\rho_1(s)\otimes\rho_2(s)$ ($\rho_i(s)$ étant la permutation de $Z^{(i)}$ qui correspond à un $s\in\underline{G}^{(\Omega)}$) , $Z_x^{(3)}(V)$ s'identifie canoniquement au produit tensoriel $Z_x^{(1)}(V)\otimes Z_x^{(2)}(V)$. Si $Z^{(4)}$ est le dual de $Z^{(1)}$, et si on fait opérer $\underline{G}^{(\Omega)}$ dans $Z^{(4)}$ au moyen de la formule $\rho_4(s)={}^t\rho_1(s^{-1})$, $Z_x^{(4)}(V)$ s'identifie canoniquement au dual de $Z_x^{(1)}(V)$; etc., ~~e~~tc.

On peut aussi intervertir en quelque sorte la construction précédente , en partant des $Z_x(V)$ supposés donnés . D'une manière précise , supposons qu'on ait attaché à toute variété V et à tout point x de V un ensemble $Z_x(V)$, muni éventuellement d'une structure $\underline{S}_x(V)$ d'une certaine espèce . Supposons de plus qu'on ait attaché à tout isomorphisme F de V sur une sous-variété ouverte d'une variété V' un isomorphisme $\phi(F;x,Z)$ de $Z_x(V)$ (muni de sa structure $\underline{S}_x(V)$) sur $Z_{F(x)}(V')$ (muni de sa structure $\underline{S}_{F(x)}(V')$) , et ceci de telle manière que , si F' est un isomorphisme de V' sur une sous-variété ouverte d'une variété V" , on ait $\phi(F'\circ F;x,Z)=\phi(F';F(x),Z)\circ\phi(F;x,Z)$. Dans ces conditions , si U est une sous-variété ouverte de V contenant un point x , on identifiera en général $Z_x(U)$ avec $Z_x(V)$ au moyen de l'isomorphisme $\phi(I;x,U)$, I étant l'application identique de U dans V . Soit alors Z l'ensemble $Z_0(R^n)$. Le groupe $\underline{G}^{(\Omega)}$ opère sur l'ensemble Z . Considérons en effet un élément $F\in\underline{F}(0,0;R^n,R^n)$, défini sur une partie ouverte U de R^n . Alors $\phi(F;0,U)$ est un automorphisme de Z (muni de sa structure $\underline{S}=\underline{S}_0(R^n)$) ; et , si F_1 est la restriction de F à une sous-variété ouverte U_1 de U , $\phi(F_1;0,U_1)$ est identique à $\phi(F;0,U)$. Il en résulte que $\phi(F;0,U)$ ne dépend que de la classe $s\in\underline{G}^{(\Omega)}$ de F relativement à la relation d'équivalence $R^{(\Omega)}$. Si on pose , pour $z\in Z$, $sz=\phi(F;0,U).z$, il est clair que l'application $(s,z)\to sz$ fait opérer $\underline{G}^{(\Omega)}$ sur l'ensemble Z . On peut donc , au moyen de l'ensemble Z (muni de sa structure $\underline{S}$) définir comme plus haut un ensemble fibré de base V , de groupe $\underline{G}^{(\Omega)}$, de fibre typique Z . Désignons cet ensemble fibré par Z'(V) ,et la fibre d'un $x\in V$ par $Z'_x(V)$. Nous allons voir que $Z'_x(V)$ s'identifie canoniquement à $Z_x(V)$. Soit en effet h un élément de $\underline{P}_x^{(\Omega)}(V)$; c'est une classe d'équivalence de $\underline{F}(0,x;R^n,V)$ relativement à la relation d'équivalence $R^{(\Omega)}$ dans cet ensemble . Soit H un élément de cette classe d'équivalence ; H^{-1} est alors un isomorphisme d'une sous-variété ouverte de V contenant x sur une sous-variété ouverte de R^n contenant 0 , et applique x sur 0 . Cet isomorphisme définit un isomorphisme $\phi(H^{-1};x,V)$ de $Z_x(V)$ (muni de sa structure $\underline{S}_x(V)$) sur Z (muni de sa structure $\underline{S}$) . Soit par ailleurs r_h le repère de $Z'_x(V)$ attaché à h ; c'est un isomorphisme de Z (muni de sa structure $\underline{S}$) sur $Z'_x(V)$ (muni de la structure $\underline{S}'_x(V)$ qu'on déduit de $\underline{S}$ par le transport de structure effectué par r_h , structure qui ne dépend pas de h). L'application $r_h \circ \phi(H^{-1};x,V)$ est un isomorphisme de $Z_x(V)$ sur $Z'_x(V)$ .Cet isomorphisme ne dépend pas de h . En effet , tout élément $h' \in \underline{P}_x^{(\Omega)}(V)$ se met sous la forme $h'=hs^{-1}$, où $s \in \underline{G}^{(\Omega)}$, et le repère $r_{h'}$ attaché à h' est défini par $r_{h'}(sz)=r_h(z)$ $(z \in Z)$. Soit F un élément de $\underline{F}(0,0;R^n,R^n)$ appartenant à la classe s modulo $R^{(\Omega)}$. Alors $H'=H \circ F^{-1}$ appartient à la classe hs^{-1} dans $\underline{F}(0,x;R^n,$ et ~~XMXX~~ $\phi(H'^{-1};x,V)=\phi(F;0,R^n) \circ \phi(H^{-1};x,V)$, d'où il résulte immédiatement que $r_{h'} \circ \phi(H'^{-1};x,V)=r_h \circ \phi(H^{-1};x,V)$. Nous pouvons donc identifier $Z_x(V)$ à $Z'_x(V)$ par l'isomorphisme $r_h \circ \phi(H^{-1};x,V)$. On voit donc que sous les hypothèses faites sur les ensembles $Z_x(V)$, la réunion de ces ensembles se trouve munie d'une structure d'ensemble fibré de base V , de groupe $\underline{G}^{(\Omega)}$, de fibre typique $Z= =Z_0(R^n)$.

Soit Z(V) un ~~espace~~ ensemble fibré associé à $\underline{P}^{(\Omega)}(V)$, de fibre typique Z .Soit $\rho(s)$ la permutation $z \to sz$ de Z qui est associée à un $s \in \underline{G}^{(\Omega)}$. Rappelons que , si m est un entier ou ∞ , $\underline{G}^{(m)}$ peut être considéré comme un groupe quotient de $\underline{G}^{(\Omega)}$. Ceci dit , nous dirons que l'ensemble fibré Z(V) est de rang m si $\rho(s)$ ne dépend que de l'image $s^{(m)}$ de s dans l'application canonique de $\underline{G}^{(\Omega)}$ sur $\underline{G}^{(m)}$. Posons alors $\rho^{(m)}(s^{(m)})=\rho(s)$; il est clair que l'application $s^{(m)} \to \rho^{(m)}(s^{(m)})$ fait opérer $\underline{G}^{(m)}$ dans Z et que l'on peut considérer Z(V) comme un ensemble fibré de groupe $\underline{G}^{(m)}$ associé à l'ensemble fibré principal $\underline{P}^{(m)}(V)$.

Comme application des considérations qui précèdent , considérons une algèbre locale A de rang m (fini ou infini) , et désignons par V_x^A l'ensemble des points proches d'espèce A d'un point x de V . Si F est un isomorphisme de V sur une sous-variété ouverte d'une variété V' , il correspond à F une application biunivoque F_x^A de V_x^A sur $V'^A_{F(x)}$, et la condition formulée plus haut est évidemment satisfaite . On en conclut que la réunion des V_x^A , pour tous les $x \in V$, possède une structure d'ensemble fibré de groupe $\underline{G}^{(\Omega)}$, de base V , de fibre typique

$(R^n)^A_0$; nous désignerons cet ensemble fibré par V^A . Si des isomorphismes F, F_1 de V sur des variétés ouvertes de V' ont en un point x un contact d'ordre m l'un avec l'autre , on a $F^A_x=(F_1)^A_x$; il en résulte immédiatement que l'ensemble fibré V^A est de rang m .

Considérons plus particulièrement le cas où $A=A^{(m)}$, qui est l'algèbre des embryons d'ordre m de fonctions en O sur R^n . Nous désignerons alors pour simplifier par $V^{(m)}$ l'ensemble V^A et par $V_x^{(m)}$ l'ensemble V^A_x . La fibre typique de $V^{(m)}$ est $(R^n)^{(m)}_0$. Soit e le point proche générique d'espèce $A^{(m)}$ de O sur R^n . Le groupe $\underline{G}^{(m)}$ opère sur $(R^n)^{(m)}_0$; montrons que l'application $s \to s.e$ de $\underline{G}^{(m)}$ dans $(R^n)^{(m)}_0$ est biunivoque . Puisque $(ss').e=s.(s'.e)$, il suffit de montrer que la condition $s.e=e$ entraîne que s est l'élément neutre . Or , soit F un élément de $\underline{F}(0,0;R^n,R^n)$ appartenant à la classe s modulo la relation $R^{(m)}$. Pour toute fonction f , définie et différentiable sur un voisinage ouvert de O dans R^n , nous désignerons par $f^{(m)}$ l'embryon d'ordre m de f en O ; e est donc l'application $f \to f^{(m)}$, tandis que $s.e$ est l'application $f \to (f \circ F)^{(m)}$. Il résulte donc de $e=s.e$ que pour tout f , f et $f \circ F$ ont un contact d'ordre m en O . Cela signifie que F et l'application identique ont un contact d'ordre m en O , donc que s est l'élément neutre , ce qui démontre notre assertion . On peut donc considérer $\underline{G}^{(m)}$ comme la fibre typique de $\underline{P}^{(m)}(V)$, $\underline{G}^{(m)}$ opérant sur lui-même par translation à gauche . L'application $s \to s.e$ est alors covariante , comme il résulte de la formule $ss'.e=s.(s'.e)$. Elle définit donc une application de $\underline{P}^{(m)}(V)$ dans $V^{(m)}$, que nous appellerons l'<u>application canonique</u> . Pour tout $x \in V$, l'application canonique de $\underline{P}^{(m)}(V)$ dans $V^{(m)}$ induit une application biunivoque de $\underline{P}_x^{(m)}(V)$ dans $V_x^{(m)}$. Cette application peut s'expliciter comme suit . Soit $h \in \underline{P}_x^{(m)}(V)$, et soit H un élément de $\underline{F}(0,x;R^n,V)$ appartenant à la classe h modulo $R^{(m)}$. Pour toute fonction g , définie et différentiable sur un voisinage ouvert de x dans

V , $g\circ H$ est une fonction définie et différentiable sur un voisinage ouvert de O dans R^n , et le point proche d'espèce $A^{(m)}$ de x qui correspond à h par l'application canonique est l'homomorphisme $g \to (g\circ H)^{(m)}$.

Cherchons maintenant quels sont les éléments de $V_x^{(m)}$ qui sont images par l'application canonique d'éléments de $\underline{G}^{(m)}$. Désignons par $A_x(V)$ l'algèbre des embryons de fonctions d'ordre infini en x sur V , et par $I_x(V)$ l'idéal maximal de cette algèbre . Nous conviendrons que , si $m=\infty$, $I_x^{m+1}(V)$ représente l'idéal (O de $A_x(V)$. Nous poserons $A_x^{(m)}(V)=A_x(V)/I_x^{m+1}(V)$; un point x' proche de x d'espèce $A^{(m)}$ définit un homomorphisme , que nous noterons encore x' , de $A_x^{(m)}(V)$ dans $A^{(m)}$. Nous dirons que x' est <u>régulier</u> (générique au sens de Weil) si cet homomorphisme applique $A_x^{(m)}$ <u>sur</u> $A^{(m)}$. On a $A^{(m)}=A_0^{(m)}(R^n)$; posons $I=I_0(R^n)$; c'est l'idéal maximal de $A^{(\infty)}$. Tout homomorphisme de $A_x(V)$ dans $A^{(m)}$ applique $I_x^2(V)$ dans I^2 ; il en résulte que tout point proche x' de x d'espèce $A^{(m)}$ définit par passage aux quotients (si $m>0$) un homomorphisme de $A_x(V)$ dans $A^{(1)}$, donc un point proche $x'^{(1)}$ de x d'espèce $A^{(1)}$. Pour que x' soit régulier , il faut et il suffit que $x'^{(1)}$ le soit . La condition est évidemment nécessaire . Pour montrer qu'elle est suffisante , observons que , $A^{(\infty)}$ étant isomorphe à l'algèbre des séries formelles en n lettres , tout ensemble d'éléments de cette algèbre ~~d~~ dont les classes modulo I^2 forment une base de $A^{(1)}=A^{(\infty)}/I^2$ constitue un ensemble de générateurs , d'où notre assertion résulte immédiatement . Ceci dit ,soit x' un point proche de x d'espèce $A^{(m)}$ qui est l'image canonique d'un $h\in \underline{P}_x^{(m)}(V)$. Utilisant les mêmes notations que plus haut , il y a des fonctions différentiables g_i $(i=1,..,n)$ telles que , pour chaque i , $g_i\circ H$ coïncide sur un voisinage de 0 avec la i-ème fonction coordonnée sur R^n . Il en résulte immédiatement que x' est régulier . Soit réciproquement x' un point régulier quelconque de $V_x^{(m)}$, et soit $m>0$ (si $m=0$, il est clair que l'application canonique de $\underline{P}_x^{(m)}(V)$ ~~xxx~~ dans $V_x^{(m)}$ applique le premier de ces ensembles sur le second) . Il existe alors des fonctions g_i $(1\leq i\leq n)$ différentiables sur V dont les images par x' sont les embryons d'ordre m des fonctions coordonnées sur R^n en 0 . On a $g_i(x)=0$ et les embryons d'ordre 1 des g_i en x sont manifestement des éléments linéairement indépendants de l'idéal maximal de $A^{(1)}(V)$. Il en résulte comme on le sait que les g_i forment un système de coordonnées en x sur V . Il y a donc une application différentiable H de R^n dans V telle que $H(0)=x$ et que les fonctions $H\circ g_i$ coïncident sur un voisinage de 0 avec les fonctions coordonnées ; il en résulte que H induit un isomorphisme d'une sous-variété ouverte de R^n contenant 0 sur une sous-variété ouverte de V . On en déduit immédiatement que x' est l'image canonique d'un élément de $\underline{P}_x^{(m)}(V)$. Donc : <u>l'application canonique de $\underline{P}_x^{(m)}(V)$ dans $V_x^{(m)}$ applique le premier ensemble sur l'ensemble des points réguliers du second</u> .

DEMONSTRATION DE LA FORMULE DE HAUSDORFF AU MOYEN DES GROUPES DE LIE .

1 . Soit A une algèbre associative unitaire de dimension finie sur R , et soit G le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A . Alors G est une partie ouverte de A muni de sa topologie d'espace vectoriel . En effet , désignons pour tout a A , par M(a) l'opération de multiplication à gauche par a dans A ; il est alors clair que G se compose de tous les $a\in A$ tels que $\det M(a)\neq 0$. La structure différentiable de A , en tant qu'espace vectoriel , induit donc sur G une structure de variété . On voit tout de suite que l'application $(x,y)\to xy^{-1}$ de $G\times G$ dans G est différentiable ; G est donc un groupe de Lie . Cherchons à déterminer son algèbre de Lie g . L'espace tangent $\underline{V}(G)$ à G en son élément neutre e s'identifie à la structure d'espace vectoriel de A ; on pourra donc identifier la structure d'espace vectoriel de g à celle de A . Procédant alors comme à la p. de la rédaction Weil , on trouve que la loi de composition dans g est définie par $[X,Y]=YX-XY$. On a donc $g=A_L$, où A_L est l'algèbre de Lie déduite de A en y définissant le crochet par la formule précédente .

2 . Supposons maintenant que A admette un idéal bilatère $\underline{a}$ nilpotent de codimension 1 . Tout élément de la forme $1+u$, $u\in\underline{a}$, est alors dans G , et les éléments de cette forme constituent un sous-groupe G_o de G , évidemment fermé , donc de Lie . L'algèbre de Lie $\underline{g}_o$ de G_o est manifestement contenue dans $\underline{a}$; de plus , la dimension de G_o étant 1 de moins que celle de G , celle de $\underline{g}_o$ est la même que celle de $\underline{a}$, d'où $\underline{g}_o=\underline{a}$. Si $u\in\underline{a}$;on voit tout de suite que exp u n'est autre que l'exponentielle de u dans l'algèbre A , i.e. $1+\sum_{k=1}^{\infty}(k!)^{-1}u^k$. Or on sait que tout élément de G_o se met d'une manière et d'une seule sous la forme exp u (cela résulte de ce que les relations $t=e^u$, $u=\log t$ sont équivalentes) .

3 . Soit V un espace vectoriel de dimension 2 sur R , de base (X,Y) , et soit T l'algèbre tensorielle sur V . Soit I^{m+1} l'idéal engendré par les éléments homogènes d'ordre m+1 dans T , et soit $A=T/I^{m+1}$; soient X^*,Y^* les classes de X,Y dans A , et $\underline{a}$ l'idéal engendré par X^*,Y^* ; cet idéal est nilpotent . Nous appliquerons alors les considérations qui précèdent à l'algèbre A . Soit $\underline{h}$ la sous-algèbre de $\underline{g}_o=\underline{a}$ engendrée (au sens des algèbres de Lie) par X^* et Y^* ; il lui correspond un sous-groupe H de G_o . Considérons l'application $z\rightarrow\log z$ de H dans $\underline{a}$. On sait qu'il y a un voisinage de e dans H tel que tout élément de ce voisinage puisse se mettre sous la forme e^u avec $u\in\underline{h}$; on a donc $\log z\in\underline{h}$ si z est suffisamment voisin de e dans H . Par ailleurs , il est clair que , H étant muni de sa structure analytique de groupe de Lie , qui est celle induite par celle de G_o l'application $z\rightarrow\log z$ est analytique . Comme elle applique un voisinage de e dans $\underline{h}$, elle applique H tout entier dans $\underline{h}$. Or , on a $e^{X^*}\in H$, $e^{Y^*}\in H$, d'où $e^{X^*}e^{Y^*}=e^{Z^*}$ avec un $Z^*\in\underline{h}$.

Il en résulte immédiatement que si on écrit $e^Xe^Y=e^Z$, où Z est dans la complétée de l'algèbre tensorielle T et s'écrit comme série formelle non commutative en X,Y , les termes de degré m dans Z sont dans le plus petit espace vectoriel contenant X et Y et fermé par l'opération de crochet. Ceci, étant vrai pour tout m, démontre la formule de Hausdorff.

LES EMBRYONS DE SECTIONS.

1. Rappelons que, si V et V' sont deux variétés de même dimension, et si $x \in V$, $x' \in V'$, nous avons désigné par $\underline{F}(x,x';V,V')$ l'ensemble des isomorphismes F de sous-variétés ouvertes de V contenant x sur des sous-variétés ouvertes de V' contenant x' tels que $F(x)=x'$. De plus, nous avons défini sur cet ensemble diverses relations d'équivalence $R^{(m)}$ (m étant un entier $\geqslant 0$ ou l'un des symboles ∞, Ω).

L'existence du groupe des translations dans R^n permet d'établir des isomorphismes entre tous les ensembles $\underline{F}(\underline{x},\underline{x}';R^n,R^n)$, où $\underline{x},\underline{x}'$ sont des points quelconques de R^n. Désignons en effet, pour tout $\underline{x} \in R^n$, par $\theta_{\underline{x}}$ la translation qui amène O en $\underline{x}$; l'application $F \to \theta_{\underline{x}'}^{-1} \circ F \circ \theta_{\underline{x}}$ est alors une application biunivoque de $\underline{F}(\underline{x},\underline{x}';R^n,R^n)$ sur $\underline{F}(0,0;R^n,R^n)$. Cette application est manifestement compatible avec toutes les relations d'équivalence $R^{(m)}$ et définit, pour tout m, une application biunivoque de $\underline{F}^{(m)}(\underline{x},\underline{x}';R^n,P^n)$ sur $\underline{G}^{(m)}$. Si F est un isomorphisme quelconque d'une sous-variété ouverte U de R^n sur une sous-variété ouverte de R^n, et si $\underline{x} \in U$, nous appellerons <u>distortion d'ordre m</u> de F en $\underline{x}$ la classe de $\theta_{F(\underline{x})}^{-1} \circ F \circ \theta_{\underline{x}}$ modulo la relation d'équivalence $R^{(m)}$ dans $\underline{F}(0,0;R^n,R^n)$; c'est un élément de $\underline{G}^{(m)}$, que nous désignerons par $\delta_m(F,\underline{x})$. Il est clair que, si F' est un isomorphisme d'une sous-variété ouverte de R^n contenant $F(\underline{x})$ sur une sous-variété ouverte de R^n, on a $\delta_m(F' \circ F,\underline{x}) = \delta_m(F',F(x))\delta_m(F,\underline{x})$.

Soient $x_1,\ldots,x_n$ les fonctions coordonnées sur R^n. Si $\underline{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ est une suite de n entiers $\geqslant 0$, nous poserons $M_{\underline{e}} = (e_1!)^{-1}\ldots(e_n!)^{-1}x_1^{e_1}\ldots x_n^{e_n}$; si m est un entier $\geqslant 0$ ou ∞, nous désignerons par $x_{\underset{m}{i}}$ et $M_{\underset{m}{\underline{e}}}$ les embryons d'ordre m de x_i et de $M_{\underline{e}}$ au point O. Rappelons que le groupe $\underline{G}^{(m)}$ opère à droite sur l'algèbre $A^{(m)}$

 13

des embryons d'ordre m de fonctions en 0 de la manière suivante : si $s \in \underline{G}^{(m)}$ et $\bar{f} \in A^{(m)}$, soient F un élément de $\underline{F}(0,0;R^n,R^n)$ appartenant à la classe s modulo $R^{(m)}$, et f une fonction définie et différentiable sur un voisinage ouvert de 0 dans R^n admettant $\bar{f}$ comme embryon d'ordre m en 0 ; $\bar{f}.s$ est alors l'embryon d'ordre m en 0 de la fonction $f \circ F$. Si $x \in \underline{G}^{(m)}$, nous poserons

$$\overset{m}{x_i}.s=\sum_{\underline{e}}' a_{i,\underline{e}}(s)\overset{m}{M_{\underline{e}}} \quad ,$$

en faisant la convention que $a_{i,\underline{e}}(s)=0$ si $\underline{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ est tel que $\sum_i e_i > m$. Nous poserons d'une manière générale $d(\underline{e})=e_1+\ldots+e_n$ si $\underline{e}=(e_1,\ldots,e_n)$; on a alors $a_{i,\underline{e}}(s)=0$ si $d(\underline{e})=0$, et , si m est un entier >0 , les fonctions $a_{i,\underline{e}}$ pour $0<d(\underline{e})\leqslant m$ forment un système de coordonnées sur $\underline{G}^{(m)}$ muni de sa structure de variété .

Soit F un isomorphisme d'une sous-variété ouverte U de R^n sur une sous-variété ouverte de R^n , et soit $\underline{x}$ un point de U . Posons

$$D_{\underline{e}}=(\partial/\partial x_1)^{e_1}\ldots(\partial/\partial x_n)^{e_n} \qquad \text{si } \underline{e}=(e_1,\ldots,e_n) \ .$$

Il résulte alors immédiatement de nos définitions que l'on a

$$a_{i,\underline{e}}(\delta_m(F,\underline{x}))=(D_{\underline{e}}(x_i\circ F))(\underline{x}) \qquad \text{si} \quad d(\underline{e})>0 \ ;$$

(on notera que , si $d(\underline{e})=0$, le premier membre est 0 tandis que le second est $x_i(F(\underline{x}))$, qui est en général $\neq 0$).

<u>Lemme 1 .- Soient m,h des entiers</u> 0 , <u>et soient</u> F,F' <u>des éléments de</u> $\underline{F}(0,0;R^n,R^n)$ <u>qui ont entre eux un contact d'ordre</u> m+h <u>en</u> 0 . <u>Soit U l'intersection des ensembles de définition de</u> F,F' ; <u>les applications</u> $\underline{x}\to\delta_m(F,\underline{x})$, $\underline{x}\to\delta_m(F',\underline{x})$ <u>de U dans</u> $\underline{G}^{(m)}$ <u>ont alors entre elles un contact d'ordre h au point</u> 0 .

Si $0<d(\underline{e})\leqslant m$, posons , pour $\underline{x}\in U$, $b_{i,\underline{e}}(\underline{x})=a_{i,\underline{e}}(\delta_m(F,\underline{x}))$, $b'_{i,\underline{e}}(x)=$ $=a_{i,\underline{e}}(\delta_m(F',\underline{x}))$. On a alors

$$(D_{\underline{f}}b_{i,\underline{e}})(\underline{x})=(D_{\underline{e}+\underline{f}}(x_i\circ F))(\underline{x})$$
$$(D_{\underline{f}}b'_{i,\underline{e}})(\underline{x})=(D_{\underline{e}+\underline{f}}(x_i\circ F))(\underline{x})$$

et le lemme 1 résulte immédiatement de ces formules , appliquées aux $\underline{f}$ tels que $0 \leq d(\underline{f}) \leq m$.

Soient m et h des entiers ≥ 0 , et soit $F \in \underline{F}(0,0;R^n,R^n)$. Désignons par $(R^n)_0^{(h)}$ l'ensemble des points proches d'espèce $A^{(h)}$ de 0 sur R^n , et par $(\underline{G}^{(m)})^{(h)}$ l'ensemble des points proches d'espèce $A^{(h)}$ de points de la variété $\underline{G}^{(m)}$. Si U est le domaine de définition de F , l'application différentiable $\underline{x} \to \delta_m(F,\underline{x})$ de U dans $\underline{G}^{(m)}$ définit une application de $(R^n)_0^{(h)}$ dans $(\underline{G}^{(m)})^{(h)}$. De plus , il résulte du lemme 1 que cette application ne dépend que de la classe t de F modulo $R^{(m+h)}$ (classe qui est un élément de $\underline{G}^{(m+h)}$) ; désignons par $\delta_m^{(h)}(t,\underline{x}')$ l'image d'un point $\underline{x}'$ proche de 0 d'espèce $A^{(h)}$ par cette application .

<u>Lemme 2 .- L'application $\delta_m^{(h)}$ de $\underline{G}^{(m+h)} \times (R^n)_0^{(h)}$ dans $(\underline{G}^{(m)})^{(h)}$ est différentiable</u> .

Un point proche $\underline{x}'$ d'espèce $A^{(h)}$ de 0 dans R^n définit - et est défini par - un homomorphisme de l'algèbre $A^{(h)}$ dans elle-même , homomorphisme que nous désignerons encore par $\underline{x}'$. Posons

$$\underline{x}'(\overset{h}{x}_i) = \sum_{0 \leq d(\underline{f}) \leq h} \beta_{i,\underline{f}}(\underline{x}')\overset{h}{M}_{\underline{f}} \quad ;$$

les fonctions $\beta_{i,\underline{f}}$ forment alors un système de coordonnées sur la variété $(R^n)_0^{(h)}$. Nous avons par ailleurs introduit plus haut les fonctions $a_{i,\underline{e}}$ sur $\underline{G}^{(m)}$ qui forment un système de coordonnées sur cette variété . Il correspond à chacune de ces fonctions une application $a_{i,\underline{e}}^{(h)}$ de $(\underline{G}^{(m)})^{(h)}$ dans $A^{(h)}$. Si s' est un point proche d'espèce $A^{(h)}$ d'un point de $\underline{G}^{(m)}$, nous poserons

$$a_{i,\underline{e}}^{(h)}(s') = \sum_{0 \leq d(\underline{f}) \leq h} \gamma_{i,\underline{e},\underline{f}}(s')\overset{h}{M}_{\underline{f}} \quad ;$$

les fonctions $\gamma_{i,\underline{e},\underline{f}}$ $(1 \leq i \leq n \ , \ 0 < d(\underline{e}) \leq m \ , \ 0 \leq d(\underline{f}) \leq h)$ forment alors un système de coordonnées sur la variété $(\underline{G}^{(m)})^{(h)}$. Nous nous proposons de calculer les coordonnées de $\delta_m^{(h)}(t,\underline{x}')$, où $t \in \underline{G}^{(m+h)}$, $\underline{x}' \in (R^n)_0^{(h)}$. Soit F un élément de $\underline{F}(0,0;R^n,R^n)$ appartenant à la classe t modulo la relation $R^{(m+h)}$. Posons , comme dans la démonstrationdu lemme 1 , $b_{i,\underline{e}}(\underline{x})=a_{i,\underline{e}}(\delta_m(F,\underline{x}))$ pour tout point $\underline{x}$ du domaine de définition de F . Chacune des fonctions $b_{i,\underline{e}}$ définit une application $b^{(h)}_{i,\underline{e}}$ de $(R^n)^{(h)}_0$ dans $A^{(h)}$, et on a $a^{(h)}_{i,\underline{e}}(\delta^{(h)}_m(t,\underline{x}'))=b^{(h)}_{i,\underline{e}}(\underline{x}')$. Or , soit g une fonction quelconque définie et différentiable sur un voisinage ouvert de 0 dans R^n . Cette fonction a alors un contact d'ordre h en 0 avec la fonction $\sum_{0\leqslant d(\underline{f})\leqslant h}(D_{\underline{f}}(g)(0)M_{\underline{f}}$; si on désigne par $g^{(h)}$ l'application de $(R^n)^{(h)}_0$ dans $A^{(h)}$ qui correspond à g , on a

$$g^{(h)}(\underline{x}')=\sum_{0\leqslant d(\underline{f})\leqslant h}(D_{\underline{f}}g)(0)\underline{x}'(\underline{M}_{\underline{g}}) \quad .$$

Appliquons ceci aux fonctions $g=b_{i,\underline{e}}$; on obtient

$$a^{(h)}_{i,\underline{e}}(\delta^{(h)}_m(t,\underline{x}'))=\sum_{0\leqslant d(\underline{f})\leqslant h}(D_{\underline{e}+\underline{f}}(x_i\circ F))(0)\underline{x}'(M_{\underline{f}})$$

puisque nous avons vu que $b_{i,\underline{e}}(\underline{x})=(D_{\underline{e}}(x_i\circ F))(\underline{x})$. Or , les $(D_{\underline{e}+\underline{f}}(x_i\circ F))(0)$ ne sont autres que les coordonnées $a_{i,\underline{e}+\underline{f}}(t)$ de t dans $\underline{G}^{(m+h)}_m$. Par ailleurs , si on exprime les $\underline{x}'(M_{\underline{f}})$ comme combinaisons linéaires des $M_{\underline{f}}$, les coefficients de ces combinaisons linéaires sont manifestement des polynômes en les coordonnées $\beta_{i,\underline{f}}(\underline{x}')$. On voit donc que les coordonnées $\gamma_{i,\underline{e},\underline{f}}(\delta^{(h)}_m(t,\underline{x}'))$ s'expriment comme fonctions polynômes en les coordonnées de t et de $\underline{x}'$, ce qui démontre le lemme 2 .

2 . Soit Z une variété sur laquelle le groupe $\underline{G}^{(m)}$ opère différentiablement à gauche (m étant un entier $\geqslant 0$) . Alors , pour toute variété V de dimension n , on a une variété fibrée Z(V) de base V , de groupe $\underline{G}^{(m)}$ et de fibre typique Z . Soit P_V la projection de cette variété sur V ; si U est une sous-variété ouverte de V , Z(U) s'identifie canoniquement à la sous-variété ouverte $\overset{-1}{P_V}(U)$ de Z(V) . Rappelons qu'on appelle <u>section</u> de la variété fibrée Z(U) toute application différentiable S de U dans Z(U) telle que P_U S soit l'application identique de U sur lui-même . Désignons par $\Sigma(x;V)$ l'ensemble des sections de variétés fibrées de la forme Z(U) , U étant une sous-variété ouverte de V contenant x . Soit h un

entier ≥ 0 ; la relation "S et S' ont un contact d'ordre h en x" est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\Sigma(x;V)$. Les éléments du quotient $\underline{S}(x;V)$ de $\Sigma(x;V)$ par cette relation d'équivalence s'appellent les <u>embryons d'ordre h</u> de sections de $Z(V)$; si $S \in \Sigma(x;V)$, la classe de S s'appelle l'embryon de S en x .

Soit V' une autre variété de dimension n , et soit x' un point de V' . Si $F \in \underline{F}(x,x';V,V')$, et si U est le domaine de définition de F , il correspond à F un isomorphisme F_Z de $Z(U)$ sur $Z(F(U))$. L'application $S \to F_Z \circ S \circ F^{-1}$ applique $\Sigma(x;V)$ dans $\Sigma(x';V')$. De plus , si des éléments S_1, S_2 de $\Sigma(x;V)$ ont entre eux un contact d'ordre h en x , $F_Z \circ S_1 \circ F^{-1}$ et $F_Z \circ S_2 \circ F^{-1}$ ont entre eux un contact d'ordre h en x' . Notre application définit donc par passage aux quotients une application $\Phi_{F,x}$ de $\underline{S}(x;V)$ dans $\underline{S}(x';V')$. On vérifie immédiatement que $\Phi_{F,x}$ est une application biunivoque de $\underline{S}(x;V)$ sur $\underline{S}(x';V')$. De plus , si x" est un point d'une troisième variété V" de dimension n et $F' \in \underline{F}(x',x'';V',V'')$, on a $\Phi_{F' \circ F,x} = \Phi_{F',x'} \circ \Phi_{F,x}$. Il en résulte que , pour toute variété V , la réunion des $\underline{S}(x;V)$ pour tous les $x \in V$ possède une structure d'ensemble fibré de base V , de groupe $\underline{G}^{(\Omega)}$ et de fibre typique $\underline{S} = \underline{S}(0;R^n)$. Nous appellerons cet ensemble fibré l'ensemble des embryons de sections d'ordre h de $Z(V)$.

<u>Nous allons montrer que cet ensemble est de type</u> m+h . Il suffira de montrer que si $F \in \underline{F}(0,0;R^n,R^n)$, l'application $\Phi_{F,0}$ de $\underline{S}$ sur lui-même ne dépend que de la classe de F par rapport à la relation d'équivalence $R^{(m+h)}$. Si $\underline{x} \in R^n$, désignons par $\theta_{\underline{x}}$ la translation qui amène 0 en $\underline{x}$; c'est un automorphisme de la variété R^n , et il lui correspond par conséquent un automorphisme $(\theta_{\underline{x}})_Z$ de la variété $Z(R^n)$. Désignons par Z_0 et $Z_{\underline{x}}$ les fibres de 0 et de $\underline{x}$ dans $Z(R^n)$; $(\theta_{\underline{x}})_Z$ applique donc Z_0 sur $Z_{\underline{x}}$. Choisissons de manière quelconque un repère r_0 au point 0 ; c'est un isomorphisme de Z sur Z_0 . Pour tout $\underline{x} \in R^n$, $(\theta_{\underline{x}})_Z \circ r_0 = r_{\underline{x}}$ est un repère en $\underline{x}$. On obtient ainsi un champ (évidemment différentiable) de repères sur R^n , donc une section de $Z(R^n)$, qui définit un isomorphisme de $R^n \times Z$ sur $Z(R^n)$

à savoir celui qui applique $(\underline{x},z)$ sur $(\theta_{\underline{x}})_Z(r_0.z)$. Pour simplifier les notations , nous identifierons provisoirement $Z(R^n)$ à $R^n \times Z$ au moyen de cet isomorphisme . Soit maintenant F un élément de $\underline{F}(0,0;R^n,R^n)$ défini sur une sous-variété ouverte U de R^n contenant 0 . Nous nous proposons de déterminer l'application F_Z correspondante . Si s est la classe de F modulo $R^{(m)}$, qui est un élément de $\underline{G}^{(m)}$, il résulte immédiatement des définitions que $F_Z(0,z)=(0,s.z)$. Soit maintenant $\underline{x}$ un point de U et soit $L_{\underline{x}}=\theta^{-1}_{F(\underline{x})}\circ F\circ\theta_{\underline{x}}$; la classe de $L_{\underline{x}}$ est donc la distortion d'ordre m , $\delta_m(F,\underline{x})$ de F en $\underline{x}$. On a $F_Z=(\theta_{F(\underline{x})})_Z\circ(L_{\underline{x}})_Z\circ(\theta^{-1}_{\underline{x}})_Z$. Par ailleurs , il résulte de notre identification de $Z(R^n)$ à $R^n\times Z$ que $(\theta_{\underline{u}})_Z(\underline{v},z)= =(\underline{u}+\underline{v},z)$ si $\underline{u},\underline{v}\in R^n$, $z\in Z$. On en conclut que $F_Z(\underline{x},z)=(F(\underline{x}),\delta_m(F,\underline{x}).z)$. Ceci dit , soit S un élément de $\underline{\Sigma}(\mathbb{D};R^n)$; c'est une section d'une variété $Z(U_S)$ où U_S est une sous-variété ouverte de R^n contenant 0 . Si $\underline{x}\in U_S$, on peut écrire $S(\underline{x})=(\underline{x},\zeta_S(\underline{x}))$, où ζ_S est une application différentiable de U_S dans Z . Si donc $\underline{x}$ est dans le domaine de définition de $F_Z\circ S\circ F^{-1}$, on a

(1) $$(F_Z\circ S\circ F^{-1})(\underline{x})=(\underline{x},\delta_m(F,F^{-1}(\underline{x})).\zeta_S(F^{-1}(\underline{x}))) .$$

Soient maintenant F et F' des éléments de $\underline{F}(0,0;R^n,R^n)$ qui ont entre eux un contact d'ordre m+h en 0 . Alors F^{-1} et F'^{-1} ont également un contact d'ordre m+h en 0 , et il résulte du lemme 1 que les applications $\underline{y}\to\delta_m(F,\underline{y})$, $\underline{y}\to\delta_m(F',\underline{y})$ ont un contact d'ordre h en 0 . L'application ζ_S étant différentiable , il en résulte immédiatement que $F_Z\circ S\circ F^{-1}$ et $F'_Z\circ S\circ F'^{-1}$ ont un contact d'ordre h en 0 et déterminent par suite le même embryon de section en 0 ; ceci établit notre assertion que l'ensemble fibré $\underline{S}(V)$ est de type m+h .

Nous allons maintenant définir une structure de variété sur l'ensemble $\underline{S}$. Si G est une application différentiable d'un voisinage ouvert U de 0 dans R^n dans une variété W , nous désignerons par $W^{(h)}$ l'ensemble des points proches d'espèce $A^{(h)}$ de points de W et par $G^{(h)}$ l'extension canonique de G à $U^{(h)}$. Soit $\underline{x}'_0$ le point canonique générique d'espère $A^{(h)}$ proche de 0 sur R^n ; $\underline{x}'_0$ applique donc toute fonction différentiable sur un voisinage de 0 dans R^n sur son embryon d'ordre h en 0 . Si G et G' sont des applications différentiables de voisinages de 0 dans R^n dans une même variété , une condition nécessaire et suffisante pour que G et G' aient un contact d'ordre h en 0 est que $G^{(h)}(\underline{x}'_0)=G'^{(h)}(\underline{x}'_0)$. Ceci dit , à tout élément S de $\Sigma(0;R^n)$ nous avons associé une application ζ_S du domaine de définition de S dans Z . Il est clair que $\zeta_S^{(h)}(\underline{x}'_0)$ ne dépend que de la classe $\bar{S}$ de S dans $\underline{S}$; désignons-le par $\zeta(\bar{S})$. L'application $\bar{S}\rightarrow\zeta(\bar{S})$ est donc une application biunivoque de $\underline{S}$ dans $Z^{(h)}$. Nous allons montrer qu'elle applique $\underline{S}$ <u>sur</u> $Z^{(h)}$ .. Soit z' un point proche d'espèce $A^{(h)}$ d'un point z de Z , et soient $g_1,\dots,g_r$ les fonctions d'un système de coordonnées en z sur Z . A ces fonctions , z' associé des éléments de $A^{(h)}$ qui peuvent être représentés par des embryons d'ordre h en 0 de fonctions $g'_1,\dots,g'_r$ différentiables sur R^n . Il y a une application différentiable σ d'un voisinage ouvert U de 0 dans R^n dans Z telle que $g_j(\sigma(\underline{x}))=g'_j(\underline{x})$ $(1\leq j\leq r)$ si $\underline{x}\in U$; il est clair que $\sigma^{(h)}(\underline{x}'_0)=z'$. Par ailleurs , l'application $\underline{x}\rightarrow(\underline{x},\sigma(\underline{x}))$ $(\underline{x}\in U)$ est une section de Z(U) , et , si $\bar{S}$ est l'embryon d'ordre h de cette section en 0 , il est clair que $\zeta(\bar{S})=z'$, ce qui démontre notre assertion .

L'application biunivoque ζ^{-1} de $Z^{(h)}$ sur $\underline{S}$ permet de transporter à $\underline{S}$ la structure de variété de $Z^{(h)}$. Nous nous proposons maintenant de montrer que le groupe $\underline{G}^{(m+h)}$ opère différentiablement sur cette variété . Soit t une opération de ce groupe , et soit F un élément de $\underline{F}(0,0;R^n,R^n)$ appartenant à la classe t modulo $R^{(m+h)}$. Si S est un élément quelconque de $\Sigma(0;R^n)$, la section $F_Z\circ S\circ F^{-1}$ est déterminée par la formule (1) ci-dessus . Gardant F et S fixes , posons $A_F(\underline{x})=$ $=\delta_m(F,F^{-1}(\underline{x}))$, $B_{S,F}(\underline{x})=\zeta_S(F^{-1}(\underline{x}))$. On a , en désignant par $\bar{S}$ l'embryon d'ordre h de S en 0 , $\zeta(t.\bar{S})=(\underline{x}\rightarrow A_F(\underline{x}).B_{S,F}(\underline{x}))^{(h)}(\underline{x}'_0)$. Soit μ l'application $(s,z)\rightarrow sz$

de $\underline{G}^{(m)}\times Z$ sur Z ; μ admet une extension canonique $\mu^{(h)}$ qui est une application différentiable de $(\underline{G}^{(m)}\times Z)^{(h)}=(\underline{G}^{(m)})^{(h)}\times Z^{(h)}$ dans $Z^{(h)}$. On a

$$\zeta(t.\overline{S})=\mu^{(h)}(A_F^{(h)}(\underline{x}'_0),B_{S,F}^{(h)}(\underline{x}'_0)) .$$

Le groupe $\underline{G}^{(h)}$ est un groupe quotient de $\underline{G}^{(m+h)}$; soit u_t l'image canonique de t dans $\underline{G}^{(h)}$. L'application A_F est composée de l'application F^{-1} et de l'application $\underline{y}\to\delta_m(F,\underline{y})$, et on a , pour $\underline{y}'$ proche d'espèce $A^{(h)}$ de 0 , $(\underline{y}\to\delta_m(F,\underline{y}))^{(h)}(\underline{y}')=\delta_m^{(h)}(t,\underline{y}')$. On a donc $A_F^{(h)}(\underline{x}'_0)=\delta_m^{(h)}(t,u_t^{-1}.\underline{x}'_0)$. Par ailleurs , on a $B_{S,F}^{(h)}(\underline{x}'_0)=\zeta_S^{(h)}(u_t^{-1}.\underline{x}'_0)$. Or , $Z^{(h)}$ est un espace fibré principal de base Z et de groupe $\underline{G}^{(h)}$; ce dernier groupe opère donc à droite sur $Z^{(h)}$. Montrons que $\zeta_S^{(h)}(u_t^{-1}.\underline{x}'_0)=\zeta_S^{(h)}(\underline{x}'_0).u_t^{-1}$. Soit en effet g une fonction différentiable sur Z. On a alors

$$\zeta_S^{(h)}(u_t^{-1}.\underline{x}'_0).g=(g\circ\zeta_S)^{(h)}(u_t^{-1}.\underline{x}'_0)=(g\circ\zeta_S\circ F^{-1})^{(h)}(\underline{x}'_0) ,$$

et ceci est l'embryon d'ordre h de $g\circ\zeta_S\circ F^{-1}$ en 0 , en vertu de la définition de $\underline{x}'_0$. L'embryon d'ordre h de $g\circ\zeta_S$ en 0 étant $(g\circ\zeta_S)^{(h)}(\underline{x}'_0)$, on voit que $\zeta_S^{(h)}(u_t^{-1}.\underline{x}'_0).g=(\zeta_S^{(h)}(\underline{x}'_0).g)u_t^{-1}$, ce qui démontre notre formule . Il vient donc $\zeta(t.\overline{S})=\mu^{(h)}(\delta_m^{(h)}(t,u_t^{-1}.\underline{x}'_0),\zeta(\overline{S}).u_t^{-1})$. L'application $t\to u_t$ est différentiable; l'application $u\to u.\underline{x}'_0$ de $\underline{G}^{(h)}$ dans $(R^n)_0^{(h)}$ est différentiable , et l'application $(t,\underline{y}')\to\delta_m^{(h)}(t,\underline{y}')$ de $\underline{G}^{(m+h)}\times(R^n)_0^{(h)}$ dans $(\underline{G}^{(m)})^{(h)}$ est différentiable (lemme 2). L'application $t\to\delta_m^{(h)}(t,u_t^{-1}.\underline{x}'_0)$ de $\underline{G}^{(m+h)}$ dans $(\underline{G}^{(m)})^{(h)}$ est donc différentiable . Par ailleurs , l'application ζ de $\underline{S}$ dans $Z^{(h)}$ est différentiable par définition ; l'application $(z',u)\to z'u$ de $Z^{(h)}\times\underline{G}^{(h)}$ dans $Z^{(h)}$ est différentiable puisque $Z^{(h)}$ est une variété fibrée . Il en résulte que $(t,\overline{S})\to\zeta(\overline{S}).u_t^{-1}$ est une application différentiable de $\underline{G}^{(m+h)}\times\underline{S}$ dans $Z^{(h)}$. L'application $\mu^{(h)}$ étant différentiable , on en conclut que $(t,\overline{S})\to\zeta(t.\overline{S})$ est une application différentiable de $\underline{G}^{(m+h)}\times\underline{S}$ dans $\underline{S}$, ce qui montre que $\underline{G}^{(m+h)}$ opère différentiablement dans $\underline{S}$.

On en conclut que , pour toute variété V de dimension n , l'ensemble fibré $\underline{S}(V)$

des embryons d'ordre h de sections de $Z(V)$ possède une structure de variété fibrée de base V , de groupe $\underline{G}^{(m+h)}$, de fibre typique $\underline{S}$.

On notera également que nous avons défini au cours de la démonstration un isomorphisme ζ de $\underline{S}$ sur $Z^{(h)}$. Il en résulte que , quand Z a une structure d'espace vectoriel invariante par les opérations de $\underline{G}^{(m)}$, $\underline{S}$ est isomorphe à $A^{(h)} \otimes Z$, ce qui définit sur $\underline{S}$ une structure d'espace vectoriel . Cette structure d'espace vectoriel peut d'ailleurs se définir directement comme suit . Soit V une variété de dimension n , et soit $x \in V$. Soient S et S' des éléments de $\Sigma(x;V)$, définis sur des sous-variétés ouvertes U et U' de V contenant x . L'application $y \to S(y)+S'(y)$ $(y \in U \cap U')$ définit alors un élément $S+S'$ de $\Sigma(x;V)$. Si S_1, S_1' sont des éléments de $\Sigma(x;V)$ tels que S_1 (resp. S_1') ait un contact d'ordre h en x avec S (resp. S') il est clair que S_1+S_1' a un contact d'ordre h en x avec $S+S'$. On déduit donc de la loi de composition $(S,S') \to S+S'$ dans $\Sigma(x;V)$ une loi de composition additive dans $\underline{S}(x;V)$. De même , si a est un nombre réel , l'application $y \to aS(y)$ est un élément de $\Sigma(x;V)$, soit aS ; et , si S_1 a un contact d'ordre h en x avec S , aS_1 a un contact d'ordre h en x avec aS ; on en déduit une loi de composition $(a,\bar{S}) \to a\bar{S}$ entre R et $\underline{S}(x;V)$. On vérifie sans aucune difficulté que les deux lois de composition que nous venons de définir donnent une structure d'espace vectoriel sur $\underline{S}(x;V)$. De plus , si V' est une autre variété de dimension n , x' un point de V' et $F \in \underline{F}(x,x';V,V')$, l'imomorphisme $\Phi_{F,x}$ de $\underline{S}(x;V)$ sur $\underline{S}(x';V')$ qui correspond à F est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel du premier de ces espaces sur le second . On vérifie facilement que la structure d'espace vectoriel que nous venons de définir sur $\underline{S}(0;R^n)=\underline{S}$ est la même que celle donnée par l'isomorphisme de $\underline{S}$ sur $Z^{(h)}=A^{(h)} \otimes Z$. Procédant exactement de la même manière que plus haut , on voit que , si Z admet une structure d'algèbre sur R , invariante par les opérations de $\underline{G}^{(m)}$, chaque $\underline{S}(x;V)$ admet une structure d'algèbre sur R .

Soient S un élément de $\sum(x;V)$ et x' un point proche d'espèce $A^{(h)}$ de x sur V, donc un point de $V^{(h)}$. Si U est le domaine de définition de S , S admet une extension canonique $S^{(h)}$ qui est une application de $U^{(h)}$ dans $(Z(V))^{(h)}$. Le point $S^{(h)}(x')$ est un point de $(Z(V))^{(h)}$ qui ne dépend que de la classe $\bar{S}$ de S dans $\underline{S}(x;V)$; nous désignerons ce point par $\bar{S}^{(h)}(x')$. $\bar{S}^{(h)}$ est donc une application de la fibre $V_x^{(h)}$ de x dans $V^{(h)}$ dans $(Z(V))^{(h)}$. Nous allons déterminer la nature des applications ainsi obtenues. Remarquons d'abord que, si on désigne par P_V la projection de Z(V) sur V , $P_V^{(h)}$ est une application différentiable de $(Z(V))^{(h)}$ dans $V^{(h)}$ et que l'on a

(2) $$P_V^{(h)}(\bar{S}^{(h)}(x'))=x' .$$

Remarquons par ailleurs que, pour toute variété W , si on désigne par $W^{(h)}$ l'ensemble des points proches d'espèce $A^{(h)}$ des points de W , on a une loi de composition $(x',\underline{y}')\rightarrow w'\underline{y}'$ qui est une application de $W^{(h)}\times(R^n)_0^{(h)}$ dans $W^{(h)}$. En effet, $A^{(h)}$ est l'algèbre des embryons d'ordre h de fonctions en 0 sur R^n, de sorte que, par définition, $(R^n)_0^{(h)}$ n'est autre que l'ensemble des endomorphismes de la structure d'algèbre de $A^{(h)}$. Ceci dit, soit w' proche d'espèce $A^{(h)}$ d'un point w de W ; c'est un homomorphisme de l'algèbre $A_W^{(h)}(W)$ des embryons d'ordre h de fonctions en w sur W dans l'algèbre $A^{(h)}$, et il en est de même de l'application $w'\rightarrow w'\circ\underline{y}'$; $w'\circ\underline{y}'$ est donc encore un point proche d'espèce $A^{(h)}$ de w sur W , et c'est ce point que nous désignons par $w'\underline{y}'$. Soit G une application différentiable de W dans une variété W_1, et soit $G^{(h)}$ son extension canonique à $W^{(h)}$. On a alors

$$G^{(h)}(w'\underline{y}')=G^{(h)}(w')\underline{y}' \qquad (w'\in W^{(h)},\underline{y}'\in(R^n)_0^{(h)})$$

comme il résulte immédiatement des définitions. On en déduit que l'on a

(3) $$\bar{S}^{(h)}(x'\underline{y}')=\bar{S}^{(h)}(x').\underline{y}' \qquad (x'\in V_x^{(h)},\ \underline{y}'\in(R^n)_0^{(h)}).$$

Réciproquement, toute application σ de $V_x^{(h)}$ dans $(Z(V))^{(h)}$ telle que l'on ait

$$P_V^{(h)}(\sigma(x'))=x' \quad ; \quad \sigma(x'\underline{y}')=(x')\underline{y}' \qquad (x'\in V^{(h)}\ ,\ \underline{y}'\in(R^n)_0^{(h)})$$

se met sous la forme $\overline{S}^{(h)}$ avec un élément $\overline{S}$ bien déterminé de $\underline{S}(x;V)$. Soit en effet F un élément de $\underline{F}(0,x;R^n,V)$; c'est un isomorphisme d'une sous-variété ouverte U de R^n contenant 0 sur une sous-variété ouverte U' de V contenant x . Il correspond à F un isomorphisme $F^{(h)}$ de $U^{(h)}$ sur $U'^{(h)}$, un isomorphisme F_Z de Z(U) sur Z(U') et un isomorphisme $F_Z^{(h)}$ de $(Z(U))^{(h)}$ sur $(Z(U'))^{(h)}$. On a $U_0^{(h)}=(R^n)_0^{(h)}$, et $(F_Z^{(h)})^{-1}\circ\sigma\circ F^{(h)}$ est une application σ_1 de $(R^n)_0^{(h)}$ dans $(Z(U))^{(h)}$ si on désigne par P la projection P_{R^n} de $Z(R^n)$ sur R^n , on a $P^{(h)}(\sigma_1(\underline{x}'))=\underline{x}'$ pour tout $\underline{x}'\in(R^n)_0^{(h)}$ et $\sigma_1(\underline{x}'\underline{y}')=\sigma_1(\underline{x}')\underline{y}'$ si $\underline{y}'\in(R^n)_0^{(h)}$. Il suffit manifestement de montrer que σ_1 peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme $\overline{S}_1^{(h)}$ avec un $\overline{S}_1\in\underline{S}(0;R^n)=\underline{S}$. Or , nous avons identifié plus haut $Z(R^n)$ à $R^n\times Z$; Z(U) s'identifie donc à $U\times Z$ et $(Z(U))^{(h)}$ à $U^{(h)}\times Z^{(h)}$. Tenant compte de la relation $P^{(h)}(\sigma_1(\underline{x}'))=\underline{x}'$, on a $\sigma_1(\underline{x}')=(\underline{x}',\omega_1(\underline{x}'))$, où ω_1 est une application de $(R^n)_0^{(h)}$ dans $Z^{(h)}$ telle que $\omega_1(\underline{x}'\underline{y}')=\omega_1(\underline{x}')\underline{y}'$. Soit $\underline{x}_0'$ comme plus haut le point générique canonique proche d'aspèce $A^{(h)}$ de 0 sur R^n . Nous savons qu'il y a un élément et un seul $\overline{S}_1$ de $\underline{S}$ tel que $\zeta(\overline{S}_1)=\omega_1(\underline{x}_0')$, d'où $\overline{S}_1^{(h)}(\underline{x}_0')=(\underline{x}_0',\omega_1(\underline{x}_0'))$. Par ailleurs , on voit tout de suite que $\underline{x}_0'\underline{y}'=\underline{y}'$ pour tout $\underline{y}'\in(R^n)_0^{(h)}$. Puisque $\overline{S}_1^{(h)}(\underline{x}_0'\underline{y}')=\overline{S}_1^{(h)}(\underline{x}_0')\underline{y}'$, on voit que $\overline{S}_1^{(h)}=\omega_1$, ce qui démontre notre assertion .

Par ailleurs , il résulte immédiatement de la définition de la structure différentiable de $\underline{S}$ que l'application $\overline{S}_1\to\overline{S}_1^{(h)}(\underline{x}_0')$ de $\underline{S}$ dans $(Z(R^n))^{(h)}$ est différentiable , et par suite que l'application $(\overline{S}_1,\underline{x}')\to\overline{S}_1^{(h)}(\underline{x}')$ est différentiable . On en conclut que l'application $(\overline{S},x')\to\overline{S}^{(h)}(x')$ de $\underline{S}(x;V)\times X_x^{(h)}$ dans $(Z(V))^{(h)}$ est différentiable .

<u>Une application canonique</u> .

Soit B une algèbre locale de rang fini . Soit Z une variété sur laquelle $\underline{G}^{(m)}$

opère différentiablement à gauche . On peut alors faire opérer $\underline{G}^{(m)}$ différentiablement à gauche sur la variété Z^B des points proches d'espèce B des points de Z . Si $s\in\underline{G}^{(m)}$, soit en effet $\rho(s)$ l'automorphisme $z\to s.z$ de Z ; cet automorphisme admet une extension canonique $\rho^B(s)$ qui est un automorphisme de Z^B . Il est clair que ρ^B est une représentation du groupe $\underline{G}^{(m)}$ dans le groupe des automorphismes de la variété Z^B . Pour démontrer la différentiabilité , désignons par μ l'application $(s,z)\to s.z$ de $\underline{G}^{(m)}\times Z$ dans Z et par μ_B l'application $(s,z')\to\rho^B(s).z'$ de $\underline{G}^{(m)}\times Z^B$ dans Z^B , dont nous voulons montrer qu'elle est différentiable . Soit g une fonction différentiable sur Z ; g^B est donc une application de Z^B dans B . On a $g^B(\mu_B(s,z'))=(g\circ\rho(s))^B(z')$; considérant s comme un point proche de lui-même d'espèce B sur $\underline{G}^{(m)}$, ceci peut s'écrire $(g\circ\mu)^B(s,z$ la fonction $g\circ\mu$ sur $\underline{G}^{(m)}\times Z$ étant différentiable , il s'ensuit que l'application $(s,z')\to g^B(\ {}^B(s).z'))$ est différentiable ; ceci étant vrai pour toute fonction g différentiable sur Z , notre assertion est démontrée .

Soit V une variété de dimension n . Soient Z(V) et $Z^B(V)$ les variétés fibrées associées à $\underline{P}^{(m)}(V)$ de fibres typiques Z et Z^B ; si $x\in V$, soient $Z_x(V)$ et $Z_x^B(V)$ les fibres de x dans Z(V) et dans $Z^B(V)$. On va montrer que $Z_x^B(V)$ peut s'identifier canoniquement à la variété $(Z_x(V))^B$ des points proches d'espèce B de points de $Z_x(V)$. Tout élément r de $\underline{P}_x^{(m)}(V)$ définit un isomorphisme r_Z de Z sur $Z_x(V)$ et un isomorphisme r_{Z^B} de Z^B sur $Z_x^B(V)$. L'application r_Z admet une extension canonique r_Z^B qui est un isomorphisme de Z^B sur $(Z_x(V))^B$, et $r_Z^B\circ r_{Z^B}^{-1}$ est un isomorphisme de $Z_x^B(V)$ sur $(Z_x(V))^B$. Cet isomorphisme ne dépend par du choix de r . Soit en effet $r'=rs$, avec $s\in\underline{G}^{(m)}$; on a alors $r'_Z=r_Z\circ\rho(s)$, $r'_{Z^B}=r_{Z^B}\circ\rho^B(s)$, d'où notre assertion résulte immédiatement . Soit J_x l'isomorphisme que nous venons de définir . L'ensemble $(Z_x(V))^B$ est une partie de $(Z(V))^B$, et $(Z_x(V))^B\cap(Z_y(V))^B=\emptyset$ si x et y sont des points distincts de V . Il existe donc une application biunivoque J de $Z^B(V)$ dans $(Z(V))^B$ qui prolonge toutes les appli cations J_x . Cette application est un isomorphisme de la variété $Z^B(V)$ sur une sous-variété fermée de $(Z(V))^B$. Pour le montrer , désignons par U une sous-variété ouverte de V telle que la variété fibrée $\underline{P}^{(m)}(U)$ admette une section . Cette section définit des isomorphismes de $Z(U)$ sur $U \times Z$ et de $Z^B(U)$ sur $U \times Z^B$; nous identifierons provisoirement $Z(U)$ et $Z^B(U)$ à $U \times Z$ et $U \times Z^B$ au moyen de ces isomorphismes . Dans ces conditions , $(Z(U))^B$ s'identifie à $U^B \times Z^B$. Si $x \in U$, x peut être considéré comme un point proche de lui-même d'espèce B , ce qui plonge U dans U^B ; la restriction de J à $Z^B(U)$ n'est alors autre que l'application identique de $U \times Z^B$ dans $U^B \times Z^B$, ce qui démontre notre assertion (car $U \times Z^B$ est manifestement une sous-variété fermée de $U^B \times Z^B$) . <u>Nous identifierons désormais</u> $Z^B(V)$ <u>à son image dans</u> $(Z(V))^B$ <u>au moyen de l'isomorphisme</u> J . On peut d'ailleurs définir de la manière suivante la sous-variété $Z^B(V)$ de $(Z(V))^B$. Soit f une fonction différentiable sur V , et soit P la projection de $Z(V)$ sur V ; posons $g_f = f \circ P$; c'est une fonction différentiable sur $Z(V)$, dont l'extension canonique g_f^B est une application de $(Z(V))^B$ dans B . Soit par ailleurs Q_B la projection de $(Z(V))^B$ sur $Z(V)$; $g_f \circ Q_B$ est alors une fonction numérique sur $(Z(V))^B$. Ceci dit , la sous-variété $Z^B(V)$ de $(Z(V))^B$ est celle définie par les équations $g_f^B - g_f \circ Q_B = 0$ pour toutes les fonctions différentiables f sur V (R étant identifié de la manière canonique à une sous-algèbre de B). En effet , si $x \in V$, la fonction g_f est constante et de valeur $f(x)$ sur $Z_x(V)$; si donc $z' \in (Z_x(V))^B$, on a $g_f^B(z') = f(x) = (g_f \circ Q_B)(z')$, ce qui montre que $g_f^B - g_f \circ Q_B$ est nul sur $Z^B(V)$. Soit réciproquement $z' \in (Z(V))^B$ tel que l'on ait $g_f^B(z') = (g_f \circ Q_B)(z')$ pour toute fonction différentiable f sur V . Soit $x = P(Q_B(z'))$; soit U une sous-variété ouverte de V contenant x , telle qu'il existe une section de $\underline{P}^{(m)}(U)$. Identifions comme plus haut $Z(U)$ et $Z^B(U)$ à $U \times Z$ et à $U \times Z^B$ au moyen de cette section ;donc $(Z(U))^B$ à $U^B \times Z^B$. Alors z' se trouve identifié à un point (x', z_1') , $x' \in U^B$, $z_1' \in Z^B$, et $g_f^B(z') = f^B(x')$; ceci étant égal à $f(x)$ pour toute fonction f différentiable sur V , on a $x'=x$, d'où $z'\in Z^B(V)$.

Soit maintenant A une autre algèbre locale de rang fini . Puisque $Z^B(V)$ est une sous-variété de $(Z(V))^B$, $(Z^B(V))^A$ est une sous-variété de $((Z(V))^B)^A$. Or nous avons défini un isomorphisme canonique λ de $((Z(V)^A)^B$ sur $((Z(V)^B)^A$. Nous nous proposons de déterminer la sous-variété de $((Z(V))^A)^B$ qui est appliquée par λ sur $(Z^B(V))^A$. La projection P de $Z(V)$ sur V admet une extension canonique P^A qui est une application de $(Z(V))^A$ dans V^A ; pour simplifier la typographie , nous désignerons cette application par P_A . Nous allons montrer que pour tout $x'\in V^A$, $P_A^{-1}(x')$ est une sous-variété de $(Z(V))^A$, de sorte que $(P_A^{-1}(x'))^B$ est une sous-variété de $((Z(V))^A)^B$, et que l'ensemble qui est appliqué par λ sur $(Z^B(V))^A$ est la réunion des $(P_A^{-1}(x'))^B$ pour tous les $x'\in V^A$. Soit U une sous-variété ouverte de V telle que $\underline{P}^{(m)}(U)$ admette une section . Cette section définit une série d'isomorphismes :

de $Z(U)$	sur	$U\times Z$
" $(Z(U))^B$	"	$U^B\times Z^B$
" $Z^B(U)$	"	$U\times Z^B$
" $((Z(U))^B)^A$	"	$(U^B)^A\times(Z^B)^A$
" $(Z^B(U))^A$	"	$U^A\times(Z^B)^A$
" $(Z(U))^A$	"	$U^A\times Z^A$
" $((Z(U))^A)^B$	"	$(U^A)^B\times(Z^A)^B$.

Soient λ_U , λ_Z et $\lambda_{U\times Z}$ les isomorphismes canoniques de $(U^A)^B$ sur $(U^B)^A$, de $(Z^A)^B$ sur $(Z^B)^A$ et de $((U\times Z)^A)^B$ sur $((U\times Z)^B)^A$. Il est évident que $(u'',z'')^{\lambda_{U\times Z}}=(u''^{\lambda_U},z''^{\lambda_Z})$ si $u''\in(U^A)^B$, $z''\in(Z^A)^B$. Si $x'\in V^A$, l'isomorphisme de $(Z(U))^A$ sur $U^A\times Z^A$ applique $P_A^{-1}(x')$ sur $\{x'\}\times Z^A$, qui est manifestement une sous-variété de $U^A\times Z^A$, ce qui montre que $P_A^{-1}(x')$ est une sous-variété de $(Z(U))^A$. On peut considérer x' comme un point proche d'espèce B de lui-même , donc comme un point de $(U^A)^B$; il est alors clair que l'isomorphisme de $((Z(U))^A)^B$ sur $(U^A)^B \times (Z^A)^B$ applique $(P_A^{-1}(x'))^B$ sur $\{x'\} \times (Z^A)^B$, donc la réunion des $(P_A^{-1}(x'))^B$ pour $x' \in U^A$ sur $U^A \times (Z^A)^B$. On observera que U^A est ici considéré comme une sous-variété de $(U^A)^B$ en considérant tout point x' de U^A comme proche de lui-même d'espèce B . Considérant par ailleurs tout $x \in U$ comme proche de lui-même d'espèce B , on plonge U dans U^B , donc U^A dans $(U^B)^A$; et on vérifie sans aucune difficulté que λ_U induit l'application identique de U^A sur lui-même . On voit donc que $\lambda_{U \times Z}$ applique la réunion des $(P_A^{-1}(x'))^B$ $(x' \in U^A)$ sur $U^A \times (Z^B)^A$. Par ailleurs , il est clair que les isomorphismes de $((Z(U))^A)^B$ sur $(U^A)^B \times (Z^A)^B = ((U \times Z)^A)^B$ et de $((Z(U))^B)^A$ sur $((U \times Z)^B)^A$ font se correspondre entre eux les isomorphismes canoniques λ et $\lambda_{U \times Z}$. Nos assertions sont donc démontrées .

Ceci dit , soit maintenant h un entier $\geqslant 0$. Soient $\underline{S}(Z;V)$ et $\underline{S}(Z^B;V)$ les variétés d'embryons d'ordre h de sections de $Z(V)$ et de $Z^B(V)$; si $x \in V$, soient $\underline{S}_x(Z;V)$ et $\underline{S}_x(Z^B;V)$ les fibres de x dans ces variétés fibrées . Les fibres typiques de $\underline{S}(Z;V)$ et de $\underline{S}(Z^B;V)$ sont $\underline{S}_0(Z;R^n)$ et $\underline{S}_0(Z^B;R^n)$, que nous désignerons par $\underline{S}(Z)$ et $\underline{S}(Z^B)$. Soit $(\underline{S}(Z))^B$ la variété des points proches d'espèce B des points de $\underline{S}(Z)$; cette variété donne lieu , comme expliqué ci-dessus , à une variété fibrée $(\underline{S}(Z))^B(V)$ dont elle est la fibre typique ; nous désignerons pour simplifier cette variété par $\underline{S}^B(Z;V)$. Notre propos est d'établir une correspondance biunivoque canonique entre les ensembles $\underline{S}^B(Z;V)$ et $\underline{S}(Z^B;V)$.

Nous avons identifié la fibre $\underline{S}_x^B(Z;V)$ d'un point x dans $\underline{S}^B(Z;V)$ à $(\underline{S}_x(Z;V))^B$. Nous avons par ailleurs attaché à tout élément $\overline{S}$ de $\underline{S}_x(Z;V)$ une application $\overline{S}^{(h)}$ de $V_x^{(h)}$ (la fibre de x dans la variété $V^{(h)}$ des points proches d'espèce $A^{(h)}$ de points de V) dans $(Z(V))^{(h)}$. Soit T un point de $(\underline{S}_x(Z;V))^B$. Si $x' \rightarrow V_x^{(h)}$, on sait que l'application $\zeta : \overline{S} \rightarrow \overline{S}^{(h)}(x')$ est une application différentiable de $\underline{S}_x(Z;V)$ dans $(Z(V))^{(h)}$. L'extension canonique ζ^B de cette application à

$(\underline{S}_x(Z;V))^B$ fait correspondre à T un point $\zeta^B(T;x')$ de $((Z(V))^{(h)})^B$. Soit $(\zeta^B(T;x'))^\lambda$ l'image de ce point par l'application canonique λ de $((Z(V))^{(h)})^B$ sur $((Z(V))^B)^{(h)}$. Désignons par P la projection de Z(V) sur V , et par P_h l'extension canonique de P à $(Z(V))^{(h)}$. Pour tout $\bar{S} \in \underline{S}_x(Z;V)$, on a $\bar{S}^{(h)}(x') \in P_h^{-1}(x')$, et par suite $\zeta^B(T;x') \in (P_h^{-1}(x'))^B$. Faisant usage des résultats obtenus plus haut , on voit que $(\zeta^B(T;x'))^\lambda$ appartient à $(Z^B(V))^{(h)}$. Nous nous proposons de montrer que l'application $x' \to (\zeta^B(T;x'))^\lambda$ peut être définie au moyen d'un élément de $\underline{S}(Z^B;V)$. Nous avons déterminé plus haut les conditions sous lesquelles il en est ainsi . Soit Q_B la projection de $(Z(V))^B$ sur Z(V) , et soit Q'_B sa restriction à $Z^B(V)$; la projection de $Z^B(V)$ sur V est alors $P \circ Q'_B$; si $Q'^{(h)}_B$ est l'extension canonique de Q'_B à $(Z^B(V))^{(h)}$, celle de $P \circ Q'_B$ est $P_h \circ Q'^{(h)}_B$, et la première condition qui doit être satisfaite est $(P_h \circ Q'^{(h)}_B)(\zeta^B(T;x'))^\lambda = x'$. Or $Q'^{(h)}_B$ est la restriction à $(Z^B(V))^{(h)}$ de l'extension canonique $Q^{(h)}_B$ de Q_B à $((Z(V))^B)^{(h)}$. On vérifie immédiatement que , pour tout point u de la variété $((Z(V))^{(h)})^B$, $Q^{(h)}_B(u)$ est l'image de u dans la projection de $((Z(V))^{(h)})^B$ sur $(Z(V))^{(h)}$. Si $\bar{S}$ est le point de $\underline{S}_x(Z;V)$ dont T est proche d'espèce B , le point $\zeta^B(T;x')$ est proche d'espèce B de $\bar{S}^{(h)}(x')$, et sa projection sur $(Z(V))^{(h)}$ est $\bar{S}^{(h)}(x')$ dont l'image par P_h est x' , ce qui montre que la première condition est satisfaite . La deuxième condition à satisfaire est que $(\zeta^B(T;x'\underline{y}'))^\lambda = (\zeta^B(T;x'))^\lambda . \underline{y}'$ pour tout $\underline{y}' \in (R^n)^{(h)}_0$. Soit μ l'application $z' \to z'\underline{y}'$ de $(Z(V))^{(h)}$ dans lui-même . On a $\bar{S}^{(h)}(x'\underline{y}') = \bar{S}^{(h)}(x')\underline{y}' = \mu(\bar{S}^{(h)}(x'))$. Soit μ^B l'extension canonique de μ à $((Z(V))^{(h)})^B$; il est alors clair que l'on a $\zeta^B(T;x'\underline{y}') = \mu^B(\zeta^B(T;x'))$. Soit maintenant μ_B l'application $u \to u\underline{y}'$ de $((Z(V))^B)^{(h)}$ dans lui-même ; on va montrer que $\mu_B(z''^\lambda) = \mu^B(z'')$ pour tout $z'' \in ((Z(V))^{(h)})^B$. Soit f une fonction différentiable sur Z(V) ; on a $f^{(h)}(\mu(z')) = f^{(h)}(z').\underline{y}'$ pour tout

$z' \in (Z(V))^{(h)}$. Si donc ν est l'opération $a \to a.\underline{y}'$ sur $A^{(h)}$, on a $f^{(h)} \circ \mu = \nu \circ f^{(h)}$, d'où $(f^{(h)})^B \circ \mu^B = \nu^B \circ (f^{(h)})^B$, où ν^B est l'extension canonique de ν à $(A^{(h)})^B$. Cette dernière variété s'identifie à $A^{(h)} \otimes B$, et , ν étant linéaire , ν^B est l'application de $A^{(h)} \otimes B$ dans lui-même définie par $\nu^B(a \otimes b) = (a.\underline{y}') \otimes b$. L'isomorphisme canonique de $A^{(h)} \otimes B$ sur $B \otimes A^{(h)}$ fait correspondre à cette application l'application de $B \otimes A^{(h)}$ dans lui-même définie par $b \otimes a \to b \otimes (a.\underline{y}')$; il en résulte immédiatement que $\mu_B(z''^{\lambda}) = \mu^B(z'')$. On a donc $\zeta^B(T;x'\underline{y}') = \mu_B((\zeta^B(T;x'))^{\lambda})$, et ceci est égal à $(\zeta^B(T;x'))^{\lambda}.\underline{y}'$, ce qui montre que la seconde condition est satisfaite . Nous désignerons par T^{λ} l'élément de $\underline{S}(Z^B;V)$ tel que $T^{(h)}(x') = (\zeta^B(T;x'))^{\lambda}$ pour tout $x' \in V_x^{(h)}$. Il appartient évidemment à la fibre $\underline{S}_x(Z^B;V)$ dans $\underline{S}(Z^B;V)$. Montrons que $T \to T^{\lambda}$ <u>est une application biunivoque</u> de $\underline{S}_x^B(Z;V)$ sur $\underline{S}_x(Z^B;V)$. Soit x'_0 un point proche d'espèce $A^{(h)}$ de x qui soit régulier . Si $\underline{x}'_0$ est le point générique canonique de $(R^n)_0^{(h)}$, il y a un élément $F \in \underline{F}(0,x;R^n,V)$ ~~XXXXX~~ tel que $F^{(h)}(\underline{x}'_0) = x'_0$; il en résulte immédiatement que $\overline{S} \to \overline{S}^{(h)}(x'_0)$ est un isomorphisme de $\underline{S}_x(Z;V)$ sur $P_h^{-1}(x'_0)$ (rappelons que P_h est l'extension canonique à $(Z(V))^{(h)}$ de la projection de $Z(V)$ sur V) . On en déduit que $T \to \zeta^B(T;x'_0)$ est un isomorphisme de $(\underline{S}_x(Z;V))^B$ sur $(P_h^{-1}(x'_0))^B$. Soit P_B la projection de $Z^B(V)$ sur V et soit $P_{B,h}$ son extension canonique à $(Z^B(V))^{(h)}$; on voit tout de suit que l'image de $(P_h^{-1}(x'_0))^B$ par λ n'est autre que $P_{B,h}^{-1}(x'_0)$. De plus , $T' \to T'^{(h)}(x'_0)$ est un isomorphisme de $\underline{S}_x(Z^B;V)$ sur $P_{B,h}^{-1}(x'_0)$; il en résulte immédiatement que $T \to T^{\lambda}$ est un isomorphisme de $(\underline{S}_x(Z;V))^B$ sur $\underline{S}_x(Z^B;V)$.

<u>Nous avons donc bien établi une correspondance biunivoque canonique</u> $T \to T^{\lambda}$ <u>de</u> $\underline{S}^B(Z;V)$ <u>avec</u> $\underline{S}(Z^B;V)$.

Soit maintenant X une transformation infinitésimale d'espèce B sur V . On sait que , S étant une section de $Z(V)$, on peut associer à X et à S une section θ_Z de $Z^B(V)$. Par ailleurs , S détermine une section $\hat{S}$ de la variété fibrée $\underline{S}(Z;V)$ qui associe à tout $x \in V$ l'embryon $\hat{S}(x)$ de S en x ; et on peut associer à X et à $\hat{S}$ une section θ_S de $\underline{S}^B(Z;V)$. Remarquons enfin que la section θ_Z de $Z^B(V)$ déter de la section θ_Z en x .

Théorème .- Les notations étant comme ci-dessus , on a $\hat{\theta}_Z(x)=(\theta_{\underline{S}}(x))^{\lambda}$ pour tout $x\in V$, $T\to T^{\lambda}$ étant l'application biunivoque canonique de $\underline{S}^B(Z;V)$ sur $\underline{S}(Z^B;V)$.

On peut trouver des sous-variétés ouvertes U_o et U_1 de V telles que $x\in U_o\subset U_1$, une application différentiable φ de $U_o\times W$ dans U_1 (où W est une certaine variété) , un point w_o de W , un point w' proche d'espèce B de w_o sur W , de telle manière que les conditions suivantes soient satisfaites : pour tout $w\in W$, $y\to\varphi(y,w)$ est un isomorphisme de U_o sur une sous-variété ouverte de U_1 ; $\varphi(y,w_o)=y$ pour tout $y\in U_o$; $X.y=\varphi(y,\overset{B}{w'})$ pour tout $y\in U_o$. Nous désignerons par φ_w l'application $y\to\varphi(y,w)$. Comme c'est un isomorphisme de U_o sur une sous-variété ouverte de V , il lui correspond un isomorphisme Φ_w de $Z(U_o)$ sur une sous-variété ouverte de $Z(U_1)$. Remplaçant au besoin W par un voisinage ouvert convenable de w_o dans W , on peut supposer que , pour tout $w\in W$, $\varphi_w(U_o)$ contient une sous-variété ouverte fixe U_2 de V contenant x . Alors , si $w\in W$, la restriction S_w de $\Phi_w\circ S\circ\varphi_w^{-1}$ à U_2 est une section de $Z(U_2)$. Si on pose $S_w(y)=$ $=\sigma(w,y)$, il résulte de la définition de θ_Z que $\theta_Z(y)=\sigma(\overset{B}{w'},y)$ pour $y\in U_2$. Or $\hat{\theta}_Z(x)$ est l'embryon d'ordre h de la section θ_Z en x ; si donc x' est un point proche d'espèce $A^{(h)}$ de x sur V , on a $(\hat{\theta}_Z(x))^{(h)}(x')=\theta_Z^{(h)}(x')$, où $\theta_Z^{(h)}$ est l'extension canonique de θ_Z à $V^{(h)}$, qui applique cette variété dans $(Z^B(V))^{(h)}$. On a donc $(\hat{\theta}_Z(x))^{(h)}(x')=\sigma(\overset{B1}{w'},\overset{h2}{x'})$, où la lettre h au-dessus de x' est une abréviation pour $A^{(h)}$.

Il correspond à l'isomorphisme φ_w un isomorphisme ψ_w de $\underline{S}(Z;U_o)$ sur une sous-variété ouverte de $\underline{S}(Z;U_1)$. Soit $\hat{S}_w$ la restriction de $\psi_w\circ\hat{S}\circ\varphi_w^{-1}$ à U_2 ; c'est une section de $\underline{S}(Z;U_2)$. Si on pose $\hat{S}_w(y)=\hat{\sigma}(w,y)$, on a $\theta_{\underline{S}}(y)=\hat{\sigma}(\overset{B}{w'},y)$. Désignons par T l'élément $\theta_{\underline{S}}(x)$ de $(\underline{S}_x(Z;V))^B$. Utilisant les mêmes notations que plus haut , nous nous proposons de calculer $\zeta^B(T;x')$. Désignons par $\hat{\sigma}_y$ l'application $w \to \hat{\sigma}(w,y)$; on a donc $T=(\hat{\sigma}_x)^B(w')$, où $(\hat{\sigma}_x)^B$ est l'extension canonique de $\hat{\sigma}_x$ à W^B . Rappelons que ζ^B est l'extension canonique à $(\underline{S}_x(Z;V))^B$ de l'application $\zeta : \bar{S} \to \bar{S}^{(h)}(x')$ de $\underline{S}_x(Z;V)$ dans $(Z(V))^{(h)}$; on a $\zeta^B(T,x')=(\zeta\circ\hat{\sigma}_x)^B(w')$. Or , on se rappellera que , si V,V' sont des variétés de dimension n , $x\in V$, $x'\in V'$, $F\in\underline{F}(x,x';V,V')$ et si F est défini dans la sous-variété ouverte U de V , l'isomorphisme de $\underline{S}(U;V)$ sur une sous-variété ouverte de $\underline{S}(U;V')$ qui correspond à F est le suivant : si $x\in U$, et si S^* est une section d'un $Z(U^*)$, U^* étant une sous-variété ouverte de V qui contient x , l'isomorphisme en question applique l'embryon d'ordre h de S^* en x sur l'embryon d'ordre h de la section $F_Z\circ S^*\circ F^{-1}$ en $F(x)$, F_Z étant l'isomorphisme de $Z(U)$ sur une sous-variété ouverte de $Z(V')$ qui correspond à F . Ceci dit , on a $\hat{S}_w(y)=\Phi_w(\hat{S}(\varphi_w^{-1}(y)))$, et $\hat{S}(\varphi_w^{-1}(y))$ est l'embryon d'ordre h de S en $\varphi_w^{-1}(y)$. Il en résulte que $\hat{S}_w(y)$ est l'embryon d'ordre h de $\Phi_w\circ S\circ\varphi_w^{-1}=S_w$ en $\varphi_w(\varphi_w^{-1}(y))=y$. Donc $\hat{\sigma}_x(w)$ est l'embryon d'ordre h de S_w en x ; l'image de cet élément par l'application ζ est $S_w^{(h)}(x')$, où $S_w^{(h)}$ est l'extension canonique de S_w à $V^{(h)}$. En vertu de la définition de σ , ceci est $\sigma(w,\overset{h}{x'})$, et il en résulte que $\zeta^B(T;x')=\sigma(\overset{B2}{w'},\overset{h1}{x'})$. Ceci est appliqué par l'isomorphisme canonique λ sur $\sigma(\overset{B1}{w'},\overset{h2}{x'})=(\hat{\theta}_Z(x))^{(h)}(x')$ Ceci démontre le théorème .

RÉLÈVEMENTS CANONIQUES D'UNE TRANSFORMATION INFINITÉSIMALE.

On désignera par V une variété, par A une algèbre locale de rang fini et par X une T.I. d'espèce A sur V .

1. <u>Relèvement aux variétés de points proches</u>.

Soit B une algèbre locale de rang fini. La T.I. X est une application différentiable de V dans V^A ; on en déduit une application différentiable X^B de V^B dans $(V^A)^B$. Nous identifierons $(V^A)^B$ et $(V^B)^A$ à $V^{A\otimes B}$ et $V^{B\otimes A}$ au moyen des isomorphismes canoniques entre ces variétés. L'isomorphisme canonique de $A\otimes B$ sur $B\otimes A$ fournit un isomorphisme de la variété $(V^A)^B$ sur $(V^B)^A$, que nous désignerons par $\lambda_{A,B}$. Alors $\lambda_{A,B}\circ X^B$ est une application différentiable B_X de V^B dans $(V^B)^A$. Nous allons montrer que c'est une T.I. sur V^B . Soit en effet p la projection de V^A sur V ; elle définit par extension canonique une application p^B de $(V^A)^B$ dans V^B ; soit aussi p_B la projection de $(V^B)^A$ sur V^B . On a donc $p_B\circ\lambda_{A,B} = p^B$ (cf. complément, n°6), d'où $p_B\circ B_X = p^B\circ X^B = (p\circ X)^B$. Mais, X étant une T.I., $p\circ X$ est l'application identique : il en est donc de même de $(p\circ X)^B$, donc de $p_B\circ B_X$, ce qui montre que B_X est une T.I. . Nous dirons que B_X est le <u>relèvement canonique de</u> X à V^B .

2. <u>Relèvements aux espaces fibrés principaux</u> $\mathcal{P}^{(m)}(V)$.

Posons $B^{(m)} = \underline{R}[[X_1,\dots,X_n]]/I^{m+1}$, où n est la dimension de V et où I est l'idéal maximal de $\underline{R}[[X_1,\dots,X_n]]$. On va montrer que $\mathcal{P}^{(m)}(V)$ s'identifie à une sous-variété ouverte de $V^{B(m)}$. Si $x\in V$, soit B_x l'algèbre des embryons de fonctions en x ; elle est isomorphe à $\underline{R}[[X_1,\dots,X_n]]$; soit $B_x^{(m)}$ son quotient par la puissance (m+1)-ième de son idéal maximal. C'est une algèbre isomorphe à $B^{(m)}$, et les repères d'ordre m en x sont les isomorphismes de $B^{(m)}$ sur $B_x^{(m)}$.

Soit ρ l'un de ces repères ; $\overset{-1}{\rho}$ est donc un isomorphisme de $B_x^{(m)}$ sur $B^{(m)}$, et cet isomorphisme définit un homomorphisme r de B_x dans $B^{(m)}$; de plus, ρ définit par passage aux quotients l'isomorphisme identique de $B^{(m)}/(I/I^{m+1}) = \underline{\underline{R}}$ sur $B_x^{(m)}/(I_x/I_x^{m+1})$, où I_x est l'idéal maximal de B_x. Soit alors $\overline{F}$ un embryon de fonction en x, et soit $\overline{F}^{(m)}$ sa classe modulo I_x^{m+1}. Alors $r(\overline{F}) = \overset{-1}{\rho}\,(\overline{F}^{(m)})$ et la classe de cet élément de $B^{(m)}$ modulo I/I^{m+1} est la classe de $\overline{F}^{(m)}$ modulo I_x/I_x^{m+1}, donc celle de $\overline{F}$ modulo I_x, i.e. $\overline{F}(x)$; on voit donc que r est un point proche d'espèce $B^{(m)}$ de x.

Soit réciproquement r un point proche d'espèce $B^{(m)}$ de x, donc un homomorphisme de B_x dans $B^{(m)}$ tel que, pour tout $\overline{F} \in B_x$, la classe de $r(\overline{F})$ modulo I/I^{m+1} soit $\overline{F}(x)$. Il est clair que r applique I_x^{m+1} sur $\{0\}$, donc définit par passage aux quotients un homomorphisme $r^{(m)}$ de $B_x^{(m)}$ dans $B^{(m)}$. Nous dirons que r est <u>régulier</u> si $r^{(m)}$ est un isomorphisme. S'il en est ainsi, on a $r^{(m)} = \overset{-1}{\rho}$, où ρ est un repère d'ordre m en x, et le point proche de x qu'on déduit de ρ par la construction indiquée plus haut est r. Il y a donc correspondance bi-univoque entre les repères d'ordre m et les points réguliers de $V^{B(m)}$.

Or les points réguliers de $V^{B(m)}$ forment une sous-variété ouverte de cette variété. Choisissons en effet un système de coordonnées $(t_1, \ldots, t_n)$ sur un ouvert U de V. Si $x \in U$, soit $\overline{t}_i^x$ l'embryon de t_i en x. Soient $M_1(x), \ldots, M_n(x)$ les monomes de degrés $\leqslant m$ en les $\overline{t}_i^x - t_i(x)$; leurs classes forment une base de $B_x^{(m)}$. Soit $(\beta_o, \ldots, \beta_N)$ une base de $B^{(m)}$. Si r est un point proche d'espèce $B^{(m)}$ d'un $x \in U$, on a

$$r(M_k(x)) = \sum_{l=0}^{N} g_{kl}(r)\ \beta_l$$

les g_{kl} étant des fonctions différentiables, donc continues, sur l'image inverse $U^{(m)}$ de U dans $V^{B(m)}$ par la projection de $V^{B(m)}$ sur V . Pour que r soit régulier, il faut et suffit que le déterminant des $g_{kl}(r)$ soit $\neq 0$, ce qui démontre notre assërtion.

On peut montrer facilement que l'application biunivoque ainsi définie de $\mathcal{P}^{(m)}(V)$ sur une sous-variété de $V^{B(m)}$ est un isomorphisme de variétés. Mais on peut aussi définir la structure différentiable de $\mathcal{P}^{(m)}(V)$ par cette condition, ce qui me paraît commode. Je ne donnerai donc pas la démonstration.

Ceci dit, nous avons un relèvement ${}^{B(m)}X$ de la T.I. X à $V^{B(m)}$. On en déduit immédiatement le relèvement ${}^{m}X$ de X à $\mathcal{P}^{(m)}(V)$.

On a une application naturelle ψ de $B^{(m+1)}$ sur $B^{(m)}$. On en déduit une application p_m de $V^{B(m+1)}$ sur $V^{B(m)}$. Il résulte de la formule (1) que $p_m^{A} \circ {}^{B(m+1)}X = {}^{B(m)}X \circ p_m$. Par ailleurs, on voit tout de suite que, $\mathcal{P}^{(m)}(V)$ et $\mathcal{P}^{(m+1)}(V)$ étant identifiés à des sous-variétés ouvertes de $V^{B(m)}$ et $V^{B(m+1)}$ réciproquement, p_m applique la seconde de ces variétés sur la première. On a

$$p_m^{A} \circ {}^{m+1}X = {}^{m}X \circ p_m \quad .$$

Considérons maintenant un automorphisme s de l'algèbre $B^{(m)}$. Considéré comme homomorphisme de $B^{(m)}$ dans lui-même, s définit une application p_s de la variété $V^{B(m)}$ dans elle-même. Soit ρ un repère d'ordre m en x ; le point proche d'espèce $B^{(m)}$ de x qui correspond à ρ , soit r , peut être caractérisé par la condition que $\rho \circ r$ soit l'application canonique de B_x sur $B_x^{(m)}$. On a $p_s(r) = s \circ r$; le repère qui correspond à $p_s(r)$ est donc $\rho \circ s^{-1}$; il en résulte que, si on identifie $\mathcal{P}^{(m)}(V)$ à une sous-variété ouverte de $V^{B(m)}$, p_s induit sur $\mathcal{P}^{(m)}(V)$ l'opération de multiplication par l'élément s^{-1} du groupe fondamental de cet espace fibré principal. Faisant usage de la formule (1), on a

$$(3) \qquad p_s^A \circ {}^mX = {}^mX \circ p_s \ ,$$

où p_s^A est l'extension canonique de p_s (ou plutôt de sa restriction à $\mathcal{P}^{(m)}(V)$) à $(\mathcal{P}^{(m)}(V))^A$.

3. Relèvement à un espace fibré associé à $\mathcal{P}^{(m)}(V)$.

Supposons que le groupe fondamental $G^{(m)}$ de $\mathcal{P}^{(m)}(V)$ opère différentiablement à gauche sur une variété Z. On déduit alors de $\mathcal{P}^{(m)}(V)$ un espace fibré associé $\mathcal{Z}$ de base V, de fibre Z, défini comme suit. On forme le produit $\mathcal{P}^{(m)}(V)\times Z$, et on pose, pour $s\in G$, $\rho\in\mathcal{P}^{(m)}(V)$, $z\in Z$, $\zeta(s).(\rho,z) = (\rho s^{-1},sz)$; G se trouve ainsi opèrer sur le produit $\mathcal{P}^{(m)}(V)\times Z$, et $\mathcal{Z}$ est l'espace des orbites. Ceci dit, la formule ${}^mY.(\rho,z) = ({}^mX.\rho,z)$ définit une T.I. ${}^mY$ sur le produit $\mathcal{P}^{(m)}(V)\times Z$ (on considère z comme un point proche d'espèce A de lui-même, de sorte que $({}^mX.\rho,z)$ est un point proche d'espèce A de (ρ,z)). Soit $s\in G^{(m)}$; soit $\zeta^A(s)$ l'extension canonique de $\zeta(s)$ à $(\mathcal{P}^{(m)}(V)\times Z)^A$; on a alors

$$(\zeta^A(s)\circ{}^mY)(\rho,z) = \zeta^A(s).({}^mX.\rho,z) = ((p_s^A\ {}^mX).\rho\ ,\ sz) =$$
$$= (({}^mX\circ p_s).\rho\ ,s.z) = ({}^mX.\rho s^{-1},s.z) = ({}^mX\circ\zeta(s))(\rho,z)$$

et par suite

$$\zeta^A(s)\circ{}^mY = {}^mY\circ\zeta(s) \ .$$

Il résulte immédiatement de là que ${}^mY$ définit par passage aux quotients une T.I. infinitésimale d'espèce A, soit ${}^{\mathcal{Z}}X$, de l'espace fibré $\mathcal{Z}$. Cette T.I. est définie par la condition que, si $\pi_{\mathcal{Z}}$ est la projection de $\mathcal{P}^{(m)}(V)\times Z$ sur $\mathcal{Z}$, on ait

$${}^{\mathcal{Z}}X\circ\pi_{\mathcal{Z}} = \pi_{\mathcal{Z}}^A\circ{}^mY \ ,$$

où $\pi_{\mathcal{Z}}^A$ est l'extension canonique de $\pi_{\mathcal{Z}}$ à $(\mathcal{P}^{(m)}(V)\times Z)^A$.

Supposons en particulier que l'on prenne pour Z le groupe $G^{(m)}$ lui-même, considéré comme opérant sur lui-même par les translations à gauche. L'espace $\mathcal{Z}$ s'identifie alors à $\mathcal{P}^{(m)}(V)$ en identifiant un $\rho \in \mathcal{P}^{(m)}(V)$ à l'orbite de $(\rho, e) \in \mathcal{P}^{(m)}(V) \times G^{(m)}$, e étant l'élément neutre de $G^{(m)}$. L'application Π_Z est $(\rho, z) \to \rho z$. On a $(\Pi_Z^A \circ {}^mY)(\rho, e) = \Pi_Z^A({}^mX.\rho, e) = {}^mX$, d'où il résulte immédiatement que $\mathcal{Z}_X$ est alors identique à la T.I. ${}^mX$ construite précédemment.

Soit maintenant Z' une autre variété sur laquelle $G^{(m)}$ opère différentiablement à gauche, et soit φ une application de Z dans Z' telle que $\varphi(s.z) = s.z'$ pour $s \in G^{(m)}$, $z \in Z$, $z' \in Z'$. Il correspond alors à φ une application Φ de l'espace fibré $\mathcal{Z}$ qui correspond à Z dans celui, $\mathcal{Z}'$, qui correspond à Z'. Cette application est caractérisée par la propriété suivante : si Φ_o est l'application $(\rho, z) \to (\rho, \varphi.z)$ de $\mathcal{P}^{(m)}(V)$ Z dans $\mathcal{P}^{(m)}(V)$ Z', on a $\Pi_{Z'} \circ \Phi_o = \Phi \circ \Pi_Z$.

Considérons une famille $(\varphi_t)_{t \in T}$ d'applications différentiables d'une variété V dans elle-même, dépendant différentiablement d'un paramètre t qui varie sur une variété T. On suppose qu'il y a un point $t_o \in T$ tel que φ_{t_o} soit l'application identique. Soit t' un point proche d'espèce A de t_o sur T. Pour chaque $x \in V$, soit ψ_x l'application $t \to \varphi_t(x)$. La formule

$$Xx = \psi_x^A(t')$$

définit alors une T.I. X d'espèce A sur V.

Soit B une autre algèbre locale de rang fini. Pour chaque $t \in T$, φ_t^B est une application différentiable de T dans V^B, et ces applications dépendent différentiablement du paramètre t. De plus, $\varphi_{t_o}^B$ est l'application identique. Cette famille permet donc de définir une T.I. X' sur V^B, par le même procédé que celui employé plus haut sur V.

Désignons, si $r \in R$, par $\psi_r(t)$ le point $\varphi_t^B(r)$; on a alors

$$X'r = \psi_r^A(t') .$$

Nous nous proposons de montrer que X' n'est autre que le relèvement canonique ${}^BX$ de X. Soit λ l'isomorphisme de $(V^A)^B$ sur $(V^B)^A$ qui correspond à l'isomorphisme canonique de $A \otimes B$ sur $B \otimes A$. On sait que ${}^BX$ se caractérise alors comme suit : pour toute fonction numérique f sur V, on a

$$(f^B)^A({}^BX.r) = \lambda.(f^A \circ X)^B(r) .$$

Nous poserons $f(\varphi_t(x)) = F(x,t)$; nous désignerons par G_x l'application $t \to F(x,t)$, par H_t l'application $x \to F(x,t)$. Nous poserons $g(x) = G_x(t')$, $h(t) = H_t^B(r)$. On a $(f^A \circ X)(x) = f^A(\psi_x^A(t')) =$ $= f \circ \psi_x)^A(t')$; mais $f \circ \psi_x$ n'est autre que G_x, d'où $(f^A \circ X)(x) =$ $= G_x(t') = g(x)$, $f^A \circ X = g$, $(f^A \circ X)^B(r) = g^B(r)$. Or on sait que $\lambda \mu g^B(r) = h^A(t')$, d'où $(f^B)^A({}^BX.r) = h^A(t')$. Il suffira donc de montrer que $(f^B)^A(X'.r) = h^A(t')$. Or $(f^B)^A(X'.r) = (f^B)^A(\psi_r^A(t')) =$ $= (f^B \circ \psi_r)^A(t')$. Il suffira donc de montrer que $f^B \circ \psi_r = h$. Or $f^B(\psi_r(t)) = f^B(\varphi_t^B(r)) = (f \circ \varphi_t)^B(r)$. Mais $(f \circ \varphi_t)(x) =$ $= F(x,t)$, d'où $f \circ \varphi_t = H_t$, $(f \circ \varphi_t)^B(r) = H_t^B(r) = h(t)$, ce qui démontre notre assertion.

Complément aux identifications canoniques du th. 1.

1. Soit B une algèbre locale de rang fini, et soit ψ un homomorphisme de B dans une autre algèbre locale B' de rang fini. Soit V une variété; l'application ψ fait alors correspondre à tout point proche d'espèce B d'un point de V un point proche d'espèce B' du même point : elle définit une application p de V^B dans $V^{B'}$. Soit f une fonction numérique sur V ; f^B (resp.: $f^{B'}$) est alors une application de V^B (resp.: $V^{B'}$) dans B (resp.: B'). Il résulte immédiatement de la définition que

(1) $$f^{B'} \circ p Y = \psi \circ f^B \; .$$

2. Soit u une application différentiable d'une variété V dans un vectoriel H, et soit ψ une application linéaire de H dans un vectoriel H'. Soit A une algèbre locale de rang fini. Alors u^A est une application de V^A dans $H \otimes A$, et $\psi \circ u$ une application de V dans H'. Par ailleurs, $\psi \otimes I$ (où I est l'application identique de A) est une application de $H \otimes A$ dans $H' \otimes A$. On a

(2) $$(\psi \circ u)^A = (\psi \otimes I) \circ u^A \; .$$

Soit en effet $(h_1, \dots, h_m)$ une base de H, et $h'_i = \psi . h_i$. Soit $u = \sum_{i=1}^m h_i u_i$, où les u_i sont des fonctions numériques. On a $\psi \circ u = \sum_{i=1}^m h'_i u_i$; soit $q \in V^A$. On a alors $(\psi \circ u)^A(q) = \sum_{i=1}^m h'_i \otimes u_i^A(q)$, $u^A(q) = \sum_{i=1}^m h_i \otimes u_i^A(q)$, d'où le résultat.

3. Utilisons les notations de 1., et soit de plus A une algèbre locale de rang fini. Désignons par i (resp.: i') l'application canonique de $(V^B)^A$ (resp.: $(V^{B'})^A$) sur $V^{B \otimes A}$ (resp.: $V^{B' \otimes A}$). Il correspond à ψ une application p de V^B dans $V^{B'}$, donc une application p^A de $(V^B)^A$ dans $(V^{B'})^A$. Par ailleurs, $\psi \otimes I$ (où I est l'application identique de A) définit une application $\tilde{p}_{B,A}$ de $V^{B \otimes A}$ dans $V^{B' \otimes A}$.

On a alors compatibilité dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (V^B)^A & \xrightarrow{i} & V^{B\otimes A} \\ \downarrow p^A & & \downarrow \tilde{p}_{B,A} \\ (V^{B'})^A & \xrightarrow{i'} & V^{B'\otimes A} \end{array}.$$

Soit en effet $s \in (V^B)^A$. Il suffira de montrer que l'on a

$$f^{B'\otimes A}((i' \circ p^A)(s)) = f^{B'\otimes A}((\tilde{p}_{B,A} \circ i)(s))$$

pour toute fonction numérique f sur V. En vertu de la définition de i', le premier membre s'écrit $(f^{B'})^A(p^A(s)) = (f^{B'} \circ p)^A(s)$; en vertu de (1), ceci est $(\psi \circ f^B)^A(s)$, ou encore, en vertu de (2), $(\psi \otimes I)((f^B)^A(s))$. Par ailleurs, le second membre est, en vertu de (1), $(\psi \otimes I)(f^{B\otimes A}(i(s)) = (\psi \otimes I)((f^B)^A(s))$, ce qui démontre notre assertion.

4. Désignons maintenant par j (resp. : j') l'application canonique de $(V^A)^B$ sur $V^{A\otimes B}$ (resp. : de $(V^A)^{B'}$ sur $V^{A\otimes B'}$). L'homomorphisme ψ de B dans B' définit une application p_A de $(V^A)^B$ dans $(V^A)^{B'}$; par ailleurs, l'homomorphisme $I \otimes \psi$ de $A \otimes B$ dans $A \otimes B'$ définit une application $\tilde{p}_{A,B}$ de $V^{A\otimes B}$ dans $V^{A\otimes B'}$. On a alors compatibilité dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (V^A)^B & \xrightarrow{j} & V^{A\otimes B} \\ \downarrow p_A & & \downarrow \tilde{p}_{A,B} \\ (V^A)^{B'} & \xrightarrow{j'} & V^{A\otimes B'} \end{array}.$$

Soient f une fonction numérique sur V, et $s \in (V^A)^B$. Il faut montrer que $f^{A\otimes B'}((j' \circ p_A)(s)) = f^{A\otimes B'}((\tilde{p}_{A,B} \circ j)(s))$. Le premier membre est $(f^A)^{B'}(p_A(s))$. Or l'application p_A est définie par la condition que $g^{B'}(p_A(s)) = \psi(g^B(s))$ pour toute fonction numérique g sur V^A ; f^A étant une fonction à valeurs dans A sur V^A, il est clair que

$(f^A)^{B'}(p_A(s)) = (I\otimes\psi)((f^A)^B(s))$. Le second membre est

$(I\otimes\psi)(f^{A\otimes B}(j(s))) = (I\otimes\psi)((f^A)^B(s))$, ce qui démontre notre assertion.

5. Les notations étant comme dans les numéros précédents, il correspond à l'isomorphisme canonique k de $A\otimes B$ sur $B\otimes A$ un isomorphisme λ de $V^{A\otimes B}$ sur $V^{B\otimes A}$, et à l'isomorphisme canonique k' de $A\otimes B'$ sur $B'\otimes A$ un isomorphisme λ' de $V^{A\otimes B'}$ sur $V^{B'\otimes A}$. On a alors compatibilité dans le dia gramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
V^{A\otimes B} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\tilde{p}_{A,B}"'] & V^{B\otimes A} \arrow[d, "p_{B,A}"] \\
V^{A\otimes B'} \arrow[r, "\lambda'"] & V^{B'\otimes A}
\end{tikzcd}$$

Soient en effet s un point de $V^{A\otimes B}$ et f une fonction numérique sur V. On a $f^{B'\otimes A}((\lambda'\circ\tilde{p}_{A,B})(s)) = k'(f^{A\otimes B'}(p_{A,B}(s))) = (k'\circ(I\otimes\psi))(f^{A\otimes B}(s))$,

$f^{B'\otimes A}((p_{B,A}\circ\lambda)(s)) = (\psi\otimes I)(f^{B\otimes A}(\lambda(s))) = (\psi\otimes I)(k(f^{A\otimes B}(s)))$,

et il est clair que $k'\circ(I\otimes\psi) = (\psi\otimes I)\circ k$, ce qui démontre notre assertion.

6. Identifions maintenant $(V^A)^B$ à $V^{A\otimes B}$, $(V^B)^A$ à $V^{B\otimes A}$, $(V^A)^{B'}$ à $V^{A\otimes B'}$ et $(V^{B'})^A$ à $V^{B'\otimes A}$ au moyen des isomorphismes canoniques entre ces variétés. Alors λ devient un isomorphisme de $(V^A)^B$ sur $(V^B)^A$ et λ' un isomorphisme de $(V^A)^{B'}$ sur $(V^{B'})^A$. L'homomorphisme ψ de B dans B' définit une application p de V^B dans $V^{B'}$, d'où, par extension canonique, une application p^A de $(V^B)^A$ dans $(V^{B'})^A$; par ailleurs, p définit aussi une application p_A de $(V^A)^B$ dans $(V^A)^{B'}$. Il résulte alors de ce que nous avons dit qu'il y a compatibilité dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(V^A)^B \arrow[r] \arrow[d, "p_A"'] & \lambda \arrow[r] & (V^B)^A \arrow[d, "p^A"] \\
(V^A)^{B'} \arrow[r] & \lambda' \arrow[r] & (V^{B'})^A
\end{tikzcd} \; .$$

Appliquons en particulier ceci au cas où $B'=\underline{R} = B/I_B$, où I_B est l'idéal maximal de B . L'opération p_A n'est alors autre que la projection de $(V^A)^B$ sur V^A ; l'opération p^A est l'extension canonique de la projection p de V^B sur V à $(V^B)^A$, et λ' est l'application identique. Il y a donc compatibilité dans le diagramme triangulaire

$$\begin{tikzcd}
(V^A)^B \arrow[r] \arrow[dr, "p_A"'] & \lambda \arrow[r] & (V^B)^A \arrow[dl, "p^A"] \\
& V^A &
\end{tikzcd} \; .$$

Echangeons les rôles joués par A et B dans la relation précédente. On voit que, si p est la projection de V^A sur V , p^B l'extension canonique de p à $(V^A)^B$ et p_B la projection de $(V^B)^A$ sur V^B , il y a compatibilité dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(V^A)^B \arrow[r] \arrow[dr, "p^B"'] & \lambda \arrow[r] & (V^B)^A \arrow[dl, "p_B"] \\
& V^B &
\end{tikzcd} \; .$$
