RÉDACTION N° 167BIS

COTE : NBR 068

TITRE : VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES (ÉTAT 2)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 203

NOMBRE DE FEUILLES : 203

NBR 068

Chevalley
Avril 1957

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

(Etat 2) n° 167 bis

COMMENTAIRES du RÉDACTEUR

La rédaction n'est pas complète. Si le rédacteur la soumet néanmoins telle quelle à son vénérable maître, c'est qu'il considère comme assez urgent que des décisions soient prises sur un certain nombre de points ; beaucoup des rédactions en train de se faire ou à entreprendre dans le proche futur lui semblent en effet devoir être influencées par la manière dont on traitera les variétés. La partie déjà rédigée contient probablement les parties les plus enclines à provoquer des discussions parmi les disciplines ; ce qui reste peut, semble-t-il être rédigé plus à loisir.

Voici des commentaires plus spécifiques. Après une tentative de rédaction par la méthode des cartes, il m'a semblé préférable (au point de vue longueur et clarté) de revenir à la définition par les ensembles de fonctions. La rédaction présente ne parle que de variétés de classe C^{∞} ; je propose de ne pas parler (ou de ne parler qu'en exercice) des variétés de classe C^k, k fini. Par contre, sur une variété de classe C^{∞}, il est abondamment parlé des fonctions (ou champs de tenseurs, formes différentielles, etc.) de classe C^k. Quant aux variétés analytiques réelles et complexes, je propose d'en parler dans un paragraphe ultérieur (pas encore rédigé) dans lequel on indiquerait rapidement ce qui marche de la même manière que dans le cas C^{∞} et les quelques points qui sont à modifier.

Il y a deux points de vue auxquels on peut se placer pour considérer les variétés, le point de vue semi-local et le point de vue global. Les propriétés semi-locales sont les propriétés des ouverts de R^n et des fonctions (tenseurs, etc..) qui y sont définies qui sont invariantes par toute transformation différentiable de coordonnées ; le point de vue global est celui dans laquelle la structure de la variété dans son ensemble intervient effectivement. La rédaction présente se situe résolument dans la perspective globale. On pourrait aussi concevoir un autre plan, dans lequel les considérations semi-locales et globales seraient séparées ; la principale raison qui m'a conduit à rejeter cette manière de faire est la considération de l'ennui sans borne que dégagerait une rédaction systématiquement faite du point de vue semi-local.

Le § 8 introduit les espaces topologiques de fonctions sur une variété qui serviront plus tard de base à l'étude des distributions. Au § 9 se trouve démontré (par la méthode Heller) le théorème de Whitney (immersion dans R^{2n+1}). Ce théorème joue un rôle assez considérable dans la suite de la rédaction. Il permet tout d'abord d'établir un théorème assez fin d'approximation d'applications continues par des applications différentiables (prop; 5, § 9). Il est ensuite la source de théorèmes de finitude, du type suivant : l'ensemble des formes différentielles (de classe C^k) est un module fini sur l'anneau des fonctions de classe C^k et est l'algèbre extérieure sur le module des formes différentielles de degré 1.

En ce qui concerne l'introduction des opérateurs $\theta(X)$ (associés aux transformations infinitésimales, opérant sur les tenseurs) et du cobord d'une forme différentielle, je me suis servi de théorèmes d'extension de dérivations ou d'antidérivations aux algèbres tensorielle et extérieure qui devront, à mon sens, trouver leur place au chap. III d'algèbre. Voici me semble-t-il le théorème le plus général de cette espèce, dont les autres peuvent se déduire. On se donne 1) un anneau commutatif A avec élément unité et un module M sur A ; 2) des homomorphismes φ et ψ de l'algèbre tensorielle T de M dans un anneau U ; φ et ψ coincident sur A et appliquent A dans le centre de U ; 3) une application λ de A+M dans U qui est une représentation du groupe additif A+M dans le groupe additif U et qui est telle que $\lambda(ax) = \lambda(a)\,\varphi(x) + \psi(a)\,\lambda(x)$ si $a \in A$ et $x \in M$ ou $x \in A$; de plus $\lambda(a)$ est dans le centre de U si $a \in A$. On peut alors, d'une manière et d'une seule, prolonger λ en une application Λ de T dans U qui est une représentation du groupe additif de T et qui est telle que $\Lambda(x \otimes y) = \Lambda(x)\,\varphi(y) + \psi(x)\,\Lambda(y)$ quels que soient x et y dans T. Dans les applications que l'on fait de ce genre de théorèmes, la situation se simplifierait si on ne considèrait que des formes de classe C^∞, auquel cas on pourrait appliquer le théorème avec T=U. Mais le théorème énoncé plus haut a diverses autres applications algèbriques, et il me paraît souhaitable qu'il soit énoncé et démontré sous la forme la plus générale possible. Un complément nécessaire au dit théorème consiste à observer que, si I est un idéal de T engendré par des éléments qui sont annulés par φ, ψ et Λ, I tout entier est annulé par Λ, ce qui permet de passer à des théorèmes d'extension pour les antidérivations d'algèbres extérieures.

Pour l'intégration des formes différentielles, j'ai supposé l'intégration acquise. On pourrait d'ailleurs s'en passer si on le désirait ; on procèderait alors comme suit. On montre <u>à priori</u> que, sur R^n, l'espace des cobords de formes de degré n-1 à supports compacts est de codimension 1 dans celui des formes de degré n à supports compacts ; l'intégrale de ω, de degré n, est alors la fonction linéaire qui s'annule sur l'espace des cobords de formes de degré n-1, normalisée en lui imposant d'être ce qu'elle doit pour une forme de la forme $f_1(x_1)\ldots f_n(x_n)\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Pour le th. de Stockes, je n'ai donné que le th. de Stockes relatif à l'intégrale du cobord d'une forme de degré n-1 sur un ouvert relativement compact d'une variété de dimension n. Je définis le <u>bord</u> de cet ouvert comme sous-variété orientée de dimension n-1 (non nécessairement connexe), de sorte qu'il n'y a pas de chaînes et de formules <u>saugrenues</u> (je suis d'accord avec Dieudonné !) de bords de simplex. De plus, le théorème énoncé s'applique à certains cas où la frontière de U se décompose en un nombre infini de morceaux différentiables, ce qui risque de ne pas être totalement dépourvu d'intérêt dans certains cas (par ex., polygones fuschiens dont l'ensemble des sommets sur $|z| = 1$ est contenu dans un ensemble fermé de mesure linéaire nulle). Quant aux cobords de formes différentielles seulement continues qui existent dans certains cas en vertu de Stokes, après avoir eu un moment l'intention d'en parler, il me semble maintenant qu'il vaudrait mieux en traiter plus tard avec les distributions.

La partie non encore rédigée devra comprendre :

un § sur l'intégration d'une transformation infinitésimale et la définition correspondante des opérateurs $\theta(X)$ au moyen d'une dérivée : $\theta(X).t = (d(t_h)/dh)_{h=0}$, si t_h est le champ de tenseurs déduit de t par la translation h relative au groupe de "translations" défini par l'intégration de X ; il y aura ici des canulards d'exposition dus au fait qu'on a seulement "un morceau de groupe opérant dans un morceau d'espace" (E. Cartan) ;

un § sur l'intégration des systèmes complètement intégrables ;

un § sur les variétés prolongées ; identification d'un champ de tenseurs de classe C^k avec une application de classe C^k de la variété dans une variété prolongée ;

un § sur les variétés analytiques réelles (que le rédacteur propose d'appeler réanalytiques) et complexes.

Voici pour finir quelques erreurs et omissions de la rédaction actuelle :

montrer que si une fonction f de classe C^1 admet un maximum (ou un minimum) relatif en un point p , $d_pf = 0$; si f est constant sur un ouvert U , df est nul sur U ; réciproque si U est connexe ;

dans la définition d'un vecteur tangent comme application de F(V) dans R telle que $L(fg)=f(p)L(g)+g(p)L(f)$, il faut de plus imposer que $L(a)=0$ pour toute constante a ;

la définition de la topologie de l'espace des champs (de tenseurs, de formes différentielles, de multivecteurs) de classe C^k n'est pas faite ; pour les champs de tenseurs, on peut procèder comme suit :

NBR 068 6

la topologie est la moins fine de celles qui rendent continues les applications $t \to \langle t, u \rangle$, où u est un champ de tenseurs de classe C^∞ ; les applications en question peuvent être considérées soit comme applications de l'espace de tous les champs (de classe C^k) dans l'espace $\mathcal{E}^k(V)$ des fonctions de classe C^k , soit comme applications de l'espace de tous les champs à supports compacts dans l'espace $\mathcal{D}^k(V)$, d'où les topologies de l'espace de tous les champs et de celui des champs à supports compacts ;

la démonstration de ce que les espaces $\mathcal{E}^k(V)$, $\mathcal{D}^k(V)$ sont non seulement des espaces vectoriels, mais des algèbres topologiques, a été oubliée.

7

167 bis

CHAPITRE III. VARIÉTÉS.

(Etat 2)

I. DÉFINITIONS.

Si n est un entier ≥ 0 , une structure de variété de dimension n est constituée par les données d'un espace topologique V et d'un ensemble F de fonctions à valeurs réelles définies sur V qui possèdent les propriétés suivantes :

V.1 . Si $p \in V$, il existe un cube compact $\overline{Q}$ de R^n et un homéomorphisme χ de $\overline{Q}$ sur une partie de V tels que : a) l'ensemble des fonctions $f \circ \chi$, pour $f \in F$, soit identique à l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\overline{Q}$; b) l'image par χ de l'intérieur Q de $\overline{Q}$ soit l'intérieur de la partie $\chi(\overline{Q})$ de V et contienne le point p .

[Rappelons qu'on appelle fonction de classe C^∞ sur $\overline{Q}$ toute fonction qui est la restriction à $\overline{Q}$ d'une fonction de classe C^∞ sur R^n].

V.2 . Si une fonction f , définie sur V , possède la propriété que, pour tout point $p \in V$, f coincide sur un voisinage de p avec une fonction de l'ensemble F , alors f appartient à F .

V.3 . L'espace V peut se représenter comme réunion d'un ensemble dénombrable d'ensembles compacts.

On dit que l'espace V est l'espace sous-jacent de la variété. On désigne en général, par abus de langage, une variété par la même lettre que son espace sous-jacent. Il est clair que l'espace sous-jacent d'une variété est localement connexe, localement compact et dénombrable à l'infini.

L'ensemble F s'appelle l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur la variété. Il est clair que toute fonction de classe C^∞ est continue.

Nous ferons dans ce chapitre les conventions suivantes :

1. si des lettres $U, U', V, W, \ldots$ désignent des variétés, on désignera par $F(U), F(U'), F(V), F(W), \ldots$ les ensembles de fonctions de classe C^{∞} sur ces variétés ;

2. quand nous parlerons d'une fonction définie sur une variété V ou sur une partie de V, nous sous-entendrons, sauf mention explicite du contraire qu'il s'agit d'une fonction à valeurs réelles.

Soit C une partie d'une variété V de dimension n. S'il existe un point $p \in C$ et un homéomorphisme χ d'un cube compact $\overline{Q}$ de R^n sur C tels que les conditions a), b) de V.1 soient satisfaites, nous dirons que C est un ensemble cubique compact, et que l'intérieur de C est un ensemble cubique ouvert ; nous dirons aussi que C est un voisinage cubique compact du point p, et que l'homéomorphisme $\theta = \overset{-1}{\chi}$ est un homéomorphisme cubifiant de C. Soient C un ensemble cubique compact, et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $F(V)$; si l'application $q \rightarrow (f_1(q), \ldots, f_n(q))$ induit un homéomorphisme cubifiant de C, nous dirons que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ forment un système de coordonnées sur C. Si des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de $F(V)$ forment un système de coordonnées sur un voisinage cubique compact convenable d'un point p, nous dirons que ces fonctions forment un système de coordonnées autour de p.

Si θ est un homéomorphisme cubifiant d'un ensemble cubique compact C, et si Q_1 est un cube ouvert non vide de R^n contenu dans $\theta(C)$, l'image de l'adhérence $\overline{Q}_1$ de Q_1 par $\overset{-1}{\theta}$ est un ensemble cubique compact C_1 et la restriction de θ à C_1 est un homéomorphisme cubifiant de C_1. Il en résulte immédiatement que les voisinages cubiques compacts d'un point p de V forment un système fondamental de voisinages de p.

Si $f_1, \ldots, f_r$ sont des fonctions définies sur des parties de V et H une fonction définie sur une partie de R^r, on désigne par $H(f_1, \ldots, f_r)$ la fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble des points q tels que $f_1, \ldots, f_r$ soient définies en q et que H soit défini au point

$(f_1(q),\dots,f_r(q))$, et dont la valeur en un point q de son domaine de définition est $H(f_1(q),\dots,f_r(q))$. Soient C un ensemble cubique compact et $(f_1,\dots,f_n)$ un système de coordonnées sur C . Si f est une fonction définie sur une partie de V contenant C , il existe une fonction H définie sur R^n telle que f coincide avec la fonction $H(f_1,\dots,f_n)$ sur C ; on dit alors que $H(f_1,\dots,f_n)$ est une <u>expression</u> de f sur C au moyen des coordonnées $f_1,\dots,f_n$. Les valeurs de H ne sont déterminées par la condition imposée que sur le cube image de C par l'application $q \to (f_1(q),\dots,f_n(q))$. Si $f \in F(V)$, on peut toujours supposer que H est de classe C^∞ sur R^n .

Nous dirons qu'une fonction f définie sur une partie de V est <u>de classe</u> C^∞ <u>autour d'un point</u> p <u>de</u> V s'il existe un voisinage de p sur lequel f est définie et coincide avec une fonction de $F(V)$. Il résulte de V.2 que, pour qu'une fonction f définie sur V appartienne à $F(V)$, il faut et suffit qu'elle soit de classe C^∞ autour de tout point de V .

<u>Soient</u> $f_1,\dots,f_r$ <u>des fonctions définies sur des parties de</u> V <u>et qui sont toutes de classe</u> C^∞ <u>autour d'un point</u> p <u>de</u> V , <u>et soit</u> H <u>une fonction qui est définie et de classe</u> C^∞ <u>sur un voisinage ouvert du point</u> $(f_1(p),\dots,f_r(p))$ <u>dans</u> R^n ; <u>la fonction</u> $H(f_1,\dots,f_r)$ <u>est alors de classe</u> C^∞ <u>autour de</u> p .

Il existe en effet un voisinage cubique compact C de p qui possède les propriétés suivantes : chaque fonction f_i est définie sur C et y coincide avec une fonction f'_i de $F(V)$; la fonction H est définie et de classe C^∞ sur l'image de C par l'application $q \to (f_1(q),\dots,f_r(q))$. Si θ est un homéomorphisme cubifiant de C , les fonctions $f_i \circ \overset{-1}{\theta} = f'_i \circ \overset{-1}{\theta}$ sont de classe C^∞ sur le cube $\theta(C)$; il en est donc de même de la fonction $H(f_1,\dots,f_r) \circ \overset{-1}{\theta} = H(f_1 \circ \overset{-1}{\theta},\dots,f_r \circ \overset{-1}{\theta})$, d'où il résulte que $H(f_1,\dots,f_r)$ coïncide sur C avec une fonction de $F(V)$.

En particulier, si f est une fonction de classe C^{∞} autour d'un point p de V et si $f(p)\neq 0$, f^{-1} est de classe C^{∞} autour de p .

Par ailleurs, si $f_1,\dots,f_r$ sont des fonctions de $F(V)$ et H une fonction de classe C^{∞} sur R^r (ou même sur un ensemble ouvert contenant l'image de V par l'application $q \to (f_1(q),\dots,f_r(q))$) la fonction $H(f_1,\dots,f_r)$ appartient à $F(V)$. En particulier, $F(V)$ <u>est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions définies sur</u> V . De plus, si une fonction f $F(V)$ est partout $\neq 0$, la fonction f^{-1} appartient à $F(V)$.

<u>Définition 1.- On appelle support d'une fonction f définie sur une variété V l'adhérence de l'ensemble des points $p\in V$ tels que $f(p)\neq 0$</u> .

Le complémentaire du support de f est donc le plus grand ensemble ouvert U de V sur lequel f est nulle (i.e. tel que $f(p)=0$ pour tout $p\in U$) . Si f et g sont des fonctions définies sur V , et si A et B sont leurs supports, le support de $f+g$ est contenu dans $A\cup B$, et celui de fg dans $A\cap B$.

<u>Définition 2.- On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de V est dispersée si, pour toute partie compacte K de V , il n'y a qu'un nombre fini d'indices i tels que A_i rencontre K . On dit qu'une famille de fonctions définie sur V est dispersée si la ~~fam~~ famille formée des supports de ces fonctions est dispersée</u>.

Un ensemble de parties de V (ou de fonctions définies sur V) est appelé dispersé si la famille constituée par l'application identique de cet ensemble sur lui-même est dispersée .

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille dispersée de parties de V , la famille des adhérences $\bar{A}_i$ de ces ensembles est encore dispersée. En effet, si K est une partie compacte de V , il existe un voisinage compact K' de K qui ne rencontre qu'un nombre fini des ensembles A_i , d'où il résulte que K ne rencontre qu'un nombre fini des ensembles $\bar{A}_i$.

Une variété étant dénombrable à l'infini, il est clair que toute famille dispersée d'ensembles non vides (ou de fonctions $\neq 0$) est dénombrable.

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille dispersée de fonctions. Si $p \in V$, il n'y a qu'un nombre fini de nombres $f_i(p)$ qui soient $\neq 0$, de sorte que la somme $\sum_{i \in I} f_i(p)$ a un sens. La notation $\sum_{i \in I} f_i$ représente donc une fonction sur V. Si toutes les fonctions f_i appartiennent à $F(V)$, il en est de même de $\sum_{i \in I} f_i$; en effet, si $p \in V$, il y a un voisinage de p sur lequel $\sum_{i \in I} f_i$ coincide avec la somme d'un nombre fini des fonctions f_i, ce qui montre que $\sum_{i \in I} f_i$ est de classe C^∞ autour de p.

Lemme 1.- <u>Soit $\mathcal{U}$ un ensemble de parties ouvertes d'une variété V qui est une base de l'ensemble des ensembles ouverts de V. Il existe alors une partie $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ qui est un recouvrement dispersé de V.</u>

On sait en effet, qu'on peut représenter V comme réunion d'une suite d'ensembles compacts $(K_r)_{1 \leq r < \infty}$ telle que, pour chaque r, K_{r+1} soit un voisinage de K_r. Nous poserons de plus $K_{-1} = K_0 = \emptyset$, et nous désignerons par U_r l'intérieur de K_r. Soit Z_r l'intersection de K_r et du complément de U_{r-1} $(r \geq 1)$; $Z_r \cap K_{r-2}$ est donc vide. Pour chaque point $p \in Z_r$, il existe un ensemble de $\mathcal{U}$ contenant p, contenu dans U_{r+1} et ne rencontrant pas K_{r-2} ; l'ensemble Z_r étant compact, il y a une partie finie $\mathcal{U}_r$ de $\mathcal{U}$, composée de parties de U_{r+1} ne rencontrant pas K_{r-2}, dont la réunion contient Z_r. Soit $\mathcal{U}' = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{U}_r$.

Si p est un point de V, il existe un indice $r > 0$ tel que $p \in K_r$, $p \notin K_{r-1}$, d'où $p \in Z_r$; on en conclut que $\mathcal{U}'$ est un recouvrement de V. Par ailleurs, si $s \geq r+2$, K_r ne rencontre aucun ensemble de $\mathcal{U}_s$; toute partie compacte de V étant contenue dans l'un des ensembles K_r, on en conclut que $\mathcal{U}'$ est un ensemble dispersé.

<u>Proposition 1. - Soit</u> $(U_i)_{i \in I}$ <u>un recouvrement d'une variété</u> V <u>par des ensembles ouverts</u>. <u>Il existe alors une famille dispersée</u> $(h_j)_{j \in J}$ <u>de fonctions de</u> $F(V)$ <u>qui possède les propriétés suivantes</u> : a) <u>on a</u> $\sum_{j \in J} h_j = 1$; b) <u>si</u> $j \in J$, <u>on a</u> $0 \leqq h_j(p) \leqq 1$ <u>pour tout</u> $j \in J$; c) <u>le support de chacune des fonctions</u> h_j <u>est une partie compacte de l'un des ensembles</u> U_i.

Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des ensembles ouverts W de V qui possèdent les propriétés suivantes :

a) W est contenu dans l'un des ensembles U_i ; b) il existe une fonction $w \in F(V)$ ne prenant que des valeurs $\geqq 0$ telle que $W = \overset{-1}{w}(\,]0,+\infty[\,)$. Montrons que $\mathcal{W}$ est une base de l'ensemble des ensembles ouverts de V. Soient p un point de V et N un voisinage de p. Il existe un voisinage cubique compact C de p qui est contenu dans N et dans l'un des ensembles U_i. Soit θ un homéomorphisme cubifiant de C ; l'ensemble $\overline{Q} = \theta(C)$ est un cube compact de R^n (si V est de dimension n), dont l'intérieur Q contient $\theta(p)$. Soit $\overline{Q}_1$ un cube compact contenu dans Q et dont l'intérieur contient $\theta(p)$. Il existe une fonction w' de classe C^∞ sur $\overline{Q}$, qui ne prend que des valeurs $\geqq 0$, qui est nulle en dehors de $\overline{Q}_1$ et qui prend la valeur 1 en $\theta(p)$. Soit w la fonction sur V définie par $w(q) = w'(\theta(q))$ si $q \in C$, $w(q) = 0$ si $q \notin C$. Le support de w est contenu dans l'intérieur de C, et w coïncide sur C avec une fonction de $F(V)$; il en résulte immédiatement que $w \in F(V)$. Si on pose $W = \overset{-1}{w}(\,]0,+\infty[\,)$, l'ensemble W est contenu dans N et appartient à $\mathcal{W}$, ce qui démontre notre assertion. Il existe donc une famille $(W_j)_{j \in J}$ d'ensembles de $\mathcal{W}$ qui est un recouvrement dispersé de V. Soit w_j une fonction de $F(V)$, à valeurs $\geqq 0$, telle que $W_j = \overset{-1}{w_j}(\,]0,+\infty[\,)$. Le support de w_j est donc l'adhérence $\overline{W}_j$ de W_j ; il en résulte que la famille $(w_j)_{j \in J}$ est dispersée. Posons $s = \sum_{j \in J} w_j$; s est donc une fonction partout $\neq 0$ de $F(V)$, et les fonctions $h_j = s^{-1} w_j$ sont dans $F(V)$. Il est clair que la famille $(h_j)_{j \in J}$ possède les propriétés requises.

Corollaire 1.- Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'une variété V par une famille d'ensembles ouverts. Il existe alors une famille $(F_i)_{i \in I}$ de parties de V qui possèdent les propriétés suivantes : a) tout point de V est intérieur à l'un des ensembles F_i ; b) pour tout $i \in I$, F_i est une partie de U_i fermée dans V.

Soit $(h_j)_{j \in J}$ une famille de fonctions qui possède les propriétés de la prop.1, et soit L_j le support de h_j. Soit F_i la réunion de ceux des L_j qui sont contenus dans U_i. Si $p \in U$, il y a un voisinage de p qui ne rencontre qu'un nombre fini des ensembles fermés L_j ; il en résulte immédiatement que chaque F_i est fermé. Par ailleurs, pour tout $p \in V$, il y a un $j \in J$ tel que $h_j(p) \neq 0$; p est donc intérieur à L_j, donc aussi à l'un des ensembles F_i.

Corollaire 2.- Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini d'une variété V. Il y a alors une famille $(h_i)_{i \in I}$ de fonctions de $F(V)$ admettant I comme ensemble d'indices (donc finie) telle que $\sum_{i \in I} h_i = 1$ et que, pour tout $i \in I$, le support de h_i soit contenu dans U_i.

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles qui possède les propriétés du corol.1, et soit (U'_i) l'intérieur de F_i. Soit $(h'_j)_{j \in J}$ une famille de fonctions de $F(V)$ qui possède les propriétés de la prop.1 relativement au recouvrement $(U'_i)_{i \in I}$ de V. Si $j \in J$, soit $i(j)$ un indice de I tel que le support de h'_j soit dans U'_i. On voit tout de suite qu'il existe une partition $J = \bigcup_{i \in I} J_i$ de J telle que $i(j) = i$ pour tout $j \in J_i$; il suffit alors de prendre $h_i = \sum_{j \in J_i} h'_j$, car, les supports des h'_j $(j \in J_i)$ étant tous contenus dans l'ensemble fermé F_i, il en est évidemment de même de celui de h_i.

Corollaire 3.- Soit E une partie fermée d'une variété V, et soit f une fonction définie sur E telle que, pour tout $p \in E$, f coïncide sur un voisinage de p par rapport à E avec la restriction à E d'une fonction

 14

de $F(V)$. Soit de plus U un ensemble ouvert de V contenant E . Il existe alors une fonction g de $F(V)$ dont la restriction à E est f et dont le support est contenu dans U .

Si $p \in E$, soit W_p un ensemble ouvert contenant p et contenu dans U tel que la restriction de f à $W_p \cap E$ coïncide avec la restriction à cet ensemble d'une fonction $f'_p \in F(V)$; si $p \notin E$, soit W_p le complémentaire de E . Il existe alors une famille dispersée $(h_j)_{j \in J}$ de fonctions de $F(V)$ telle que $\sum_{j \in J} h_j = 1$ et que, pour tout $j \in J$, le support de h_j soit contenu dans l'un des W_p , soit dans W_{p_j} . Posons $g_j = h_j f'_{p_j}$; on a $g_j \in F(V)$, et la famille (g_j) est dispersée ; posons $g = \sum_{j \in J} g_j$. Si $p \in E$ et si j est un indice tel que $h_j(p) \neq 0$, on a $p \in W_{p_j} \cap E$, d'où $f'_{p_j}(p) = f(p)$. On a donc $g(p) = f(p) \sum_{j \in J} h_j(p) = f(p)$, ce qui démontre le corollaire 3 .

Corollaire 4.- Soient E une partie fermée d'une variété V , f une fonction de $F(V)$ et N un voisinage de E . Il existe alors une fonction de $F(V)$ qui coïncide avec f sur E et dont le support est contenu dans N .

Cela résulte immédiatement du corollaire 3 .

167 bis

§ II. MÉTHODES DE DÉFINITION DE VARIÉTÉS.

Nous allons passer en revue un certain nombre de procédés qui permettent de construire des variétés. Nous ferons d'abord quelques remarques d'ordre général sur les conditions V.1 , V.2 et V.3 du § I . Soit V un espace topologique qui peut se représenter comme réunion d'une famille dénombrable d'ensembles compacts. Soit F' une famille de fonctions numériques sur V qui possède la propriété V.1 du § I , et soit F la famille des fonctions f sur V qui possèdent la propriété suivante : pour tout point $p \in V$, il existe un voisinage de p dans V sur lequel f coincide avec une fonction de F' . La famille F possède encore la propriété V.1 . Soient en effet $\overline{Q}$ un cube compact de R^n et χ un homéomorphisme de $\overline{Q}$ sur une partie de V qui satisfont à la condition a) de V.1 relativement à F' . Si g est une fonction de classe C^∞ sur $\overline{Q}$, il existe une fonction $f' \in F'$ telle que $g=f'\circ\chi$, et on a $f' \in F$. Soit réciproquement f une fonction de F . Si $x \in \overline{Q}$, il y a une fonction de F' qui coïncide avec f sur un voisinage de $\chi(x)$; on en déduit qu'il y a une fonction de classe C^∞ sur $\overline{Q}$ qui coïncide avec $f\circ\chi$ sur un voisinage de x par rapport à $\overline{Q}$. Ceci étant vrai pour tout $x \in Q$, on sait qu'il en résulte que $f\circ\chi$ est de classe C^∞ sur $\overline{Q}$. Ceci montre bien que la condition V.1 est satisfaite pour F . Il en est évidemment de même de V.2 . Il résulte donc de notre hypothèse initiale sur V que F est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ d'une structure de variété de V .

Soit maintenant F" un ensemble de fonctions numériques définies sur V qui possède la propriété suivante :

V".1 . Si $p \in V$, il existe un cube compact $\overline{Q}$ de R^n et un homéomorphisme χ de $\overline{Q}$ sur une partie de V ~~tlem~~ tels que : a) pour tout $f \in F''$, $f\circ\chi$ soit de classe C^∞ sur $\overline{Q}$; b) il existe n fonctions f_i $(1 \leq i \leq n)$ de F" telles que les fonctions $f_i\circ\chi$ soient les restrictions à $\overline{Q}$

des fonctions coordonnées sur R^n ; c) l'image par χ de l'intérieur Q de $\overline{Q}$ soit l'intérieur de $\chi(\overline{Q})$ et contienne p .

Soit alors F' l'ensemble des fonctions de la forme $H(f_1,\dots,f_r)$, où $f_1,\dots,f_r$ sont dans F" et où H est une fonction de classe C^∞ sur R^r . Il est clair que la condition V.1 est satisfaite pour F' ; le procédé indiqué plus haut permet de construire au moyen de F' un ensemble F de fonctions qui est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ d'une structure de variété de V .

1. La variété R^n .

L'espace topologique R^n , muni de l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur R^n , est évidemment une variété.

2. Sous-variétés ouvertes.

Soient V une variété et U une partie ouverte non vide de V . L'espace V étant localement compact et dénombrable à l'infini, il en est de même de U . Soit F'(U) l'ensemble des restrictions à U de fonctions de F(V) ; il est clair que la condition V.1 est satisfaite pour U et F'(U) . Soit F(U) l'ensemble des fonctions f sur U qui possèdent la propriété suivante : pour tout $p \in U$, f coïncide sur un voisinage de p avec une fonction de F'(U) . Il résulte de ce que nous avons dit que F(U) est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ d'une structure de variété de U . On dit que cette variété est la sous-variété ouverte de V portée par U , ou la variété induite par V sur U .

L'espace sous-jacent d'une variété V est évidemment localement connexe ; les composantes connexes de V sont donc des ensembles ouverts. Les sous-variétés ouvertes correspondantes de la variété V sont encore appelées ses composantes connexes.

3. Transport de structure.

Conformément aux définitions générales, on appelle isomorphisme d'une variété V sur une variété V' un homéomorphisme i de V sur V' tel que $F(V)$ soit l'ensemble des fonctions de la forme $f' \circ i$, $f' \in F(V')$.

Ceci dit, si V' est une variété et i un homéomorphisme d'un espace topologique V sur l'espace sous-jacent de V', on peut définir une structure de variété sur V telle que i soit un isomorphisme de cette variété avec V' : il suffit d'introduire l'ensemble $F(V)$ des fonctions de la forme $f' \circ i$, $f' \in F(V')$.

En particulier, tout espace topologique V muni d'un homéomorphisme sur une partie ouverte de R^n possède une structure de variété de dimension n . Par contre, il faut noter qu'une variété quelconque n'est en général pas homéomorphe à une partie ouverte de R^n .

Si V est une variété de dimension n , on appelle <u>carte</u> d'une partie ouverte U de V un isomorphisme de la sous-variété ouverte U de V sur une sous-variété ouverte de R^n . Il est clair que tout point de V est contenu dans au moins un ensemble ouvert de V qui admet une carte. Si θ est une carte d'une partie ouverte U de V , les fonctions $x_i \circ \theta^{-1}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, les x_i étant les fonctions coordonnées dans R^n , sont dites former un <u>système de coordonnées sur</u> U . Il convient d'observer que ces fonctions ne sont en général pas les restrictions à U de fonctions de $F(V)$. Si $f_1, \dots, f_n$ forment un système de coordonnées sur U , l'application θ : $p \longrightarrow (f_1(p), \dots, f_n(p))$ est une carte de U , et toute fonction de $F(U)$ se met sous la forme $H(f_1, \dots, f_n)$, où H est une fonction de classe C^∞ sur $\theta(U)$.

4. <u>Recollement</u>.

Soit V un espace topologique qui est la réunion d'une famille dénombrable $(V_i)_{i \in I}$ d'ensembles ouverts. Supposons que chaque V_i soit muni d'une structure de variété de dimension n , et que la condition suivante soit satisfaite : si i et j sont des indices quelconques de I , les structures de variété induites par V_i et V_j sur $V_i \cap V_j$ (si $V_i \cap V_j \neq \emptyset$) sont identiques . Il existe alors une structure et une seule de variété sur V telle que les V_i soient toutes des sous-variétés de V . Soit en effet $F(V)$ l'ensemble des fonctions f définies sur V telles que la restriction de f à chaque V_i appartienne à $F(V_i)$. Soient p un point de V , i_o un indice tel que $p \quad V_{i_o}$ et C un voisinage cubique compact de p par rapport à V_{i_o} . Si f est une fonction quelconque de $F(V_{i_o})$, il existe une fonction $f' \quad F(V_{i_o})$ qui coincide avec f sur C et dont le support K est compact (cor.4 à la prop;1, § I). Soit f_1' la fonction sur V qui coincide avec f' sur V_{i_o} et qui est nulle en dehors de V_{i_o} . Cette fonction appartient à $F(V)$. Soit en effet i un indice quelconque de I , et soit f_1'' la restriction de f_1' à V_i . L'ensemble des points q tels que $f_1'(q) \neq 0$ étant contenu dans une partie compacte de V_{i_o} , le support de f_1'' est contenu dans $V_i \cap V_{i_o}$. La restriction de f_1'' à $V_i \cap V_{i_o}$ étant identique à celle de f' , appartient à $F(V_i \cap V_{i_o})$. Si donc q appartient au support de f_1'' , f_1'' coincide sur un voisinage de q avec une fonction de $F(V_i)$, d'où $f_1'' \in F(V_i)$. On voit donc que la restriction à C d'une fonction de $F(V_{i_o})$ est aussi la restriction à C d'une fonction de $F(V)$; il en résulte immédiatement que la condition V.1 du § I est satisfaite pour V et $F(V)$. Il en est évidemment de même de V.2, et aussi de V.3 puisque la famille $(V_i)_{i \in I}$ est dénombrable. On voit donc que $F(V)$ définit sur V une structure de variété. Il est clair que chacune des variétés V_i est une sous-variété ouverte de V . Supposons réciproquement donnée une structure de variété sur V telle que les V_i en soient toutes des sous-variétés ouvertes, et soit $F'(V)$ l'ensemble des fonctions de classe C^{∞} sur cette variété. On a donc $F'(V) \subset F(V)$ (car la restriction à V_i d'une fonction de $F'(V)$ appartient à $F(V_i)$) . Réciproquement, si $p \in V_i$, toute fonction de $F(V_i)$ coincide sur un voisinage de p avec une fonction de $F'(V)$; il en résulte que, si $f \in F(V)$ et si p est un point quelconque de V , f coïncide sur un un voisinage de p avec une fonction de $F'(V)$, d'où $f \in F'(V)$, et $F'(V)=F(V)$. On dit que la variété V s'obtient par recollement des variétés V_i.

Si V est une variété quelconque, chaque point de V est contenu dans un ensemble ouvert qui admet une carte dans R^n. Il en résulte que V peut être couvert par une famille dénombrable d'ensembles ouverts dont chacun admet une carte dans R^n ; autrement dit, V peut s'obtenir par recollement de variétés isomorphes à des sous-variétés ouvertes de R^n.

Supposons réciproquement donnés un espace topologique V, une famille dénombrable $(V_i)_{i\in I}$ de parties ouvertes de V qui soit un recouvrement de V, et, pour chaque $i \in I$, un homéomorphisme θ_i de V_i sur une partie ouverte de R^n. Cet homéomorphisme définit, par transport de structure, une structure de variété sur V_i. Si i et j sont des indices de I, $\theta_j \circ \theta_i^{-1}$ est un homéomorphisme de la partie ouverte $U_{ij}=\theta_i(V_i \cap V_j)$ de R^n sur U_{ji}. Pour que les structures de variétés induites par celles de V_i et de V_j sur $V_i \cap V_j$ coïncident, il est évidemment nécessaire et suffisant que $\theta_j \circ \theta_i^{-1}$ soit un isomorphisme de la sous-variété ouverte U_{ij} de R^n sur la sous-variété ouverte U_{ji}. Si cette condition est satisfaite pour tout couple $(i,j) \in I \times I$, on dit que les homéomorphismes θ_i forment un atlas de l'espace V. La donnée d'un atlas de V définit donc sur V une structure de variété.

Pour qu'un homéomorphisme φ d'une partie ouverte U de R^n sur une partie ouverte U' soit un isomorphisme de la sous-variété ouverte U sur la sous-variété ouverte U', il faut et suffit que φ et son application réciproque φ^{-1} soient de classe C^∞ ; la condition pour φ d'être de classe C^∞ est en effet équivalente à la condition que $f' \circ \varphi \in F(U)$ pour tout $f' \in F(U')$, ce qui démontre notre assertion. Les notations étant les mêmes que plus haut, on voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les applications θ_i forment un atlas de V est que, pour tout $(i,j) \in I \times I$, $\theta_j \circ \theta_i^{-1}$ soit une application de classe C^∞.

5. Sous-variétés fermées.

Soient W une variété de dimension n et m un entier positif $\leqq n$; nous identifierons dans ce qui suit R^m à l'ensemble des points de R^n dont les n-m dernières coordonnées sont nulles. Soit WV une partie fermée non vide de W qui possède la propriété suivante ; pour tout $p \in V$, il existe une sous-variété ouverte U_p de W contenant p qui admet une carte θ_p sur un cube ouvert de R^n telle que $\theta_p(V \cap U_p) = \theta_p(U_p) \cap R^m$. Soit F l'ensemble des restrictions à V des fonctions de $F(W)$. Nous allons montrer que les conditions V.1, V.2 et V.3 du § I sont satisfaites pour V,F et m. Soit p un point de V ; utilisant les notations introduites plus haut, soit de plus Q_p un cube ouvert de R^n contenant $\theta_p(p)$ et dont l'adhérence $\overline{Q}_p$ est compacte et contenue dans $\theta_p(U_p)$. L'ensemble $\overline{Q}'_p = \overline{Q}_p \cap R^m$ est un cube compact de R^m, et la restriction χ de θ_p^{-1} à $\overline{Q}'_p$ est un homéomorphisme de ce cube sur une partie de V. Il est clair que l'image par χ de l'intérieur de $\overline{Q}'_p$ par rapport à R^m est l'intérieur de $\chi(\overline{Q}'_p)$ par rapport à V et contient p. Les fonctions de classe C^∞ sur $\overline{Q}'_p$ étant les restrictions à cet ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\overline{Q}_p$, il est clair que l'ensemble de ces fonctions est identique à l'ensemble des fonctions de la forme $f \circ \chi$, avec $f \in F$. La condition V.1 est donc satisfaite. Il en est de même de V.2 en vertu du corol.3 à la prop.1, § I, et de V.3 puisque V est un sous-espace fermé de W. On dit que la variété de dimension m définie par l'ensemble F de fonctions sur V est la sous-variété fermée de W portée par V.

Nous aurons à nous servir dans la suite du lemme suivant :

Lemme 1.- *Soit V une sous-variété fermée d'une variété W . Il existe alors une famille dispersée* $(U_i)_{i\in I}$ *de parties ouvertes de W qui possède la propriété suivante : pour tout* $i \in I$ *, il existe une carte* θ_i *de la sous-variété ouverte* U_i *de W sur un cube ouvert* Q_i *de* R^n *(si W est de dimension n) telle que* $\theta_i(U_i \cap V) = Q_i \cap R^m$ *(si V est de dimension m) .*

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble composé de ceux des ensembles ouverts de W qui ne rencontrent pas V et des ensembles ouverts U qui rencontrent V et qui possèdent la propriété suivante : U admet une carte θ sur un cube ouvert de R^n telle que $\theta(U\cap V) = \theta(U) \cap R^m$. Il est clair que $\mathcal{U}$ est une base de l'ensemble des ensembles ouverts de W . Il en résulte que $\mathcal{U}$ contient un recouvrement ouvert dispersé $\mathcal{U}'$ de W (lemme 1, § I) ; il suffit alors de prendre la famille de ceux des ensembles de $\mathcal{U}'$ qui rencontrent V .

Soit f une fonction de classe C^∞ sur R^n qui possède les propriétés suivantes : l'ensemble $V = \overset{-1}{f}(0)$ n'est pas vide, et df n'est nul en aucun point de V . Si $p \in V$, on peut trouver n-1 fonctions $f_1, \dots, f_{n-1}$ de classe C^∞ sur R^n telles que les différentielles en p des fonctions $f_1, \dots, f_{n-1}, f_n = f$ soient linéairement indépendantes. On sait qu'il existe alors un voisinage ouvert U de p dans R^n qui possède les propriétés suivantes : l'image de U par l'application $\theta : q \to (f_1(q), \dots, f_n(q))$ est un cube ouvert de R^n , et toute fonction de classe C^∞ sur U peut se mettre sous la forme $H(f_1, \dots, f_n)$, où H est une fonction de classe C^∞ sur le cube $\theta(U)$. Il en résulte que θ est une carte de la sous-variété ouverte U de R^n , et on a $\theta(U \cap V) = \theta(U) \cap R^{n-1}$. L'ensemble V est donc le porteur d'une sous-variété V de dimension n-1 de R^n ; on dit que V est l'*hypersurface* (la *surface* si n=3 , la *courbe* si n=2) *de* R^n *d'équation* f=0 .

Prenons par exemple pour f la fonction $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$; V est alors la sphère unité S^{n-1} et la formule $df = \sum_{i=1}^{n} x_i . dx_i$ montre que notre condition est satisfaite. On voit donc que S^{n-1} porte une structure de variété de dimension $n-1$.

Par ailleurs, il est clair que toute variété affine de dimension m de R^n porte une structure de sous-variété fermée de R^n.

6. Produits de variétés.

Soient V et W des ensembles quelconques, $\Phi(V)$ l'ensemble de toutes les fonctions numériques (à valeurs réelles) définies sur V et $\Phi(W)$ celui des fonctions numériques définies sur W. Ces ensembles possèdent des structures d'algèbres sur le corps des réels. A chaque couple $(f,g) \in \Phi(V) \times \Phi(W)$, on peut faire correspondre la fonction $h_{f,g}$ sur $V \times W$ définie par $h_{f,g}(p,q) = f(p)g(q)$. L'application ainsi construite est évidemment une application bilinéaire de $\Phi(V) \times \Phi(W)$ dans l'algèbre $\Phi(V \times W)$ des fonctions numériques sur $V \times W$. Si f, f' sont dans $\Phi(V)$ et g, g' dans $\Phi(W)$, on a $h_{ff',gg'} = h_{f,g} h_{f',g'}$. L'application $(f,g) \to h_{f,g}$ détermine donc un homomorphisme du produit tensoriel $\Phi(V) \otimes \Phi(W)$ dans $\Phi(V \times W)$. Cet homomorphisme est un isomorphisme. Soient en effet $f_1, \ldots, f_m$ des éléments linéairement indépendants de $\Phi(V)$ et $g_1, \ldots, g_n$ des éléments linéairement indépendants de $\Phi(W)$. Soient a_{ij} ($1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq n$) des constantes telles que $\sum_{i,j} a_{ij} f_i(p) g_j(q) = 0$ pour tout $(p,q) \in V \times W$. Prenant pour q un élément fixe de W, on voit que $\sum_i (\sum_j a_{ij} g_j(q)) f_i = 0$, d'où $\sum_j a_{ij} g_j(q) = 0$ ($1 \leqq i \leqq m$). Ceci étant vrai pour tout $q \in W$, on a $a_{ij} = 0$ ($1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq n$), ce qui démontre notre assertion. On peut donc identifier $\Phi(V) \otimes \Phi(W)$ à une sous-algèbre de $\Phi(V \times W)$; c'est ce que nous ferons désormais. Nous représenterons donc la fonction $(p,q) \to f(p)g(q)$ par $f \otimes g$.

Ceci dit, soient V et W des variétés ; $F(V)\otimes F(W)$ est donc une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions numériques sur $V\times W$. Soit $F_1(V\times W)$ l'ensemble des fonctions sur $V\times W$ qui peuvent se mettre sous la forme $H(f_1\otimes g_1,\dots,f_r\otimes g_r)$ où les f_i sont des fonctions de $F(V)$, les g_i des fonctions de $F(W)$ et H une fonction de classe C^∞ sur R^r ; Soit enfin $F(V\times W)$ l'ensemble des fonctions h sur $V\times W$ qui possèdent la propriété suivante : pour tout point $(p,q)\in V\times W$, il y a une fonction de $F_1(V\times W)$ qui coïncide avec h sur un voisinage de (p,q) dans l'espace topologique $V\times W$. Soit (p_o,q_o) un point de $V\times W$; désignant par m et n les dimensions de V et de W, on peut trouver des cubes compacts $\bar{Q}_V$ de R^m et $\bar{Q}_W$ de R^n et des homéomorphismes χ_V et χ_W de ces cubes sur des parties de V et de W respectivement tels que les conditions a), b) de V.1 soient satisfaites d'une part pour $p_o, \bar{Q}_V, F(V)$ et m, d'autre part pour $q_o, \bar{Q}_W, F(W)$ et n. Soit $\chi_{V\times W}$ l'homéomorphisme $(x,y)\to(\chi_V(x),\chi_W(y))$ de $\bar{Q}_V\times\bar{Q}_W$ sur une partie de $V\times W$. Si on identifie R^{m+n} au produit $R^m\times R^n$, $\bar{Q}_V\times\bar{Q}_W$ est un cube compact de R^{m+n} et $\chi_{V\times W}$ applique l'intérieur de ce cube sur l'intérieur de son image. Si $f\in F(V)$, $g\in F(W)$, on a $(f\otimes g)\circ\chi_{V\times W} = (f\circ\chi_V)\otimes(g\circ\chi_W)$; $f\circ\chi_V$ étant de classe C^∞ sur $\bar{Q}_V$ et $g\circ\chi_W$ de classe C^∞ sur $\bar{Q}_W$, cette fonction est de classe C^∞ sur $\bar{Q}_V\times\bar{Q}_W$. Soient $f_1,\dots,f_m$ des fonctions de $F(V)$ telles que les $f_i\circ\chi_V$ soient les restrictions à $\bar{Q}_V$ des fonctions coordonnées sur R^m ; soient $g_1,\dots,g_n$ des fonctions de $F(W)$ telles que les $g_j\circ\chi_W$ soient les restrictions à $\bar{Q}_W$ des fonctions coordonnées sur R^n. Les fonctions $(f_i\otimes 1)\circ\chi_{V\times W}$ $(1\leqq i\leqq m)$ et $(1\otimes g_j)\circ\chi_{V\times W}$ $(1\leqq j\leqq n)$ sont alors les restrictions à $\bar{Q}_V\times\bar{Q}_W$ des fonctions coordonnées sur R^{m+n}. L'ensemble de fonctions $F(V)\otimes F(W)$ possède donc la propriété V'.1 du début de ce § ; il en résulte que $F(V\times W)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ d'une structure de variété de $V\times W$. La variété ainsi définie s'appelle le <u>produit</u> des variétés V et W;

c'est elle que nous désignerons dorénavant par $V \times W$. Il est clair que, si $f_1, \ldots, f_m$ forment un système de coordonnées sur V autour d'un point p, et $g_1, \ldots, g_n$ un système de coordonnées sur W autour d'un point q, les fonctions $f_1 \otimes 1, \ldots, f_m \otimes 1, 1 \otimes g_1, \ldots, 1 \otimes g_n$ forment un système de coordonnées sur $V \times W$ autour du point (p,q).

Si V' et W' sont des sous-variétés ouvertes (resp. : fermées) de V et de W, on voit tout de suite que $V' \times W'$ est une sous-variété ouverte (resp. : fermée) de $V \times W$.

Si m et n sont des entiers $\geqq 0$ quelconques, le produit des variétés R^m et R^n est évidemment R^{m+n}.

Si V et W sont des variétés, l'application canonique du produit $W \times V$ sur $V \times W$ est un isomorphisme de la variété $W \times V$ avec $V \times W$.

On peut aussi définir, de manière analogue, le produit d'une suite finie quelconque de variétés ; nous laissons au lecteur le soin de formuler la définition précise. Si U, V et W sont des variétés, les diverses applications canoniques des ensembles $U \times V \times W$, $(U \times V) \times W$, $U \times (V \times W)$ les uns sur les autres sont des isomorphismes des variétés correspondantes.

7. Variétés de revêtement.

Soit V un espace topologique sur lequel nous ferons les hypothèses suivantes :

a) V est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles compacts ;

b) V est connexe.

Supposons de plus donné un groupe G d'homéomorphismes de V sur lui-même sur lequel nous ferons l'hypothèse suivante :

c) G est totalement discontinu sur V.

Cela veut dire par définition que tout point de V admet un voisinage U tel que $U \cap s(U) = \emptyset$ pour tout élément s de G autre que l'élément neutre.

Le groupe G définit une relation d'équivalence R sur l'ensemble V : si $p \in V$, $q \in V$, $R(p,q)$ est la relation "il existe un $s \in G$ tel que $s(p)=q$" . Soient W l'espace quotient V/R et θ l'application canonique de V sur V/R . Puisque G est un groupe d'homéomorphismes, la relation R est ouverte. Si U est une partie ouverte de V telle que $U \cap s(U) = \emptyset$ pour tout $s \in G$ autre que l'élément neutre , θ induit un homéomorphisme de U sur $\theta(U)$, qui est une partie ouverte de W ; W est donc séparé. Il est clair que W est connexe et peut se représenter comme réunion d'une famille dénombra ble de parties compactes .

Ceci dit, supposons d'abord donnée une structure de vairété sur W . Soit F' l'ensemble des fonctions sur V qui sont de la forme $g \circ \theta$, avec $g \in F(W)$. Soient p un point de V , U un voisinage ouvert de p qui est appliqué biunivoquement par θ et C_W un voisinage cubique compact de $\theta(p)$ dans W contenu dans $\theta(U)$. Soit $C_V = U \cap \overset{-1}{\theta}(C_W)$; θ induit un homéomorphisme θ' de C_V sur C_W , et l'application $g \to g \circ \theta'$ est une correspondance biunivoque de l'ensemble des restrictions à C_W de fonctions de $F(W)$ avec l'ensemble des restrictions à C_V de fonctions de F' . Il en résulte immédiatement que la condition V.1 du § I est satisfaite pour V et pour l'ensemble F' de fonctions sur V . Si donc $F(V)$ est l'ensemble des fonctions f sur V qui possèdent la propriété suivante : pour chaque $p \in V$, f coincide sur un voisinage de p avec une fonction de F' , $F(V)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ d'une structure de variété de V . Nous dirons que la variété V ainsi définie est une <u>variété de revêtement de</u> W . Si $f' \in F'$ et $s \in G$, on a $f' \circ s = f'$; il en résulte que la condition $f \in F(V)$ entraîne $f \circ s \in F(V)$. Cela signifie que G est un groupe d'automorphismes de la structure de variété de V .

Supposons réciproquement donnée une structure de variété sur V satisfaisant à la condition suivante :

d) <u>les opérations de G sont des automorphismes de V</u> .

Soit $F(W)$ l'ensemble des fonctions g définies sur W telles que $g \circ \theta$ appartienne à $F(V)$. Soient q un point de W, p un point de V tel que $\theta(p)=q$, U un voisinage ouvert de p tel que $s(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $s \in G$ différent de l'élément neutre, et C un voisinage cubique compact de p dans V contenu dans U. La restriction θ' de θ à C est un homéomorphisme de C sur $C'=\theta(C)$. Si g est la restriction à C' d'une fonction de $F(W)$, $g \circ \theta'$ est la restriction à C d'une fonction de V. Nous allons montrer que, réciproquement, si $f \in F(V)$, la restriction de f à C peut se mettre sous la forme $g \circ \theta'$, avec $g \in F(W)$. On sait qu'il existe une fonction $f' \in F(V)$ qui coïncide avec f sur C et dont le support est une partie compacte de U (cor. 2 à la prop. 2, § I). Si p' est un point quelconque de V, il y a un voisinage de p' qui ne rencontre qu'au plus un des ensembles $s(K)$, où K est le support de F'. En effet, si p' n'appartient à aucun des ensembles $s(K)$, $s \in G$, $\theta(p')$ est dans le complémentaire de l'ensemble compact $\theta(K)$ par rapport à W, et l'image réciproque par θ de ce complémentaire est un voisinage ouvert de p' qui ne rencontre aucun des $s(K)$. Si $p' \in s(K)$, pour un certain $s \in G$, l'ensemble $s(U)$ possède la propriété requise. On peut donc définir une fonction f'' sur V par la formule $f''(p') = \sum_{s \in G} f'(sp')$. Pour tout $p' \in V$, il y a un voisinage de p' sur lequel f'' coïncide avec l'une des fonctions $f' \circ s$, $s \in G$, qui appartiennent toutes à $F(V)$ puisque les opérations de G sont des automorphismes de V. On a donc $f'' \in F(V)$; de plus, f'' est invariante par les opérations de G, et peut par suite se mettre sous la forme $g \circ \theta$, avec $g \in F(W)$. La fonction f'' coïncidant avec f', donc aussi avec f, sur C, notre assertion est démontrée. Il en résulte immédiatement que la condition V.1 du § I est satisfaite pour W et $F(W)$. On voit tout de suite qu'il en est de même de V.2, et la condition V.3 est satisfaite en vertu de a). L'ensemble $F(W)$ définit donc sur W une structure de variété ; nous dirons que W est la variété quotient de V par la relation R. Il est clair que, si nous appliquons à la variété W le procédé décrit au début de ce numéro, la variété de revêtement de W que nous obtenons est identique à la variété V donnée.

Les conditions que nous avons énoncées sont en particulier satisfaites si nous prenons pour V la variété R^n et pour G le groupe des translations de R^n représentées par des vecteurs à composantes entières. L'espace V/R est alors le tore T^n ; on voit donc que T^n se trouve muni d'une structure de variété. Il résulte de notre construction que l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur T^n est canoniquement isomorphe à l'algèbre de celles des fonctions de classe C^∞ sur R^n qui admettent pour périodes tous les éléments de Z^n.

Soient m et n des entiers $\geqq 0$; il existe alors un homéomorphisme canonique du produit $T^m \times T^n$ sur T^{m+n}. Cet homéomorphisme φ est aussi un isomorphisme de la variété $T^m \times T^n$ avec la variété T^{m+n}. Pour le montrer, il suffit de faire voir que, pour tout point $(p,q) \in T^m \times T^n$, il existe des parties ouvertes U de T^m contenant p et V de T^n contenant q telles que φ induise un isomorphisme de la sous-variété ouverte $U \times V$ de $T^m \times T^n$ sur une sous-variété ouverte de T^{m+n}. Or, soient θ_m, θ_n et θ_{m+n} les applications canoniques de R^m, R^n et R^{m+n} sur T^m, T^n et T^{m+n} respectivement. Prenons des cubes ouverts Q^m de R^m et Q^n de T^n de côtés < 1 tels que $p \in \theta_m(Q^m) = U$ et $q \in \theta_n(Q_n) = V$. Alors, θ_m, θ_n et θ_{m+n} induisent des isomorphismes des sous-variétés ouvertes Q^m, Q^n et $Q^m \times Q^n$ de R^m, R^n et R^{m+n} sur les sous-variétés ouvertes U, V et $\varphi(U \times V)$ de T^m, T^n et T^{m+n} respectivement, et on a $\varphi(\theta_m(x), \theta_n(y)) = \theta_{m+n}(x,y)$ si $x \in Q^m$, $y \in Q^n$; notre assertion résulte immédiatement de là.

Si on fait correspondre à tout élément $u \in R/Z = T^1$ le point $(\cos 2\pi u\ ,\ \sin 2\pi u)$, on obtient un homéomorphisme de T^1 sur la circonférence unité S^1. On voit tout de suite que cet homéomorphisme est aussi un isomorphisme de la variété T^1 avec la sous-variété S^1 de R^2.

Soit maintenant S^n la sphère unité de R^{n+1}, et soit G le groupe composé de l'identité et de l'application $x \to -x$ de S^n sur elle-même. Ce groupe est évidemment totalement discontinu sur S^n. Si R est la relation d'équivalence qu'il définit, S^n/R est canoniquement homéomorphe à l'espace projectif P^n. Utilisant la structure de sous-variété fermée de R^{n+1} de S^n, on en déduit une structure de variété de l'espace P^n.

8. <u>Variétés striées</u>.

Soient donnés les éléments suivants : deux variétés V et B ; un ensemble W et une application φ de W sur B ; un recouvrement dénombrable $(U_i)_{i \in I}$ de B par des ensembles ouverts ; pour chaque $i \in I$ une application biunivoque θ_i de $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$ sur $V \times U_i$ telle que $\varphi \circ \overset{-1}{\theta_i}$ soit la seconde projection du produit $V \times U_i$ sur U_i. Si $i \in I$, l'ensemble $V \times U_i$ est porteur d'une structure de variété, produit de la variété V et de la sous-variété ouverte U_i de B. On peut donc définir sur l'ensemble $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$ une structure de variété telle que θ_i soit un isomorphisme de cette variété sur $V \times U_i$. Si U est une partie ouverte de U_i, $\overset{-1}{\varphi}(U)$ est une partie ouverte de la variété $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$. Supposons maintenant la condition suivante satisfaite :

<u>si i et j sont deux indices de I tels que</u> $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, <u>les structures de sous-variétés ouvertes induites par les variétés</u> $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$ <u>et</u> $\overset{-1}{\varphi}(U_j)$ <u>sur</u> $\overset{-1}{\varphi}(U_i \cap U_j)$ <u>sont identiques</u>.

On peut alors définir sur l'ensemble W une structure de variété telle que toutes les variétés $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$ en soient des sous-variétés ouvertes.

Il faut d'abord définir une topologie sur W . Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des parties Ω de W telles que, pour tout $i \in I$, $\Omega \cap \overset{-1}{\varphi}(U_i)$ soit une partie ouverte de $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$. Il est clair que $\emptyset$ et W appartienne à $\mathcal{W}$, que l'intersection de deux ensembles de $\mathcal{W}$ est dans $\mathcal{W}$ et que la réunion des ensembles d'une partie de $\mathcal{W}$ est dans $\mathcal{W}$; $\mathcal{W}$ est donc l'ensemble des ensembles ouverts sur une topologie de W . Si Ω est une partie ouverte de $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$, on a $\Omega \in \mathcal{W}$; en effet, si $j \in I$, il résulte de la condition que nous avons imposée que l'application identique du sous-espace $\overset{-1}{\varphi}(U_i \cap U_j)$ de $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$ sur le sous-espace $\overset{-1}{\varphi}(U_i \cap U_j)$ de $\overset{-1}{\varphi}(U_j)$ est un homéomorphisme, et par suite que $\Omega \cap \overset{-1}{\varphi}(U_j)$ est ouvert dans $\overset{-1}{\varphi}(U_j)$. Les $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$ sont donc des sous-espaces ouverts de W . Ceci dit, le procédé de recollement permet de définir sur W une structure de variété telle que chaque $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$ en soit une sous-variété ouverte.

Si $p \in V$, l'ensemble $\overset{-1}{\varphi}(p)$ est le porteur d'une sous-variété fermée de W . En effet, tout d'abord, il est clair que φ est une application continue, donc que $\overset{-1}{\varphi}(p)$ est fermé. Par ailleurs, si i est un indice tel que $p \in U_i$, $V \times \{p\}$ est une sous-variété fermée de la variété produit $V \times U_i$, d'où il résulte que son image $\overset{-1}{\varphi}(p)$ par θ_i est une sous-variété fermée de $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$; $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$ étant une sous-variété ouverte de W , notre assertion résulte immédiatement de là . De plus, on voit que chacune des variétés $\overset{-1}{\varphi}(p)$ est isomorphe à V .

Une variété W définie par le procédé que nous venons d'indiquer s'appelle une <u>variété striée</u>, et les sous-variétés $\overset{-1}{\varphi}(p)$ $(p \in B)$ en sont appelées les <u>stries</u>. La variété B s'appelle la <u>variété de base</u> de la variété striée. Si g est une fonction de $F(B)$, la fonction $g \circ \varphi$ appartient évidemment à $F(W)$.

30

Désignons par b la dimension de B et par m celle de V ; W est alors évidemment de dimension $m+b$. De plus, si x est un point de W, il existe un système de coordonnées $(f_1,\dots,f_{m+b})$ autour de x sur W dont les b dernières fonctions $f_{m+1},\dots,f_{m+b}$ sont des fonctions de $F(W)$ qui sont constantes sur chaque strie.

Soit en effet i un indice tel que $\varphi(x)\in U_i)$, et soient $g_1,\dots,g_b$ des fonctions de $F(B)$ qui forment un système de coordonnées autour de $\varphi(x)$ sur B. Soit $g_j^!$ la restriction de g_j à U_i ; il existe des fonctions $h_1,\dots,h_m$ de $F(V)$ telles que les fonctions $h_1\otimes 1,\dots,h_m\otimes 1$, $1\otimes g_1^!,\dots,1\otimes g_b^!$ forment un système de coordonnées autour de $\theta_i(x)$ sur $V\times U_i$. Les fonctions $(h_i\otimes 1)\circ\overset{-1}{\theta_i}$ sont de classe C^∞ sur la sous-variété ouverte $\overset{-1}{\varphi}(U_i)$ de W. Il existe donc des fonctions $f_1,\dots,f_m$ de $F(W)$ telles que f_i coincide avec $(h_i\otimes 1)\circ\overset{-1}{\theta_i}$ sur un voisinage de x $(1\leqq i\leqq m)$; il est alors clair que les fonctions $f_1,\dots,f_m$, $g_1\circ\varphi,\dots,g_b\circ\varphi$ forment un système de coordonnées autour de x sur W.

§ III.- DIFFÉRENTIELLES.

Soient V une variété et F(V) l'algèbre des fonctions de classe C^{∞} sur V . Si $p \in V$, l'ensemble I_p des fonctions $f \in F(V)$ telles que $f(p)=0$ est évidemment un idéal de F(V) . Si f est un élément quelconque de F(V), la valeur f(p) de f en p ne dépend que de la classe de f modulo I_p ; on en déduit tout de suite que $F(V)/I_p$ est isomorphe au corps R ; en particulier, I_p est un idéal maximal de F(V) . Nous désignerons par I_p^2 l'idéal engendré par les produits de deux éléments de I_p , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme $\sum_{i=1}^{r} g_i g_i'$, les g_i et g_i' étant des fonctions de F(V) nulles en p . Le quotient I_p/I_p^2 a une structure d'espace vectoriel sur R .

<u>Définition 1.- Les notations étant comme ci-dessus, les éléments de I_p/I_p^2 s'appellent les covecteurs tangents à</u> V <u>en</u> p , <u>et</u> I_p/I_p^2 <u>s'appelle l'espace des covecteurs de</u> V <u>en</u> p .

A chaque élément $f \in F(V)$ est associé un covecteur tangent à V en p , à savoir la classe de l'élément $f-f(p)$ de I_p modulo I_p^2 . Considérons le cas particulier où $V=R^n$. Si $f=\sum_{i=1}^{r} g_i g_i'$ est une fonction de I_p^2 (les g_i et g_i' étant des fonctions de $F(R^n)$ nulles en p), on a $df = \sum_{i=1}^{r} (g_i'.dg_i + g_i.dg_i')$, ce qui montre que df est nul en p . Réciproquement, si f est une fonction de $F(R^n)$ dont la différentielle est nulle en p , $f-f(p)$ appartient à I_p^2 . On sait en effet que, si $x_1,\ldots,x_n$ sont les coordonnées dans R^n , on peut mettre $f-f(p)$ sous la forme $\sum_{i=1}^{n} (x_i-x_i(p))g_i$, les g_i appartenant à $F(R^n)$. On a donc $d_pf = \sum_{i=1}^{n} g_i(p)d_px_i$; les d_px_i étant linéairement indépendants, la condition $d_pf=0$ entraîne $g_i(p)=0$ $(1 \leq i \leq n)$, d'où $f-f(p) \in I_p^2$.
On en déduit qu'il existe, dans le cas de R^n , un isomorphisme canonique de l'espace I_p/I_p^2 avec l'espace des différentielles au point p de

de fonctions de classe C^{∞} sur R^n, isomorphisme qui nous permet d'identifier les covecteurs tangents en p à R^n avec les différentielles en p de fonctions de classe C^{∞} sur R^n. Nous sommes ainsi conduits à poser la définition générale suivante :

Définition 2.- Si f est une fonction de classe C^{∞} sur V et p un point de V, on appelle différentielle de f en p, et on désigne par $d_p f$, la classe de $f-f(p)$ modulo le carré I_p^2 de l'idéal I_p des fonctions de $F(V)$ nulles en p.

Définition 3.- On appelle champ de covecteurs sur une variété V une application qui à tout point p de V fait correspondre un covecteur tangent à V en p. Si $f \in F(V)$, le champ de covecteurs $p \longrightarrow d_p f$ s'appelle la différentielle de f et se désigne par df.

Si ω est un champ quelconque de covecteurs, et g une fonction sur V à valeurs réelles, l'application $p \longrightarrow g(p)\omega(p)$ est un nouveau champ de covecteurs, que l'on désigne par $g\omega$. Cette loi de composition externe définit évidemment sur l'ensemble des champs de covecteurs une structure de module unitaire sur l'algèbre des fonctions sur V.

Proposition 1.- Soient $f_1,\dots,f_r$ des fonctions de classe C^{∞} sur une variété V et H une fonction de classe C^{∞} sur R^r. On a alors $d(H(f_1,\dots,f_r)) = \sum_{i=1}^{r} (\partial H/\partial u_i)(f_1,\dots,f_r).df_i$ (où on désigne par $u_1,\dots,u_r$ les coordonnées sur R^r).

Soit p un point de V, posons $a_i=f_i(p)$ $(1 \leq i \leq r)$, et désignons par a le point $(a_1,\dots,a_r)$ de R^r. La différentielle de la fonction $H-H(a)-\sum_{i=1}^{r}(\partial H/\partial u_i)(a)(u_i-a_i)$ au point a est nulle ; cette fonction peut donc se mettre sous la forme $\sum_{j=1}^{s} G_j G'_j$, où les G_j et G'_j sont des fonctions de $F(R^r)$ nulles en a. La fonction $\sum_{j=1}^{s} G_j(f_1,\dots,f_r)G'_j(f_1,\dots,f_r)$ appartient donc à I_p^2, d'où il résulte que $d_pH(f_1,\dots,f_r)-\sum_{i=1}^{r}(\partial H/\partial u_i)(a).d_pf_i=0$, ce qui démontre la prop.1.

En particulier, si f et g sont des fonctions de $F(V)$, on a

(1) $$d(fg) = f.dg + g.df \quad .$$

Lemme 1. <u>Si une fonction</u> f <u>de classe</u> C^{∞} <u>sur une variété</u> V <u>est nulle sur un voisinage d'un point</u> p <u>de</u> V, f <u>appartient à l'idéal</u> I_p^2 .

Soit U un voisinage de p sur lequel f est nulle. Il existe une fonction $h \in F(V)$ qui prend la valeur 1 en p et dont le support est contenu dans U (cor.3 à la prop.2, § I) . On a $f = f(1-h) \in I_p^2$.

Il résulte du lemme 1 que, si deux fonctions de $F(V)$ coincident sur un voisinage d'un point p , elles ont même différentielle en p . Si une fonction f, définie sur une partie de V , est de classe C^{∞} autour d'un point p de V , il existe une fonction f' $F(V)$ qui coincide avec f sur un voisinage de p , et les différentielles en p de toutes les fonctions f' qui possèdent cette propriété sont égales. Leur valeur commune s'appelle encore la <u>différentielle de</u> f en p et se désigne par $d_p f$. Pour que $d_p f=0$, il est nécessaire et suffisant que f coincide sur un voisinage de p avec une fonction de I_p^2 .

Soient $f_1,\dots,f_r$ des fonctions de classe C^{∞} autour de p et H une fonction définie et de classe C^{∞} sur un ensemble ouvert de R^r contenant le point $(f_1(p),\dots,f_r(p))$. La fonction $H(f_1,\dots,f_r)$ est alors de classe C^{∞} autour de p . Si $H'=H(u_1,\dots,u_r)$ est une fonction de classe C^{∞} sur R^r qui coincide avec H sur un voisinage du point $(f_1(p),\dots,f_r(p))$, les dérivées partielles de H' en ce point sont égales à celles de H , et il résulte de la prop.1 que

(2) $$d_p f = \Sigma_{i=1}^{r} \quad (\partial H/\partial u_i)(f_1(p),\dots,f_r(p)).d_p f_i \quad .$$

Soient U une sous-variété ouverte d'une variété V , et p un point de U . Si $f \in F(V)$, la restriction f^U de f à U appartient à $F(U)$; pour que $d_p f^U$ soit nul dans $\mathcal{D}_p(U)$, il est nécessaire et suffisant que $d_p f$ soit nul dans $\mathcal{D}_p(V)$; car, si f U appartient au carré de l'idéal des

 34

des fonctions de $F(U)$ nulles en p, il résulte tout de suite de (2) que $d_p f=0$. De plus, toute fonction de $F(U)$ coïncide sur un voisinage de p avec une fonction de $F(V)$. Il en résulte qu'il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}_p(V)$ avec $\mathcal{D}_p(U)$ qui associe $d_p f^U$ à $d_p f$ pour tout $f \in F(V)$; on identifie souvent $\mathcal{D}_p(U)$ à $\mathcal{D}_p(V)$ au moyen de cet isomorphisme.

Si θ est un isomorphisme d'une variété V avec une variété V', et si p est un point de V, et $p'=\theta(V)$, il est clair qu'il existe un isomorphisme de $\mathcal{D}_{p'}(V')$ sur $\mathcal{D}_p(V)$ qui fait correspondre à la différentielle en p' d'une fonction $f' \in F(V')$ la différentielle en p de la fonction $f' \circ \theta$ de $F(V)$.

<u>Proposition 2</u>. <u>Si</u> p <u>est un point d'une variété</u> V <u>de dimension</u> n, <u>l'espace</u> $\mathcal{D}_p(V)$ <u>est un espace de dimension</u> n.

Il existe en effet une sous-variété ouverte U de V contenant p qui admet une carte θ sur une partie ouverte U' de R^n ; si $p'=\theta(p)$, il résulte de ce que nous avons dit plus haut que $\mathcal{D}_p(V)$ est isomorphe à $\mathcal{D}_p(U)$, donc à $\mathcal{D}_{p'}(U')$; or ce dernier espace est de dimension n.

<u>Remarque 1</u>. Il résulte de la prop.2 que le même ensemble $F(V)$ de fonctions sur un espace V ne peut pas être à la fois l'ensemble des fonctions de classe C^∞ de deux structures de variétés de dimensions distinctes de V.

<u>Remarque 2</u>. Soit $(f_1,\dots,f_n)$ un système de coordonnées autour d'un point p d'une variété V de dimension n. Toute fonction de $F(V)$ coïncide alors au voisinage de p avec une fonction de la forme $H(f_1,\dots,f_n)$, où H est une fonction de classe C^∞ sur R^n ; il résulte donc de (2) que $d_p f_1,\dots,d_p f_n$ engendrent l'espace $\mathcal{D}_p(V)$, et par suite forment une base de cet espace, puisque $\mathcal{D}_p(V)$ est de dimension n. Nous verrons

plus loin que, réciproquement, si $f_1,\dots,f_n$ sont des fonctions de V dont les différentielles en p forment une base de $\mathcal{D}_p(V)$, ces fonctions forment un système de coordonnées autour de p.

Définition 4.- On appelle espace vectoriel tangent à une variété V en l'un, p, de ses points le dual de l'espace $\mathcal{D}_p(V)$ des covecteurs tangents à V en p ; cet espace se note $\mathcal{L}_p(V)$, et ses éléments s'appellent les vecteurs tangents à V en p.

Proposition 3.- Si p est un point d'une variété V de dimension n, l'espace $\mathcal{L}_p(V)$ est de dimension n.

Cela résulte immédiatement de la définition 2.

Par ailleurs, il résulte de ce que nous avons dit plus haut que, si U est une sous-variété ouverte de V contenant p, on peut identifier $\mathcal{L}_p(V)$ à $\mathcal{L}_p(U)$.

Si $L \in \mathcal{L}_p(V)$ et $\omega \in \mathcal{D}_p(V)$, le nombre $L(\omega)$ se note aussi $\langle L, \omega \rangle$. Si $f \in F(V)$, le nombre $L(d_pf)$ se note aussi $L(f)$; L devient ainsi une fonction linéaire sur $F(V)$. Si $f_1,\dots,f_r$ sont des fonctions de $F(V)$ et H une fonction de classe C^∞ sur R^r, on a $L(H(f_1,\dots,f_r)) = \sum_{i=1}^r (\partial H/\partial u_i)(f_1(p),\dots,f_r(p)).L(f_i)$, comme il résulte tout de suite de la prop. 1 ($u_1,\dots,u_r$ désignant les fonctions coordonnées sur R^r). On a en particulier

$$(3) \qquad L(fg) = f(p).L(g) + g(p).L(f)$$

si f et g sont dans $F(V)$. Réciproquement, toute fonction linéaire L sur $F(V)$ qui possède la propriété (3) provient d'un vecteur tangent à V en p. On a d'abord en effet $L(1)=L(1.1) = 2L(1)$, d'où $L(1)=0$, et $L(a)=0$ pour toute fonction constante a. Il en résulte que $L(f)=L(f-f(p))$ pour toute $f \in F(V)$. Par ailleurs, il résulte de (3) que $L(f)=0$ pour toute fonction f de l'idéal désigné plus haut par I_p^2.

La fonction L définit donc par passage aux quotients une fonction linéaire L' sur $I_p/I_p^2 = \mathcal{D}_p(V)$, c'est-à-dire un vecteur tangent à V en p , et on a $L(f) = L'(f)$ pour tout $f \in F(V)$.

Si V est une sous-variété ouverte de R^n , on sait que l'espace $\mathcal{D}_p(V)$ des différentielles en p de fonctions de classe C^∞ sur V est en dualité canonique avec l'espace vectoriel R^n ; il existe donc un isomorphisme canonique de $\mathbb{L}_p(V)$ avec R^n . Si L est le vecteur de $\mathbb{L}_p(V)$ qui correspond à un vecteur ℓ de R^n , et si $f \in F(V)$, L(f) n'est autre que la dérivée de f dans la direction ℓ .

167 bis

§ IV. FONCTIONS DE CLASSE C^k.

La lettre k désignera dans ce qui suit un entier ≥ 0.

Soient V une variété et p un point de V. Une fonction numérique f, définie sur une partie de V, est dite être de classe C^k autour d'un point p de V s'il existe un voisinage de p sur lequel f coincide avec une fonction de la forme $H(f_1,\dots,f_r)$, où $f_1,\dots,f_r$ appartiennent à $F(V)$ et où H est une fonction de classe C^k sur R^r. Supposons qu'il en soit ainsi ; soient $(g_1,\dots,g_n)$ un système de coordonnées sur V autour de p, et U un voisinage ouvert de p tel que f soit défini et coincide avec $H(f_1,\dots,f_r)$ sur U et que l'application $q \to (g_1(q),\dots,g_n(q))$ soit une carte θ de U dans R^n. La fonction $f \circ \theta^{-1}$ est alors évidemment de classe C^k autour du point $\theta(p)$ de R^n. On peut donc dire que, si $H'(g_1,\dots,g_n)$ est une expression de f au moyen de $g_1,\dots,g_n$ valable sur un voisinage de p sur lequel f est défini, la fonction H' est de classe C^k autour du point $(g_1(p),\dots,g_n(p))$.

On notera que, si V est une sous-variété ouverte de R^n, la notion de fonction de classe C^k sur V que nous venons de définir coincide avec celle définie au chap., , § .

Une fonction f, définie sur une partie ouverte U d'une variété V, est dite être de classe C^k sur U si elle est de classe C^k autour de tout point de U. Nous désignerons par $F^k(V)$ l'ensemble des fonctions définies et de classe C^k sur V tout entier,. Les propriétés suivantes sont évidentes :

si $f_1,\dots,f_r$ appartiennent à $F^k(V)$ et si H est une fonction définie et de classe C^r sur une partie ouverte de R^r contenant l'image de V par l'application $p \to (f_1(p),\dots,f_r(p))$, alors la fonction $H(f_1,\dots,f_r)$ est de classe C^k sur V ;

en particulier, $F^k(V)$ *est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions sur* V ; *et, si une fonction* $f \in F^k(V)$ *est partout* $\neq 0$, f^{-1} *appartient à* $F^k(V)$;

si f *est une fonction définie sur* $F^k(V)$ *et si, pour tout point* p *du support de* f , f *coincide sur un voisinage de* p *avec une fonction de* $F^k(V)$, *on a* $f \in F^k(V)$;

si $(f_j)_{j \in J}$ *est une famille dispersée de fonctions de* $F^k(V)$, *la fonction* $\sum_{j \in J} f_j$ appartient à $F^k(V)$;

les corollaires 3 *et* 4 *à la prop.*1, § 1 *restent vrais si on y remplace partout* $F(V)$ *par* $F^k(V)$ (ils se démontrent exactement de la même manière).

Si k et l sont des entiers tels que $l > k$, on a $F(V) \subset F^l(V) \subset F^k(V)$; $F^0(V)$ est l'ensemble des fonctions continues sur V.

Proposition 1 . Si V *est une sous-variété fermée d'une variété* W , *et* U *un ensemble ouvert de* W *contenant* V , *toute fonction* $f \in F^k(V)$ *est la restriction à* V *d'une fonction de* $F^k(W)$ *à support contenu dans* U .

Soit p un point de V ; il y a alors un voisinage de p dans V sur lequel f coincide avec une fonction de la forme $H(f_1,\dots,f_r)$, où les f_i sont dans $F(V)$ et H une fonction de classe C^k sur R^r . Or, il résulte de la définition d'une sous-variété fermée que chacune f_i est la restriction à V d'une fonction $g_i \in F(W)$; $H(f_1,\dots,f_r)$ est donc la restriction à V de $H(g_1,\dots,g_r)$, qui est dans $F^k(W)$. La prop.1 résulte donc du cor.3 à la prop.1, § 1, appliqué à $F^k(W)$.

Nous allons maintenant généraliser aux fonctions de $F^1(V)$ la notion de différentielle. Soit f une fonction de classe C^1 autour d'un point $p \in V$; soient $f_1,\dots,f_r$ des fonctions de $F(V)$ et H une fonction de classe C^1 sur R^r telles que f coincide sur un voisinage de p avec $H(f_1,\dots,f_r)$. Désignant par $u_1,\dots,u_r$ les coordonnées dans R^r , nous allons montrer que le covecteur $\sum_{i=1}^{r}\ (\partial H/\partial u_i)(f_1(p),\ldots,f_r(p))d_p f_i$ ne dépend que de f et de p. Soit en effet $(g_1,\ldots,g_n)$ un système de coordonnées sur V autour de p, et soit H' une fonction de classe C^1 sur R^n telle que f coïncide avec $H'(g_1,\ldots,g_n)$ sur un voisinage de p. Soient $L_1,\ldots,L_r$ des fonctions de classe C sur R^n telles que f_i coïncide avec $L_i(g_1,\ldots,g_n)$ sur un voisinage de p. Si $H''=H(L_1,\ldots,L_r)$, f coïncide avec $H''(g_1,\ldots,g_n)$ sur un voisinage de p, ce qui montre que H' et H'' coïncident sur un voisinage du point $a=(g_1(p),\ldots,g_n(p))$ dans R^n. Désignant par $v_1,\ldots,v_n$ les fonctions coordonnées sur R^n, et posant $b=(f_1(p),\ldots,f_r(p))$, on a donc

$$(\partial H'/\partial v_j)(a) = \sum_{i=1}^{r}\ (\partial H/\partial u_i)(b).(\partial L_i/\partial v_j)(a)\ .$$

On a par ailleurs $d_p f_i = \sum_{j=1}^{n}\ (\partial L_i/\partial v_j)(a).d_p g_j$, d'où

$$\sum_{i=1}^{r}\ (\partial H/\partial u_i)(b).d_p f_i = \sum_{j=1}^{n}\ (\partial H'/\partial v_j)(a).d_p g_j$$

ce qui démontre notre assertion. Nous pouvons donc poser la définition suivante :

<u>Définition 1</u>. <u>Soit</u> f <u>une fonction de classe</u> C^1 <u>autour d'un point</u> p <u>d'une variété</u> V. <u>Soient</u> $f_1,\ldots,f_r$ <u>des fonctions de</u> F(V) <u>et</u> H <u>une fonction de classe</u> C^1 <u>sur</u> R^r <u>telles que</u> f <u>coïncide avec</u> $H(f_1,\ldots,f_r)$ <u>sur un voisinage de</u> p. <u>On appelle alors différentielle de</u> f <u>en</u> p, <u>et on désigne par</u> $d_p f$, <u>l'élément</u> $\sum_{i=1}^{r}\ (\partial H/\partial u_i)(f_1(p),\ldots,f_r(p)).d_p f_i$ <u>de l'espace des covecteurs de</u> V <u>en</u> p ($u_1,\ldots,u_r$ <u>désignant les fonctions coordonnées sur</u> R^r).

On vérifie sans difficulté que la formule

$$d_p f = \sum_{i=1}^{r}\ (\partial H/\partial u_i)(f_1(p),\ldots,f_r(p)).d_p f_i$$

reste valable sous les hypothèses suivantes : $f_1,\ldots,f_r$ sont de classe C^1 autour de p ; H est défini et de classe C^1 sur un voisinage ouvert du du point $(f_1(p),\ldots,f_r(p))$ dans R^r .

Désignons par ${}^k I_p$ l'idéal des fonctions de $F^k(V)$ nulles en p . On notera qu'il <u>n'est pas vrai</u> en général que $f-f(p)$ appartienne au carré de l'idéal ${}^k I_p$ si f est une fonction de $F^k(V)$ dont la différentielle est nulle en p .

Si f est une fonction de $F^1(V)$, l'application $p \to d_p f$ s'appelle la <u>différentielle de</u> f et se désigne par df .

<u>Proposition 2.</u>- <u>Soit</u> f <u>une fonction de classe</u> C^1 <u>autour d'un point</u> p <u>d'une variété</u> V . <u>Si</u> f <u>admet en</u> p <u>un minimum ou un maximum relatif</u>, <u>on a</u> $d_p f = 0$.

Soient C un voisinage cubique compact et $(f_1,\ldots,f_n)$ un système de coordonnées sur C tels que f coincide sur C avec une fonction de la forme $H(f_1,\ldots,f_n)$, H étant une fonction de classe C^1 sur R^n . La fonction H admet alors un minimum ou un maximum relatif au point $(f_1(p),\ldots,f_n(p))$, et ses dérivées partielles sont par suite nulles en ce point, ce qui démontre la prop.2 .

§ V. APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES.

Dans ce qui suit, la lettre k désignera soit un entier ≥ 0 soit le symbole ∞. Si V est une variété, $F^k(V)$ désignera l'ensemble des fonctions de classe C^k sur V ; on a donc $F^{\infty}(V) = F(V)$.

Définition 1.- Une application φ d'une variété V dans une variété W est dite être de classe C^k si on a $g \circ \varphi \in F^k(V)$ pour toute fonction $g \in F^k(W)$.

> Remarque. Si V et W sont des parties ouvertes d'espaces numériques R^m et R^n, la notion d'application de classe C^k ici définie coïncide avec celle définie au chap. III, § . De même, pour qu'une fonction f sur V appartienne à $F^k(V)$, il faut et suffit que f soit de classe C^k en tant qu'application de V dans la variété R.

Une application φ d'une partie de V dans W est dite être de classe C^k autour d'un point p de V s'il existe un voisinage ouvert U de p sur lequel φ est défini et tel que la restriction de φ à ce voisinage soit une application de classe C^k de la sous-variété ouverte U de V. Il est clair que, pour qu'une application φ de V dans W soit de classe C^k, il faut et suffit qu'elle soit de classe C^k autour de tout point de V.

Pour qu'une application φ de V dans W soit de classe C^k, il suffit que $g \circ \varphi \in F^k(V)$ pour tout $g \in F(W)$. Pour l'établir, montrons d'abord que cette condition entraîne la continuité de φ. Soient en effet p un point de V, q le point $\varphi(p)$ et N un voisinage de q dans W. Il existe alors une fonction h $F(W)$ qui prend la valeur 0 en q et qui est égale à 1 sur le complémentaire de N (cor. 4 à la prop. 1, § I). La fonction $h \circ \varphi$ étant dans $F^k(V)$, et par suite continue, l'ensemble des points $p \in V$ tels que $|(h \circ \varphi)(p)| < 1$ est un voisinage de p dont l'image par φ est contenue dans N ; ceci prouve la continuité de φ. Ceci dit, si $g \in F^k(W)$ et $p \in V$, g coïncide sur un voisinage de $\varphi(p)$ avec une fonction de la forme $H(g_1,\dots,g_r)$, où les g_i sont dans $F(W)$ et H est de classe C^k sur R^r ; il en résulte que $g\circ\varphi$ coïncide sur un voisinage de p avec $H(g_1\circ\varphi,\dots,g_r\circ\varphi)$; or cette dernière fonction appartient à $F^k(V)$ si les fonctions $g_i\circ\varphi$ appartiennent à $F^k(V)$.

Un raisonnement analogue montre que, pour qu'une application φ d'une partie de V dans W soit de classe C^k autour d'un point $p\in V$, il faut et suffit que, pour un certain système de coordonnées $(g_1,\dots,g_n)$ autour de $\varphi(p)$ sur W, il soit vrai que les fonctions $g_i\circ\varphi$ $(1\leqq i\leqq n)$ sont de classe C^k autour de p.

Nous avons d'autre part montré que toute application de classe C^k de V dans W est continue. Il en résulte que les applications de classe C^0 sont toutes les applications continues. Par ailleurs, il résulte tout de suite de ce que nous avons dit que, si $k < l$, toute application de classe C^l est aussi de classe C^k (on vient ici que $k < \infty$ pour tout entier $k \geqslant 0$).

Exemples. 1) Si V est une sous-variété ouverte ou fermée d'une variété W, l'application identique de V dans W est de classe C^∞.

2) Si V et W sont des variétés, les projections de $V\times W$ sur V et sur W sont de classe C^∞. De plus, si $q_0\in W$, l'application $p\to(p,q_0)$ de V dans $V\times W$ est de classe C^∞, comme il résulte tout de suite du fait que, si $f_1,\dots,f_m$ forment un système de coordonnées sur V autour d'un point p_0 et si $g_1,\dots,g_n$ forment un système de coordonnées autour de q_0 sur W, les fonctions $f_i\otimes 1$ $(1\leqq i\leqq m)$ et $1\otimes g_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ forment un système de coordonnées autour de (p_0,q_0) sur $V\times W$. De même, si $p_0\in V$, l'application $q\to(p_0,q)$ de W dans $V\times W$ est de classe C .

3) Si V est une variété de revêtement d'une variété W, l'application canonique de V sur W est de classe C^∞. De plus, si U est une sous-variété ouverte de V telle que la restriction θ de l'application

canonique à U soit biunivoque, $\overset{-1}{\theta}$ est une application de classe C^∞ de la sous-variété ouverte $\theta(U)$ de W sur U.

Proposition 1. Soient V_1, V_2 et V_3 des variétés, φ une application de classe C^k de V_1 dans V_2 et ψ une application de classe C^k de V_2 dans V_3. L'application $\psi\circ\varphi$ de V_1 dans V_3 est alors de classe C^k.

Cela résulte immédiatement de la définition.

Proposition 2. Soit φ une application de classe C^1 d'une variété V de dimension m dans une variété W de dimension $n > m$. L'ensemble $\varphi(V)$ est alors maigre dans W.

La variété V peut se représenter comme réunion d'une famille dénombrable de sous-variétés ouvertes dont chacune admet une carte sur un cube ouvert de R^m ; il en résulte qu'il suffit de démontrer la prop.2 dans le cas où V est un cube ouvert Q de R^m. Ce cube peut alors se représenter comme réunion d'une famille dénombrable de cubes compacts tels que l'image de chacun d'eux par φ soit contenue dans une partie ouverte de W qui admet une carte dans R^n, et il suffira de montrer que l'image par φ de l'un quelconque de ces cubes compacts ne peut avoir aucun point intérieur dans W. Il suffira donc de montrer que, si φ est une application de classe C^1 d'un cube compact $\overline{Q}$ de R^m dans R^n, $\varphi(\overline{Q})$ n'a aucun point intérieur. Il suffira évidemment pour cela de montrer que, pour tout $a > 0$, $\varphi(\overline{Q})$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini de cubes compacts de R^n dont la somme des volumes est $< a$. Soient $y_1, \dots, y_n$ les fonctions coordonnées sur R^n, et $x_1, \dots, x_m$ celles sur R^m. Les fonctions $y_j\circ\varphi$ $(1 \leqq j \leqq n)$ sont des fonctions Y_j de classe C^1 sur $\overline{Q}$. Soit M une borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par leurs dérivées partielles sur $\overline{Q}$; désignant par $\|p', p\|_m$ et $\|q', q\|_n$ les distances euclidiennes dans R^m et dans R^n, on a donc $\| \varphi(p'), \varphi(p)\|_n \leqslant M \| p',p\|_m$ si p et p' sont dans $\overline{Q}$. Soit c le côté du cube $\overline{Q}$; si r est un entier >0 quelconque, on peut subdiviser $\overline{Q}$ en m^r cubes $\overline{Q}_k$ $(1 \leqq k \leqq m^r)$ de côté $r^{-1}c$. Soit p_k le centre de $\overline{Q}_k$; on a donc $\| p,p_k \|_m \leqq m^{1/2}(2r)^{-1}c$ pour tout $p \in \overline{Q}_k$; L'ensemble $\varphi(\overline{Q}_k)$ est donc contenu dans le cube de R^n de centre $\varphi(p_k)$ et de côté $Mm^{1/2}r^{-1}c$, d'où il résulte que $\varphi(\overline{Q})$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini de cubes de R^n dont la somme des volumes est $(Mm^{1/2})^n r^{m-n} c^n$. Puisque $m < n$, ce nombre tend vers 0 quand r augmente indéfiniment, ce qui démontre notre assertion.

Soient maintenant φ une application de classe C^1 d'une variété V dans une variété W, p un point de V, q le point $\varphi(p)$, $\mathcal{D}_p(V)$ l'espace des covecteurs de V en p et $\mathcal{D}_q(W)$ celui des covecteurs de W en q.

Montrons que, si $g \in F(W)$, la différentielle de $g \circ \varphi$ en p ne dépend que de celle de g en q. Il suffit de montrer que $d_q g = 0$ entraîne $d_p(g \circ \varphi) = 0$. Or, si $d_q g = 0$, on peut écrire $g - g(q) = \sum_{j=1}^{r} g_j g'_j$, où les g_j, g'_j sont des fonctions de $F(W)$ nulles en q. Si nous posons $f_j = g_j \circ \varphi$, $f'_j = g'_j \circ \varphi$, les fonctions f_j, f'_j appartiennent à $F_1(V)$ et sont nulles en p ; de plus, on a $(g \circ \varphi) - g(q) = \sum_{j=1}^{r} f_j f'_j$, d'où $d_p(g \circ \varphi) = \sum_{j=1}^{r} f_j(p).d_p f'_j + \sum_{j=1}^{r} f'_j(p).df_j = 0$, ce qui démontre notre assertion. Il existe donc une application $d_p^* \varphi$ de $\mathcal{D}_q(W)$ dans $\mathcal{D}_p(V)$ telle que $d_p^*\varphi.d_q g = d_p(g \circ \varphi)$ pour toute fonction g de $F(W)$. Cette application est évidemment linéaire. Montrons maintenant que la formule $d_p^*\varphi .d_q g = d_p(g \circ \varphi)$ est encore vraie pour toute fonction g qui est de classe C^1 autour de q. La fonction g coïncide alors en effet sur un voisinage de p avec une fonction de la forme $G(g_1, \dots, g_r)$, où $g_1, \dots, g_r$ sont dans $F(W)$ et où $G = G(u_1, \dots, u_r)$ est de classe C^1 sur R^r

Posons $f_i = g_i \circ \varphi$ $(1 \leqq i \leqq r)$ et $f = g \circ \varphi$; la fonction f coïncide alors sur un voisinage de p avec $G(f_1,\dots,f_r)$, et on a

$$d_p f = \sum_{i=1}^{r} (\partial G/\partial u_i)(f_1(p),\dots,f_r(p)).d_p f_i$$

$$d_q g = \sum_{i=1}^{r} (\partial G/\partial u_i)(g_1(q),\dots,g_r(q)).d_q g_i \,.$$

Or on a $f_i(p)=g_i(q)$, $d_p^*\varphi.d_q g_i = d_p f_i$, ce qui démontre notre assertion. Nous avons donc établi la

Proposition 3.- Soient φ une application de classe C^1 d'une variété V dans une variété W , p un point de V , $\mathcal{D}_p(V)$ l'espace des covecteurs de V en p et $\mathcal{D}_q(W)$ l'espace des covecteurs de W en $q=\varphi(p)$. Il existe alors une application linéaire $d_p^*\varphi$ de $\mathcal{D}_q(W)$ dans $\mathcal{D}_p(V)$ telle que $d_p^*\varphi.d_q g = d_p(g \circ \varphi)$ pour toute fonction g définie et de classe C^1 sur un voisinage de q dans W .

Définition 2.- Les notations étant celles de la prop.3, l'application $d_p^*\varphi$ s'appelle la codifférentielle de φ en p .

Considérons maintenant le cas où V est une sous-variété ouverte de R^m et W une sous-variété ouverte de R^n . Soient φ une application de classe C^1 de V dans W et p un point de V . Si on identifie l'espace tangent $L_p(V)$ à V en p avec R^m et l'espace tangent $L_q(W)$ en $q = \varphi(p)$ avec R^n , on reconnait tout de suite que la transposée de $d_p^*\varphi$ n'est autre que la différentielle de φ en p , considérée comme application linéaire de R^m dans R^n . Nous sommes donc conduits à poser la définition suivante :

Définition 3.- Soient φ une application de classe C^1 d'une variété V dans une variété W , et p un point de V . L'application de l'espace tangent $L_p(V)$ à V en p dans l'espace tangent $L_q(W)$ à W en $q = \varphi(p)$ transposée de $d_p^*\varphi$ s'appelle la différentielle de φ en p et se désigne par $d_p\varphi$.

Remarque. Si f est une fonction de classe C^1 sur V , c'est-à-dire une application de classe C^1 de V dans la variété R , la définition précédente confère au symbole $d_p f$ une signification différente de celle qu'il avait précédemment. Soit x l'application identique de R sur lui-même ; si q est le nombre $f(p)$, $d_q x$ est évidemment un générateur de $\mathcal{D}_q(R)$, et $\overset{*}{d_p} f$ est l'application de $\mathcal{D}_q(R)$ dans $\mathcal{D}_p(V)$ telle que $\overset{*}{d_p} f . d_q x = d_p f$, $d_p f$ étant ici pris au sens de la définition du § IV . Si on identifie le dual $\mathcal{L}_q(R)$ de $\mathcal{D}_q(R)$ à R , la fonction linéaire sur $\mathcal{D}_q(R)$ qui applique $d_q x$ sur 1 est identifiée au nombre 1. La différentielle de f en p , au sens de la définition ci-dessus, est alors l'application linéaire de $\mathcal{L}_p(V)$ dans R définie par la formule $L \to \langle L, d_p f \rangle$. On voit donc que les deux significations de $d_p f$ se réconcilient si on procède à l'identification canonique du dual de $\mathcal{L}_p(V)$ avec $\mathcal{D}_p(V)$, c'est-à-dire si on identifie $\mathcal{D}_p(V)$ à son bidual.

<u>Proposition 4. Soient φ une application de classe C^1 d'une variété V_1 dans une variété V_2 et ψ une application de classe C^1 de V_2 dans une variété V_3 . Si $p \in V_1$ et $q = \varphi(p)$, on a</u>

$$\overset{*}{d_p}(\psi \circ \varphi) = (\overset{*}{d_p} \varphi) \circ (\overset{*}{d_q} \psi), \quad d_p(\psi \circ \varphi) = (d_q \psi) \circ (d_q \varphi) .$$

La première formule résulte immédiatement de la définition, et la seconde de la première.

<u>Définition 4.- Soit φ une application de classe C^1 d'une variété V dans une variété W . On appelle rang de φ en p le rang de l'application $d_p \varphi$</u>

Si φ est un isomorphisme d'une variété V avec une variété W , le rang de φ en un point p V est évidemment égal à la dimension commune de V et de W (car $\overset{*}{d_p} \varphi$ et $d_p \varphi$ sont alors des isomorphismes d'espaces vectoriels). Par ailleurs, si V est une sous-variété ouverte d'une variété W , et i l'application identique de V dans W , le rang de i en un point p de V est encore égal à la dimension commune de V et de W .

Si on identifie en effet $\mathcal{D}_p(V)$ à $\mathcal{D}_p(W)$ et $\mathcal{L}_p(V)$ à $\mathcal{L}_p(W)$ de la manière indiquée au § III, $d_p^* i$ et $d_p i$ deviennent l'application identique.

Proposition 5.- Soient φ une application de classe C^1 d'une variété V de dimension m dans une variété W de dimension n , r le rang de φ en un point $p \in V$ et q le point $\varphi(p)$,

a) Si $r=m$, il y a un voisinage de p dans V sur lequel φ induit une application biunivoque.

b) Si $r=n$, l'image par φ de tout voisinage de p dans V est un voisinage de q dans W .

c) Si $r=m=n$, il y a une sous-variété ouverte U de V contenant p sur laquelle φ induit une application biunivoque dont la réciproque θ est une application de classe C^1 d'une sous-variété ouverte de W sur U ; de plus, si φ est de classe C^k , où k est un entier >1 ou ∞ , il en est de même de θ.

Soit W_1 une sous-variété ouverte de W contenant q qui admet une carte μ dans R^n , et soit V_1 une sous-variété ouverte de V qui admet une carte λ dans R^m et qui est telle que $\varphi(V_1) \subset W_1$. Soit i l'application identique de V_1 dans V , et soit x le point $\lambda^{-1}(p)$ de R^m . Posons $\varphi' = \mu \circ \varphi \circ i \circ \lambda^{-1}$; il résulte alors de ce que nous avons dit plus haut que le rang de φ' en x est égal à r . La prop. 5 résulte donc immédiatement de la prop. , chap. , qui n'en est que le cas particulier relatif à la situation dans laquelle V et W sont des parties ouvertes de R^m et R^n respectivement.

Corollaire 1.- Pour qu'une application φ de classe C^∞ d'une variété V sur une variété W de même dimension que V soit un isomorphisme, il faut et suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

a) <u>le rang de φ en tout point de V est égal à la dimension commune de V et de W</u> ; b) <u>φ est biunivoque</u>.

En effet, $\overset{-1}{\varphi}$ est alors une application de classe C^{∞} en vertu de la prop. 5 .

On notera qu'aucune des conditions a) ou b) n'est suffisante à elle seule pour que φ soit un isomorphisme. En effet, l'application $x \to x^3$ de R sur lui-même possède la propriété b), et l'application canonique de R sur T possède la propriété a) ; mais aucune de ces applications n'est un isomorphisme.–

<u>Corollaire 2</u>.– <u>Soient V une variété de dimension n et $f_1,\dots,f_n$ des fonctions de $F(V)$. Pour que ces fonctions forment un système de coordonnées autour de p , il faut et suffit que leurs différentielles en p soient linéairement indépendantes</u>.

Soit en effet φ l'application $q \to (f_1(q),\dots,f_n(q))$ de V dans R^n . Si $x_1,\dots,x_n$ sont les fonctions coordonnées sur R^n , et si $p' = \varphi(p)$, on a $d^*_{p'}\varphi . d_{p'}x_i = d_p f_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Pour que $f_1,\dots,f_n$ forment un système de coordonnées autour de p , il est évidemment nécessaire et suffisant qu'il existe une sous-variété ouverte U de V contenant p telle que la restriction de φ à U soit un isomorphisme de U avec une sous-variété ouverte de R^n . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit, en vertu de la prop. 5, que $d_p\varphi$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc aussi que l'application linéaire $d^*_{p'}\varphi$ soit un isomorphisme de $\mathcal{D}_{p'}(R^n)$ sur $\mathcal{D}_p(V)$. Le corollaire 2 résulte immédiatement de là, puisque $d_{p'}x_1,\dots,d_{p'}x_n$ forment une base de $\mathcal{D}_{p'}(R^n)$.

Soit V une sous-variété fermée de dimension m d'une variété W de dimension n , et soit i l'application identique de V dans W . Toute fonction $f \in \mathcal{F}(V)$ est la restriction à V d'une fonction de $\mathcal{F}(W)$;

il en résulte immédiatement que, si $p \in W$, $d_p^* i$ applique $\mathfrak{D}_p(W)$ <u>sur</u> $\mathfrak{D}_p(V)$, donc que $d_p i$ est un isomorphisme de $\mathfrak{L}_p(V)$ avec un sous-espace de $\mathfrak{L}_p(W)$. Cet isomorphisme permet d'identifier $\mathfrak{L}_p(V)$ à un sous-espace de $\mathfrak{L}_p(W)$. Soient m et n les dimensions de V et de W ; et soit $(g_1,\dots,g_n)$ un système de coordonnées autour de p sur W tel que les restrictions de $g_{m+1},\dots,g_n$ à V soient nulles sur un voisinage de p dans V. On a alors évidemment $d_p^* i . d_p g_{m+h} = 0$ $(1 \leqq h \leqq n-m)$, d'où $\langle L, d_p g_{m+h} \rangle = 0$ si $L \in \mathfrak{L}_p(V)$. L'espace $\mathfrak{L}_p(V)$, étant de dimension m, est l'ensemble de tous les vecteurs tangents L à W en p qui satisfont aux équations $\langle L, d_q g_{m+h} \rangle = 0$.

Dans le cas où W est une sous-variété ouverte de R^n, il existe un isomorphisme canonique de $\mathfrak{L}_p(W)$ sur l'espace vectoriel R^n. Au sous-espace $\mathfrak{L}_p(V)$ correspond par cet isomorphisme un sous-espace M de R^n. On appelle encore dans ce cas <u>espace tangent à V en p</u> la sous-variété <u>affine</u> de R^n parallèle à M et passant par p. Ainsi, si $W=R^{n+1}$ et si V est la sphère S^n, l'hyperplan tangent à S^n au point $p=(a_1,\dots,a_{n+1})$ est défini par l'équation $\sum_{i=1}^{n+1} a_i(x_i-a_i)=0$, où $x_1,\dots,x_{n+1}$ sont les fonctions coordonnées sur R^{n+1}.

Nous allons maintenant déterminer la structure de l'espace tangent au produit de deux variétés en un point de ce produit. Soient U et V des variétés de dimensions respectives m et n, p un point de U et q un point de V. Soient φ l'application $p' \to (p',q)$ de U dans $U \times V$, et ψ l'application $q' \to (p,q')$ de V dans $U \times V$. Posons $\mathfrak{A} = d_p\varphi(\mathfrak{L}_p(U))$, $\mathfrak{B} = d_q\psi(\mathfrak{L}_q(V))$: ce sont des sous-espaces de $\mathfrak{L}_{(p,q)}(U \times V)$. L'application $pr_1 \circ \varphi$ est l'application identique de U, tandis que $pr_1 \circ \psi$ est l'application constante $q' \to p$ de V dans U. Or, il est clair que la différentielle en un point de l'application identique d'une variété sur elle-même est l'application identique de son espace tangent en ce point, et que la différentielle en un point d'une application constante d'une variété est l'application nulle. Donc $d_{(p,q)}pr_1$ applique $\mathcal{A}$ isomorphiquement sur $\mathcal{L}_p(U)$ et $\mathcal{B}$ sur $\{0\}$; on voit de même que $d_{(p,q)}pr_2$ applique $\mathcal{A}$ sur $\{0\}$ et $\mathcal{B}$ isomorphiquement sur $\mathcal{L}_q(V)$. On en conclut que $\mathcal{A}$ est de dimension m, $\mathcal{B}$ de dimension n et que la somme $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ est directe. Mais $\mathcal{L}_{(p,q)}(U\times V)$ est de dimension $m+n$; cet espace est donc la somme directe de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$. On identifie en général $\mathcal{A}$ à $\mathcal{L}_p(U)$ et $\mathcal{B}$ à $\mathcal{L}_q(V)$ au moyen des isomorphismes définis plus haut. On a donc le résultat suivant :

Proposition 6.- Soient U *et* V *des variétés,* p *un point de* U *et* q *un point de* V. *L'espace* $\mathcal{L}_{(p,q)}(U\times V)$ *est alors la somme directe des espaces* $\mathcal{L}_p(U)$ *et* $\mathcal{L}_q(V)$.

On notera que $\mathcal{L}_p(U)$ (resp.: $\mathcal{L}_q(V)$), considéré comme sous-espace de $\mathcal{L}_{(p,q)}(U\times V)$, est le sous-espace tangent en (p,q) à la sous-variété fermée de $U\times V$ portée par l'ensemble des points de la forme (p',q) pour $p'\in U$ (resp.: de la forme (p,q'), pour $q'\in V$).

Soit maintenant θ une application de classe C^1 de $U\times V$ dans une variété W. Soient $D_U\theta$ l'application de $\mathcal{L}_{(p,q)}(U\times V)$ qui coïncide avec $d_{(p,q)}\theta$ sur $\mathcal{L}_p(U)$ et avec 0 sur $\mathcal{L}_q(V)$, et $D_V\theta$ l'application de $\mathcal{L}_{(p,q)}(U\times V)$ qui coïncide avec $d_{(p,q)}\theta$ sur $\mathcal{L}_q(V)$ et avec 0 sur $\mathcal{L}_p(U)$. Ces applications s'appellent *les différentielles partielles* de θ au point (p,q) ; il est clair que *la différentielle de* θ *au point* (p,q) ; il est clair que *la différentielle de* θ *au point* (p,q) *est la somme de ses deux différentielles partielles*. Si on identifie $D_U\theta$ avec sa restriction à $\mathcal{L}_p(U)$, on voit que *la première différentielle partielle de* θ *au point* (p,q) *est la différentielle en* p *de l'application partielle* $p'\to\theta(p',q)$ *de* θ ; une remarque analogue s'applique à la seconde différentielle partielle.

Fonctions à valeurs complexes.

Soient V une variété ; k désignant soit un entier ≥ 0 soit le symbole ∞, une fonction f à valeurs complexes définie sur une partie de V est dite être de classe C^k autour d'un point $p \in V$ si ses parties réelle et imaginaire sont de classe C^k autour de p ; une fonction f à valeurs complexes définie sur V tout entier est dite être de classe C^k si elle est de classe C^k autour de tout point de V .

Soient $f_1,\ldots,f_r$ des fonctions à valeurs complexes qui sont de classe C^k autour d'un point p de V ; et soit $H = H(u_1,\ldots,u_r)$ une fonction à valeurs complexes définie sur un voisinage du point $(f_1(p),\ldots,f_r(p))$ de C^r et qui est de classe C^k autour de ce point (C^r étant identifié canoniquement à R^{2r}) ; il est alors clair que $H(f_1,\ldots,f_r)$ est de classe C^k autour de p .

Si $p \in V$, désignons par $\mathcal{D}_p^C(V)$ l'espace vectoriel déduit de $\mathcal{D}_p(V)$ par extension à C du corps de base. Si f est une fonction à valeurs complexes de classe C^1 autour de p , et si f' et f" sont ses parties rélle et imaginaire, on désigne par $d_p f$, et on appelle différentielle de f en p , l'élément $d_p f' + i d_p f''$ de $\mathcal{D}_p^C(V)$. Si donc f et g sont des fonctions à valeurs complexes de classe C^1 autour de p , on a $d_p(fg)=f(p).d_p g + g(p).d_p f$; en particulier, on a $d_p(af)=a.d_p f$ pour toute constante complexe a .

L'espace $\mathcal{D}_p^C(V)$ s'appelle l'espace des covecteurs complexes de V en p ; son dual s'appelle l'espace des vecteurs complexes de V en p . Ce dernier espace s'identifie canoniquement à l'espace vectoriel déduit de $\mathbb{L}_p(V)$ par extension à C du corps de base .

167 bis

§ VI. VARIÉTÉS PLONGÉES.

Définition 1. On dit qu'une variété V de dimension m est plongée dans une variété W si les conditions suivantes sont satisfaites : a) l'ensemble des points de V est une partie de l'ensemble des points de W ; b) l'application identique de V dans W est de classe C^∞ et est partout de rang m .

Exemples. 1. Toute sous-variété ouverte ou fermée de W est une variété plongée dans W ; plus généralement, toute sous-variété fermée d'une sous-variété ouverte de W est plongée dans W .

2. Soient V_1 une variété de dimension m et θ une application biunivoque de classe C^∞ de V_1 dans W dont le rang est partout égal à m . Cette application permet, par transport de structure, de définir une variété V dont l'ensemble de points est $\theta(V_1)$ et telle que θ soit un isomorphisme de la variété V_1 avec la variété V ; il est clair que V est alors une variété plongée dans W .

3. Nous appliquerons le procédé de construction indiqué en 2. au cas particulier où $V_1=R$, $W=R^2$. Nous désignerons par x et y les coordonnées sur R^2 et par t la coordonnée sur R ; l'application θ est alors définie par les deux fonctions $x\circ\theta = f(t)$, $y\circ\theta = g(t)$. Pour que θ soit de classe C^∞ , il faut et suffit que ces fonctions soient de classe C^∞ ; pour que θ soit partout de rang 1 , il faut et suffit, comme on le voit aisément, que les dérivées de f et de g ne soient simultanément nulles en aucun point de R ; pour que θ soit biunivoque, il faut et suffit que les conditions $f(a)=f(a')$ et $g(a)=g(a')$ entraînent $a=a'$. On voit facilement que toutes ces conditions sont satisfaites dans le cas des exemples suivants :

3a . $f(t) = \dfrac{t}{1+t^4}$ $g(t) = \dfrac{t^2}{1+t^4}$

3b . $f(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4}$ $g(t) = \dfrac{t^2}{1+t^4}$

Si V est une sous-variété fermée d'une sous-variété ouverte de W , la topologie de l'espace sous-jacent de V est celle induite sur l'ensemble des points de V par la topologie de W ; on peut donc dire dans ce cas que V est un sous-espace de W . Il n'en est plus de même dans le cas des exemples 3a. et 3b. ; en effet, dans chacun de ces cas, l'ensemble des points de V est l'ensemble des points $(x,y) \in R^2$ tels que $y^4 = x^2y-x^4$; cet ensemble est fermé, et, si (x,y) lui appartient, on a $|x| \leqq 1$ et $|y| \leqq 1$, ce qui montre que l'ensemble des points de V est une partie compacte de W , alors que l'espace sous-jacent de V , homéomorphe à R , n'est pas compact. De plus, on voit tout de suite que les variétés plongées définies par les exemples 3a. et 3b. sont distinctes (il y a des voisinages de l'origine de R^2 dans ces deux variétés qui n'ont que l'origine en commun). On voit donc que deux variétés plongées dans une même variété W peuvent être distinctes bien qu'admettant toutes deux pour ensemble de points une même partie compacte de W .

Définition 2.- Une variété plongée V dans une variété W est dite régulièrement plongée si l'espace sous-jacent de V est un sous-espace de l'espace sous-jacent de W .

Proposition 1. Pour qu'une variété V plongée dans une variété W soit régulièrement plongée, il faut et suffit que V soit une sous-variété fermée d'une sous-variété ouverte de W .

La condition est évidemment suffisante. Supposons maintenant V régulièrement plongée. Désignons par I l'application identique de V dans W , et par m et n les dimensions de V et de W . Si $p \in V$, $d_p^* I$ est une application linéaire de $D_p(W)$ sur $D_p(V)$; on peut donc trouver m fonctions g_i $(1 \leqq i \leqq m)$ de $F(W)$ telles que les $d_p^* I . d_p g_i$ forment une base de $\mathcal{D}_p(V)$. Les différentielles en p des fonctions g_i étant alors linéairement indépendantes, on peut trouver n-m fonctions $h_1, \dots, h_{n-m}$ de $F(W)$ telles que $d_p g_1, \dots, d_p g_m, d_p h_1, \dots, d_p h_{n-m}$ forment une base de $\mathcal{D}_p(W)$, donc que $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_{n-m}$ forment un système de coordonnées autour de p dans W (cor.2, à la prop.5, § V). Par ailleurs, les fonctions $g_i \circ I$ $(1 \leqq i \leqq m)$ forment un système de coordonnées autour de p sur V. Il existe donc des fonctions H_j $(1 \leqq j \leqq n-m)$ de classe C^∞ sur R^m telles que $h_j \circ I$ coïncide sur un voisinage de p dans V avec $H_j(g_1 \circ I, \dots, g_m \circ I)$. Nous poserons $g_{m+j} = h_j - H_j(g_1, \dots, g_m)$; les fonctions g_{m+j} sont dans $F(W)$ et $d_p g_{m+j}$ ne diffère de $d_p h_j$ que par une combinaison linéaire de $d_p g_1, \dots, d_p g_m$. Il en résulte immédiatement que $d_p g_1, \dots, d_p g_m, \dots, d_p g_n$ forment une base de $\mathcal{D}_p(W)$, donc que $g_1, \dots, g_n$ forment un système de coordonnées autour de p sur W. Puisque V est un sous-espace de W, on peut choisir un voisinage cubique compact C de p dans W sur lequel $g_1, \dots, g_n$ forment un système de coordonnées et tel que $C \cap V$ soit contenu dans un voisinage de p dans V sur lequel les fonctions g_{m+j} $(1 \leqq j \leqq n-m)$ sont identiquement nulles. Soit θ l'application $q \to (g_1(q), \dots, g_n(q))$ de C sur un cube compact $\overline{Q}$ de R^n. L'image de $C \cap V$ par θ sera alors contenu dans le sous-espace d'équations $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$ de R^n (les x_i étant les fonctions coordonnées dans R^n) et constituera un voisinage du point $\theta(p)$ relativement à cette variété linéaire, puisque les fonctions $g_1 \circ I, \dots, g_m \circ I$ forment un système de coordonnées autour de p sur V. On peut donc, remplacant au besoin C par un voisinage plus petit, supposer que $\theta(C \cap V)$ est l'intersection de $\overline{Q}$ avec la variété d'équations $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$. L'ensemble $C \cap V$ sera alors l'ensemble des points de C en lesquels $g_{m+1},\dots,g_n$ sont nuls. Désignons maintenant par U^p l'ensemble $\overset{-1}{\theta}(Q)$, où Q est l'intérieur de $\overline{Q}$; c'est une partie ouverte de W. Soit U la réunion des U^p pour tous les p V. L'ensemble V est alors relativement fermé dans U. En effet, un point p_0 de U adhérent à V appartient à l'un des ensembles U^p, $p\in V$, soit à U^{p_1} ; U^{p_1} est un voisinage de p_0 et $V\cap U^{p_1}$ est évidemment relativement fermé dans U^{p_1}, ce qui montre que $p_0\in V$. Si donc p_0 est un point de U qui n'est pas dans V, il y a un voisinage de p_0 qui ne rencontre pas V ; il résulte tout de suite de cela et de ce qui a été dit plus haut que V est une sous-variété fermée de U.

Si maintenant V est une sous-variété plongée quelconque de W, V peut se représenter comme réunion d'une infinité dénombrable de parties compactes dont chacune est l'adhérence d'une partie ouverte de V. La restriction de l'application identique à toute partie compacte de V étant un homéomorphisme, on voit que l'ensemble des points de V peut se représenter comme réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dont chacun est le porteur d'une sous-variété fermée d'une sous-variété ouverte de W, sous-variété qui est en même temps une sous-variété ouverte de V.

Proposition 2.- Soit V une variété plongée dans une variété W, et soit φ une application de classe C^k (où k est un entier $\geqq 0$ ou le symbole ∞) d'une variété U dans W telle que $\varphi(U)$ appartienne à l'ensemble des points de V. Si l'application φ de U dans V (muni de sa topologie de variété) est continue, elle est de classe C^k ; la condition est toujours satisfaite si V est régulièrement plongée.

Soit r un point de U. Si φ est une application continue de U dans V, il existe une sous-variété ouverte V_1 de V et un voisinage ouvert M de r dans U qui possèdent les propriétés suivantes : on a $\varphi(M)\subset V_1$

et V_1 est une variété plongée régulièrement dans W . On peut donc se ramener au cas où V est régulièrement plongée ; V est alors une sous-variété fermée d'une sous-variété ouverte W' de W . Il est clair que φ , considéré comme application de U dans W', est de classe C^k . Par ailleurs, toute fonction g de $F(V)$ est la restriction à V d'une fonction de $F(W')$; il en résulte que $g \circ \varphi$ est une fonction de classe C^k (en particulier continue) sur U , ce qui démontre la prop. 2 .

Remarque. Il y a un cas dans lequel on peut affirmer la continuité de φ même quand V n'est pas régulièrement plongée : c'est celui dans lequel la condition suivante est satisfaite : pour chaque point p de V , il existe un voisinage C^p de p dans W tel que les composantes connexes (au sens de la topologie de W) de l'intersection $C^p \cap V$ soient des parties relativement compactes de V (dans la topologie de l'espace sous-jacent de V) . Soient en effet alors r un point de U , et M un voisinage connexe de r dans U tels que $\varphi(M) \subset C^p$, où $p = \varphi(r)$. L'ensemble $\varphi(M)$ est alors contenu dans une composante de $C^p \cap V$, donc dans une partie compacte K de l'espace sous-jacent de V . Or l'application identique de K dans W est nécessairement un homéomorphisme ; i.e. les topologies induites par V et W sur K sont identiques. Puisque φ est continu en tant qu'application de V dans W , sa restriction à M est continue en tant qu'application de M dans V , ce qui démontre notre assertion.

Par ailleurs, si on ne fait aucune hypothèse spéciale, l'application φ peut être discontinue, puisque deux variétés plongées distinctes peuvent, on l'a vu, avoir le même ensemble de points ; l'application identique de l'une de ces variétés sur l'autre ne peut alors être continue sans quoi elle serait un isomorphisme en vertu de la prop. 2 .

Proposition 3.- Soient W une variété et X un espace topologique qui possède les propriétés suivantes : a) l'ensemble des points de X est une partie de W ; b) tout point p de X possède un voisinage ouvert $U(p)$ relativement à X tel que l'application identique de $U(p)$ dans W soit un homéomorphisme du sous-espace $U(p)$ de X sur l'espace sous jacent d'une variété plongée dans W, de dimension m indépendante de p ; c) X est connexe . L'espace X est alors l'espace sous-jacent d'une variété V plongée dans W, et d'une seule .

Toute la difficulté consiste à établir que l'espace, évidemment localement compact X, est dénombrable à l'infini. Supposons en effet ce point acquis. On peut alors couvrir X au moyen d'une famille dénombrable d'ensembles de la forme $U(p_k)$ $(1 \leq k < \infty)$, les p_k étant des points de X. L'application identique de $U(p_k)$ sur une variété plongée dans W définit sur $U(p_k)$ une structure de variété de dimension m. Si k et k' sont des entiers quelconques, et si $U(p_k) \cap U(p_{k'})$ n'est pas vide, les structures de variétés induites sur cet ensemble par celles de $U(p_k)$ et de $U(p_{k'})$ sont identiques. Il n'y a en effet, en vertu de la prop.2, qu'une variété plongée dans W dont l'espace sous-jacent soit $U(p_k) \cap U(p_{k'})$ (cet espace étant considéré comme sous-espace de X), et cette variété plongée est évidemment la sous-variété ouverte de l'une ou l'autre des variétés $U(p_k)$ ou $U(p_{k'})$ portée par $U(p_k) \cap U(p_{k'})$. On peut donc construire une variété V, admettant X comme espace sous-jacent, par recollement des variétés $U(p_k)$. Il est clair que V est une variété plongée dans W, et c'est la seule admettant X comme espace sous-jacent en vertu de la prop.2 ,

Reste à montrer que X est dénombrable à l'infini. Si n est la dimension de W, on peut évidemment construire une famille dénombrable de systèmes de n fonctions $g_1^{(k)}, \dots, g_n^{(k)}$ de $F(W)$ $(1 \leq k < \infty)$ telle que, pour tout $p \in W$, l'un au moins de ces systèmes constitue un système de de coordonnées autour de p ; on peut de plus supposer que, pour tout système $g_1^{(k)},\dots,g_n^{(k)}$ de la famille, la famille contienne également les systèmes qui s'en déduisent en permutant entre elles les fonctions $g_i^{(k)}$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Si $p \in X$, soit I_p l'application identique de $U(p)$ dans W ; si k est un indice tel que les $g_i^{(k)}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ forment un système de coordonnées en p sur W, il y a m de ces fonctions dont les restrictions à $U(p)$ ont en p des différentielles linéairement indépendantes (comme il résulte tout de suite du fait que $d_p I_p$ est de rang m) et par suite forment un système de coordonnées autour de p. Désignons par X_k l'ensemble des points p X tels que $g_1^{(k)},\dots,g_m^{(k)}$ forment un système de coordonnées autour de p sur $U(p)$. Cet ensemble est évidemment ouvert dans X. Soit θ_k l'application

$p \longrightarrow (g_1^{(k)}(p),\dots,g_m^{(k)}(p))$ de X_k dans R^m ; cette application est continue et il est clair que tout point p de X_k a un voisinage qui est appliqué topologiquement par θ_k <u>sur</u> un voisinage de $\theta_k(p)$ dans R^m ; i.e. θ_k est une application ouverte. L'espace X étant évidemment localement connexe, il en est de même de X_k et les composantes de X_k sont des ensembles ouverts ; la restriction de θ_k à une composante Y de X_k est donc une application continue ouverte dans R^m. Nous allons d'abord montrer que Y est dénombrable à l'infini. On peut trouver une famille dénombrable $(Q_l)_{1 \leqq l < \infty}$ de cubes ouverts de R^m qui soit une base de l'ensemble des ensembles de R^m. Chaque point de Y possède donc un voisinage ouvert (au moins) qui est appliqué topologiquement par θ_k sur l'un des cubes Q_l. Désignons par Y_l la réunion de tous les ensembles ouverts de Y qui sont appliqués topologiquement sur Q_l. Montrons que ces ensembles sont mutuellement disjoints. Soient en effet Z et Z' deux de ces ensembles qui aient un point commun p ; les ensembles Z et Z' étant ouverts et connexes (ils sont homéomorphes à Q_l), il suffira pour voir que Z=Z' de montrer que $Z \cap Z'$ est relativement fermé dans Z et dans Z'. Or, soit p' un point de Z adhérent à $Z \cap Z'$. Le point $\theta_k(p')$ est adhérent dans Q_1 à $\theta_k(Z \cap Z')$. Si ξ et ξ' sont les applications continues de Q_1 dans Z et Z' réciproques des restrictions de θ_k à ces ensembles, ξ' coïncide avec ξ sur $\theta_k(Z \cap Z')$, d'où $p' = \xi(\theta_k(p')) = \xi'(\theta_k(p'))$ et par suite $p' \in Z \cap Z'$, ce qui montre que $Z \cap Z'$ est relativement fermé dans Z ; on voit de même qu'il l'est dans Z'. L'ensemble Y_1 est donc la réunion d'une famille d'ensembles mutuellement disjoints, ouvertse et connexes, homéomorphes à Q_1 : ces ensembles sont les composantes connexes de Y_1. Le fait que Y est dénombrable à l'infini résultera alors du lemme suivant :

Lemme 1.- Soit Y un espace connexe, localement compact et localement connexe qui est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles Y_l $(1 \leq l < \infty)$ d'ensembles ouverts tels que chaque composante connexe de chaque Y_l soit dénombrable à l'infini ; Y est alors dénombrable à l'infini.

Soit $\mathcal{A}_l$ l'ensemble des composantes de Y_l, et soit $\mathcal{A}$ la réunion des ensembles d'ensembles $\mathcal{A}_l$. Il suffira évidemment de montrer que Y est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de $\mathcal{A}$. On peut supposer $Y \neq \emptyset$; définissons inductivement une suite $(T_0, T_1, \ldots)$ de parties de Y comme suit : T_0 est un ensemble non vide quelconque de $\mathcal{A}$; si $l > 0$, T_l est la réunion de tous les ensembles de $\mathcal{A}$ qui rencontrent T_{l-1}. Soit Y' la réunion des ensembles T_l $(0 \leq l < \infty)$; on va montrer que $Y' = Y$. Il est clair que Y' est ouvert ; il suffira donc de montrer qu'il est aussi fermé. Or, soit p un point de Y adhérent à Y' ; p appartient à un ensemble Z de $\mathcal{A}$, qui, étant ouvert, rencontre Y', et par suite aussi l'un des ensembles T_l. Or, si $Z \in \mathcal{A}$ rencontre T_l, on a $Z \subset T_{l+1} \subset Y'$; on a donc $p \in Y'$, ce qui démontre notre assertion.

Pour montrer que Y est dénombrable à l'infini, il suffira donc de montrer que chaque T_l est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de $\mathcal{A}$. Nous procèderons par récurrence sur l. C'est vrai pour $l=0$. Supposons que ce le soit pour un certain l. Pour montrer que c'est vrai pour $l+1$, il suffit évidemment de montrer que, pour tout $l' > 0$, et pour un ensemble donné $Z \in \mathcal{A}$, l'ensemble des ensembles de $\mathcal{A}_{l'}$ qui rencontrent Z est dénombrable. Or toute composante connexe de $Z \cap Y_{l'}$ est évidemment contenue dans un et un seul des ensembles de $\mathcal{A}_{l'}$ qui rencontrent Z ; il suffit donc de montrer que l'ensemble des composantes de $Z \cap Y_{l'}$ est dénombrable. Or, $Z \cap Y_{l'}$ est une partie ouverte de l'ensemble dénombrable à l'infini et localement connexe Z, d'où il résulte tout de suite que l'ensemble de ses composantes est dénombrable. Le lemme 1 est donc démontré.

Revenant aux notations employées plus haut, on voit que chaque composante de chacun des X_k est dénombrable à l'infini. Appliquant à nouveau le lemme 1, on en conclut que X est lui-même dénombrable à l'infini, ce qui achève la démonstration de la prop. 3.

Signalons pour terminer que la notion d'espace tangent à une sous-variété fermée se généralise immédiatement pour les variétés plongées :

Définition 3. Si p est un point d'une variété V plongée dans une variété W, on appelle espace tangent à p à V l'image de $L_p(V)$ par la différentielle en p de l'application identique de V dans W.

On identifie en général cet espace à $L_p(V)$ lui-même. Ceci fait, la différentielle en un point d'une application de classe C^1 d'une variété U dans V devient identique à la différentielle de cette même application, considérée comme application de U dans W.

§ VII. TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES.

On appelle <u>champ de vecteurs</u> sur une variété V une application X de V telle que l'image par cette application d'un point quelconque p V soit un vecteur tangent à V en p , vecteur qu'on désigne en général par X_p .

Il est clair que les champs de vecteurs forment un module sur l'algèbre $\Phi(V)$ des fonctions à valeurs réelles sur V : si X,Y sont des champs de vecteurs, on désigne par X+Y et par fX (si $f \in \Phi(V)$) les applications $p \to X_p+Y_p$ et $p \to f(p)X_p$.

Soient X un champ de vecteurs sur V et f une fonction de $F^1(V)$ (rappelons qu'on désigne par $F^k(V)$ l'algèbre des fonctions de classe C^k sur V) . L'application $p \to X_p(d_pf)$ est une fonction sur V , fonction qu'on désigne en général par Xf . Si des fonctions f et f' de $F^1(V)$ coïncident sur un voisinage d'un point p de V , les fonctions Xf et Xf' prennent la même valeur en p . Si $f_1,\dots,f_r$ sont des fonctions de $F^1(V)$ et $H=H(u_1,\dots,u_r)$ une fonction de classe C^1 sur R^r , on a

$$X(H(f_1,\dots,f_r)) = \sum_{i=1}^r (\partial H/\partial u_i)(f_1,\dots,f_r).Xf_i \quad .$$

Si un champ de vecteurs X est tel que Xf=0 pour tout $f \in F(V)=F^\infty(V)$, on a X=0 ; en effet, si $p \in V$, l'espace $\mathcal{D}_p(V)$ est engendré par les différentielles en p de fonctions de F(V), ce qui montre que notre condition entraîne que $X_p=0$. <u>On identifie en général un champ de vecteurs X à l'application $f \to Xf$ de F(V) dans $\Phi(V)$ qu'il détermine</u>. Cette application est linéaire, et on a, pour f et g dans F(V), X(fg)=(Xf)g(Xg) ; autrement dit, X est une <u>dérivation</u> de F(V) dans l'algèbre $\Phi(V)$.

<u>Proposition 1</u>.- <u>Soient</u> V <u>une variété</u>, F(V) <u>l'algèbre des fonctions de classe</u> C^∞ <u>sur</u> V <u>et</u> $\Phi(V)$ <u>celle de toutes les fonctions à valeurs réelles définies sur</u> V . <u>Il y a alors identité entre les champs de vecteurs sur</u> V <u>et les dérivations de</u> F(V) <u>dans</u> $\Phi(V)$.

Il suffit de montrer que toute dérivation X de $F(V)$ dans $\Phi(V)$ est un champ de vecteurs. Soit p un point de V ; désignons par X_p l'application $p \to (Xf)(p)$. C'est une fonction linéaire sur $F(V)$, et on a, pour f et g dans $F(V)$, $X_p(fg)=f(p).X_pg + g(p).X_pf$. Il résulte de ce qu'on a vu au § III qu'il existe un vecteur tangent à V en p , que nous désignerons encore par X_p , tel que $X_pf=X_p(d_pf)$ pour tout $f \in F(V)$; la dérivation X est donc le champ de vecteurs $p \to X_p$.

Définition 1. Si k est un entier ≥ 0 ou le symbole ∞ , un champ de vecteurs X sur une variété V est dit être de classe C^k si X applique $F(V)$ dans $F^k(V)$. Les champs de vecteurs de classe C^0 sont encore appelés champs de vecteurs continus. Les champs de vecteurs de classe C^∞ sont aussi appelés transformations infinitésimales.

Les transformations infinitésimales sont donc les dérivations de l'algèbre $F(V)$ dans elle-même. On en déduit que, si X et Y sont des transformations infinitésimales, l'opération $[X,Y] = X\circ Y - Y\circ X$ est encore une transformation infinitésimale. Si X,Y,Z sont des transformations infinitésimales, on a

$$[X,Y] = -[X,Y]$$

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y] = 0 .$$

Proposition 2.- Soit X un champ de vecteurs de classe C^k sur une variété V , k étant un entier ≥ 0 . Soit f une fonction de $F^l(V)$, l étant un entier >0 . Si $l > k$, Xf appartient à $F^k(V)$; si $l \leq k$, Xf appartient à $F^{l-1}(V)$.

Soit $(f_1,\dots,f_n)$ un système de coordonnées autour d'un point p de V . Il existe un voisinage de p sur lequel f coincide avec une fonction f' de la forme $H(f_1,\dots,f_n)$, où $H=H(x_1,\dots,x_n)$ est une fonction de classe C^l sur R^n . La fonction Xf coincide au voisinage de p avec

$Xf' = \sum_{i=1}^{n} (\partial H/\partial x_i)(f_1,\dots,f_n).Xf_i$. Or les fonctions Xf_i sont dans $F^k(V)$ et les dérivées partielles de H sont de classe C^{l-1} sur R^n, ce qui démontre la prop.2 .

Supports.

Définition 2. On appelle support d'un champ de vecteurs X sur une variété V l'adhérence de l'ensemble des points $p \in V$ tels que $X_p \neq 0$.

Le complémentaire du support de X est donc le plus grand ensemble ouvert U sur lequel X est nul (i.i. tel que $X_p=0$ pour tout $p \in U$). C'est aussi, évidemment, le plus grand ensemble ouvert U tel que $Xf=0$ pour tout $f \in F^1(V)$ dont le support est contenu dans U . Si f est une fonction de $F^1(V)$, le support de Xf est contenu dans l'intersection des supports de X et de f . Si h est une fonction quelconque définie sur V , le support du champ de vecteurs hX est contenu dans l'intersection des supports de h et de X .

On dit qu'une famille $(X_i)_{i \in I}$ de champs de vecteurs est dispersée si la famille formée des supports de ces champs de vecteurs est dispersée. Supposons qu'il en soit ainsi. Si $p \in V$, il n'y a qu'un nombre fini d'indices i tels que $(X_i)_p \neq 0$; la somme $\sum_{i \in I}(X_i)_p$ représente donc un vecteur tangent à V en p , et l'application $p \to \sum_{i \in I}(X_i)_p$ est un champ de vecteurs X que l'on désigne par $\sum_{i \in I} X_i$. Si $f \in F^1(V)$, la famille $(X_i f)_{i \in I}$ est dispersée et on a $Xf = \sum_{i \in I} X_i f$. Il en résulte que si tous les X_i sont de classe C^k (où k est un entier $\geqq 0$ ou le symbole ∞), $\sum_{i \in I} X_i$ est de classe C^k.

Soit E le support d'un champ de vecteurs X . Si, pour tout $p \in E$, X coincide sur un voisinage de p avec un champ de vecteurs de classe C^k (où k est un entier $\geqq 0$ ou le symbole ∞), X est de classe C^k . Car, si $f \in F(V)$, Xf coincide au voisinage d'un point quelconque de son support avec une fonction de classe C^k , d'où $Xf \in F^k(V)$.

<u>Proposition 4. Soient U une sous-variété ouverte d'une variété</u> V , X <u>un champ de vecteurs de classe</u> C^k <u>sur</u> U (<u>où</u> k <u>est un entier</u> $\geqq 0$ <u>ou</u> ∞) <u>et</u> E <u>une partie de</u> U <u>fermée dans</u> V . <u>Il existe alors un champ de vecteurs</u> X' <u>de classe</u> C^k <u>sur</u> V <u>qui coïncide avec</u> X <u>sur</u> E <u>et dont le support est contenu dans</u> U ; <u>si</u> E <u>est compact, on peut choisir</u> X' <u>à support compact.</u>

Soit h une fonction de $F(V)$ égale à 1 sur E dont le support est contenu dans U et est compact si E l'est. Posons $X'_q = h(q)X_q$ si $q \in U$, $X'_q = 0$ si $q \notin U$. L'application $q \to X'_q$ est un champ de vecteurs X' dont le support est contenu dans U et est compact si E l'est. Si $f \in F(V)$, $X'f$ coïncide au voisinage de tout point de son support avec une fonction de $F^k(V)$, d'où $X'f \in F^k(V)$, ce qui montre que X' est de classe C^k .

<u>Champs de vecteurs de R^n .</u>

Soient x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ les coordonnées sur R^n et V une partie ouverte de R^n . Les applications $f \to \partial f/\partial x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ $(f \in F(V))$ sont évidemment des transformations infinitésimales de V ; on les désigne par $\partial/\partial x_i$. On a $(\partial/\partial x_i)x_j = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i , j \leqq n)$.

Si maintenant V est une variété qui admet une carte sur une partie ouverte de R^n , et si $(f_1,\ldots,f_n)$ est un système de coordonnées sur V, on voit qu'il existe des transformations infinitésimales X_i $(1 \leqq i \leqq n)$ de V telles que $X_i f_j = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i,j \leqq n)$. Si $p \in V$, les $d_p f_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ forment une base de $\mathcal{D}_p(V)$, d'où il résulte que les $(X_i)_p$ forment une base de $\mathcal{L}_p(V)$. On en conclut que tout champ de vecteurs X sur V se met d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{i=1}^n u_i X_i$, les $u_i = Xf_i$ étant des fonctions sur V . Pour que X soit de classe C^k (où k est un entier $\geqq 0$ ou le symbole ∞), il faut et suffit que les u_i soient de classe C^k. On dit d'une manière abrégée que $X_1,\ldots,X_n$ forment une base des champs de vecteurs de V.

Proposition 5.- Soit L un vecteur tangent à une variété V en l'un de de ses points p, et soit N un voisinage de p. Il existe alors une transformation infinitésimale X de V dont le support est contenu dans N telle que $X_p=L$.

Soit U une sous-variété ouverte de V contenant p, contenue dans N et qui admet une carte sur une partie ouverte de R^n (où n est la dimension de V), et soit $(X_1,\ldots,X_n)$ une base des champs de vecteurs de U. On peut écrire $L=\sum_{i=1}^n a_i(X_i)_p$, les a_i étant des nombres réels. Il résulte de la prop.4 qu'il y a une transformation infinitésimale X de V à support contenu dans N qui coincide avec $\sum_{i=1}^n a_iX_i$ en p, ce qui démontre la prop.6.

Corollaire 1. Soient V une variété, $u_1,\ldots,u_r$ des fonctions continues sur V et $f_1,\ldots,f_r$ des fonctions de $F^1(V)$. L'ensemble des points $p\in V$ tels que $\sum_{i=1}^r u_i(p).d_pf_i=0$ est alors fermé.

Soient en effet E cet ensemble, p un point adhérent à E et L un vecteur de $\mathfrak{L}_p(V)$. Soit X une transformation infinitésimale de V telle que $X_p=L$. La fonction $\sum_{i=1}^r u_i.Xf_i$ est continue et nulle sur E ; elle est donc nulle en p, d'où $\langle L, \sum_{i=1}^r u_i(p).d_pf_i\rangle=0$; ceci étant vrai pour tout $L\in\mathfrak{L}_p(V)$, on a $\sum_{i=1}^r u_i(p).d_pf_i=0$.

Corollaire 2. Soit φ une application de classe C^1 d'une variété V dans une variété W, et soit r un entier ≥ 0. L'ensemble des points $p\in V$ en lesquels φ est de rang $\geq r$ est ouvert ; en particulier, l'ensemble des points de V en lesquels φ est de rang égal à la dimension de V est ouvert.

Soit p un point de V en lequel le rang de φ soit $\geqq r$, et soient $L_1,\dots,L_r$ des vecteurs tangents à V en p tels que les vecteurs $d_p\varphi.L_i=M_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ soient linéairement indépendants dans $L_{\varphi(p)}(W)$. Soit X_i une transformation infinitésimale de V telle que $(X_i)_p=L_i$; il suffira de montrer que, si q V est assez voisin de p , les vecteurs $d_q\varphi.(X_i)_q$ $(1 \leqq i \leqq r)$ sont linéairement indépendants. On peut trouver des fonctions $g_1,\dots,g_r$ de $F(W)$ telles que $\langle M_i, d\varphi_{(p)}g_j\rangle = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i\ , j \leqq r)$. Les fonctions h_{ij} définies par $h_{ij}(q) = \langle d_q\varphi.(X_i)_q, d_{\varphi(q)}g_j\rangle = X_i(g_j\circ\varphi)$ sont continues, et le déterminant de la matrice (h_{ij}) est égal à 1 en p ; ce déterminant est donc $\neq 0$ sur un voisinage de p , ce qui démontre le corollaire 2 .

Nous allons maintenant montrer que, si des fonctions $f_1,\dots,f_n$ de $F(V)$ forment un système de coordonnées sur un ensemble cubique compact C, il y a un ensemble ouvert U contenant C tel que les fonctions $f_1,\dots,f_n$ forment un système de coordonnées sur U . Soit θ l'application $q \to (f_1(q),\dots,f_n(q))$ de la variété V en question dans R^n . Nous allons d'abord montrer que θ est de rang n en tout point p de C . Soit $(f'_1,\dots,f'_n)$ un système de coordonnées autour de p ; il existe donc des fonctions H_i $(1 \leqq i \leqq n)$ de classe C^∞ sur R^n telles que f'_i coïncide avec $H_i(f_1,\dots,f_n)$ sur C . Désignant par $x_1,\dots,x_n$ les coordonnées dans R^n , on a donc $d_qf'_i = \sum_{j=1}^n (\partial H_i/\partial x_j)(f_1(q),\dots$ $\dots,f_n(q)).d_qf_j$ en tout point q intérieur à C . Or, p est adhérent à l'intérieur de C ; il résulte alors du corollaire 1 que la formule précédente est encore valable si on y pose $q=p$. Les $d_pf'_i$ $(1 \leq i \leq n)$ étant linéairement indépendants, il en est de même des d_pf_j $(1 \leqq j \leqq n)$, ce qui démontre notre assertion. Il résulte donc du corollaire 2 qu'il existe un ensemble ouvert U_1 contenant C sur lequel θ est partout de rang n .

Montrons maintenant qu'il existe un ensemble ouvert U_2 contenant C qui est appliqué biunivoquement par θ. Soit E l'ensemble des points $(p,q) \in V \times V$ tels que $\theta(p)=\theta(q)$, et soit Δ la diagonale de $V \times V$. Si (p,q) est un point de $C \times C$ non situé sur Δ, on a $\theta(p) \neq \theta(q)$, et la continuité de θ implique qu'il existe un voisinage M de (p,q) dans $V \times V$ tel que $E \cap M = \emptyset$. Par ailleurs, si $p \in C$, $f_1,\ldots,f_n$ forment un système de coordonnées autour de p, d'où il résulte qu'il y a un voisinage de p qui est appliqué biunivoquement par θ, ce qui montre qu'il y a un voisinage M de (p,p) dans $V \times V$ tel que $F \cap M \subset \Delta$. On en conclut qu'il y a un voisinage P de $C \times C$ dans $V \times V$ tel que $F \cap P \subset \Delta$. Puisque C est compact, il y a un ensemble ouvert U_2 contenant C tel que $U_2 \times U_2 \subset P$, et θ est biunivoque sur U_2. Soit $U = U_1 \cap U_2$; faisant usage du corollaire 1 à la prop.5, §V on voit que θ induit une carte de U sur une sous-variété ouverte de R^n. Cette sous-variété, contenant le cube $\theta(C)$, contient aussi l'adhérence d'un cube ouvert contenant C. Donc : <u>si des fonctions</u> $f_1,\ldots,f_n$ <u>forment un système de coordonnées sur un ensemble cubique compact</u> C, <u>il y a un ensemble cubique compact</u> C' <u>dont l'intérieur contient</u> C <u>et sur lequel</u> $f_1,\ldots,f_n$ <u>forment encore un système de coordonnées</u>. De plus, il y a des transformations infinitésimales X_i $(1 \leqq i \leqq n)$ sur U telles que $X_i f_j = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$. Faisant usage de la prop.4, on voit que : <u>si</u> $f_1,\ldots,f_n$ <u>forment un système de coordonnées sur un ensemble cubique compact</u> C, <u>il existe des transformations infinitésimales</u> $X_1,\ldots,X_n$ <u>de</u> V <u>telles que</u> $X_i f_j$ <u>coincide avec</u> δ_{ij} <u>sur</u> C $(1 \leqq i, j \leqq n)$. De plus, si N est un voisinage donné de C, on peut supposer les supports de $X_1,\ldots,X_n$ contenus dans N.

Champs de vecteurs et applications différentiables.

Soient φ une application de classe C^1 d'une variété V dans une variété W, X un champ de vecteurs sur V et Y un champ de vecteurs sur W. On dit que X et Y se correspondent par l'application φ si on a $Y_{\varphi(p)} = d_p\varphi . X_p$ pour tout $p \in V$; cette condition peut encore se mettre sous la forme suivante : pour toute fonction $g \in F(W)$, on a $X(g\circ\varphi) = (Yg)\circ\varphi$.

Proposition 6. Soient φ une application de classe C d'une variété V dans une variété W, X et X' des transformations infinitésimales de V et Y et Y' des transformations infinitésimales de W. Supposons que X et Y se correspondent par φ et qu'il en soit de même de X' et Y' ; $[X,X']$ et $[Y,Y']$ se correspondent alors par φ.

Soit en effet g une fonction de F(W). On a $(X\circ X')(g\circ\varphi) = X((Y'g)\circ\varphi) = ((Y\circ Y')g)\circ\varphi$, et de même $(X'\circ X)(g\circ\varphi) = ((Y'\circ Y)g)\circ\varphi$, d'où $[X,X'](g\circ\varphi) = ([Y,Y']g)\circ\varphi$.

Si une application φ de classe C^1 d'une variété V de dimension m dans une variété W est partout de rang m, il ne peut y avoir plus d'un champ de vecteurs sur V qui corresponde à un champ de vecteurs donné Y sur W ; pour qu'il y en ait un, il faut et suffit que, pour tout $p \in V$, $Y_{\varphi(p)}$ appartienne à l'image de $L_p(V)$ par l'application $d_p\varphi$. Supposons que cette condition soit satisfaite, que φ soit de classe C^k, avec un entier $k \geqq 1$ (resp. de classe C^∞) et que Y soit de classe C^k (resp. : de classe C^∞). Le champ de vecteurs X sur V qui correspond à Y par φ est alors de classe C^{k-1} (resp. : de classe C^∞). On peut en effet trouver m fonctions $g_i \in F(W)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ telles que les différentielles en p des fonctions $f_i = g_i\circ\varphi$ soient linéairement indépendantes. Appliquant la prop. 5, § V à l'application $q \to (f_1(q),\dots,f_m(q))$ de V dans R^m, on voit tout de suite que toute fonction $f \in F(V)$ coïncide sur un voisinage de p avec une fonction de la forme $H(f_1,\dots,f_m)$, où H est une fonction de classe C^k sur R^m. Si $x_1,\dots,x_m$ sont les coordonnées sur R^m, on a

$$X(H(f_1,\dots,f_m))=\Sigma_{i=1}^m \ (\partial H/\partial x_i)(f_1,\dots,f_m).(Yg_i\circ\varphi) .$$

Les fonctions $Yg_i\circ\varphi$ sont de classe C^k (resp.: de classe C^∞), et les $\partial H/\partial x_i$ sont de classe C^{k-1} (resp.: de classe C^∞). Il en résulte que Xf est de classe C^{k-1} (resp.: de classe C^∞), ce qui démontre notre assertion.

En particulier, si V est une variété plongée dans une variété W, et si un champ de vecteurs X sur V correspond à un champ de vecteurs Y sur W par l'application identique, on dit que X est la <u>trace</u> du champ de vecteurs Y sur la variété V.

<u>Proposition 7</u>.- <u>Soit</u> V <u>une sous-variété fermée d'une variété</u> W. <u>Tout champ de vecteurs</u> X <u>de classe</u> C^k <u>sur</u> V (<u>où</u> k <u>est un entier</u> ≥ 0 <u>ou le symbole</u> ∞) <u>est la trace sur</u> V <u>d'un champ de vecteurs de classe</u> C^k <u>sur</u> W.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille dispersée de parties ouvertes de W qui possède les propriétés du lemme 1, § II, dont nous utiliserons les notations. On peut trouver une famille dispersée $(h_j)_{j\in J}$ de fonctions de $F(V)$ telle que $\Sigma_{j\in J} h_j=1$ et que, pour tout $j\in J$, le support de h_j soit contenu dans l'un des ensembles U_i, soit dans $U_{i(j)}$ (prop. 1, § I). On a $X=\Sigma_{j\in J} h_j X$, et le support de $h_j X$ est une partie de $U_{i(j)}$ fermée dans V. Supposons que, pour tout $j\in J$, $h_j X$ (ou plutôt sa restriction à $U_{i(j)}$) soit la trace sur $U_{i(j)}\cap V$ d'un champ de vecteurs Y'_j de classe C^k de $U_{i(j)}$. Soit alors u_j une fonction de $F(W)$ égale à 1 sur le support de h_j et dont le support est contenu dans $U_{i(j)}$; définissons un champ de vecteurs Y_j sur W par les formules

$(Y_j)_q = u_j(q)(Y'_j)_q$ si $q \in U_{i(j)}$, $(Y_j)_q = 0$ si $q \notin U_{i(j)}$. Si $f \in F(W)$, $Y_j f$ est de classe C^k autour de tout point de son support, qui est contenu dans $U_{i(j)}$, d'où $Y_j f \in F^k(V)$, ce qui montre que Y_j est de classe C^k . Le support de Y_j est dans $U_{i(j)}$, ce qui montre que la famille (Y_j) est dispersée, et la trace de Y_j sur V est $h_j X$; le champ de vecteurs $Y = \sum_{j \in J} Y_j$ est de classe C^k et sa trace sur V est X .

Tout revient donc à montrer que, si W est un cube de R^n qui rencontre R^m et X un champ de vecteurs de classe C^k sur $W \cap R^m$, X est la trace sur $W \cap R^m$ d'un champ de vecteurs Y de classe C^k sur W . Or, soient $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées sur R^n ; les coordonnées sur R^m sont donc $x_1, \dots, x_m$, et les fonctions $v_i(x_1, \dots, x_m) = Xx_i$ $(1 \leq i \leq m)$ sont de classe C^k sur $W \cap R^m$; on peut aussi les considérer comme des fonctions de classe C^k sur W , et il suffit de prendre $Y = \sum_{i=1}^{m} v_i(x_1, \dots, x_m)(\partial / \partial x_i)$.

Opérateurs différentiels.

Soit V une variété. Désignons par $\mathcal{O}$ l'algèbre des endomorphismes de la structure d'espace vectoriel de F(V) sur le corps R . Si $h \in F(V)$, nous désignerons par $\mu(h)$ l'opérateur $f \to hf$ de mutliplication par h dans F(V) . Nous appellerons <u>opérateurs différentiels</u> sur V les éléments de la sous-algèbre de $\mathcal{O}$ engendrée par les $\mu(h)$, $h \in F(V)$, et par les transformations infinitésimales de V .

Soit donné un ensemble $\mathbb{T}$ de transformations infinitésimales tel que toute transformation infinitésimale puisse s'écrire comme combinaison linéaire (finie) d'éléments de $\mathbb{T}$ à coefficients dans F(V) (donc, un système de générateurs de la structure de module sur F(V) de l'ensemble des transformations infinitésimales). Tout opérateur différentiel peut alors s'écrire comme somme d'un nombre fini d'opérateurs de la forme

(1) $\mu(h)$ ou $\mu(h)X_1\ldots X_r$.

où $h \in F(V)$, $X_i \in \mathrm{T}$ $(1 \leqq i \leqq r)$. Désignons en effet par O'_d le sous-espace vectoriel de l'algèbre O_d des opérateurs différentiels engendré par les opérateurs de la forme (1) ; O'_d contient donc l'élément unité $\mu(1)$ de O_d, et, pour montrer que $O'_d = O_d$, il suffira de montrer que O'_d est un idéal à gauche de O_d, donc que, si D est un opérateur de la forme (1), et si $h \in F(V)$ et X est une transformation infinitésimale de V, $\mu(h)D$ et XD appartiennent à O'_d. C'est évident pour $\mu(h)D$. Pour voir qu'il en est ainsi pour X, observons que l'on a

$$X\,\mu(h) = \mu(Xh) + \mu(h)X$$

(comme il résulte tout de suite de la formule $X(hf)=(Xh)f+h(Xf)$). Notre assertion pour XD résulte donc tout de suite de ce que X est combinaison linéaire d'éléments de T à coefficients dans $F(V)$.

Considérons en particulier le cas d'une variété V qui admet une carte sur une partie ouverte de R^n ; soient $(f_1,\ldots,f_n)$ un système de coordonnées sur V et $X_1,\ldots,X_n$ les transformations infinitésimales de V telles que $X_i f_j = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i,\, j \leqq n)$. On a donc $[X_i, X_j]f_k = 0$ $(1 \leqq i,j,k \leqq n)$, d'où $[X_i,X_j]=0$ $(1 \leqq i\,,\, j \leqq n)$, ce qui signifie que les opérateurs $X_1,\ldots,X_n$ commutent entre eux dans l'algèbre O_d. Tout opérateur différentiel D de V se met donc sous la forme d'une somme finie

$$D = \sum_{e_1 \geqq 0,\ldots,e_n \geqq 0} \mu(h_{e_1,\ldots,e_n})\, X_1^{e_1}\ldots X_n^{e_n}$$

où les $h_{e_1,\ldots,e_n}$ sont dans $F(V)$ (on convient que X_i^0 représente l'opérateur identique). Cette représentation est d'ailleurs unique. Supposons en effet pour un moment que $D=0$ mais que l'une des fonctions $h_{e_1,\ldots,e_n}$ soit $\neq 0$. Soit alors r le plus petit entier tel qu'il existe des $e_i \geqq 0$ de somme r tels que $h_{e_1,\ldots,e_n} \neq 0$. Si $e_1,\ldots,e_n$ sont des entiers $\geqq 0$ quelconques de somme r, on voit tout de suite que $D(f_1^{e_1}\ldots f_n^{e_n}) = (e_1!)\ldots(e_n!)h_{e_1,\ldots,e_n}$, ce qui entraîne une contradiction.

Revenons au cas d'une variété quelconque. Si D est un opérateur différentiel sur V et $h \in F(V)$, l'opéra teur différentiel $\mu(h)D$ se désigne aussi par hD. Cette loi de composition définit évidemment sur l'ensemble des opérateurs différentiels une structure d'algèbre sur F(V).

Soit maintenant k un entier $\geqq 0$. Si $k > 0$, toute transformation infinitésimale de V se prolonge d'une manière bien déterminée en une application de $F^k(V)$ dans $F^{k-1}(V)$. Nous appellerons <u>opérateurs différentiels</u> sur $F^k(V)$ les applications de $F^k(V)$ dans $F^0(V)$ qui sont des sommes d'applications de la forme $\mu(h)\circ X_1\circ\ldots\circ X_r$, où $h \in F(V)$, où $X_1,\ldots,X_r$ sont des transformations infinitésimales et où $r \leqq k$. Si l est un entier $\leqq k$, on dit qu'un opérateur différentiel sur $F^k(V)$ (ou sur F(V)) est d'ordre l s'il peut se représenter comme somme d'opérateurs de la forme $\mu(h)\circ X_1\circ\ldots\circ X_r$ avec $r \leqq l$. Un opérateur différentiel d'ordre l sur $F^k(V)$ ou sur F(V) se prolonge (d'au moins une manière) en un opérateur différentiel sur $F^l(V)$; un opérateur différentiel d'ordre l sur $F^k(V)$ applique $F^k(V)$ dans $F^{k-l}(V)$. Les opérateurs différentiels d'ordre 0 sont les multiplications par les fonctions de F(V). Si D est un opérateur différentiel d'ordre l sur $F^k(V)$ et D' un opérateur différentiel sur $F^{k-l}(V)$, $D'\circ D$ est un opérateur différentiel sur $F^k(V)$.

Si D est un opéra-teur différentiel sur $F^k(V)$ et $p \in V$, désignons par D_p l'application linéaire $f \to (Df)(p)$ de $F^k(V)$ dans R. On appelle <u>support</u> de D l'adhérence de l'ensemble des points p tels que $D_p \neq 0$; le complémentaire du support de D est donc le plus grand ensemble ouvert U tel que $Df=0$ pour tout $f \in F^k(V)$ dont le support est contenu dans U.

Si $f \in F^k(V)$, le support de Df est contenu dans l'intersection des supports de D et de f. Supposons que D soit d'ordre 1 ; si D' est un opérateur différentiel sur $F^{k-1}(V)$ (sur $F(V)$ si $k = \infty$), le support de $D' \circ D$ est contenu dans l'intersection des supports de D et de D'. Une famille $(D_i)_{i \in I}$ d'opérateurs différentiels sur $F^k(V)$ est dite <u>dispersée</u> si la famille de leurs supports est dispersée.

<u>Proposition 8.- Soit D un opérateur différentiel sur</u> $F^k(V)$ <u>(où k est un entier ≥ 0 ou le symbole ∞). Il existe alors un nombre fini d'opérateurs différentiels</u> E_i, E'_i $(1 \leq i \leq r)$ <u>sur</u> $F^k(V)$ <u>tels que l'on ait</u>

$$D(fg) = \sum_{i=1}^{r} (E_i f)(E'_i g)$$

<u>pour tout couple</u> (f,g) <u>de fonctions de</u> $F^k(V)$.

Nous démontrerons par récurrence sur l que cette assertion est vraie pour les opérateurs différentiels D d'ordre l (où $l \leq k$ si $k \neq \infty$). Elle est évidemment vraie pour $l=0$, car $hfg = (hf)g$ si $h \in F(V)$. Il suffira donc de montrer que, si elle est vraie pour un opérateur D d'ordre $l-1$ et si X est une transformation infinitésimale, elle est vraie pour $D \circ X$. Or D se prolonge en un opérateur différentiel sur $F^{k-1}(V)$ (si $k=\infty$, on convient que $k-1$ représente encore le symbole ∞) ; il résulte de l'hypothèse inductive qu'il existe des opérateurs différentiels E_i, E'_i sur $F^{k-1}(V)$ tels que l'on ait $D(fg)=\sum_{i=1}^{r} (E_i f)(E'_i g)$ pour tout couple (f,g) de fonctions de $F^{k-1}(V)$. Si f et g sont dans $F^k(V)$, on a $(D \circ X)(fg) = \sum_{i=1}^{r} ((E_i \circ X)f(E'_i g) + \sum_{i=1}^{r} (E_i f)((E'_i \circ X)g)$, ce qui démontre la prop.8 pour les opérateurs d'ordre l.

§ 8. TOPOLOGIES SUR LES ENSEMBLES $F^k(V)$.

Nous désignerons par V une variété et par k soit un entier $\geqq 0$ soit le symbole ∞. Si l est un entier $\geqq 0$, on conviendra qu'il est vrai que $l \leqq \infty$, que $l < \infty$ et que, si $k = \infty$, $k-1$ représente encore le symbole ∞.

1. Les espaces $\mathcal{E}^k(V)$.

L'ensemble $F^o(V)$ est celui des fonctions continues sur V ; nous désignerons par $\mathcal{E}^o(V)$ l'espace obtenu en munissant $F^o(V)$ de la topologie (et de la structure uniforme) de la convergence uniforme sur tout compact. C'est un espace vectoriel topologique localement convexe ; c'est de plus une algèbre topologique sur le corps R. Si h est une fonction à support compact de $F(V)$ et $f \in F^o(V)$, soit $A_h(f)$ le nombre $\sup_{p \in V} |h(p)f(p)|$. Il est clair que A_h est une semi-norme continue sur $\mathcal{E}^o(V)$. De plus, la famille de toutes ces semi-normes (pour tous les $h \in F(V)$ à supports compacts) définit la topologie de $\mathcal{E}^o(V)$. En effet, si K est une partie compacte de V, il y a une fonction $h \in F(V)$ à support compact qui est égale à 1 sur K ; on a alors $\sup_{p \in K} |f(p)| \leqq A_h(f)$, ce qui démontre notre assertion. Les opérateurs différentiels sur $F^o(V)$ étant les multiplica tions par les fonctions de $F(V)$, on voit que la topologie de $\mathcal{E}^o(V)$ est la moins fine des topologies sur $F^o(V)$ qui rendent continus tous les opérateurs différentiels à supports compacts sur $F^o(V)$, considérés comme applications de $F^o(V)$ dans $\mathcal{E}^o(V)$.

Tout opérateur différentiel sur $F^k(V)$ applique cet ensemble dans $\mathcal{E}^o(V)$. Nous désignerons par $\mathcal{E}^k(V)$ l'espace obtenu en munissant $F^k(V)$ de la topologie la moins fine qui rende continus tous les opérateurs différentiels à supports compacts sur $F^k(V)$, considérés comme applications de cet ensemble dans l'espace $\mathcal{E}^o(V)$. Si D est un opérateur différentiel à support compact sur $F^k(V)$, et $f \in F^k(V)$, nous pose rons,

$$A_D(f) = \sup_{p\in V} |(Df)(p)| .$$

Chaque A_D est donc une semi-norme, et la topologie de $\mathcal{E}^k(V)$ est évidemment définie par la famille de ces semi-normes. L'espace $\mathcal{E}^k(V)$ est donc un espace vectoriel topologique localement convexe.

<u>Proposition 1.- Si l est un entier positif</u> $\leq k$, <u>la topologie de</u> $\mathcal{E}^k(V)$ <u>est plus fine que celle induite sur</u> $F^k(V)$ <u>par la topologie de</u> $\mathcal{E}^l(V)$.

Cela résulte immédiatement du fait que la restriction à $F^k(V)$ d'un opérateur différentiel à support compact sur $F^l(V)$ est un opérateur différentiel à support compact sur $F^k(V)$.

Prenant $l=0$ et observant que $\mathcal{E}^0(V)$ est séparé, on voit que les espaces $\mathcal{E}^k(V)$ sont tous séparés.

<u>Proposition 2.- Soit</u> l <u>un entier positif</u> $\leq k$ <u>et soit</u> D <u>un opérateur différentiel d'ordre</u> l <u>sur</u> $F^k(V)$; D <u>est alors une application continue de</u> $\mathcal{E}^k(V)$ <u>dans</u> $\mathcal{E}^{k-l}(V)$.

Si D' est un opérateur différentiel à support compact sur $F^{k-l}(V)$, $D'\circ D$ est un opérateur différentiel à support compact sur $F^k(V)$; la prop.2 résulte immédiatement de là .

L'espace $\mathcal{E}^\infty(V)$ se désigne aussi par $\mathcal{E}(V)$; il résulte de la prop.2 que tout opérateur différentiel sur $F(V)$ est une application continue de $\mathcal{E}(V)$ dans lui-même .

Pour étudier les espaces $\mathcal{E}^k(V)$, nous considérons d'abord le cas où V est une sous-variété ouverte de R^n . Soient x_i $(1 \leq i \leq n)$ les coordonnées dans R^n ; si $e_1,\ldots,e_n$ sont des entiers ≥ 0 de somme $\leq k$, soit $D(e_1,\ldots,e_n)$ l'opérateur différentiel $\partial^{e_1+\cdots+e_n}/\partial x_1^{e_1}\ldots\partial x_n^{e_n}$ sur $F^k(V)$. Toute transformation infinitési-

male

de V étant combinaison linéaire de $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$ à coefficients dans $F(V)$, il est clair que tout opérateur différentiel D sur $F^k(V)$ peut se mettre sous la forme

$$D = \sum_{e_1+\ldots+e_n \leq k} \mu(w(e_1,\ldots,e_n)) \circ D(e_1,\ldots,e_n)$$

où $\mu(w(e_1,\ldots,e_n))$ est l'opérateur de multiplica tion par une fonction $w(e_1,\ldots,e_n)$ de $F(V)$ (si $k=\infty$, il n'y a qu'un nombre fini des fonctions $w(e_1,\ldots,e_n)$ qui sont $\neq 0$). De plus, en appliquant D à un polynome arbitraire en $x_1,\ldots,x_n$, on voit facilement que les supports des $w(e_1,\ldots,e_n)$ sont contenus dans celui de D. On voit donc que, pour qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur $F^k(V)$ converge vers une fonction $g \in F^k(V)$ dans $\mathcal{E}^k(V)$, il faut et suffit que, pour tout système $(e_1,\ldots,e_n)$ d'entiers ≥ 0 de somme $\leq k$, l'image de $\mathcal{F}$ par l'application $f \to D(e_1,\ldots,e_n)f$ converge uniformément sur toute partie compacte de V vers $D(e_1,\ldots,e_n)g$. L'espace $\mathcal{E}^k(V)$ est donc alors identique à celui que nous avons étudié au chap. , ; nous y avons notamment établi qu'il est métrisable et complet. Nous allons voir qu'il en est encore ainsi dans le cas d'une variété quelconque.

Soient V une variété et U une sous-variété ouverte de V qui soit l'intérieur d'un ensemble cubique compact C de V. Si f est une fonction sur V, nous désignerons par $\rho_U(f)$ la restriction de f à U ; ρ_U applique donc $F^k(V)$ dans $F^k(U)$. Nous allons montrer que c'est une application continue de $\mathcal{E}^k(V)$ dans $\mathcal{E}^k(U)$. Il suffira de montrer que, si Δ est un opérateur différentiel à support compact sur $F^k(U)$, il y a un opérateur différentiel D à support compact sur $F^k(V)$ tel que $\Delta \circ \rho_U = \rho_U \circ D$. Soit $(f_1,\ldots,f_n)$ un système de coordonnées sur C, et soient $X_1,\ldots,X_n$ des transformations infinitésimales de V telles que $V_i f_j$ coincide avec $\delta_{i,j}$ sur C $(1 \leqq i,j \leqq n)$; la restriction X_i' du champ de vecteurs X_i à U est alors une transformation infinitésimale sur U, et Δ est une somme d'opérateurs de la forme $\mu(w')\circ Y_1'\circ\dots\circ Y_r'$, où w' est une fonction à support compact de $F(U)$ et où chaque Y_i' est l'une des transformations infinitésimales $X_1',\dots,X_n'$. Nous pouvons donc nous limiter au cas où Δ est lui-même de la forme indiquée. Soit alors w la fonction sur V qui prolonge w' et qui est nulle en dehors de U ; si $Y_i'=X_{j(i)}'$, posons $Y_i=X_{j(i)}$. La fonction w est alors dans $F(V)$ et l'opérateur $D=\mu(w)\circ Y_1\circ\dots\circ Y_r$ possède les propriétés requises. Soit réciproquement E une partie compacte de U ; soit $\mathfrak{F}$ une base de filtre sur l'ensemble des fonctions de $F^k(V)$ à supports contenus dans U. Si l'image de $\mathfrak{F}$ par ρ_U converge vers une fonction g' de $F^k(U)$ dans $\mathcal{E}^k(U)$, le filtre $\mathfrak{F}$ converge vers une fonction de $F^k(V)$ dans $\mathcal{E}^k(V)$. Soit en effet D un opérateur différentiel sur $F^k(V)$; il est évident qu'il existe un opérateur différentiel Δ sur $F^k(U)$ tel que $\Delta\circ\rho_U = \rho_U\circ D$. Puisque Δ est une application continue de $\mathcal{E}^k(U)$ dans $\mathcal{E}^o(U)$, l'image de $\mathfrak{F}$ par $\rho_U\circ D$ converge vers $\Delta g'$ dans $\mathcal{E}^o(U)$. L'image de $\mathfrak{F}$ par D étant une base de filtre sur l'ensemble des fonctions à supports contenus dans E, il en résulte immédiatement que cette image converge dans $\mathcal{E}^o(V)$ vers une fonction continue. Soit g la limite de $\mathfrak{F}$ dans $\mathcal{E}^o(V)$; g est nulle en dehors de U, et $\rho_U(g)=g'$; il en résulte que $g\in F^k(V)$; de plus, si D est un opérateur différentiel, il est clair que Dg est la limite dans $\mathcal{E}^o(V)$ de l'image de $\mathfrak{F}$ par D ; on en conclut que $\mathfrak{F}$ converge vers g dans $\mathcal{E}^k(V)$.

Ceci dit, on peut trouver une famille $(C_i)_{i\in I}$ d'ensembles cubiques compacts C_i dont les intérieurs U_i forment un recouvrement de V.

Soit $(h_j)_{1 \leqq j < \infty}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(V)$ de somme 1 telle que, pour chaque j, le support de h_j soit contenu dans l'un des U_i, disons dans $U_{i(j)}$. Pour chaque j, on peut trouver une suite $(\Delta(j;\nu))_{1 \leqq \nu < \infty}$ d'opérateurs différentiels à supports compacts sur $F^k(U_{i(j)})$ tels que les semi-normes correspondantes $A_{\Delta(j;\nu)}$ définissent la topologie de $\mathcal{E}^k(U_{i(j)})$. Soit ρ_j l'opération de contra-ction à $U_{i(j)}$, et soit $D(j;\nu)$ un opérateur différentiel à support compact sur $F^k(V)$ tel que $\Delta(j;\nu)\circ\rho_j = \rho_j \circ D(j;\nu)$. Montrons que les semi-normes $A_{D(j;\nu)}$ $(1 \leqq j, \nu < \infty)$ définissent la topologie de $\mathcal{E}^k(V)$. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur $F^k(V)$ tel que, pour tout couple $(j;\nu)$, l'image de $\mathfrak{F}$ par $A_{D(j;\nu)}$ converge vers 0 dans R. Il est alors clair que, pour tout j, l'image de $\mathfrak{F}$ par ρ_j converge vers 0 dans $\mathcal{E}^k(U_{i(j)})$; il en est donc de même de l'image de $\mathfrak{F}$ par l'application $f \to \rho_j(h_j f)$. Le support de $h_j f$ étant toujours contenu dans celui de h_j, qui est une partie compacte de $U_{i(j)}$, on en conclut que $\lim_{\mathfrak{F}} h_j f = 0$ pour tout j. Soit D un opérateur différentiel à support compact sur $F^k(V)$; il n'y a qu'un nombre fini d'indices j tels que le support de h_j rencontre D ; supposons que, pour $j > j_0$, le support de h_j ne rencontre pas celui de D. On a alors $Df = \sum_{j=1}^{j_0} D(h_j f)$; il en résulte que l'image de $\mathfrak{F}$ par D converge vers 0 dans $\mathcal{E}^0(V)$; ceci étant vrai pour tout opérateur différentiel D à support compact sur $F^k(V)$, nous avons éta bli la

<u>Proposition 3.- L'espace</u> $\mathcal{E}^k(V)$ <u>est métrisable</u>.

Démontrons maintenant la

<u>Proposition 4.- L'espace</u> $\mathcal{E}^k(V)$ <u>est complet</u>.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{E}^k(V)$. Si D est un opérateur différentiel sur $F^k(V)$, il résulte des prop. 1 et 2 que l'image de $\mathcal{F}$ par D converge vers un élément g_D dans $\mathcal{E}^0(V)$. Soit en particulier g la limite de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}^0(V)$. Si j est un entier quelconque, l'image de $\mathcal{F}$ par ρ_j converge vers $\rho_j(g)$ dans $\mathcal{E}^0(U_{i(j)})$. Mais cette image est une base de filtre de Cauchy dans $\mathcal{E}^k(U_{i(j)})$, qui est complet ; $\rho_j(g)$ est donc dans $F^k(U_{i(j)})$. Ceci étant vrai pour tout j, on a $g \in F^k(V)$. De plus, l'image de $\mathcal{F}$ par $\rho_j \circ D$ converge vers $\rho_j(g_D)$ dans $\mathcal{E}^0(U_{i(j)})$; or, il existe un opérateur différentiel Δ sur $F^k(U_{i(j)})$ tel que $\Delta \circ \rho_j = \rho_j \circ D$; on a donc $\rho_j(g_D) = \Delta(\rho_j(g)) = \rho_j(Dg)$; ceci étant vrai pour tout j, on a $Dg = g_D$. Il résulte de là que $\mathcal{F}$ converge vers g dans $\mathcal{E}^k(V)$.

2. <u>Les espaces</u> $\mathcal{F}^k(V)$.

A tout opérateur différentiel D à support compact sur $F^k(V)$ nous avons associé une semi-norme A_D sur $F^k(V)$; nous désignerons par N(D) l'ensemble des $f \in F^k(V)$ tels que $A_D(f) \leqq 1$; les ensembles N(D), pour tous les opérateurs différentiels D à supports compacts sur $F^k(V)$, forment un système fondamental de voisinages de O dans $\mathcal{E}^k(V)$. Soit maintenant $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties de $F^k(V)$ qui peuvent se mettre sous la forme $\bigcap_{i \in I} N(D_i)$, $(D_i)_{i \in I}$ étant une famille <u>dispersée</u> d'opérateurs différentiels à supports compacts sur $F^k(V)$. Tout ensemble de $\mathcal{N}$ contient O ; l'intersection de deux ensembles de $\mathcal{N}$ appartient à $\mathcal{N}$; si $N = \bigcap_{i \in I} N(D_i)$ est un ensemble de $\mathcal{N}$, on a $-N = N$ et il y a un ensemble $N' \in \mathcal{N}$ tel que $N' + N' \subset \mathcal{N}$, à savoir $N' = \bigcap_{i \in I} N(2D_i)$. L'ensemble $\mathcal{N}$ est donc l'ensemble des voisinages de O d'une structure de groupe topologique sur le groupe additif de $F^k(V)$; nous désignerons ce groupe topologique par $\mathcal{F}^k(V)$. Nous poserons $\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}^\infty(V)$. La topologie de $\mathcal{F}^k(V)$ est évidemment plus fine que celle de $\mathcal{E}^k(V)$. Elle lui est d'ailleurs identique si V est compact, car, dans ce cas, une famille dispersée d'opérateurs différentiels $\neq 0$ est finie. Par contre, si V n'est pas compact, $\mathcal{F}^k(V)$ est différent de $\mathcal{E}^k(V)$, car on voit facilement que, si f est une fonction de $F^k(V)$ à support non compact, il y a un ensemble $N \in \mathcal{N}$ tel que $af \notin N$ pour tout a réel $\neq 0$; ceci montre en même temps que, si V n'est pas compact, $\mathcal{F}^k(V)$ <u>n'est pas</u> un espace vectoriel topologique.

<u>Proposition 5</u>. <u>L'espace</u> $\mathcal{F}^k(V)$ <u>est complet</u>.

Soit en effet $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{F}^k(V)$; c'est aussi un filtre de Cauchy sur $\mathcal{E}^k(V)$, et, comme tel, il converge dans $\mathcal{E}^k(V)$ vers une fonction g de $F^k(V)$. Montrons que $\mathfrak{F}$ converge vers g dans $\mathcal{F}^k(V)$. Soit $N = \bigcap_{i \in I} N(D_i)$ un ensemble de $\mathcal{N}$, $(D_i)_{i \in I}$ étant une famille dispersée d'opérateurs différentiels à supports compacts. Soit $N' = \bigcap_{i \in I} N(2D_i)$; puisque $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy, il y a un ensemble $E \in \mathfrak{F}$ tel que $E \subset f + N'$ pour tout $f \in E$. Si E n'était pas contenu dans $g+N$, il y aurait une fonction $f \in E$ et un indice $i \in I$ tels que $f \notin g + N(D_i)$; puisque $N(2D_i) + N(2D_i) \subset N(D_i)$, il en résulterait que E n'aurait aucun élément commun avec $g + N(2D_i)$, ce qui est impossible puisque $\mathfrak{F}$ converge vers g dans $\mathcal{E}^k(V)$. Il y a donc, pour tout $N \in \mathcal{N}$, un ensemble de $\mathfrak{F}$ contenu dans $g+N$, ce qui montre que $\mathfrak{F}$ converge vers g dans $\mathcal{F}^k(V)$.

<u>Proposition 6</u>.- <u>L'espace</u> $\mathcal{F}^k(V)$ <u>est un espace de Baire</u>.

Soit $(\Omega_r)_{1 \leq r < \infty}$ une suite d'ensembles ouverts denses dans $\mathcal{F}^k(V)$, et soit Ω un ensemble ouvert non vide dans $\mathcal{F}^k(V)$;

nous allons montrer que $\Omega \cap \bigcap_{r=1}^{\infty} \Omega_r$ n'est pas vide. Soit δ une distance qui définisse la topologie de $\mathcal{E}^k(V)$. Nous allons construire une suite (f_r) de fonctions de $\mathcal{F}^k(V)$ et une suite (N_r) d'ensembles du système fondamental $\mathcal{N}$ de voisinages de 0 défini plus haut de telle manière que les conditions suivantes soient satisfaites :

$P_r)$: on a, pour $r > 1$, $\delta(f_r, f_{r-1}) < 2^{-r}$;

$P'_r)$: si $1 \leqq s \leqq r$, f_r est intérieur à $f_s + N_s$;

$P''_r)$: si $1 \leqq s \leqq r$, on a $f_r + N_r \subset \Omega_s$.

L'ensemble Ω_1 étant dense, $\Omega \cap \Omega_1$ contient au moins une fonction f_1, et il y a un ensemble N_1 de $\mathcal{N}$ tel que $f_1 + N_1 \subset \Omega \cap \Omega_1$. Supposons $f_1, \ldots, f_r, N_1, \ldots, N_r$ déjà construits et les conditions $P_s), P'_s), P''_s)$ satisfaites pour $s \leqq r$. Soit M_s l'intérieur de N_s et soit S la boule ouverte de centre f_r et de rayon $2^{-(r+1)}$ par rapport à la distance δ. La topologie de $\mathcal{F}^k(V)$ étant plus fine que celle de $\mathcal{E}^k(V)$, S est ouvert dans $\mathcal{F}^k(V)$. L'ensemble $U = S \cap \bigcap_{s=1}^{r} (f_s + M_s)$ est ouvert dans $\mathcal{F}^k(V)$ et contient f_r ; Ω_{r+1} étant partout dense, $U \cap \Omega_{n+1}$ contient au moins un élément f_{r+1}, et il existe un ensemble N_{r+1} de $\mathcal{N}$ tel que $f_{r+1} + N_{r+1} \subset U \cap \Omega_{r+1}$. Il est alors clair que les conditions $P_s), P'_s), P''_s)$ sont satisfaites pour $s \leqq r+1$. Ceci dit, il résulte des conditions (P_r) que (f_r) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}^k(V)$; soit f sa limite. Par ailleurs, si D est un opérateur différentiel à support compact sur $\mathcal{F}^k(V)$, $N(D)$ est évidemment une partie fermée de $\mathcal{E}^k(V)$; il en résulte que les ensembles de $\mathcal{N}$ sont fermes dans $\mathcal{E}^k(V)$. Il résulte donc des conditions $P'_r)$ que $f \in f_s + N_s$ pour tout s, puis des conditions $P''_r)$ que $f \in \Omega_s$ pour tout s. Enfin, on a $f \in f_1 + N_1 \subset \Omega$, d'où $f \in \Omega \cap \bigcap_{s=1}^{\infty} \Omega_s$.

3. Les espaces $\mathcal{D}^k(V)$.

Nous désignerons par $\mathcal{D}^k(V)$ le sous-espace de $\mathcal{F}^k(V)$ porté par l'ensemble des fonctions à supports compacts de $F^k(V)$. Nous poserons $\mathcal{D}(V) = \mathcal{D}^\infty(V)$. L'espace $\mathcal{D}^k(V)$ est un espace vectoriel topologique. Soit en effet $N = \bigcap_{i \in I} N(D_i)$ un ensemble de l'ensemble $\mathcal{N}$ défini au n°2, $(D_i)_{i \in I}$ étant une famille dispersée d'opérateurs différentiels à supports compacts, et soit f une fonction de $F^k(V)$ à support compact. L'ensemble I' des i tels que le support de D_i rencontre celui de f est fini ; il y a donc un nombre $a > 0$ tel que $af \in N(D_i)$ pour tout $i \in I'$; il en résulte que $xf \in N$ pour tout $x \in R$ tel que $|x| \leq a$, ce qui démontre que $\mathcal{D}^k(V)$ est un espace vectoriel topologique.

Si L est une partie compacte de V , nous désignerons par $F_L^k(V)$ l'ensemble des fonctions de $F^k(V)$ à supports contenus dans L .

Proposition 7.- Si L est une partie compacte de V , l'ensemble $F_L^k(V)$ est fermé dans $\mathcal{E}^k(V)$ et dans $\mathcal{F}^k(V)$, et les topologies induites par $\mathcal{E}^k(V)$ et $\mathcal{F}^k(V)$ sur cet ensemble sont identiques. L'ensemble $\mathcal{D}^k(V)$ est fermé dans $\mathcal{F}^k(V)$.

On a $F_L^k(V) = F^k(V) \cap F_L^o(V)$; or $F_L^o(V)$ est l'ensemble des fonctions continues sur V nulles en tout point du complémentaire de L et est par suite fermé dans $\mathcal{E}^o(V)$. La topologie de $\mathcal{E}^k(V)$ étant plus fine que celle induite sur $F^k(V)$ par $\mathcal{E}^o(V)$, $F_L^k(V)$ est fermé dans $\mathcal{E}^k(V)$ et, a fortiori, dans $\mathcal{F}^k(V)$. Si $(D_i)_{i \in I}$ est une famille dispersée d'opérateurs différentiels à supports compacts sur $F^k(V)$, l'ensemble I' des i tels que le support de D_i rencontre L est fini , d'où $F_L^k(V) \cap \bigcap_{i \in I} N(D_i) = F_L^k(V) \cap \bigcap_{i \in I'} N(D_i)$; or, ce dernier ensemble est un voisinage de 0 dans la topologie induite sur $F_L^k(V)$ par $\mathcal{E}^k(V)$, ce qui montre que les topologies induites sur $F_L^k(V)$ par $\mathcal{E}^k(V)$ et par

$\mathcal{F}^k(V)$ sont identiques. Soit maintenant f un élément de $F^k(V)$ adhérent à $\mathcal{D}^k(V)$ dans $\mathcal{F}^k(V)$. Nous voulons montrer que f est à support compact. Supposons pour un moment qu'il n'en soit pas ainsi. L'espace V étant dénombrable à l'infini, il existe alors un ensemble dénombrable infini discret E de V tel que $f(p)\neq 0$ pour tout $p\in E$. On peut trouver une suite croissante $(L_r)_{0\leq r<\infty}$ de parties compactes de V qui possèdent les propriétés suivantes : $L_0=\emptyset$; si $r>0$, L_{r-1} est dans l'intérieur de L_r ; $\bigcup_{r=0}^{\infty} L_r = V$. Pour chaque $p\in E$, soit $r(p)$ le plus grand indice r tel que $p\notin L_r$, et soit $U(p)$ le complémentaire de $L_{r(p)}$. La famille $(U(p))_{p\in E}$ est dispersée. En effet, si L est une partie compacte de V, il y a un s tel que $L\subset L_s$, d'où $L\cap U(p)=\emptyset$ si $p\notin L_s$; or E, étant discret, ne contient qu'un nombre fini de points dans L_s. Si $p\in E$, soit h_p une fonction de $F(V)$ qui prenne la valeur $2(f(p))^{-1}$ en p et dont le support soit contenu dans $U(p)$, et soit D_p l'opérateur de multiplication par h_p. L'ensemble $N=\bigcap_{p\in E} N(D_p)$ est dans $\mathcal{N}$; si $f'\in f+N$, on a $2\left|(f'(p)-f(p))(f(p))^{-1}\right|\leqq 1$ pour $p\in E$, d'où $f'(p)\neq 0$; $f+N$ ne rencontre donc pas $\mathcal{D}^k(V)$, ce qui est impossible.

<u>Corollaire</u>. <u>L'espace $\mathcal{D}^k(V)$ est complet</u>.

Supposant V non compact, soit $(L_r)_{1\leq r<\infty}$ une suite de parties compactes qui recouvre V et telle que toute partie compacte de V soit contenue dans l'un des L_r. Les ensembles $F^k_{L_r}(V)$ sont alors des sous-groupes fermés de $\mathcal{D}^k(V)$ distincts de $\mathcal{D}^k(V)$; ces ensembles sont donc partout non denses. Mais leur réunion est $\mathcal{D}^k(V)$, ce qui montre que $\mathcal{D}^k(V)$ <u>n'est pas</u> un espace de Baire.

Proposition 8.- Pour qu'une application linéaire Λ de $\mathcal{D}^k(V)$ dans un espace vectoriel topologique localement convexe soit continue, il faut et suffit que, pour toute partie compacte L de V , la restriction de Λ à l'ensemble $F^k_L(V)$ des fonctions de $F^k(V)$ à supports contenus dans L soit continue.

La topologie d'un espace vectoriel localement convexe peut être définie par une famille de semi-normes ; si ρ est l'une quelconque de ces semi normes, $\rho \circ \Lambda$ est une semi-norme sur l'espace vectoriel $F^k_{comp.}(V)$ des fonctions à supports compacts de $F^k(V)$. Il suffira donc de montrer que, si λ est une semi-norme sur $F^k_{comp.}(V)$ qui est continue sur tout $F^k_L(V)$ et a un nombre >0 , il y a un voisinage N de 0 dans $\mathcal{D}^k(V)$ tel que la condition $f \in N$ entraîne $\rho(f) \leqq a$. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement dispersé de V par des ensembles ouverts relativement compacts, et soit $(h_j)_{j \in J}$ une famille dispersée de fonctions toutes $\neq 0$ de $F(V)$ telle que $\sum_{j \in J} h_j = 1$ et que, pour chaque j , le support L_j de h_j soit contenu dans l'un des U_i , disons dans $U_{i(j)}$. L'ensemble J est dénombrable ; il existe donc une famille $(a_j)_{j \in J}$ de nombres $a_j > 0$ telle que $\sum_{j \in J} a_j = a$. Il existe pour chaque j un voisinage N_j' de 0 dans $\mathcal{E}^k(V)$ tel que les conditions $f \in N_j'$, $f \in F^k_{L_j}(V)$ entraîne $\rho(f) \leqq a_j$. L'application $f \to h_j f$ de $\mathcal{E}^k(V)$ dans lui-même étant continue, il existe un voisinage N_j de 0 dans $\mathcal{E}^k(V)$ tel que la condition $f \in N_j$ entraîne $\rho(h_j f) \leq a_j$ (car, en tout état de cause, $h_j f$ appartient toujours à $F^k_{L_j}(V)$) . Il existe un nombre fini d'opérateurs différentiels à supports compacts $D'_{j,l}$ $(1 \leqq l \leqq m_j)$ tels que $\bigcap_{l=1}^{m_j} N(D'_{j,l}) \subset N_j$. Soit h_j' une fonction de $F(V)$ égale à 1 sur L_j et dont le support soit contenu dans $U_{i(j)}$, et soit $D_{j,l} = D'_{j,l} \circ \mu(h_j')$, où $\mu(h_j')$ est l'opérateur de multiplication par h_j' .

Si $f \in \bigcap_{l=1}^{m_j} N(D_{j,l})$, on peut écrire $h_j f = h_j(h'_j f)$ et $D'_{j,l}(h'_j f) = D_{j,l} f$, d'où $\rho(h_j f) \leqq a_j$. Si L est une partie compacte quelconque de V , il n'y a qu'un nombre fini d'indices $i \in I$ tels que L rencontre U_i , et, pour chaque i , il n'y a qu'un nombre fini d'indices $j \in J$ tels que L_j rencontre U_i . Il résulte immédiatement de là que la famille de tous les opérateurs différentiels $D_{j,l}$ $(j \in J, 1 \leqq l \leqq m_j$ est dispersée, donc que $N = F^k_{\text{comp.}}(V) \cap \bigcap_{j,l} N(D_{j,l})$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{D}^k(V)$. Soit f un élément de cet ensemble ; on a alors $f = \sum_{j \in J} h_j f$; f étant à support compact, il n'y a qu'un nombre fini d'indices j pour lesquels $h_j f \neq 0$; on a donc $\lambda(f) \leqq \sum_{j \in J} \lambda(h_j f)$. Or, pour tout indice j , on a $f \in \bigcap_{l=1}^{m_j} N(D_{j,l})$, d'où $\lambda(h_j f) \leqq a_j$ et par suite $\lambda(f) \leqq a$, ce qui démontre la prop.8 .

NBR068 86

157 bis

§ IX. LE THÉOREME D'IMMERSION.

<u>Théorème 1. Toute variété</u> V <u>de dimension</u> n <u>est isomorphe à une sous-variété fermée de</u> R^{2n+1} .

Nous poserons dans ce qui suit $m=2n+1$. Si $y_1,\dots,y_m$ sont les coordonnées sur R^m , une application g de V dans R^m est déterminée par la donnée des fonctions $g_j=y_j\circ g$ $(1 \leq j \leq m)$, et, pour que g soit de classe C^∞ , il faut et suffit que ces fonctions appartiennent à $F(V)$. Nous identifierons dans ce qui suit les applications g de classe C^∞ de V dans R^m avec les éléments correspondants $(g_1,\dots,g_m)$ du produit $F^m(V)$ de m ensembles identiques à $F(V)$, et nous munirons cet ensemble de la topologie qui en fait le produit $\mathcal{F}^m(V)$ de m espaces identiques à $\mathcal{F}(V)$. L'espace $\mathcal{F}(V)$ étant un espace de Baire (prop.1, § VIII), il en est de même de $\mathcal{F}^m(V)$.

<u>Lemme 1. Soit</u> C <u>un ensemble cubique compact de</u> V . <u>L'ensemble</u> Ω <u>des applications</u> $g\in\mathcal{F}^m(V)$ <u>qui sont biunivoques et partout de rang</u> n <u>sur</u> C <u>est ouvert dans</u> $\mathcal{F}^m(V)$.

Soit $(f_1,\dots,f_n)$ un système de coordonnées sur C et soient $X_1,\dots,X_n$ des transformations infinitésimales de V telles que X_if_j coincide avec δ_{ij} sur C $(1 \leq i, j \leq n)$.

Nous désignerons par $\mathcal{X}$ l'espace des matrices rectangulaires à n lignes et m colonnes à coefficients réels et par φ l'application de $\mathcal{F}^m(V)\times V^m$ dans $\mathcal{X}$ qui fait correspondre au point $((g_1,\dots,g_m),(p_1,\dots,p_m))\in\mathcal{F}^m(V)\times V^m$ la matrice $((X_ig_j)(p_j))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$. Cette application est continue. En effet, la topologie de $\mathcal{F}(V)$ étant plus fine que celle de la convergence uniforme sur tout compact, l'application $(u,p)\to u(p)$ de $\mathcal{F}(V)\times V$ dans R est continue. Les applications $u\to X_iu$ de $\mathcal{F}(V)$ dans lui-même étant continues, les applications $(u,p)\to(X_iu)(p)$ $(1\leq i\leq n)$ sont continues.

ce qui démontre notre assertion. Nous désignerons par $\mathfrak{X}_o$ l'ensemble de celles des matrices de $\mathfrak{X}$ qui sont de rang n ; cet ensemble est ouvert dans $\mathfrak{X}$. Pour qu'une application $g \in \mathfrak{F}^m(V)$ soit de rang n en un point $p \in C$, il faut et suffit que $\varphi(g;p,\dots,p) \in \mathfrak{X}_o$. En effet, les vecteurs $(X_i)_p$ $(1 \leqq i \leqq n)$ forment une base de l'espace tangent à V en p , et on a $\langle d_p g.(X_i)_p, d_{g(p)}y_j \rangle = (X_i g_j)(p)$, ce qui démontre notre assertion.

Ceci dit, soit g un élément de Ω . Si P est l'ensemble des points $(p,\dots,p)$, $p \in C$, l'ensemble $\varphi(\{g\} \times P)$ est contenu dans $\mathfrak{X}_o$. Il y a donc un voisinage de cet ensemble dont l'image par φ est contenue dans $\mathfrak{X}_o$. L'ensemble $\{g\} \times P$ étant compact, il y a un voisinage N de g dans $\mathfrak{F}^m(V)$ et un voisinage M de P dans V^n tels que : $\varphi(N \times M) \subset \mathfrak{X}_o$. Si $g' \in N$, on a $\varphi(\{g'\} \times P) \subset \mathfrak{X}_o$, ce qui montre que g' est partout de rang n sur C . Soit θ l'application $p \to (f_1(p),\dots,f_n(p))$ de V dans R^n . On sait qu'il y a un ensemble ouvert U contenant C tel que θ induise une carte de U sur une partie ouverte de R^n . Soit U' une partie de U telle que $\theta(U')$ soit un cube ouvert de R^n ; nous allons montrer que, si $U'^n \subset M$, tout élément g' de N induit une application biunivoque de $U' \cap C$. Posons $g' = (g'_1,\dots,g'_n)$; il y a des fonctions $G'_j(x_1,\dots,x_n)$ $(1 \leqq j \leqq m)$ de classe C^∞ sur $\theta(U)$ telles que, pour chaque j , g'_j coïncide sur U avec $G'_j(f_1,\dots,f_n)$. Soient p et q des points de $U' \cap C$. On peut écrire

$$g'_j(q) - g'_j(p) = \Sigma_{i=1}^n \, (\partial G'_j/\partial x_i)(a_{j1},\dots,a_{jn})(f_i(q) - f_i(p))$$

où $a_{ji} = t_j f_i(p) + (1-t_j) f_i(q)$, $0 \leqq t_j \leqq 1$ (en effet, le segment qui joint les points $\theta(p)$ et $\theta(q)$ dans R^n est contenu dans $\theta(U)$). On a donc $a_{ji} = f_i(p_j)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, où p_j est un point de $U' \cap C$. Or $X_i g'_j$ coïncide avec $(\partial G'_j/\partial x_i)(f_1,\dots,f_n)$ sur C , d'où

$$g_j^!(q)-g_j^!(p) = \Sigma_{i=1}^{n} \ (X_i g_j^!)(p_j)(f_i(q)-f_i(p)) \quad .$$

Puisque $g \in N$ et $U'^m \subset M$, la matrice $((X_i g_j^!)(p_j))_{1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq m}$ est de rang n, et la condition $g'(p)=g'(q)$ entraîne $f_i(p)=f_i(q)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, d'où $p=q$, ce qui démontre notre assertion. Chaque point de C admet un voisinage ouvert U' dans V qui est appliqué par θ sur un cube ouvert de R^n et qui est tel que $U'^m \subset M$; on peut donc recouvrir C par un nombre fini de ces ensembles ouverts, disons par $U_1^!, \ldots, U_r^!$. L'ensemble $\bigcup_{k=1}^{t} U_k^! \times U_k^! = S$ est un voisinage dans $V \times V$ de la diagonale de $C \times C$. Désignons par δ la distance euclidienne dans R^m : puisque g est biunivoque sur C, il y a un nombre $a > 0$ tel que $\delta(g(p),g(q)) > a$ pour tout point (p,q) de $C \times C$ n'appartenant pas à S. L'application $(g,p,q) \to \delta(g(p),g(q))$ de $\mathfrak{F}^m(V) \times V^2$ dans R étant continue, il y a un voisinage N' de g dans $\mathfrak{F}^m(V)$ tel que la condition $g' \in N'$ entraîne $|\delta(g'(p),g'(q))-\delta(g(p),g(q))| \leqq a$ pour tout $(p,q) \in C \times C$ (l'ensemble $\{g\} \times C \times C$ est en effet compact dans $\mathfrak{F}^m(V) \times V^2$). Soit g' un élément de $N \cap N'$; g' est alors partout de rang n sur C ; montrons qu'elle est aussi biunivoque sur C. En effet, g' est biunivoque sur chacun des ensembles $U_k^! \cap C$. Par ailleurs, si p et q sont des points de C qui n'appartiennent pas à un même ensemble $U_k^!$, (p,q) n'appartient pas à S, et on a $\delta(g'(p),g'(q)) \geqq \delta(g(p),g(q))-a > 0$, ce qui démontre notre assertion. On a donc $N \cap N' \subset \Omega$, ce qui démontre que Ω est ouvert.

<u>Remarque</u>. La démonstration du lemme 1 est indépendante de la valeur particulière $m=2n+1$ de m.

<u>Lemme 2.- Soient</u> $f_k(t_1,\ldots,t_r;x_1,\ldots,x_s)$ $(1 \leqq k \leqq c)$ <u>des fonctions de</u> $r+s$ <u>variables réelles</u> $t_1,\ldots,t_r,x_1,\ldots,x_s$, <u>définies et de classe</u> C^1 <u>sur le produit d'un ensemble ouvert</u> T <u>de</u> R^r <u>par un ensemble ouvert</u> X <u>de</u> R^s.

Supposons que, pour tout point $(t, x) \in T \times X$ tel que $f_k(t, x)=0$ $(1 \leqq k \leqq c)$, la matrice $((\partial f_k/\partial x_j)(t, x))_{1\leqq k\leqq c, 1\leqq j\leqq s}$ soit de rang ρ indépendant de (t, x), et que le nombre ρ soit $< r$. L'ensemble des points $x \in X$ pour lequel il existe un point $t \in T$ tel que $f_k(t, x)=0$ $(1 \leqslant k \leqslant c)$ est alors un ensemble rare de X.

Soit S l'ensemble des points $(t, x) \in T \times X$ tels que $f_k(t, x)=0$ $(1 \leqq k \leqslant c)$. Il suffira de montrer que, si $(t, x) \in S$, il existe des voisinages $U(t, x)$ de t dans T et $V(t, x)$ de x dans X tels que l'ensemble des $x' \in V(t, x)$ pour lesquels il existe un $t' \in U(t, x)$ tel que $(t', x') \in S$ soit rare. Supposons en effet qu'il en soit ainsi ; l'ensemble S pourra alors être couvert par une famille dénombra-ble d'ensembles de la forme $U(t_k, x_k) \times V(t_k, x_k)$, les (t_k, x_k) formant une suite de points de S. Si on désigne par E_k l'ensemble des $x \in V(t_k, x_k)$ pour lesquels il existe un $t \in U(t_k, x_k)$ tel que $(t, x) \in S$, l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels il y a un $t \in T$ tel que $(t, x) \in S$ sera la réunion des ensembles ra res E_k, donc sera un ensemble rare. Or, soit (t, x) un point de S. Le rang de la matrice $((\partial f_k/\partial x_j)(t, x))_{1\leqq k\leqq c, 1\leqq j\leqq s}$ étant ρ, on sait qu'il existe s fonctions $g_j(t_1, \ldots, t_r; u_1, \ldots, u_{s-\rho})$ de $r+s-\rho$ variables réelles définies et de classe C^1 sur un ensemble ouvert W de $R^r \times R^{s-\rho}$ qui possèdent la propriété suivante : il existe des voisinages $U(t, x)$ de t dans T et $V(t, x)$ de x dans X tels que, si $(t', x')=(t'_1, \ldots, t'_r ; x'_1, \ldots, x'_s)$ est un point de $S \cap (U(t, x) \times V(t, x))$, il existe un point $u=(u_1, \ldots, u_{s-\rho})$ tel que $(t', u) \in W$ et que l'on ait $x'_j=g_j(t'_1, \ldots, t'_r ; u_1, \ldots, u_{s-\rho})$. L'ensemble des $x' \in V(t, x)$ pour lesquels il y a un $t' \in U(t, x)$ tel que $(t', x') \in S$ est donc contenu dans l'image de W par l'application

$(t',u) \to (g_1(t',u),\dots,g_s(t',u))$ de W dans R^s. Cette application est de classe C^1 et W est de dimension $r+s-\rho < s$; l'image de W est donc rare dans R^s en vertu de la prop.2, § V.

Lemme 3. Les notations étant celles du lemme 1, l'ensemble Ω est de plus dense dans $\mathcal{F}^m(V)$.

Nous utiliserons les notations de la démonstration du lemme 1, et nous supposerons de plus, comme il est loisible de le faire, que les fonctions $f_1,\dots,f_n$ sont à supports compacts. Nous désignerons par A l'espace des matrices $a=(a_{ij})$ à n lignes et m colonnes, à coefficients réels. Si $a \in A$, nous désignerons par h_a l'application $(\sum_{i=1}^n a_{i1}f_i,\dots,\sum_{i=1}^n a_{im}f_i)$ de V dans R^m. Montrons d'abord que l'application $a \to h_a$ de A dans $\mathcal{F}^m(V)$ est continue. Soit K un ensemble compact qui contient les supports des fonctions f_i, et soit $\mathcal{D}_k(V)$ l'espace des fonctions de $F(V)$ à supports contenus dans K. On sait que la topologie induite sur $\mathcal{D}_k(V)$ par celle de $\mathcal{F}(V)$ est identique à celle induite par l'espace vectoriel topologique $\mathcal{E}(V)$ (cf. § VIII). Or, pour chaque j, l'application $a \to \sum_{i=1}^n a_{ij}f_i$ de A dans $\mathcal{E}(V)$ est continue parce que linéaire, et l'image de A par cette application est contenue dans $\mathcal{D}_k(V)$, ce qui démontre notre assertion.

Soit g un élément quelconque de $\mathcal{F}^m(V)$. Nous allons montrer que l'ensemble A des $a \in A$ pour lesquels $g+h_a$ n'est pas dans Ω est rare dans A. Cet ensemble est la réunion de l'ensemble A' des a tels que $g+h_a$ soit de rang $< n$ en au moins un point de C et de l'ensemble A" des $a \in A$ tels que $g+h_a$ ne soit pas biunivoque sur C ; il suffira de montrer que chacun de ces ensembles est rare. Pour que $g+h_a$ soit de rang $< n$ en un point de C, il faut et suffit qu'il existe un point

NBR068 91

$p \in C$ et un vecteur $L \neq 0$ tangent à V en p tels que $d_p g . L + d_p h_{\mathfrak{a}} . L = 0$. Si L est un vecteur tangent à V en un point $p \in V$, nous poserons $\xi_i(L) = \langle L, d_p f_i \rangle$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $\xi_i(L) = f_{i-n}(p)$ $(n < i \leqq 2n)$. Si $p \in C$, on a $L = \sum_{i=1}^n \xi_i(L)(X_i)_p$, $\langle L, d_p g_j \rangle = \sum_{i=1}^n (X_i g_j)(p)\, \xi_i(L)$. Soit G_{ij} une fonction de classe C^∞ sur R^n telle que $X_i g_j$ coincide avec $G_{ij}(f_1, \ldots, f_n)$ sur C. Si $p \in C$, une condition nécessaire et suffisante pour que $d_p g . L + d_p h_{\mathfrak{a}} . L = 0$ est que l'on ait

$$\sum_{i=1}^n G_{ij}(\xi_{n+1}(L), \ldots, \xi_{2n}(L))\, \xi_i(L) + \sum_{i=1}^n a_{ij}\, \xi_i(L) = 0$$

$(1 \leqq j \leqq m)$. Les premiers membres de ces équations peuvent s'écrire sous la forme $P_k(\xi_1(L), \ldots, \xi_{2n}(L) ; \mathfrak{a})$, où les P_k sont des fonctions de classe C^∞ sur $R^{2n} \times A$. On a $\partial P_k(\xi_1, \ldots, \xi_{2n} ; \mathfrak{a}) / \partial a_{ij} = \delta_{jk} \xi_i$. Si donc $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ne sont pas tous nuls, le rang de la matrice formée des dérivées partielles de P_k par rapport aux variables a_{ij} est $m = 2n+1$, qui est $> 2n$. Soit Ξ l'ensemble des points $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n}) \in R^{2n}$ tels que $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ne soient pas tous nuls ; il résulte alors du lemme 2 que l'ensemble des $\mathfrak{a} \in A$ pour lesquels il y a un $\xi \in \Xi$ tel que $P_k(\xi ; \mathfrak{a}) = 0$ $(1 \leqq k \leqq m)$ est maigre dans A. Il en résulte bien que l'ensemble A' est maigre dans A.

Pour que $\mathfrak{a} \in A''$, il faut et suffit qu'il existe des points distincts p, q de C tels que $g(p) + h_{\mathfrak{a}}(p) = g(q) + h_{\mathfrak{a}}(q)$. Soit G_j une fonction de classe C^∞ sur R^n telle que g_j coincide avec $G_j(f_1, \ldots, f_n)$ sur C ; si $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{2n}) \in R^{2n}$, posons

$$P'_k(\eta ; \mathfrak{a}) = G_k(\eta_{n+1}, \ldots, \eta_{2n}) - G_k(\eta_1, \ldots, \eta_n) + \\ + \sum_{i=1}^n a_{ik}(\eta_{n+i} - \eta_i) \quad (1 \leqq k \leqq m).$$

Si p et q sont des points de C , une condition nécessaire et suffisante pour que $g(p)+h_{a}(p)=g(q)+h_{a}(q)$ est que l'on ait $P'_k(f_1(p),\dots,f_n(p),f_1(q),\dots,f_n(q);a)=0$ $(1\leqslant k\leqslant m)$; de plus, une condition nécessaire et suffisante pour que $p\neq q$ est que l'un au moins des nombres $f_i(p)-f_i(q)$ soit $\neq 0$. Soit W l'ensemble des points $(\eta_1,\dots,\eta_{2n})\in R^{2n}$ tels que l'un au moins des nombres $\eta_{n+i}-\eta_i$ soit $\neq 0$. Si $\eta\in W$, la matrice des dérivées $\partial P'_k/\partial a_{ij}$ est évidemment de rang $m=2n+1 > 2n$. L'ensemble des $a\in A$ pour lesquels il existe un $\eta\in W$ tel que $P'_k(\eta;a)=0$ $(1\leqq k\leqq m)$ est donc maigre (lemme 2) ; il en résulte immédiatement que A'' est maigre.

Nous avons donc établi que A est maigre. Soit alors N un voisinage quelconque de g dans $\mathcal{F}^m(V)$. Il existe un voisinage B de 0 dans A tel que $g+h_a\in N$ pour tout $a\in B$, et il existe un $a\in B$ qui n'appartient pas à A . On en conclut que N contient un élément de Ω , ce qui démontre le lemme 3 .

__Lemme 4__. __Soient__ E __et__ E' __des parties compactes disjointes de__ V __dont chacune est contenue dans un ensemble cubique compact__. __L'ensemble__ Ω __des__ $g\in\mathcal{F}^m(V)$ __tels que__ $g(E)\cap g(E')=\emptyset$ __est alors ouvert et partout dense__.

Soit g un élément de Ω . Il existe des parties ouvertes U et U' de R^m telles que $E\subset U$, $E'\subset U'$, $U\cap U'=\emptyset$. L'application φ : $(g',p,p')\to(g'(p),g'(p'))$ de $\mathcal{F}^m(V)\times V^2$ dans $R^m\times R^m$ est continue. L'ensemble $\varphi(\{g\}\times E\times E')$ est contenu dans $U\times U'$, qui est ouvert. L'ensemble $\{g\}\times E\times E'$ étant compact, il y a un voisinage N de g dans $\mathcal{F}^m(V)$ tel que $\varphi(N\times E\times E')\subset U\times U'$; il est clair que $N\subset\Omega$, ce qui montre que Ω est ouvert .

Soit maintenant g un élément quelconque de $\mathcal{F}^m(V)$. Soient C et C' des ensembles cubiques compacts qui contiennent E et E' respectivement,

$(f_1,\dots,f_n)$ un système de coordonnées sur C et $(f'_1,\dots,f'_n)$ un système de coordonnées sur C'. Il existe une fonction $h \in F(V)$ à support K compact égale à 1 sur E et à 0 sur E'. Si $a=(a_1,\dots,a_m) \in R^m$, soit u_a l'application $(a_1h,\dots,a_mh)$ de V dans R^m. Pour tout $a \in R^m$, les fonctions a_jh ont toutes leurs supports contenus dans K ; l'application $a \to a_jh$ est continue en tant qu'application de R^m dans $\mathcal{E}(V)$ (parce qu'elle est linéaire), donc aussi en tant qu'application de R^m dans $\mathcal{D}_K(V)$ et par suite aussi en tant qu'application de R^m dans $\mathcal{F}(V)$. L'application $a \to u_a$ de R^m dans $\mathcal{F}^m(V)$ est donc continue. Nous allons montrer que l'ensemble des $a \in R^m$ tels que $g+u_a \notin \Omega$ est maigre. Soient G_j et G'_j des fonctions de classe C^∞ sur R^n telles que g_j coïncide avec $G_j(f_1,\dots,f_n)$ sur C et avec $G'_j(f'_1,\dots,f'_n)$ sur C'. Si $(p,p') \in E \times E'$, une condition nécessaire et suffisante pour que $(g+u_a)(p) = (g+u_a)(p')$ est que l'on ait

$$a_j = G'_j(f'_1(p'),\dots,f'_n(p')) - G_j(f_1(p),\dots,f_n(p))$$

pour $1 \leq j \leq m$. Or il résulte de la prop.2, § V que l'image de R^{2n} par l'application

$$(x, x') \to (G'_1(x')-G_1(x),\dots,G'_m(x')-G_m(x))$$

de R^{2n} dans $R^m = R^{2n+1}$ est maigre dans R^m. L'ensemble A des $a \in R^m$ tels que $g+u_a \notin \Omega$ est donc maigre dans R^m. Soit N un voisinage de g dans $\mathcal{F}^m(V)$; il existe alors un voisinage B de 0 dans R^m tel que $g+u_a \in N$ pour tout $a \in B$, et un point a de B qui n'appartient pas à A. Ceci montre que $N \cap \Omega \neq \emptyset$, donc que Ω est dense dans $\mathcal{F}^m(V)$.

Il existe un recouvrement dispersé $(U_i)_{i \in I}$ de V par des ensembles U_i dont chacun est l'intérieur d'un ensemble cubique compact (lemme 1, § I). Il existe donc un recouvrement $(F_i)_{i \in I}$ de V par des ensembles F_i tels que, pour tout $i \in I$, F_i soit une partie compacte de U_i (cor.1 à la prop.1, § I). Il existe pour chaque i un ensemble ouvert U'_i

contenant F_i et dont l'adhérence $\overline{U}'_i$ est contenue dans U_i. Soit $\complement \overline{U}'_i$ le complémentaire de $\overline{U}'_i$ par rapport à V. Si $p \in V$, soit $W(p)$ l'intersection de tous ceux des ensembles $U_i, U'_i, \complement \overline{U}'_i$ qui contiennent p. Le recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ étant dispersé, il n'y a qu'un nombre fini d'indices i tels que $p \in U_i$, et, si i_o est l'un d'eux, il n'y a qu'un nombre fini d'indices $i \in I$ tels que U_{i_o} ne soit pas contenu dans $\complement \overline{U}'_i$; on en conclut que chaque $W(p)$ est l'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts, et est par suite ouvert. De plus, si deux ensembles $W(p), W(q)$ ont un point commun, il y a un indice i tel que $W(p) \cup W(q) \subset U_i$. Il y a en effet un i_o tel que $W(p) \subset U'_{i_o}$; par ailleurs, pour tout i, q appartient à l'un au moins des ensembles U_i ou $\complement \overline{U}'_i$, d'où il résulte que $W(q)$ est contenu dans l'un des ensembles U_{i_o} ou $\complement \overline{U}'_{i_o}$; ayant un point commun avec $W(p)$, il ne peut être contenu dans le second de ces ensembles, d'où $W(p) \cup W(q) \subset U_{i_o}$.

Les ensembles $W(p), p \in V$, forment un recouvrement de V ; on peut en extraire un recouvrement dénombrable $(W_j)_{j \in J}$. Il résulte du cor. 1 à la prop. 1, § I qu'il existe un recouvrement $(E_j)_{j \in J}$ de V tel que, pour chaque j, E_j soit une partie fermée de W_j. Chacun des ensembles E_j est contenu dans l'un des ensembles C_i, d'où il résulte en particulier que les E_j sont compacts. Si j et j' sont des indices tels que $E_j \cap E_{j'} \neq \emptyset$, $E_j \cup E_{j'}$ est contenu dans l'un des C_i.

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres >0 telle que, pour tout $a>0$, il n'y ait qu'un nombre fini d'indices $i \in I$ tels que $a_i < a$; soit h_i une fonction de $F(V)$ égale à a_i sur F_i, dont le support soit contenu dans U_i, et qui ne prenne que des valeurs ≥ 0.

La famille $(h_i)_{i\in I}$ est dispersée ; soit $h=\sum_{i\in I}h_i$. Soit H l'ensemble des $u\in F(V)$ tels que $\sup_{p\in V}|u(p)h_i(p)| \leqq 1$ pour tout $i\in I$. Les opérateurs de multiplication par les fonctions h_i $(i\in I)$ forment une famille dispersée d'opérateurs différentiels à supports compacts ; l'ensemble H est donc un voisinage de 0 dans $\mathcal{F}(V)$, et H^m est un voisinage de 0 dans $\mathcal{F}^m(V)$. Nous poserons $N=(h,\dots,h)+H^m$; N est donc un voisinage de $(h,\dots,h)$ dans $\mathcal{F}^m(V)$.

Si $i\in I$, soit Ω_i l'ensemble des $g\in\mathcal{F}^m(V)$ qui sont partout de rang n sur C_i et qui sont biunivoques sur C_i ; si j,j' sont des indices de J , soit $\Omega_{j,j'}$ l'ensemble des $g\in\mathcal{F}^m(V)$ tels que $g(E_j)\cap g(E_{j'})=\emptyset$. Soit Ω l'intersection des ensembles Ω_i $(i\in I)$ et des ensembles $\Omega_{j,j'}$ pour tous les couples $(j,j')\in J\times J$ tels que $E_j\cap E_{j'}=\emptyset$. L'espace $\mathcal{F}^m(V)$ étant un espace de Baire, il résulte des lemmes que nous avons démontrés que Ω est un ensemble ouvert partout dense dans $\mathcal{F}^m(V)$. L'ensemble N étant un voisinage de $(h,\dots,h)$, l'ensemble $N\cap\Omega$ n'est pas vide. Soit g un élément de cet ensemble. Il est alors clair que l'application g de V dans R^m est partout de rang n . Elle est aussi biunivoque. Soient en effet p et p' des points distincts de V , et j,j' des indices tels que $p\in E_j$, $p'\in E_{j'}$. Si $E_j\cap E_{j'}\neq\emptyset$, $E_j\cup E_{j'}$ est contenu dans un ensemble C_i , d'où $g(p)\neq g(p')$ puisque $g\in\Omega_i$. Si $E_j\cap E_{j'}=\emptyset$, on a $g\in\Omega_{j,j'}$, d'où $g(p)\neq g(p')$. Enfin, si A est une partie compacte de R^m , $\overset{-1}{g}(A)$ est compact dans V . Soit en effet $g=(g_1,\dots,g_m)$; on a donc, pour tout $i\in I$ et tout $p\in V$, $|(g_j(p)-h(p))h_i(p)|\leqq 1$ $(1\leqq j\leqq m)$, et par suite, si $p\in F_i$, $|g_j(p)-h(p)|\leqq a_i^{-1}$ et par suite $|g_j(p)|\geqq a_i-a_i^{-1}$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'indices i pour lesquels a_i soit inférieur à un nombre donné, il n'y a qu'un nombre fini d'indices i tels que $g(F_i)$ rencontre A, ce qui démontre notre assertion, puisque les ensembles F_i sont compacts.

Il existe une variété V' plongée dans R^m telle que g soit un isomorphisme de V sur V'. Puisque g est une application biunivoque <u>propre</u> de V dans R^m, g est un homéomorphisme de V sur l'ensemble des points de V', muni de la topologie induite par celle de R^n ; c'est dire que la variété plongée V' est régulière. D'autre part, V' est une partie fermée de R^n ; il résulte donc tout de suite de la prop.1, § 6 que V' est une sous-variété fermée de R^n. Le th.1 est donc démontré.

<u>Corollaire 1.- Soit</u> V <u>une variété de dimension</u> n. <u>Il existe alors</u> $2n+1$ <u>fonctions</u> $f_1,\dots,f_{2n+1}$ <u>de</u> $F(V)$ <u>qui possèdent la propriété suivante : si</u> k <u>représente un entier</u> $\geqq 0$ <u>ou le symbole</u> ∞, <u>toute fonction de</u> $F^k(V)$ <u>peut se mettre sous la forme</u> $H(f_1,\dots,f_{2n+1})$, <u>où</u> H <u>est une fonction de classe</u> C^k <u>sur</u> R^{2n+1}.

Il résulte du th.1 que l'on peut supposer que V est une sous-variété fermée de R^{2n+1}. Toute fonction de $F^k(V)$ est alors la restriction à V d'une fonction de classe C^k sur R^{2n+1} (cf. prop.1, § 4) ; on peut donc prendre pour $f_1,\dots,f_{2n+1}$ les restrictions à V des fonctions coordonnées sur R^{2n+1}.

<u>Corollaire 2.- Soit</u> V <u>une variété de dimension</u> n. <u>Il existe alors un recouvrement ouvert fini</u> $(U_l)_{1\leqq l\leqq l_1}$ <u>de</u> V <u>qui possède la propriété suivante : pour chaque</u> l $(1\leqq l\leqq l_1)$, <u>il existe</u> n <u>fonctions</u> $f_{l;i}$ $(1\leqq i\leqq n)$ <u>de</u> $F(V)$ <u>et</u> n <u>transformations infinitésimales</u> $X_{l;i}$ $(1\leqq i\leqq n)$ <u>de</u> V <u>telles que</u> $X_{l;i}f_{l;j}$ <u>coïncide avec</u> $\delta_{i,j}$ <u>sur</u> V.

Soient $f_1,\dots,f_{2n+1}$ des fonctions de $F(V)$ qui possèdent la propriété énoncée au cor.1. Si $p\in V$, les d_pf_i $(1\leqq i\leqq 2n+1)$ engendrent évidemment l'espace $\mathcal{D}_p(V)$ des covecteurs en p. Il résulte immédiatement de là et du cor.2 à la prop.5, § 7 qu'il existe un un recouvrement ouvert fini $(U'_l)_{1 \leqq l \leqq l_1}$ de V qui possède la propriété suivante : pour chaque l, il existe n fonctions $f_{l;i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ qui figurent parmi $f_1, \dots, f_{2n+1}$ telles que, pour tout $p \in U'_l$, les $d_p f_{l;i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ forment une base de $\mathcal{D}_p(V)$. Il existe donc n champs de vecteurs $X'_{l;i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ sur la sous-variété ouverte U'_l de V tels que $X'_{l;i} f'_{l;j} = \delta_{i,j}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ (où $f'_{l;j}$ est la restriction de $f_{l;j}$ à U'_l). Ces champs de vecteurs sont des transformations infinitésimales. Soit en effet f' une fonction de $F(U'_l)$; si $p \in U'_l$, les $f'_{l;i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ forment un système de coordonnées autour de p, et f' coïncide sur un voisinage de p avec une fonction de la forme $H(f'_{l;1}, \dots, f'_{l;n})$, où $H = H(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction de classe C^∞ sur R^n. La fonction $X'_{l;i} f'$ coïncide alors sur un voisinage de p avec la fonction $(\partial H/\partial x_i)(f'_{l;1}, \dots, f'_{l;n})$, ce qui montre qu'elle est de classe C^∞ autour de p. Ceci dit, il existe des ensembles ouverts U_l, $1 \leqq l \leqq l_1$ qui forment un recouvrement de V tels que, pour tout l, l'adhérence $\bar{U}_l$ de U_l soit contenue dans U'_l (cor. 1 à la prop. 1, §1). Soit h_l une fonction de $F(V)$ égale à 1 sur $\bar{U}_l$ et dont le support est contenu dans U'_l ; si $1 \leqq i \leqq n$, soit $X_{l;i}$ le champ de vecteurs défini par $(X_{l;i})_p = h_l(p)(X'_{l;i})_p$ si $p \in U'_l$, $(X_{l;i})_p = 0$ si $p \notin U'_l$. Si $f \in F(V)$, $X_{l;i} f$ est de classe C^∞ autour de chaque point de son support, qui est ~~xxxxx~~ dans U'_l ; on en conclut que $X_{l;i}$ est une transformation infinitésimale. Il est clair que $X_{l;i} f_{l;j}$ coïncide avec $\delta_{i;j}$ sur U_l.

Nous désignerons dans ce qui suit par k soit un entier $\geqq 0$ soit le symbole ∞.

<u>Proposition 1.- L'ensemble</u> $F(V)$ <u>est dense dans l'espace</u> $\mathcal{E}^k(V)$; <u>l'ensemble</u> $F_{comp.}(V)$ <u>des fonctions à supports compacts de</u> $F(V)$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{D}^k(V)$.

Si V est de dimension n , on peut supposer que V est une sous-variété fermée de R^{2n+1} ; si g est une fonction sur R^{2n+1} , nous désignerons par $\rho(g)$ la restriction de g à V . Il résulte immédiatement de la prop.7, § 7 que, pour tout opérateur différentiel D sur $F^k(V)$ il existe un opérateur différentiel D' sur $F^k(R^{2n+1})$ tel que $\rho\circ D'=D\circ\rho$. Si le support L de D est compact, on peut prendre D' de support compact: on peut en effet remplacer D' par $D'\circ\mu(h)$, où $\mu(h)$ est l'opérateur de multiplication par une fonction h de $F(R^{2n+1})$ égale à 1 sur L et à support compact. On en déduit tout de suite que ρ induit une application continue de $\mathcal{E}^k(R^{2n+1})$ <u>sur</u> $\mathcal{E}^k(V)$ (cf., prop.1, § 4) . Or on sait que $F(R^{2n+1})$ est dense dans $\mathcal{E}^k(R^{2n+1})$ (prop. , chap. ,); puisque ρ applique $F(R^{2n+1})$ dans $F(V)$, il en résulte que $F(V)$ est dense dans $\mathcal{E}^k(V)$. Soit maintenant g une fonction à support compact L de $F^k(V)$; g est donc limite dans $\mathcal{E}^k(V)$ d'une base de filtre $\mathfrak{B}$ sur $F(V)$. Soit h une fonction à support compact L' de $F(V)$ égale à 1 sur L ; l'image de $\mathfrak{B}$ par l'application $f\to hf$ est donc une base de filtre $\mathfrak{B}'$ sur l'ensemble des fonctions de $F(V)$ à supports contenus dans L' qui converge vers f dans $\mathcal{E}^k(V)$; il en résulte que $\mathfrak{B}'$ converge aussi vers g dans $\mathcal{D}^k(V)$.

<u>Proposition 2.- Soit</u> φ <u>une application de classe</u> C^k <u>d'une variété</u> V <u>dans une variété</u> W ; <u>l'application</u> $g\to g\circ\varphi$ <u>est alors une application continue de</u> $\mathcal{E}^k(W)$ <u>dans</u> $\mathcal{E}^k(V)$; <u>si</u> φ <u>est une application propre, l'application</u> $g\to g\circ\varphi$ <u>induit une application continue de</u> $\mathcal{D}^k(W)$ <u>dans</u> $\mathcal{D}^k(V)$.

Si m et n sont les dimensions de V et de W , on peut supposer que V est une sous-variété fermée de R^{2m+1} et W une sous-variété fermée de R^{2n+1} . Nous désignerons par ρ_V (resp.: ρ_W) l'opération de restriction à V (resp.: à W) d'une fonction sur R^{2m+1} (resp.: sur R^{2n+1}). Si y est une fonction coordonnée sur R^{2n+1} , la fonction $\rho_V(y)\circ\varphi$ peut se prolonger par une fonction de classe C^k sur R^{2m+1} (prop.1, § 4) . Il en résulte immédiatement que φ est la restriction à V d'une application ψ de classe C^k de R^{2m+1} dans R^{2n+1} . On a vu au cours de la démonstration de la prop.1 ci-dessus que ρ_V (resp.: ρ_W) induit une application continue de $\mathcal{E}^k(R^{2m+1})$ (resp.: $\mathcal{E}^k(R^{2n+1})$) sur $\mathcal{E}^k(V)$ (resp.: $\mathcal{E}^k(W)$) . Cette application est évidemment linéaire ; c'est donc, en vertu du th. de Banach, un homomorphisme. On sait d'autre part que l'application $g'\to g'\circ\psi$ induit une application continue de $\mathcal{E}^k(R^{2n+1})$ dans $\mathcal{E}^k(R^{2m+1})$. Ceci dit, soit N_V un voisinage de 0 dans $\mathcal{E}^k(V)$; il existe donc un voisinage N'_V de 0 dans $\mathcal{E}^k(R^{2m+1})$ tel que $\rho_V(N'_V)\subset N_V$, puis un voisinage N'_W de 0 dans $\mathcal{E}^k(R^{2n+1})$ dont l'image par l'application $g'\to g'\circ\psi$ soit continue dans N'_V . L'ensemble $\rho_W(N'_W)$ est un voisinage N_W de 0 dans $\mathcal{E}^k(W)$, et il est clair que la condition $g\in N_W$ entraîne $g\circ\varphi\in N_V$. L'application $g\to g\circ\varphi$, qui est linéaire, induit donc une application continue de $\mathcal{E}^k(W)$ dans $\mathcal{E}^k(V)$. Supposons maintenant que l'application φ soit propre ; l'application $g\to g\circ\varphi$ applique alors $\mathcal{D}^k(W)$ dans $\mathcal{D}^k(V)$. De plus, l'image par cette application de l'ensemble $F^k_L(W)$ des fonctions de $F^k(W)$ à supports contenus dans une certaine partie compacte L de W est contenue dans l'ensemble $F^k_K(V)$ des fonctions de $F^k(V)$ à supports contenus dans la partie compacte $K=\overset{-1}{\varphi}(L)$ de V . Les topologies induites sur $F^k_L(W)$ (resp.: sur $F^k_K(V)$)

par $\mathcal{E}^k(W)$ et $\mathcal{D}^k(W)$ (resp.: par $\mathcal{E}^k(V)$ et $\mathcal{D}^k(V)$) sont identiques, et l'application $g \to g \circ \varphi$ induit une application continue de $F^k_L(W)$, considéré comme sous-espace de $\mathcal{E}^k(W)$, dans $F^k_K(V)$, considéré comme sous-espace de $\mathcal{E}^k(V)$. Ceci étant vrai pour tout L, il en résulte que l'application linéaire $g \to g\circ\varphi$ de $\mathcal{D}^k(W)$ dans $\mathcal{D}^k(V)$ est continue (prop.8, § 8).

<u>Proposition 3.- Soient V et W des variétés. L'ensemble $F^k(V)\otimes F^k(W)$ des fonctions de la forme, $g\otimes h$, avec $g \in F^k(V)$ et $h \in F^k(W)$ et de leurs combinaisons linéaires (à coefficients constants) est dense dans $F^k(V\times W)$; l'ensemble $\mathcal{D}^k(V)\otimes\mathcal{D}^k(W)$ est dense dans $\mathcal{D}^k(V\times W)$.</u>

Etablissons d'abord le

<u>Lemme 1.- Il existe un nombre fini de fonctions $g_i \in F(V)$ $(1 \leqq i \leqq r)$ et de fonctions $h_j \in F(W)$ $(1\leqq j \leqq s)$ telles que toute fonction de $F^k(V\times W)$ puisse se mettre sous la forme $H(g_1\otimes 1,\dots,g_r\otimes 1, 1\otimes h_1,\dots,1\otimes h_s)$, H étant une fonction de classe C^k sur R^{r+s}.</u>

On peut trouver des fonctions $g_i \in F(V)$ $(1\leqq i \leqq r)$ telles que l'application $p \to (g_1(p),\dots,g_r(p))$ soit un isomorphisme de V avec une sous-variété fermée de R^r, et un nombre fini de fonctions $h_j \in F(W)$ $(1 \leqq j \leqq s)$ telles que l'application $q \to (h_1(q),\dots,h_s(q))$ soit un isomorphisme de W avec une sous-variété fermée de R^s. L'application

$$(p,q) \to (g_1(p),\dots,g_r(p),h_1(q),\dots,h_s(q))$$

est alors un isomorphisme de $V\times W$ avec une sous-variété fermée Z de R^{r+s}. Il est alors clair que les fonctions g_i, h_j possèdent les propriétés requises.

Ceci dit, soit $f=H(g_1\otimes 1,\ldots,g_r\otimes 1, 1\otimes h_1,\ldots,1\otimes h_s)$ une fonction de $F^k(V\times W)$, H éta nt une fonction de classe C^k sur R^{r+s}. On sait que H est, dans $\mathcal{E}^k(R^{r+s})$, la limite d'une suite $(P_\nu)_{1\leq \nu<\infty}$ de polynomes ; il résulte alors de la prop.2 que f est dans $\mathcal{E}^k(V\times W)$ la limite de la suite de fonctions $P_\nu(g_1\otimes 1,\ldots,g_r\otimes 1,1\otimes h_1,\ldots,1\otimes h_s)$. Or, chacune de ces fonctions appartient évidemment à $F^k(V)\otimes F^k(W)$. Supposons maintenant que f soit à support compact ; il existe alors des parties compactes K de V et L de W telles que le support de f soit contenu dans $K\times L$. Soient u une fonction de $F(V)$ à support compacte égale à 1 sur K et v une fonction de $F(W)$ à support compact égale à 1 sur L. Les fonctions $(u\otimes v)P_\nu(g_1\otimes 1,\ldots,g_r\otimes 1,1\otimes h_1,\ldots,1\otimes h_s)$ appartiennent à $\mathcal{D}^k(V)\otimes\mathcal{D}^k(W)$ et convergent vers f dans $\mathcal{E}^k(V\times W)$; de plus, leurs supports sont tous contenus dans une partie compacte fixe de $V\times W$ (le produit des supports de u et de v) ; elles convergent donc vers f dans $\mathcal{D}^k(V\times W)$, ce qui démontre la prop.3.

Proposition 4.- Soit V une sous-variété fermée de R^n. Il existe alors une application π de classe C^∞ d'un voisinage U de V dans R^m sur V qui possède la propriété suivante : si $x\in U$, $\pi(x)$ est le seul point de V tel que la distance de x à ce point soit égale à la dista-nce de x à V.

Nous désignerons par $r(x,y)$ la distance des points x, y dans R^m, et par $r_V(x)$ la distance de x à l'ensemble V. Il existe alors au moins un point $p\in V$ tel que $r(x,p)=r_V(x)$. En effet, l'intersection de V avec la boule fermée de centre x et de rayon $r_V(x)+1$ est compacte et non vide ; cet ensemble E contient donc un point p tel que $r(x,p)$ soit égal à la distance de x à E, qui est aussi la distance de x à V. Si $p\in V$, l'espace tangent $L_p(V)$ à V en p peut-être identifié à une variété affine de R^n ; montrons que, si $p\in V$ est tel que

102

$r(x,p)=r_V(x)$, le vecteur $x-p$ est orthogonal à $L_p(V)$. Soient $x_1,\ldots,x_m$ les coordonnées de R^m, $a_1,\ldots,a_m$ celles de x et $\xi_1,\ldots,\xi_m$ les restrictions de $x_1,\ldots,x_m$ à V. La fonction $u=\sum_{i=1}^m (a_i-\xi_i)^2$ est de classe C^∞ sur V et admet en p un minimum ; on a donc $d_p u=0$, d'où $\sum_{i=1}^m (a_i-\xi_i(p))d_p\xi_i = 0$. Si L est un vecteur tangent quelconque à V en p, les nombres $\langle L,d_p\xi_i\rangle$ sont les composantes du vecteur L, et on a $\sum_{i=1}^m (a_i-\xi_i(p))\langle L,d_p\xi_i\rangle=0$, ce qui signifie que L est orthogonal au vecteur $x-p$. Ceci étant vrai pour tout $L\in L_p(V)$, $x-p$ est orthogonal à $L_p(V)$.

Nous allons maintenant montrer que, si $p\in V$, il y a des voisinages $U(p)$ de p dans R^m et $U'(p)$ de p dans V qui possèdent la propriété suivante : pour tout $x\in U(p)$, il existe un point q et un seul de $U'(p)$ tel que $x-q$ soit orthogonal à $L_q(V)$. Il existe un système de coordonnées $(f_1,\ldots,f_m)$ sur R^n et un voisinage C de p dans R^m qui possèdent les propriétés suivantes : C est un voisinage cubique compact de p sur lequel $(f_1,\ldots,f_m)$ est un système de coordonnées, et $V\cap C$ est l'ensemble des $q\in C$ tels que $f_1(q)=\ldots=f_{m-n}(q)=0$ (où n est la dimension de V) [On notera que C n'est pas en général un cube de R^m ; c'est son image par l'application $q\to(f_1(q),\ldots,f_m(q))$ qui est un cube.] Si $q\in C$, $L_q(V)$ est la variété affine définie par les équations $\sum_{i=1}^m (\partial f_j/\partial x_i)(q)(x_i-x_i(q))=0$ $(1\leqq j\leqq m-n)$. Désignons par $u_j(q)$ le vecteur de composantes $((\partial f_j/\partial x_1)(q),\ldots,(\partial f_j/\partial x_m)(q))$ $(1\leqq j\leqq m-n)$; ce vecteur est donc orthogonal à $L_j(q)$. Désignons par $U_1'(p)$ l'intérieur de $C\cap V$ par rapport à V, et par φ l'application de $U_1'(p)\times R^{m-n}$ dans R^m définie par

$$\varphi(q,t) = q+\sum_{j=1}^{m-n} t_j u_j(q) \qquad (q\in U'(p))$$

où t est le point $(t_1,\dots,t_{m-n})$ de R^{m-n}. Cette application est visiblement de classe C^{∞}. Nous allons montrer que la différentielle $d_{(p,0)}\varphi$ de φ au point $(p,0)$ est de rang m. Cette différentielle est la somme de la première différentielle partielle $d^{V}_{(p,0)}\varphi$ de φ et de sa seconde différentielle partielle $d^{R^{m-n}}_{(p,0)}\varphi$. Or $d^{V}_{(p,0)}\varphi$ est la différentielle en p de l'application $q \to \varphi(q,0)$ de V dans R^m, qui est l'application identique ; $d^{V}_{(p,0)}\varphi$ est donc de rang n. D'autre part, $d^{R^{m-n}}_{(p,0)}\varphi$ est la différentielle au point 0 de l'application affine $t \to p+\sum_{j=1}^{m-n} t_j u_j(p)$. Or, $d_pf_1,\dots,d_pf_m$ sont linéairement indépendants, d'où il résulte que les vecteurs $u_j(p)$ $(1 \leqq j \leqq m-n)$ sont linéairement indépendants, et par suite que la seconde différentielle partielle de φ en $(p,0)$ est de rang $m-n$. On en conclut que φ est de rang m au point $(p,0)$. Il existe donc des voisinages ouverts $U'_2(p)$ de p dans $C\cap V$ et M de 0 dans R^{m-n} tels que φ induise un homéomorphisme φ_1 de $U'_2(p)\times M$ sur un voisinage ouvert $U_2(p)$ de p dans R^m et que l'application réciproque ψ de φ_1 soit une application de classe C^{∞} de $U_2(p)$ sur $U'_2(p)\times M$. Si $x\in U_2(p)$, soit $\pi'(x)$ la projection de $\psi(x)$ sur $U'_2(p)$; le vecteur $x-\pi'(x)$ est donc orthogonal à l'espace tangent à V en $\pi'(x)$. Montrons maintenant qu'il est impossible qu'il existe des suites $(x_\nu)_{1\leqq\nu<\infty}$ et $(q_\nu)_{1\leqq\nu<\infty}$ qui possèdent les propriétés suivantes : on a $x_\nu\in U_2(p), q_\nu\in U'_2(p)$, $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \lim_{\nu\to\infty} q = p$; $x_\nu - q_\nu$ est orthogonal à $L_{q_\nu}(V)$ et $q_\nu \neq \pi'(x_\nu)$. Supposons en effet toutes ces conditions satisfaites. Pour tout point q de V suffisamment voisin de p (en fait pour tout point de $U\cap V$), les vecteurs $u_j(q)$ $(1\leqq j\leqq m-n)$ sont linéairement indépendants, et forment par suite une base de l'espace des vecteurs orthogonaux à $L_q(V)$. On pourrait donc écrire $x_\nu - q_\nu = \sum_{j=1}^{m-n} t_{j;\nu}\, u(q_\nu)$, les $t_{j;\nu}$ étant des nombres réels. Soit $a_\nu = \max_{1 \leqq j \leqq m-n} |t_{j;\nu}|$. Puisque $q_\nu \neq \pi'(x_\nu)$, le point $(t_{1;\nu}, \ldots, t_{m-n;\nu})$ n'est pas dans M, d'où il résulte que les nombres a_ν^{-1} sont bornés. On a $0 \leqq a_\nu^{-1} |t_{j;\nu}| \leqq 1$; extrayant au besoin de la suite donnée une suite partielle, on peut supposer que les limites $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu^{-1} t_{j;\nu}$ $(1 \leqq j \leqq m-n)$ existent ; soient t_j' ces limites. On a donc $\max_{1 \leqq j \leqq m-n} |t_j'| = 1$. Par ailleurs, on a $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu^{-1}(x_\nu - q_\nu) = 0$, d'où $0 = \sum_{j=1}^{m-n} t_j' u_j(p)$, ce qui est impossible, puisque les vecteurs $u_j(p)$ $(1 \leqq j \leqq m-n)$ sont linéairement indépendants. Il résulte de là qu'il existe un voisinage ouvert $U'(p)$ de p dans $U_2'(p)$ et un voisinage M_1 de 0 dans R^{m-n} tels que, si $q \in U'(p)$ et $t \in M_1$, q soit le seul point q' de $U'(p)$ tel que $\varphi(q;t) - q'$ soit orthogonal à $L_{q'}(V)$. Si on pose $U(p) = \varphi(U'(p) \times M_1)$, les voisinages $U(p)$ et $U'(p)$ possèdent les propriétés requises. Soit maintenant S le complémentaire de $U'(p)$ par rapport à V ; c'est un ensemble fermé de R^m qui ne rencontre pas $U'(p)$. Soit $U_3'(p)$ un voisinage fermé de p dans $U'(p)$; il existe alors un voisinage fermé M_2 de 0 dans R^{m-n} tel que $\varphi(U_3'(p) \times M_2)$ ne rencontre pas S. Soit b la distance des ensembles fermés S et $\varphi(U_3'(p) \times M_2)$; on a donc $b > 0$. Il existe un voisinage M_3 de 0 dans R^{m-n} tel que, si $q \in U_3'(p)$ et $t \in M_3$, on ait $r(\varphi(q,t),q) < b$. Soit $U_3(p)$ l'ensemble $\varphi(U_3'(p) \times M_3)$, qui est un voisinage de p dans R^m. Si x est un point de cet ensemble, on a $r_V(x) < b$; si donc q est un point de V tel que $r(x,q) = r_V(x)$, on a $q \in U'(p)$, d'où $q = \pi'(x)$ puisque $x - q$ est orthogonal à $L_q(V)$. Soit U la réunion des intérieurs des $U_3(p)$ pour tous les $p \in V$;

U est donc un voisinage de V dans R^m, et, pour tout $x \in U$, il y a un point q et un seul, soit $\pi(x)$, tel que $r(x,q)=r_V(x)$. De plus, x appartenant à l'intérieur de l'un des ensembles $U_3(p)$, $p \in V$, il est clair que π est de classe C^∞ autour de x. La prop.4 est donc démontrée.

<u>Proposition 5.- Soit φ une application continue d'une variété W dans une variété V, et soit W_1 une sous-variété fermée de W telle que la restriction de φ à W_1 soit de classe C^k. Soit A un voisinage quelconque du graphe de φ dans l'espace $W \times V$. Il existe alors une application ψ de classe C^k de W dans V qui coïncide avec φ sur W_1 et qui est telle que $(q, \psi(q)) \in A$ pour tout $q \in W$.</u>

Considérons d'abord le cas où V est une variété R^m, pour un certain $m > 0$. Soient x_i $(1 \leqq i \leqq m)$ les coordonnées sur R^m. Si $q \in V$, il existe un voisinage M de q dans W et, pour chaque i, un voisinage P_i de $x_i(\varphi(q))$ dans R tels que les conditions $q' \in M$, $x_i' \in P_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ entraînent $(q',(x_1',\dots,x_m')) \in A$. On en conclut qu'on peut trouver pour chaque i un voisinage A_i du graphe de la fonction $x_i \circ \varphi$ dans R^2 de telle manière que la condition suivante soit satisfaite : si $g_1,\dots,g_m$ sont des fonctions sur W telles que $(q,g_i(q)) \in A_i$ pour tout $q \in W$ $(1 \leqq i \leqq m)$, on a $(q,(g_1(q),\dots,g_m(q))) \in A$. Il résulte immédiatement de là que, pour démontrer la prop.5 dans le cas où $V=R^m$, il suffira de se limiter au cas où $m=1$; φ est alors une fonction continue sur W. Si $q \in W$, soit $r(q)$ la distance (dans R^2) du point $(q,\varphi(q))$ au complémentaire de A ; si L est une partie compacte de W, on a $\inf_{q \in L} r(q) > 0$. Soit $(h_j)_{1 \leqq j < \infty}$ une suite dispersée de fonctions de $F(W)$ à supports compacts telle que $\sum_{j=1} h_j = 1$ et que $0 \leqq h_j(q) \leqq 1$ pour tout j et tout $q \in W$. Soit L_j le support de h_j, et soit $a_j = 2^{-(j+2)}(\inf_{q\in L_j} r(q))$. Pour chaque j, il existe une fonction $g_j \in F(W)$ telle que $|\varphi(q)-g_j(q)| \leqq a_j$ pour tout $q \in L_j$ (prop. 1). La suite $(h_j g_j)_{1\leqq j<\infty}$ est dispersée ; soit g sa somme. Si $q\in W$, on a

$$|\varphi(q)-g(q)| = \left|\sum_{j=1} h_j(q)(\varphi(q)-g_j(q))\right| \leqq \sum_{j=1} a_j h_j(q)$$

Or, si $h_j(q) \neq 0$, on a $q \in L_j$ d'où $a_j \leqq 2^{-(j+2)} r(q)$; on a donc $|\varphi(q)-g(q)| \leqq (1/4)r(q)$. La fonction g est dans $F(W)$; la restriction de $\varphi - g$ à W_1 est donc de classe C^k et peut par suite se prolonger par une fonction u de classe C^k sur W. On a $|u(q)| \leqq (1/4)r(q)$ si $q \in W_1$; l'ensemble N des points $q\in W$ tels que $|u(q)| < (1/2)r(q)$ est donc un voisina-ge de W_1 dans W. Il existe une fonction $h' \in F(W)$ qui possède les propriétés suivantes : on a $h'(q)=1$ si $q \in W_1$, $0 \leqq h'(q) \leqq 1$ pour tout $q\in W$ et $h'(q)=0$ si $q \notin N$. Il existe en effet une suite dispersée $(h'_j)_{1\leqq j<\infty}$ de fonctions de $F(W)$ qui possède les propriétés suivantes : on a $\sum_{j=1} h'_j = 1$; on a $\sum_{j=1} h'_j = 1$; on a $0 \leqq h'_j(q) \leqq 1$ pour tout j et tout $q \in W$; les supports de celles des fonctions h'_j dont les supports rencontrent W_1 sont contenus dans N ; il suffit alors de prendre pour h' la somme de celles des fonctions h'_j dont les supports rencontrent W_1.
La fonction $g+h'u$ est de classe C^k et coïncide avec φ sur W_1 ; de plus, on a $|h'(q)u(q)| < (1/2)r(q)$ pour tout $q\in W$, d'où $|\varphi(q)-(g+h'u)(q)| < r(q)$ pour tout $q \in W$, et par suite $(q,(g+h'u)(q)) \in A$. La prop. 5 est donc démontrée dans le cas où $V=R^m$.
Pour passer au cas général, observons que l'on peut supposer, sans restreindre la généralité, que V est une sous-variété fermée d'une varié-té R^m.

Soient alors U un voisinage de V dans R^m et π une application de U sur V qui possèdent les propriétés énoncées dans la prop.4 . Soit A' l'ensemble des points $(q, x) \in W \times U$ tels que $(q, \pi(x)) \in A$; π étant une application continue, et coïncidant avec l'application identique sur V, A' est un voisinage du graphe de $W \times U$, donc aussi dans $W \times R^m$. Il existe donc une application ψ_1 de classe C^k de W dans R^m qui coïncide avec φ sur W_1 et qui est telle que $(q, \psi_1(q)) \in A'$ pour tout $q \in W$; l'application $\psi = \pi \circ \psi_1$ possède alors les propriétés requises.

<u>Remarque</u>. Soit E une partie fermée de W . Convenons de dire qu'une fonction g sur E est de classe C^k si g est la restriction à E d'une fonction de $F^k(W)$, puis qu'une application φ_o de E dans une variété V est de classe C^k si, pour toute fonction $f \in F(V)$, la fonction $f \circ \varphi_o$ est de classe C^k sur E ; ces définitions sont en accord avec celles précédemment données dans le cas où E est une sous-variété fermée de W . On a alors le résultat suivant :

<u>Soit</u> φ <u>une application continue d'une variété</u> W <u>dans une variété</u> V , <u>et soit</u> E <u>une partie fermée de</u> W <u>telle que la restriction de</u> φ <u>à</u> E <u>soit de classe</u> C^k . <u>Soit</u> A <u>un voisinage quelconque du graphe de</u> φ <u>dans l'espace</u> $W \times V$. <u>Il existe alors une application</u> ψ <u>de classe</u> C^k <u>de</u> W <u>dans</u> V <u>qui coïncide avec sur</u> E <u>et qui est telle que</u> $(q, \psi(q)) \in A$ <u>pour tout</u> $q \in W$.

La démonstration se déduit de celle de la prop.5 en y remplaçant partout "W_1" par "E" .

§ 10. CHAMPS.

Soit V une variété. Supposons qu'on ait attaché à chaque point $p \in V$ une algèbre graduée $A(p)$ sur le corps des nombres réels, le groupe des degrés Γ de la gradation de $A(p)$ étant un groupe additif quelconque, mais ne dépendant pas du point p. On pourra alors considérer l'ensemble $A_o(V)$ des applications $a : p \rightarrow a_p$ de V qui possèdent la propriété suivante : pour tout $p \in V$, $a_p \in A(p)$. Si a et b sont des éléments de $A_o(V)$, on désigne par $a+b$ l'application $p \rightarrow a_p + b_p$ et par ab l'application $p \rightarrow a_p b_p$; il est clair que ces lois de composition définissent sur $A_o(V)$ une structure d'anneau. Si γ est un élément quelconque de Γ, soit ${}^{\gamma}A_o(V)$ l'ensemble des applications $a \in A_o(V)$ telles que, pour tout $p \in V$, a_p soit homogène de degré γ. Posons

$$(1) \qquad A(V) = \Sigma_{\gamma \in \Gamma} {}^{\gamma}A_o(V) \quad .$$

Il est clair que $A(V)$ est un sous-anneau de $A_o(V)$, et que la décomposition (1) de $A(V)$ définit sur cet anneau une structure graduée admettant Γ comme groupe de degrés.

Supposons à partir de maintenant que, pour tout $p \in V$, $A(p)$ admette un élément unité ; on pourra alors identifier le corps des nombres réels à une sous algèbre de $A(p)$; les éléments de cette sous-algèbre sont homogènes de degré 0. Il en résulte immédiatement que $A(V)$ contient l'anneau $\Phi(V)$ des fonctions définies sur V ; de plus, $\Phi(V)$ est contenu dans le centre de $A(V)$, et son élément unité est aussi élément unité de $A(V)$. On pourra donc considérer $A(V)$ comme une algèbre sur $\Phi(V)$.

Les considérations précédentes s'appliquent aux cas suivants :

1) $A(p)$ est l'algèbre tensorielle sur l'espace $\mathcal{D}_p(V)$ des covecteurs de V en p, algèbre que l'on désigne par $\mathcal{T}_{cov}(p;V)$.

Cette algèbre est graduée avec comme groupe des degrés le groupe Z des nombres entiers ; ses éléments s'appellent les *tenseurs covariants* en p . L'algèbre A(V) s'appelle alors l'*algèbre des champs de tenseurs cova riants sur* V , et se désigne par $\mathcal{T}_{cov.}(V)$.

2) A(p) est l'algèbre tensorielle sur l'espace $\mathcal{L}_p(V)$ des vecteurs tangents à V en p , algèbre que l'on désigne par $\mathcal{T}_{con}(p;V)$. Cette algèbre est graduée avec Z comme groupe des degrés ; ses éléments s'appellent les *tenseurs contrevariants en* p . L'algèbre A(V) s'appelle alors l'*algèbre des champs de tenseurs contrevariants sur* V , et se désigne par $\mathcal{T}_{con.}(V)$.

3) A(p) est le produit tensoriel $\mathcal{T}_{cov.}(p) \otimes \mathcal{T}_{con.}(p;V)$, que l'on désigne par $\mathcal{T}(p;V)$. Cette algèbre est graduée avec Z^2 comme groupe des degrés ; ses éléments s'appellent les *tenseurs mixtes en* p . L'algèbre A(V) s'appelle alors l'*algèbre des champs de tenseurs mixtes sur* V (ou, simplement, des *champs de tenseurs* sur V) et se désigne par $\mathcal{T}(V)$.

Nous utiliserons la notation multiplicative ordinaire pour les opérations de multiplication dans $\mathcal{T}_{cov.}(p,V)$, $\mathcal{T}_{con.}(p;V)$, $\mathcal{T}(p;V)$ (au lieu de la notation $\otimes$) . On notera que $\mathcal{T}_{cov.}(V)$ et $\mathcal{T}_{con.}(V)$ peuvent s'identifier à des sous-algèbres de $\mathcal{T}(V)$.

4) A(p) est l'algèbre extérieure $\mathcal{C}(p;V)$ sur l'espace $\mathcal{D}_p(V)$. Cette algèbre est gra-duée avec Z comme groupe des degrés ; ses éléments s'appellent les *multicovecteurs en* p . L'algèbre A(V) s'appelle alors l'*algèbre des formes différentielles* (ou encore l'algèbre des champs de multicovecteurs) de V et se désigne par $\mathcal{C}(V)$.

5) $A(p)$ est l'algèbre extérieure $\mathcal{M}(p;V)$ sur l'espace $L_p(V)$. Cette algèbre est graduée avec Z comme groupe des degrés ; ses éléments s'appellent les <u>multivecteurs en</u> p . L'algèbre $A(V)$ s'appelle alors l'<u>algèbre des champs de multivecteurs sur</u> V et se désigne par $\mathcal{M}(V)$.

Dans les cas 4) et 5), les opérations de multiplication dans $A(p)$ et dans $A(V)$ se désignent par le signe $\wedge$. On notera que, dans chacun de ces cas, un élément homogène de degré m de $A(p)$ ne peut être $\neq 0$ que si $0 \leqq m \leqq n$, où n est la dimension de V. Il en résulte que l'on a, dans les cas 4) et 5), $A(V) = A_o(V)$.

Revenant au cas général d'algèbres graduées $A(p)$ quelconques, on notera que, si U est une sous-variété ouverte de V, la restriction à U d'une application $a \in A(V)$ appartient à $A(U)$. On obtient ainsi un homomorphisme de $A(V)$ dans $A(U)$ qu'on appelle l'<u>homomorphisme de restriction</u>.

Si a est un entier, on désignera par ${}^aT_{cov.}(p;V)$, ${}^aT_{con.}(p;V)$, ${}^aT_{cov.}(V)$, ${}^aT_{con.}(V)$, ${}^a\mathcal{C}(p;V)$, ${}^a\mathcal{M}(p;V)$, ${}^a\mathcal{C}(V)$ et ${}^a\mathcal{M}(V)$ les espaces d'éléments homogènes de degré a des algèbres $T_{cov.}(p;V)$, $T_{con.}(p;V)$, $T_{cov.}(V)$, $T_{con.}(V)$, $\mathcal{C}(p;V)$, $\mathcal{M}(p;V)$, $\mathcal{C}(V)$ et $\mathcal{M}(V)$ respectivement. Ces espaces se réduisent à $\{0\}$ si $a < 0$. Si a et b sont des entiers, on désigne par ${}^{(a,b)}T(p;V)$ et ${}^{(a,b)}T(V)$ les espaces d'éléments homogènes de degré (a,b) de $T(p;V)$ et de $T(V)$; ces espaces se réduisent à $\{0\}$ si l'un ou l'autre des entiers a ou b est < 0.

<u>Opérations algébriques.</u>

1) Soient a un entier $\geqq 0$ et ϖ une permutation de l'ensemble $\{1,\dots,a\}$. On peut alors associer à ϖ un opérateur de symétrie dans chacun des espaces ${}^aT_{cov.}(p;V)$ et ${}^aT_{con.}(p;V)$, opérateur que l'on

désigne encore par $\overline{\omega}$. Si t est un élément de l'une ou l'autre des ensembles ${}^{a}T_{cov.}(V)$ ou ${}^{a}T_{con.}(V)$, on désigne par $\overline{\omega}\, t$ l'élément du même ensemble défini par $(\overline{\omega}\, t)_p = \overline{\omega}(t_p)$ pour tout $p \in V$. Les opérateurs ainsi définis dans ${}^{a}T_{cov.}(V)$ et dans ${}^{a}T_{con.}(V)$ s'appellent les <u>opérateurs de symétrie</u>. Ce sont des automor phismes des structures de modules des ensembles en question sur l'anneau des fonctions sur V . Les éléments t de ${}^{a}T_{cov.}(V)$ ou de ${}^{a}T_{con.}(V)$ qui sont invariants par tous les opérateurs de symétrie sont appelés <u>symétriques</u> ; ceux pour lesquels on a $\overline{\omega}\, t = \varepsilon(\overline{\omega})t$ pour toute permutation $\overline{\omega}$, où $\varepsilon(\overline{\omega})$ est la signature de $\overline{\omega}$, sont appelés <u>alternés</u> . Plus généralement, un élément de $T_{cov.}(V)$ ou de $T_{con.}(V)$ est dit symétrique ou alterné si toutes ses composantes homogènes sont symétriques ou alternées.

2) Pour chaque $p \in V$, il existe dans chacune des algèbres $T_{cov.}(p;V)$ et $T_{con.}(p;V)$ deux opérateurs remarquables, l'opérateur de symétrisation Sym. et l'opérateur d'alternation Alt. . Si t est un champ de tenseurs covariants ou contrevariants, on désigne par Sym.t et Alt.t les champs de tenseurs définis par $(\mathrm{Sym.}t)_p = \mathrm{Sym.}t_p$, $(\mathrm{Alt.}t)_p = \mathrm{Alt.}t_p$ pour tout $p \in V$. Le corps R étant de caractéristique 0 , il y a identité entre les champs de tenseurs de la forme Sym.t (resp. : Alt.t) et les champs de tenseurs symétriques (resp.:alternés) . Les opérations Sym. ~~xx~~ et Alt. sont des endomorphismes des structures de modules de $T_{cov.}(V)$ et de $T_{con.}(V)$ sur $\Phi(V)$; leurs restrictions à l'un quelconque des espaces ${}^{a}T_{cov.}(V)$ ou ${}^{a}T_{con.}(V)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants d'opérateurs de symétrie.

3) Soient donnés des entiers i,j,a,b tels que $\leqq i \leqq a$, $1 \leqq j \leqq b$. Il existe alors une application $\chi_{i,j}$ de ${}^{(a,b)}\mathbb{T}(p;V)$ dans ${}^{(a-1\,,b-1)}\mathbb{T}(p;V)$, la contraction par rapport aux indices i et j . Si $t \in {}^{(a,b)}\mathbb{T}(V)$, on désigne par $\chi_{i,j}t$ l'élément de ${}^{(a-1\,,b-1)}\mathbb{T}(V)$ défini par $(\chi_{i,j}\cdot t)_p = \chi_{i,j}\cdot t_p$ pour tout $p \in V$; $\chi_{i,j}$ devient ainsi une application linéaire du module ${}^{(a,b)}\mathbb{T}(V)$ dans le module ${}^{(a-1\,,b-1)}\mathbb{T}(V)$, qu'on appelle encore <u>contraction par rapport aux indices</u> i <u>et</u> j . Si f est une fonction de classe C^1 sur V et X un champ de vecteurs, df appartient à ${}^{(1,0)}\mathbb{T}(V)$, X à ${}^{(0,1)}\mathbb{T}(V)$, et on a

$$\chi_{1,1}((df)X) = \chi_{1,1}(X(df)) = \langle X,df \rangle = Xf .$$

4) Il existe une forme bilinéaire canonique $(t,t') \rightarrow \langle t,t' \rangle$ sur le produit par lui-même de l'espace vectoriel $\mathbb{T}(p;V)$. Si maintenant t et t' représentent des éléments de l'algèbre $\mathbb{T}(V)$, on désigne par $\langle t,t' \rangle$ la fonction $p \rightarrow \langle t_p,t'_p \rangle$ sur V (cette définition est en accord avec celle précédemment donnée dans le cas où t est un champ de vecteurs et t' un champ de covecteurs de la forme df , où $f \in F^1(V)$). L'application $(t,t') \rightarrow \langle t,t' \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur le produit par lui-même de $\mathbb{T}(V)$, considéré comme module sur $\Phi(V)$. Si a,b,a',b' sont des entiers tels que $(a',b') \neq (b,a)$, la forme bilinéaire $\langle t,t' \rangle$ est nulle sur ${}^{(a,b)}\mathbb{T}(V) \times {}^{(a',b')}\mathbb{T}(V)$. Si t est un élément $\neq 0$ de $\mathbb{T}(V)$, il y a un élément $t' \in \mathbb{T}(V)$ tel que $\langle t,t' \rangle \neq 0$. On notera que la forme bilinéaire $\langle t,t' \rangle$ peut se définir comme suit à partir des opérations de contraction : si $t \in {}^{(a,b)}\mathbb{T}(V)$ et $t' \in {}^{(b,a)}\mathbb{T}(V)$, on a

$$\langle t,t' \rangle = \chi_{1,1} \circ \dots \circ \chi_{a+b,1}\,(tt') .$$

5) Si $p \in V$, il existe des homomorphismes canoniques $P_{\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{M}}$ de $\mathrm{T}_{\mathrm{cov.}}(p;V)$ sur $\mathcal{C}(p;V)$ et de $\mathrm{T}_{\mathrm{con.}}(p;V)$ sur $\mathcal{M}(p;V)$. On en déduit qu'il existe des homomorphismes $P_{\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{M}}$, dits canoniques, de $\mathrm{T}_{\mathrm{cov.}}(V)$ sur $\mathcal{C}(V)$ et de $\mathrm{T}_{\mathrm{con.}}(V)$ sur $\mathcal{M}(V)$, définis par les formules $(P_{\mathcal{C}}.t)_p = P_{\mathcal{C}}.t_p$ et $(P_{\mathcal{M}}.t')_p = P_{\mathcal{M}}.t'_p$ pour tout $p \in V$. Ces homomorphismes sont homogènes de degré 0 et coïncident avec l'identité sur $\Phi(V)$. Le corps des nombres réels étant de caractéristique 0, les noyaux des homomorphismes $P_{\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{M}}$ sont identiques à ceux des opérations d'alternation dans $\mathrm{T}_{\mathrm{cov.}}(V)$ et dans $\mathrm{T}_{\mathrm{con.}}(V)$. Il existe aussi, pour tout $p \in V$, des applications linéaires canoniques $J_{\mathcal{C}}$ et $J_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{C}(p;V)$ sur l'ensemble des tenseurs covariants alternés en p et de $\mathcal{M}(p;V)$ sur l'ensemble des tenseurs contrevariants alternés en p. On en déduit des applications linéaires canoniques $J_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}(V)$ (considéré comme module sur $\Phi(V)$) sur l'ensemble des champs de tenseurs covariants alternés et $J_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}(V)$ sur l'ensemble des champs de tenseurs contrevariants alternés : on pose, si $\omega \in \mathcal{C}(V)$ et $\xi \in \mathcal{M}(V)$, $(J_{\mathcal{C}}.\omega)_p = J_{\mathcal{C}}.\omega_p$ et $(J_{\mathcal{M}}.\xi)_p = J_{\mathcal{M}}.\xi_p$ pour tout $p \in V$. Les applications $J_{\mathcal{C}}$ et $J_{\mathcal{M}}$ sont biunivoques. Si $\omega \in {}^a\mathcal{C}(V)$, $\xi \in {}^a\mathcal{M}(V)$, on a $P_{\mathcal{C}}(J_{\mathcal{C}}.\omega) = a!\,\omega$, $P_{\mathcal{M}}(J_{\mathcal{M}}.\xi) = a!\,\xi$; si $t \in \mathrm{T}_{\mathrm{cov.}}(V)$ et $t' \in \mathrm{T}_{\mathrm{con.}}(V)$, on a $J_{\mathcal{C}}(P_{\mathcal{C}}.t) = \mathrm{Alt}.t$, $J_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}}.t') = \mathrm{Alt}.t'$.

Si $\omega \in {}^a\mathcal{C}(V)$, $\omega' \in {}^{a'}\mathcal{C}(V)$, $\xi \in {}^b\mathcal{M}(V)$, $\xi' \in {}^{b'}\mathcal{M}(V)$, on a $a!a'!\,J_{\mathcal{C}}(\omega \wedge \omega') = \mathrm{Alt}.(J_{\mathcal{C}}.\omega)(J_{\mathcal{C}}.\omega')$ et de même $b!b'!\,J_{\mathcal{M}}(\xi \wedge \xi') = \mathrm{Alt}.(J_{\mathcal{M}}.\xi)(J_{\mathcal{M}}.\xi')$.

6) Il existe une forme bilinéaire canonique $(\omega,\xi) \to \langle \omega,\xi \rangle$ sur le produit des espaces vectoriels $\mathcal{C}(p;V)$ et $\mathcal{M}(p;V)$. Si maintenant $\omega \in \mathcal{C}(V)$ et $\xi \in \mathcal{M}(V)$, nous désignerons par $\langle \omega, \xi \rangle$ la fonction sur V définie par $(\langle \omega, \xi \rangle)(p) = \langle \omega_p, \xi_p \rangle$ pour tout point $p \in V$. L'application $(\omega,\xi) \to \langle \omega,\xi \rangle$ est une forme bilinéaire sur le produit des structures de modules de $\mathcal{C}(V)$ et de $\mathcal{M}(V)$ sur $\Phi(V)$. Cette forme bilinéaire s'annulle sur le produit ${}^a\mathcal{C}(V) \times {}^b\mathcal{M}(V)$ si $a \neq b$. Si ω est un élément $\neq 0$ de $\mathcal{C}(V)$, il y a un $\xi \in \mathcal{M}(V)$ tel que $\langle \omega, \xi \rangle \neq 0$, et, si ξ est un élément $\neq 0$ de $\mathcal{M}(V)$, il y a un $\omega \in \mathcal{C}(V)$ tel que $\langle \omega, \xi \rangle \neq 0$. Si f est une fonction de classe C^1 sur V et X un champ de vecteurs sur V, on a $\langle df, X \rangle = Xf$. Si $t \in T_{cov.}(V)$ et $\xi \in \mathcal{M}(V)$, on a $\langle P_{\mathcal{C}} . t, \xi \rangle = \langle t, J_{\mathcal{M}} . \xi \rangle$ (où, au second membre, t et $J_{\mathcal{M}} . \xi$ sont identifiés à des éléments de $\mathcal{T}(V)$) ; de même, si $t' \in \mathcal{T}_{con.}(V)$ et $\omega \in \mathcal{C}(V)$, on a $\langle \omega, P_{\mathcal{M}} . t' \rangle = \langle J_{\mathcal{C}} . \omega, t' \rangle$.

7) A chaque élément ω de $\mathcal{C}(p;V)$ est associé un opérateur $\iota(\omega)$ sur $\mathcal{M}(p;V)$, l'opérateur de coproduit ; on peut donc associer à tout $\omega \in \mathcal{C}(V)$ un opérateur, appelé opérateur de coproduit, et noté $\iota(\omega)$, opérant sur $\mathcal{M}(V)$ et défini par $(\iota(\omega).\xi)_p = \iota(\omega_p). \xi_p$ pour tout $\xi \in \mathcal{M}(V)$ et tout $p \in V$. De même, on peut attacher à tout $\xi \in \mathcal{M}(V)$ un opérateur de coproduit $\iota(\xi)$ opérant sur $\mathcal{C}(V)$. L'application $\omega \to \iota(\omega)$ est une représentation de $\mathcal{C}(V)$ dans l'algèbre des endomorphismes du module $\mathcal{M}(V)$; l'application $\xi \to \iota(\xi)$ est une représentation de $\mathcal{M}(V)$ dans l'algèbre des endomorphismes du module $\mathcal{C}(V)$. Si $\omega \in \mathcal{C}(V)$ et $\xi \in \mathcal{M}(V)$, $\langle \omega, \xi \rangle$ est la composante homogène de degré 0 des éléments $\iota(\omega).\xi$ de $\mathcal{M}(V)$ et $\iota(\xi).\omega$ de $\mathcal{C}(V)$. Si $\omega \in \mathcal{C}(V)$ et si ξ, ξ' sont des éléments de $\mathcal{M}(V)$, on a

$\langle i(\xi).\omega\ ,\ \xi'\rangle = \langle \omega, \xi'\xi\rangle$; si ω et ω' sont des éléments de $\mathcal{C}(V)$ et ξ un élément de $\mathcal{M}(V)$, on a $\langle \omega\ , i(\omega').\ \xi\rangle = \langle \omega\omega'\ , \xi\rangle$. Si $\omega \in {}^1\mathcal{C}(V)$, $i(\omega)$ est une antidérivation de $\mathcal{M}(V)$; si $\xi \in {}^1\mathcal{M}(V)$, $i(\xi)$ est une antidérivation de $\mathcal{C}(V)$.

Supports.

Revenons aux notations introduites au début de ce § . Si a est un élément quelconque de $A(V)$, on appelle <u>support</u> de a l'adhérence de l'ensemble des $p \in V$ tels que $a_p \neq 0$. Cette définition coïncide avec celle précédemment donnée dans les cas où a est soit une fonction sur V soit un champ de vecteurs. Si a et a' sont des éléments de $A(V)$, le support de a+a' est contenu dans la réunion des supports de a et de a' et celui de aa' dans l'intersection des supports de a et de a' .

Si t et t' sont des champs de tenseurs mixtes sur V , le support de $\langle t,t'\rangle$ est contenu dans l'intersection de ceux de t et de t' . De même, si $\omega \in \mathcal{C}(V)$ et $\xi \in \mathcal{M}(V)$, les supports de $\langle \omega, \xi\rangle$, de $i(\omega).\xi$ et de $i(\xi).\omega$ sont contenus dans l'intersection des supports de ω et de ξ .

Revenant au cas général, on dit qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de $A(V)$ est <u>dispersée</u> si la famille des supports de ces éléments est dispersée. S'il en est ainsi, et si $p \in V$, la somme $\sum_{i\in I}(a_i)_p$ a un sens, et l'application $p \to \sum_{i\in I}(a_i)_p$ représente un élément de $A_o(V)$. Si on suppose de plus qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments γ du groupe des degrés des $A(p)$ pour lesquels l'un au moins des a_i ait sa composante homogène de degré γ différente de 0, l'application $p \to \sum_{i\in I}(a_i)_p$ appartient à $A(V)$; nous représenterons alors cette application par $\sum_{i\in I} a_i$.

Champs de classe C^k.

La lettre k désignera dans ce qui suit soit un entier ≥ 0 soit le symbole ∞. Rappelons qu'on désigne par $F^k(V)$ l'anneau des fonctions de classe C^k sur V.

Les algèbres $\mathcal{T}_{cov.}(V)$ et $\mathcal{C}(V)$ contiennent $F^k(V)$ et l'ensemble $d(F(V))$ des différentielles des fonctions de $F(V)$. Nous désignerons par $\mathcal{T}^k_{cov.}(V)$ et $\mathcal{C}^k(V)$ les sous-anneaux de $\mathcal{T}_{cov.}(V)$ et de $\mathcal{C}(V)$ qui y sont engendrés par l'ensemble $F^k(V) \cup d(F(V))$. Les algèbres $\mathcal{T}_{con.}(V)$ et $\mathcal{M}(V)$ contiennent $F^k(V)$ et l'ensemble $\mathfrak{X}$ des transformations infinitésimales de V ; nous désignerons par $\mathcal{T}^k_{con.}(V)$ et $\mathcal{M}^k(V)$ les sous-anneaux de $\mathcal{T}_{con.}(V)$ et de $\mathcal{M}(V)$ qui y sont engendrés par l'ensemble $F^k(V) \cup \mathfrak{X}$. Enfin, nous désignerons par $\mathcal{T}^k(V)$ le sous-anneau de $\mathcal{T}(V)$ engendré par l'ensemble $F^k(V) \cup d(F(V)) \cup \mathfrak{X}$. Un élément de l'un quelconque des anneaux $\mathcal{T}^k_{cov.}(V)$, $\mathcal{T}^k_{con.}(V)$, $\mathcal{T}^k(V)$, $\mathcal{C}^k(V)$, $\mathcal{M}^k(V)$ sera dit être <u>de classe</u> C^k. Il est clair que cette définition est en accord avec celle précédemment donnée de fonction de classe C^k ; par contre, ce n'est ~~xx~~ que plus tard que nous pourrons établir que les champs de vecteurs de classe C^k au sens de la déf. 1, § 7, sont identiques aux champs de vecteurs qui appartiennent à $\mathcal{T}^k_{con.}(V)$, ou à $\mathcal{T}^k(V)$ ou à $\mathcal{M}^k(V)$.

Il est clair que $\mathcal{T}^k_{cov.}(V)$, $\mathcal{T}^k_{con.}(V)$, $\mathcal{T}^k(V)$, $\mathcal{C}^k(V)$ et $\mathcal{M}^k(V)$ sont des sous-anneaux homogènes de $\mathcal{T}_{cov.}(V)$, $\mathcal{T}_{con.}(V)$, $\mathcal{T}(V)$, $\mathcal{C}(V)$ et $\mathcal{M}(V)$ respectivement, et peuvent être considérés comme des algèbres sur l'anneau $F^k(V)$. Si a est un entier, nous désignerons par ${}^a\mathcal{T}^k_{con.}(V)$, ${}^a\mathcal{T}^k(V)$ ~~et~~ ${}^a\mathcal{C}^k(V)$ et ${}^a\mathcal{M}^k(V)$ les ensembles d'éléments homogènes de degré a des anneaux $\mathcal{T}^k_{cov.}(V)$, $\mathcal{T}^k_{con.}(V)$, $\mathcal{C}^k(V)$ et $\mathcal{M}^k(V)$; si a et b sont des entiers, nous désignerons par ${}^{(a,b)}\mathcal{T}^k(V)$ l'ensemble des éléments homogènes de degré (a,b) de $\mathcal{T}^k(V)$; les ensembles que nous venons de définir ont des structures de modules sur $F^k(V)$.

Nous désignerons par M_d le monoïde engendré dans $\mathcal{T}_{cov.}(V)$ par 1 et par les éléments df, pour $f \in F(V)$, et par M_χ le monoïde engendré dans $\mathcal{T}_{con.}(V)$ par 1 et par les transformations infinitésimales de V. Les ensembles M_d et M_χ sont donc des ensembles de générateurs homogènes des structures de modules de $\mathcal{T}^k_{cov.}(V)$ et de $\mathcal{T}^k_{con.}(V)$ sur $F^k(V)$. Un opérateur de symétrie correspondant à une permutation de l'ensemble $\{1,\dots,a\}$ (où a est un entier $\geqq 0$) permute entre eux les éléments homogènes de M_d ou de M_χ ; on en conclut que les opérateurs de symétrie dans ${}^a\mathcal{T}_{cov.}(V)$ et dans ${}^a\mathcal{T}_{con.}(V)$ appliquent sur eux-mêmes les ensembles ${}^a\mathcal{T}^k_{cov.}(V)$, ${}^a\mathcal{T}^k_{con.}(V)$. Il en résulte immédiatement que les opérateurs Alt. et Sym. appliquent $\mathcal{T}^k_{cov.}(V)$ et $\mathcal{T}^k_{con.}(V)$ dans eux-mêmes. Si $f \in F(V)$ et si X est une transformation infinitésimale, la fonction $\langle df,X\rangle = Xf$ est dans $F(V)$, donc dans $F^k(V)$. Soient i,j,a,b des entiers tels que $1 \leqq i \leqq a$, $1 \leqq j \leqq b$; il résulte de ce que nous venons de dire que, si m est un élément homogène de degré a de M_d et m' un élément homogène de degré b de M_χ, $\chi_{i,j}(mm')$ appartient à ${}^{(a-1,b-1)}\mathcal{T}^k(V)$. Or les éléments mm', m et m' satisfaisant aux conditions indiquées, forment un ensemble de générateurs de la structure de module de ${}^{(a,b)}\mathcal{T}^k(V)$ sur $F^k(V)$; on en conclut que $\chi_{i,j}$ applique ${}^{(a,b)}\mathcal{T}^k(V)$ dans ${}^{(a-1,b-1)}\mathcal{T}^k(V)$. Il résulte de là que, si t,t' sont des éléments de $\mathcal{T}^k(V)$, la fonction $\langle t,t'\rangle$ appartient à $F^k(V)$.

L'homomorphisme P_C coïncide avec l'identité sur l'ensemble $d(F(V))$, et il en est de même de l'application J_C. On en conclut que P_C induit un homomorphisme de $\mathcal{T}^k_{cov.}(V)$ sur $\mathcal{C}^k(V)$.

Si $f_1,\dots,f_a$ sont des éléments de $F(V)$, $J_{\mathcal{C}}$ applique $df_1\wedge\dots\wedge df_a$ sur $\mathrm{Alt}.((df_1)\dots(df_a))$; il en résulte que $J_{\mathcal{C}}$ applique $\mathcal{C}^k(V)$ sur l'ensemble des éléments alternés de $T^k_{cov.}(V)$. On voit de même que $P_{\mathcal{M}}$ applique $T^k_{con.}(V)$ sur $\mathcal{M}^k(V)$ et que $J_{\mathcal{M}}$ applique $\mathcal{M}^k(V)$ sur l'ensemble des éléments alternés de $T^k_{con.}(V)$.

Nous allons maintenant montrer que, si $\omega\in\mathcal{C}^k(V)$ et $\xi\in\mathcal{M}^k(V)$, on a $\iota(\omega).\xi\in\mathcal{M}^k(V)$. Il suffit évidemment de montrer qu'il en est ainsi dans le cas où ω est dans le monoïde engendré par les df, pour $f\in F(V)$, dans $\mathcal{C}^k(V)$. L'application $\omega\to\iota(\omega)$ étant une représentation, il suffit de considérer le cas où ω est de la forme df, avec $f\in F(V)$. Or $\iota(df)$ est alors une antidérivation de l'anneau gradué $\mathcal{M}(V)$; pour montrer qu'elle applique $\mathcal{M}^k(V)$ dans lui-même, il suffit de montrer qu'elle applique les éléments de $F^k(V)$ et les transformations infinitésimales dans $\mathcal{M}^k(V)$. Or, si $g\in F^k(V)$, on a $\iota(df).g=0$, et, si X est une transformation infinitésimale, $\iota(df).X=\langle df,X\rangle = Xf\in F(V)\subset F^k(V)$. On verrait de la même manière que, si $\xi\in\mathcal{M}^k(V)$, $\iota(\xi)$ applique $\mathcal{C}^k(V)$ dans lui-même. On conclut de là que les conditions $\omega\in\mathcal{C}^k(V)$, $\xi\in\mathcal{M}^k(V)$ entraînent $\langle\omega,\xi\rangle\in F^k(V)$.

Désignons par n la dimension de la variété V. Il résulte du corollaire 2 que V peut être recouverte par un nombre fini d'ensembles ouverts U_l $(1\leqq l\leqq l_1)$ qui possèdent la propriété suivante ; pour chaque l, il existe n fonctions $f_{l;i}$ $(1\leqq i\leqq n)$ de $F(V)$ et n transformations infinitésimales $X_{l;i}$ $(1\leqq i\leqq n)$ de V telles que $X_{l;i}f_{l;j}$ coïncide avec δ_{ij} sur U_l $(1\leqq i,j\leqq n)$. Désignons par $t_{l;\mu}$ $(1\leqq\mu<\infty)$ tous les éléments distincts du monoïde engendré dans $T(V)$ par les éléments 1, $df_{l;i}$ $(1\leqq i\leqq n)$ et $X_{l;i}$ $(1\leqq i\leqq n)$. Si $t_{l;\mu}$ est le produit $(df_{i_1})\dots(df_{i_a})X_{j_1}\dots X_{j_b}$, désignons par $t'_{l;\mu}$ le produit $(df_{j_b})\dots(df_{j_1})X_{i_a}\dots X_{i_1}$; il est alors clair que $\langle t_{l;\mu}, t'_{l;\mu'}\rangle$ coïncide avec $\delta_{\mu\mu'}$ sur U_l $(1 \leqq \mu, \mu' < \infty)$. Il est clair que, si $p \in U_l$, les $d_p f_{l;i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ forment une base de $\mathcal{D}_p(V)$ et les $(X_{l;i})_p$ $(1 \leqq i \leqq n)$ une base de $\mathcal{L}_p(V)$; il en résulte que les $(t_{l;\mu})_p$ $(1 \leqq \mu < \infty)$ forment une base de $\mathcal{T}(p;V)$. Par ailleurs, il existe des fonctions h_l $(1 \leqq l \leqq l_1)$ de $F(V)$ telles que $\sum_{l=1}^{l_1} h_l = 1$ et que, pour chaque l, le support de h_l soit contenu dans U_l. Soit t un élément quelconque de $\mathcal{T}(V)$; on a $t = \sum_{l=1}^{l_1} h_l t$. Le champ de tenseurs $h_l t$ coïncide sur U_l avec un champ de tenseurs de la forme $\sum_{\mu=1}^{\infty} g_\mu t_{l;\mu}$, les g_μ étant des fonctions définies sur U_l et dont un nombre fini seulement sont $\neq 0$; de plus, il est clair que g_μ n'est autre que la restriction à U_l de la fonction $\langle h_l t, t'_{l;\mu}\rangle = \langle t, h_l t'_{l;\mu}\rangle$. Or les champs de tenseurs $h_l t$ et

$\sum_{\mu=1}^{\infty}\langle t, h_l t'_{l;\mu}\rangle t_{l;\mu}$ prennent tous deux la valeur 0 en un point n'appartenant pas à U_l ; ils sont donc égaux. On a donc $t = \sum_{l=1}^{l_1}\sum_{\mu=1}^{\infty}\langle t, h_l t'_{l;\mu}\rangle t_{l;\mu}$, ce qui démontre la

Proposition 1.– *Soit V une variété. Il existe alors deux suites $(u_\nu)_{1 \leqq \nu < \infty}$ et $(u'_\nu)_{1 \leqq \nu < \infty}$ de champs de tenseurs homogènes de classe C^∞ sur V qui possèdent les propriétés suivantes* : a) *si u_ν est homogène de degré (a,b), u'_ν est homogène de degré (b,a)* ; b) *pour a et b donnés, il n'y a qu'un nombre fini d'indices ν pour lesquels u_ν est de degré (a,b)* ; c) *si t est un champ de tenseurs quelconque sur V, on a*

$$t = \sum_{\nu=1}^{\infty}\langle t, u'_\nu\rangle u_\nu .$$

Corollaire 1. Pour qu'un champ de tenseurs t sur V soit de classe C^k, il faut et suffit que, pour tout champ de tenseurs t' de classe C^∞, $\langle t,t'\rangle$ soit une fonction de classe C^k.

Corollaire 2.- Si a,b sont des entiers, le module ${}^{(a,b)}T^k(V)$ sur l'anneau $F^k(V)$ a un nombre fini de générateurs, qui peuvent être pris de classe C^∞.

Corollaire 3. Soit un élément de $\mathbb{T}(V)$. Supposons que, pour tout point p du support de t, t coïncide sur un voisinage de p avec un champ de tenseurs de classe C^k ; t est alors de classe C^k.

Cela résulte immédiatement du cor. 1.

Corollaire 4.- Si un champ de tenseurs t est la somme d'une famille dispersée $(t_i)_{i\in I}$ de champs de tenseurs de classe C^k, t est de classe C^k.

Cela résulte immédiatement du cor. 3.

Corollaire 5.- Si X est un champ de vecteurs de classe C^k au sens de la déf. 1, § 7, alors X appartient à $T^k_{\text{con.}}(V)$.

En effet, si $f\in F(V)$, $\langle X,df\rangle = Xf$ appartient à $F^k(V)$. Il en résulte immédiatement que, si $u'\in {}^{(1,0)}T^k(V)$, $\langle X,u'\rangle\in F^k(V)$; par ailleurs, si $u'\in {}^{(a,b)}T^k(V)$ et $(a,b)\neq(1,0)$, alors $\langle X,u'\rangle = 0$.

Corollaire 6.- Si k est un entier >0 et $f\in F^k(V)$, le champ de covecteurs df appartient à $T^{(k-1)}_{\text{cov.}}(V)$.

En effet, si X est une transformation infinitésimale, la fonction $\langle df,X\rangle = Xf$ est dans $F^{k-1}(V)$.

Soit maintenant ω un élément quelconque de $\mathcal{C}(V)$; on peut alors écrire $J_C\cdot\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty}\langle J_C\cdot\omega, u'_\nu\rangle u_\nu$. Or $J_C\cdot\omega$ est un champ de tenseurs covariants ; $\langle J_C\cdot\omega, u'_\nu\rangle$ est donc nul si u'_ν n'est pas contrevariant. De plus, si ω est homogène de degré a, $\langle J_C\cdot\omega,u'_\nu\rangle$

est nul si u'_ν n'est pas de degré $(0,a)$, c'est-à-dire si u_ν n'est pas de degré $(a,0)$. Si ν est un indice tel que u_ν soit de degré $(a,0)$ (avec $a \geqq 0$), posons $\xi_\nu = P_{\mathcal{M}} . u'_\nu$ et $\omega_\nu = (a!)^{-1} P_{\mathcal{C}} . u_\nu$. Alors, si ω est de degré a, on a $P_{\mathcal{C}}(J_{\mathcal{C}} . \omega) = a!\omega$ et $\langle J_{\mathcal{C}} . \omega, u'_\nu \rangle = \langle \omega , \xi_\nu \rangle$ (si u est de degré $(a,0)$). On obtient donc le résultat suivant :

<u>Proposition 2</u>.- <u>Soit</u> V <u>une variété</u>. <u>Il existe alors une suite finie</u> $(\omega_\nu)_{1 \leqq \nu \leqq N}$ <u>de formes différentielles homogènes de classe</u> C^∞ <u>sur</u> V <u>et une suite finie</u> $(\xi_\nu)_{1 \leqq \nu \leqq N}$ <u>de champs de multivecteurs homogènes de classe</u> C^∞ <u>sur</u> V <u>qui possèdent les propriétés suivantes</u> : a) ω_ν <u>et</u> ξ_ν <u>sont du même degré</u> $(1 \leqq \nu \leqq N)$; b) <u>si</u> ω <u>est une forme différentielle quelconque sur</u> V, <u>on a</u>

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{N} \langle \omega , \xi_\nu \rangle \, \omega_\nu \quad .$$

<u>Corollaire 1</u>.- <u>Les notations étant celles de la prop.2, on a</u>, <u>pour tout champ</u> ξ <u>de multivecteurs sur</u> V, $\xi = \sum_{\nu=1}^{N} \langle \omega_\nu , \xi \rangle \, \xi_\nu$.

Soit en effet ξ' le second membre de cette égalité. Si ω est une forme différentielle quelconque sur V, on a $\langle \omega , \xi \rangle = \sum_{\nu=1}^{N} \langle \omega, \xi_\nu \rangle \langle \omega_\nu , \xi \rangle = \langle \omega, \xi' \rangle$, et le cor.1 résulte immédiatement de là.

<u>Corollaire 2</u>.- <u>Pour qu'une forme différentielle</u> ω <u>sur</u> V <u>soit de classe</u> C^k, <u>il faut et suffit que, pour tout champ de multivecteurs</u> ξ <u>de classe</u> C^∞, <u>la fonction</u> $\langle \omega, \xi \rangle$ <u>soit de classe</u> C^k. <u>Pour qu'un champ de multivecteurs</u> ξ <u>sur</u> V <u>soit de classe</u> C^k, <u>il faut et suffit que, pour toute forme différentielle</u> ω <u>de classe</u> C^∞, <u>la fonction</u> $\langle \omega, \xi \rangle$ <u>soit de classe</u> C^k.

<u>Corollaire 3</u>.- <u>Soit</u> ω (<u>resp.</u> : ξ) <u>une forme différentielle sur</u> V (<u>resp.</u> : <u>un champ de multivecteurs sur</u> V). <u>Supposons que, pour tout point</u>

<u>p du support de</u> ω (<u>resp.: de</u> ξ), ω (<u>resp.:</u> ξ) <u>coïncide sur un voisinage de p avec une forme différentielle</u> (<u>resp.: un champ de multivecteurs</u>) <u>de classe</u> C^k ; ω (<u>resp. :</u> ξ) <u>est alors de classe</u> C^k .

<u>Corollaire 4.- La somme d'une famille dispersée de formes différentielles</u> (<u>resp.: de champs de multivecteurs</u>) <u>de classe</u> C^k <u>est elle-même de classe</u> C^k .

Désignons maintenant par $\mathbb{D}^k(V)$ l'ensemble des champs de covecteurs de classe C^k sur V , et par $\mathbb{L}^k(V)$ celui des champs de vecteurs de classe C^k sur V ; $\mathbb{D}^k(V)$ et $\mathbb{L}^k(V)$ sont des sous-modules de la structure de module de $\mathbb{T}^k(V)$ sur $F^k(V)$. De plus, il est clair que $\mathbb{T}^k(V)$ est engendré, en tant qu'algèbre sur $F^k(V)$, par l'ensemble composé de 1 et des éléments de $\mathbb{D}^k(V)$ et de $\mathbb{L}^k(V)$; enfin, tout élément de $\mathbb{D}^k(V)$ commute avec tout élément de $\mathbb{L}^k(V)$. Soit Θ le produit tensoriel des algèbres tensorielles construites sur les modules $\mathbb{D}^k(V)$ et $\mathbb{L}^k(V)$ sur $F^k(V)$; il y a donc un homomorphisme canonique ρ de Θ sur $\mathbb{T}^k(V)$. <u>Nous allons montrer que</u> ρ <u>est un isomorphisme</u>. Nous utiliserons les mêmes notations que plus haut ; si $1 \leqq l \leqq l_1$, nous désignerons par π_l l'opération de restriction à U_l ; π_l applique donc $F^k(V)$ dans $F^k(U_l)$, $\mathbb{D}^k(V)$ dans $\mathbb{D}^k(U_l)$, $\mathbb{L}^k(V)$ dans $\mathbb{L}^k(U_l)$ et $\mathbb{T}^k(V)$ dans $\mathbb{T}^k(U_l)$; l'application $\pi'_l = \pi_l \circ \rho$ est un homomorphisme de Θ dans $\mathbb{T}^k(U_l)$. Désignons par $\theta_{l;\mu}$ $(1 \leqq \mu < \infty)$ les éléments du monoïde engendré dans Θ par 1 , par les $df_{l;i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ et par les $X_{l;i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, numérotés de telle manière que $\rho(\theta_{l;\mu}) = t_{l;\mu}$. Soit Θ_l la sous-algèbre de Θ formée des combinaisons linéaires des $\theta_{l;\mu}$ à coefficients dans l'anneau $F^k_l(V)$ des fonctions de $F^k(V)$ à supports contenus dans U_l . Cette sous-algèbre est appliquée isomorphiquement par π'_l .

Soit en effet $\theta = \sum_{\mu=1}^{\infty} g_\mu \theta_{l;\mu}$ un élément de cette algèbre tel que $\pi_l'(\theta)=0$. On a donc $\sum_{\mu=1}^{\infty} \pi_l(g_\mu)\pi_l(t_{l;\mu})=0$; mais il est clair que les restrictions des $t_{l;\mu}$ à U_l forment une base de la structure de module de $\mathcal{T}^k(U_l)$ sur $F^k(U_l)$; il en résulte que $\pi_l(g_\mu)=0$ pour tout μ, d'où $g_\mu=0$, puisque le support de g_μ est contenu dans U_l. Soit maintenant θ un élément de Θ tel que $\rho(\theta)=0$; les fonctions h_l étant définies comme plus haut, on a $\theta = \sum_{l=1}^{l_1} h_l\theta$, $\rho(h_l\theta)=0$. Nous allons montrer que $h_l\theta \in \Theta_l$. Soit h_l' une fonction de $F(V)$, égale à 1 sur le support de h_l et dont le support soit encore contenu dans U_l. On a donc $h_l'h_l=h_l$, d'où $(h_l')^r h_l\theta = h_l\theta$ pour tout $r > 0$; il en résulte que $h_l\theta$ appartient à l'anneau engendré sur $F_l^k(V)$ par les éléments h_l', $h_l'.df$ (où $f \in F(V)$) et $h_l'X$ (où X est une transformation infinitésimale de V). Or, si $f \in F(V)$, la restriction de $h_l'.df$ à U_l peut se mettre sous la forme $\sum_{i=1}^{n} g_i \pi_l(df_{l;i})$, les g_i étant des fonctions définies sur U_l (en effet, si $p \in U_l$, les $d_p f_{l;i}$ $(1 \leq i \leq n)$ forment une base de $D_p(V)$), et g_i est la restriction à U_l de la fonction $\langle h_l'.df, X_{l;i} \rangle$; on a donc $h_l'.df = \sum_{i=1}^{n} \langle h_l'.df, X_i \rangle \, df_{l;i}$, ce qui montre que $h_l'.df$ appartient à Θ_l. On voit de même que $h_l'X \in \Theta_l$; il en résulte que $h_l\theta \in \Theta_l$. La condition $\rho(h_l\theta)=0$ entraîne donc $h_l\theta=0$; ceci étant vrai pour tout l, on a $\theta=0$. Nous avons donc obtenu le résultat suivant

Proposition 3.- *Soient V une variété, $F^k(V)$ l'anneau des fonctions de classe C^k sur V, $D^k(V)$ le module (sur $F^k(V)$) des champs de covecteurs de classe C^k sur V, et $L^k(V)$ celui des champs de vecteurs de classe C^k sur V. L'algèbre $\mathcal{T}^k(V)$ des champs de tenseurs de classe C^k sur V peut alors s'identifier au produit tensoriel des algèbres tensorielles construites sur les modules $D^k(V)$ et $L^k(V)$.*

<u>Corollaire 1.- L'algèbre</u> $T^k_{cov.}(V)$ (resp.: $T^k_{con.}(V)$) <u>peut s'identifier à l'algèbre tensorielle du module</u> $\mathcal{D}^k(V)$ (<u>resp.: du module</u> $\mathcal{L}^k(V)$).

On observera que, si on procède aux identifications indiquées dans la prop.3 et son corollaire, les opérateurs de symétrie, les opérateurs Sym. et Alt. et les opérateurs de contraction s'identifient aux opérateurs correspondants des algèbres tensorielles sur $\mathcal{D}^k(V)$, ou sur $\mathcal{L}^k(V)$, ou du produit tensoriel de ces algèbres tensorielles.

<u>Corollaire 2.- L'algèbre</u> $\mathcal{C}^k(V)$ (<u>resp.:</u> $\mathcal{M}^k(V)$) <u>peut s'identifier à l'algèbre extérieure du module</u> $\mathcal{D}^k(V)$ (<u>resp.: du module</u> $\mathcal{L}^k(V)$).

Cela résulte de ce que le noyau de l'homomorphisme canonique $P_{\mathcal{C}}$ (resp.: $P_{\mathcal{M}}$) de $T^k_{cov.}(V)$ sur $\mathcal{C}^k(V)$ (resp.: de $T^k_{con.}(V)$ sur $\mathcal{M}^k(V)$) est l'ensemble des éléments t de $T^k_{cov.}(V)$ (resp.: de $T^k_{con.}(V)$) tels que $\mathrm{Alt}.t = 0$; or, on sait que cet ensemble est identique à l'idéal engendré dans $T^k_{cov.}(V)$ (resp.: dans $T^k_{con.}(V)$) par les carrés d'éléments de $\mathcal{D}^k(V)$ (resp.: de $\mathcal{L}^k(V)$).

<u>Tenseurs covariants, formes différentielles et applications différentiables.</u>

Soit φ une application de classe C^1 d'une variété V dans une variété W . L'application $g \to g\circ\varphi$ $(g \in F^1(W))$ est alors un homomorphisme de $F^o(W)$ dans $F^o(V)$. D'autre part, si $p \in V$, la codifférentielle $d^*_p\varphi$ de φ en p est une application linéaire de $\mathcal{D}_{\varphi(p)}(W)$ dans $\mathcal{D}_p(V)$; si ω est un champ de covecteurs sur W , nous désignerons par $\omega\circ\varphi$ le champ de covecteurs $p \to d^*_p\varphi \, . \, \omega_{\varphi(p)}$ sur V . Il est clair que, si ω et ω' sont des champs de covecteurs sur W , on a

$(\omega+\omega')\circ\varphi = \omega\circ\varphi + \omega'\circ\varphi$, et $(g\,\omega)\circ\varphi = (g\circ\varphi)(\omega\circ\varphi)$ si g est une fonction sur W. De plus, si $g \in F^1(W)$, on a

$$d(g\circ\varphi) = (dg)\circ\varphi \ ,$$

et $(dg)\circ\varphi$ est de classe C^0. L'opération $\omega \to \omega\circ\varphi$ applique donc le module $\mathcal{D}^0(W)$ des champs de covecteurs de classe C^0 sur W dans le module $\mathcal{D}^0(V)$ des champs de covecteurs de classe C^0 sur V. Il résulte alors des corollaires 1 et 2 à la prop.3 que l'on peut associer à φ une représentation $t \to t\circ\varphi$ de l'anneau $\mathcal{T}^0(W)$ dans $\mathcal{T}^0(V)$ et une représentation $\omega \to \omega\circ\varphi$ de l'anneau $\mathcal{C}^0(W)$ dans $\mathcal{C}^0(V)$; ces représentations sont d'ailleurs uniquement déterminées par les conditions suivantes : si $g \in F^0(W)$, l'image de g est la fonction $g\circ\varphi$ sur V ; si $g \in F(W)$, l'image de dg est le champ de covecteurs $d(g\circ\varphi)$.

Si ψ est une application de classe C^1 de W dans une troisième variété Z, on a évidemment $(z\circ\psi)\circ\varphi = z\circ(\psi\circ\varphi)$ pour tout élément z de $\mathcal{T}^0_{cov.}(Z)$ ou de $\mathcal{C}^0(Z)$.

Dans la proposition dont l'énoncé va suivre, k désigne soit un entier > 0 soit le symbole ∞ et l soit un entier $\geqq 0$ soit le symbole ∞ ; on convient que $r < \infty$ pour tout entier r, et que $r \leqq \infty$ si r est soit un entier soit le symbole ∞.

<u>Proposition 4</u>. <u>Soit</u> φ <u>une application de classe</u> C^k <u>d'une variété</u> V <u>dans une variété</u> W, <u>et soit</u> u <u>un champ de tenseurs covariants ou une forme différentielle de classe</u> C^l <u>sur</u> W. <u>Si</u> $l < k$, $u\circ\varphi$ <u>est de classe</u> C^l ; <u>si</u> $k \leqq l$, $u\circ\varphi$ <u>est de classe</u> C^{k-1} <u>si</u> k <u>est entier, de classe</u> C^∞ <u>si</u> $k = \infty$.

Si $g \in F^l(W)$, $g\circ\varphi$ est de classe C^l si $l \leqq k$, de classe C^k si $k < l$. Si $g \in F(W)$, $g\circ\varphi$ est de classe C^k, et $d(g\circ\varphi)$ est de classe C^{k-1} si k est un entier, de classe C^∞ si $k = \infty$.

La prop.4 résulte immédiatement de là.

Si V est une variété plongée dans une variété W , et I l'application identique de V dans W , I fait correspondre à tout champ de tenseurs covariants ou à toute forme différentielle u de W un champ de tenseurs covariants ou une forme différentielle $u \circ I$ sur V ; $u \circ I$ s'appelle la trace de u sur V . Si u est de classe C^k , il en est de même de $u \circ I$.

Proposition 5.- Si V est une sous-variété fermée d'une variété W . Si t est un champ de tenseurs covariants ou une forme différentielle de classe C^k sur V , t est la trace sur V d'un champ de tenseurs covariants ou d'une forme différentielle de classe C^k sur W .

Il suffit de montrer qu'il en est ainsi quand t ou bien est dans $F^k(V)$ ou bien est de la forme df , avec $f \in F(V)$. Supposons d'abord que $t \in F^k(V)$; si $p \in V$, il y a un voisinage $U(p)$ de p dans W tel que t coïncide sur $U(p) \cap V$ avec une fonction de la forme $H(f_1,\dots,f_r)$, les f_i étant des fonctions de $F(V)$ et H une fonction de classe C^k sur R^r . Toute fonction de $F(V)$ étant par définition la restriction à V d'une fonction de $F(W)$, t coïncide sur $U(p)$ avec la restriction à V d'une fonction g^p de classe C^k sur W . Si p est un point de W n'appartenant pas à V , soit $U(p)$ le complémentaire de V par rapport à W . Il existe une famille dispersée $(h_j)_{j\in J}$ de fonctions de $F(W)$ telle que $\sum_{j\in J} h_j = 1$ et que, pour tout j , le support de h_j soit contenu dans l'un des $U(p)$, soit dans $U(p_j)$. Posons $g_j = h_j g^{p_j}$ si $p_j \in V$, $g_j = 0$ dans le cas contraire ; $(g_j)_{j\in J}$ est une famille dispersée de fonctions de classe C^k sur W , et sa somme g coïncide évidemment avec t sur V. Si maintenant t est de la forme df , $f \in F(V)$, f est la restriction à V d'une fonction $g \in F(W)$, et df est la trace de dg sur V . La prop. 5 est donc démontrée.

Champs sur une variété produit.

Soient V et W des variétés. Si (p,q) est un point de la variété produit $V\times W$, nous avons identifié l'espace tangent $\mathbb{L}_{(p,q)}(V\times W)$ à $V\times W$ en (p,q) à la somme directe des espaces tangents $\mathbb{L}_p(V)$ à V en p et $\mathbb{L}_q(W)$ à W en q. L'espace $\mathbb{D}_{(p,q)}(V\times W)$ des covecteurs de $V\times W$ en (p,q) se décompose donc dualistiquement en la somme directe des espaces $\mathbb{D}_p(V)$ et $\mathbb{D}_q(W)$ des covecteurs de V et de W en p et q respectivement.

On déduit de l'existence de la décomposition $\mathbb{D}_{(p,q)}(V\times W) = =\mathbb{D}_p(V)+\mathbb{D}_q(W)$ celle d'une graduation de $\mathbb{T}_{cov.}(p;V\times W)$ dont le groupe des degrés est Z^2 : les éléments homogènes de degré (a,a') de cette graduation sont les sommes de produits de a+a' facteurs dont a appartiennent à $\mathbb{D}_p(V)$ et a' a $\mathbb{D}_q(W)$. Il en résulte que l'anneau $\mathbb{T}_{cov.}(V\times W)$ admet une graduation ayant Z^2 comme groupe de degrés : un champ de tenseurs covariants t sur $V\times W$ est homogène de degré (a,a') dans cette gradation si, pour tout $(p,q)\in V\times W$, $t_{(p,q)}$ est homogène de degré (a,a'). Il en résulte que les éléments homogènes de degré (a,a') de $\mathbb{T}_{cov.}(V\times W)$ sont homogènes de degré a+a' au sensde la gra dation définie plus haut sur l'anneau des champs de tenseurs covariants sur une variété quelconque. On définit de même une gra dation de $\mathbb{T}_{con.}(V\times W)$ admettant Z^2 comme groupe des degrés, et une gradation de $\mathbb{T}(V\times W)$ admettant Z^4 comme groupe des degrés : les éléments de degré (a,a',b,b') de $\mathbb{T}(V\times W)$ sont les sommes de produits d'éléments de degré (a,a') de $\mathbb{T}_{cov.}(V\times W)$ sont les sommes de produits d'éléments de ~~de~~ degré (a,a') de $\mathbb{T}_{cov.}(V\times W)$ et d'éléments de degré (b,b') de $\mathbb{T}_{con.}(V\times W)$. On voit tout de suite que, si t,t' sont des éléments homogènes de degrés différents de $\mathcal{T}(V\times W)$ (dans la gradation que nous venons de définir), on a $\langle t,t'\rangle=0$.

On définit de même sur $\mathcal{C}(V\times W)$ et sur $\mathcal{M}(V\times W)$ des structures graduées admettant Z^2 comme groupe des degrés . Si ω est homogène de degré (a,a') dans $\mathcal{C}(V\times W)$, l'opérateur de corpoduit $\iota(\omega)$ est homogène de degré $(-a,-a')$; de même, si ξ est homogène de degré (b,b') dans $\mathcal{M}(V)$, $\iota(\xi)$ est homogène de degré $(-b,-b')$; de plus, si $(a,a')\neq(b;b')$, on a $\langle\omega,\xi\rangle=0$.

On dit qu'un élément t de $\mathcal{T}(V\times W)$ est <u>orienté suivant le premier facteur</u> (ou, s'il n'y a pas de confusion possible, suivant V) si les seules composantes homogènes $\neq 0$ de t ont des degrés de la forme $(a,0,b,0)$; de même, un élément de $\mathcal{C}(V\times W)$ ou de $\mathcal{M}(V\times W)$ est dit orienté suivant le premier facteur (ou suivant V) si les degrés des composantes homogènes $\neq 0$ de cet élément sont de la forme $(a,0)$. On définit de manière analogue les notions de champs de tenseurs, de formes différentielles ou de champs de multivecteurs orientés suivant le second facteur. Un champ de vecteurs ou de covecteurs se décompose d'une manière et d'une seule en un champ orienté suivant le premier facteur (qu'on appelle sa composante suivant le premier facteur) et un champ orienté suivant le second facteur (qu'on appelle sa composante suivant le second facteur) ; il n'en est plus ainsi pour les champs de tenseurs, les formes différentielles ou les champs de multivecteurs généraux.

Si $(p,q)\in V\times W$, les algèbres $\mathcal{T}(p;V)$, $\mathcal{C}(p;V)$ et $\mathcal{M}(p;V)$ s'identifient à des sous-algèbres de $\mathcal{T}((p,q),V\times W)$, $\mathcal{C}((p,q),V\times W)$ et $\mathcal{M}((p,q),V\times W)$ respectivement. Soit t un élément de l'une des algèbres $\mathcal{T}(V)$, $\mathcal{C}(V)$ ou $\mathcal{M}(V)$; l'application $(p,q)\to t_p$ est alors, suivant les cas, un élément de $\mathcal{T}(V\times W)$, de $\mathcal{C}(V\times W)$ ou de $\mathcal{M}(V\times W)$;

cet élément se désigne par $Rel_1.t$ (relèvement de t à partir du premier facteur). Les opérateurs de relèvement sont évidemment des homomorphismes de leurs anneaux de définition. Ils appliquent les champs (de tenseurs, de multicovecteurs, de multivecteurs) de V sur des champs de $V \times W$ orientés suivant V ; mais un champ de $V \times W$ orienté suivant V n'est pas en général le relèvement d'un champ de V . On définit de même les opérateurs Rel_2. qui transforment des champs de W en champs de $V \times W$ orientés suivant W .

Si f est une fonction sur V , $Rel_1.f$ n'est autre que la fonction $f \otimes 1$ sur $V \times W$. Si t, t' sont des éléments de $\mathcal{T}(V)$, on a $Rel_1.\langle t,t' \rangle = \langle Rel_1.t, Rel_1.t' \rangle$, comme nous laissons au lecteur le soin de la vérifier. Si $\omega \in \mathcal{C}(V)$ et $\xi \in \mathcal{M}(V)$, on a $Rel_1.\langle \omega,\xi \rangle =$ $= \langle Rel_1.\omega, Rel_1.\xi \rangle$. Et on a des assertions analogues pour les relèvements à partir du second facteur.

Désignons maintenant par la lettre k soit un entier $\geqq 0$ soit le symbole ∞ . Nous allons montrer que $\mathcal{T}^k(V \times W)$, $\mathcal{C}^k(V \times W)$, $\mathcal{M}^k(V \times W)$ sont encore des sous-anneaux homogènes des anneaux $\mathcal{T}(V \times W)$, $\mathcal{C}(V \times W)$ et $\mathcal{M}(V \times W)$ munis des gradations définies plus haut. Il suffira de montrer que, si $f \in F(V \times W)$, et si X est une transformation infinitésimale de $V \times W$, les composantes suivant le premier et le second facteur de df et de X sont encore de classe C^∞ . Or, si $(p,q) \in V \times W$, f coïncide sur un voisinage de (p,q) avec une fonction de la forme $H(g_1 \otimes 1, \ldots, g_r \otimes 1, 1 \otimes h_1, \ldots, 1 \otimes h_s)$, où $g_1, \ldots, g_r$ appartiennent à $F(V)$, $h_1, \ldots, h_s$ à $F(W)$, et où H est une fonction de classe C^∞ sur R^{r+s} . Pour montrer que les composantes de df sont de classe C^∞ , il suffira donc (cor. 3 à la prop. 1) de montrer qu'il en est ainsi si f est de l'une ou l'autre des formes $g \otimes 1$ $(g \in F(V))$ ou $1 \otimes h$ $(h \in F(W))$.

Or $d_{(p,q)}(g\otimes 1)$ est orthogonal à $L_q(W)$ et $d_{(p,q)}(1\otimes h)$ à $L_p(V)$; les composantes de $d(g\otimes 1)$ sont donc $d(g\otimes 1)$ et 0, celles de $d(1\otimes h)$, 0 et $d(1\otimes h)$, ce qui démontre notre assertion. Soient maintenant Y et Z les composantes de X suivant le premier et le second facteur ; si ω est un champ de covecteurs de classe C^∞ sur $V\times W$, on a $\langle\omega,Y\rangle = \langle\omega_V,Y\rangle = \langle\omega_V,X\rangle$, où ω_V est la composante de ω suivant V, qu'on sait être de classe C^∞ ; la fonction $\langle\omega,Y\rangle$ est donc de classe C^∞, et il en résulte que Y est de classe C^∞ (cor.1 à la pro.1)

Montrons maintenant que, si u est un champ (de tenseurs, de multicovecteurs ou de multivecteurs) sur V, et si u est de classe C^k, $Rel_1.u$ est de classe C^k. C'est vrai si u est une fonction ; il suffira donc de le montrer dans le cas où u est ou bien de la forme dg $(g\in F(V))$ ou bien une transformation infinitésimale de V. C'est vrai dans le premier cas, parce que $Rel_1.u$ est alors évidemment $d(g\otimes 1)$. Posons dans le second cas $X = Rel_1.u$; si $g\in F(V)$, $h\in F(W)$, on a alors $X(g\otimes 1) = (u.g)\otimes 1$ et $X(1\otimes h)=0$; il en résulte immédiatement que $Xf\in F(V\times W)$ pour tout $f\in F(V\times W)$, ce qui montre que X est une transformation infinitésimale de $V\times W$. On voit de même que $Rel_2.$ applique $\mathcal{T}^k(W)$ dans $\mathcal{T}^k(V\times W)$, $\mathcal{C}^k(W)$ dans $\mathcal{C}^k(V\times W)$ et $\mathcal{M}^k(W)$ dans $\mathcal{M}^k(V\times W)$.

Le module $\mathcal{D}^k(V\times W)$ est engendré (en tant que module sur $F^k(V\times W)$) par les éléments df, pour $f\in F(V\times W)$. Il résulte donc immédiatement du lemme 1, §9 que $\mathcal{D}^k(V\times W)$ est engendré par les éléments de l'une ou l'autre des formes $d(g\otimes 1)$ (avec $g\in F(V)$) ou $d(1\otimes h)$ (avec $h\in F(W)$). On en conclut que le module $\mathcal{D}^k_V(V\times W)$ (resp.: $\mathcal{D}^k_W(V\times W)$) des champs de covecteurs de classe C^k orientés suivant V (resp.: suivant W) est engendré par les $Rel_1.$ 7 (resp.: $\mathrm{Rel}_2.\zeta$), où η (resp.: ζ) parcourt l'ensemble des champs de covecteurs de classe C^∞ sur V (resp.: sur W). Montrons maintenant que le module $\mathbb{L}^k_V(V\times W)$ (resp.: $\mathbb{L}^k_W(V\times W)$) des champs de vecteurs de classe C^k sur $V\times W$ orientés suivant V (resp.: suivant W) est engendré sur $F^k(V\times W)$ par les $\mathrm{Rel}_1.Y$ (resp.: $\mathrm{Rel}_2.Z$), où Y (resp.: Z) parcourt l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^∞ sur V (resp.: W). Soit X une transformation infinitésimale de $V\times W$ orientée suivant V. On peut trouver des transformations infinitésimales Y_ν $(1\leq \nu\leq r)$ de V et des champs de covecteurs ω_ν de classe C^∞ sur V $(1\leq\nu\leq r)$ tels que l'on ait $Y=\sum_{\nu=1}^r\langle\omega_\nu, Y\rangle Y_\nu$ pour tout champ de vecteurs Y sur V. Posons $X'=\sum_{\nu=1}^r\langle \mathrm{Rel}_1.\omega_\nu, X\rangle \mathrm{Rel}_1.Y_\nu$; nous allons montrer que $X'=X$. Soit q un point de W ; si $p\in V$, $X_{(p,q)}$ est dans $\mathbb{L}_p(V)$, et l'application $p\to X_{(p,q)}$ est un champ de vecteurs X_q sur V, qui s'écrit $\sum_{\nu=1}^r\langle\omega_\nu, X_q\rangle Y_\nu$. Par ailleurs, on a $(\langle\omega_\nu, X_q\rangle)(p)=(\langle \mathrm{Rel}_1.\omega_\nu, X\rangle)(p,q)$ pour tout $p\in V$, d'où $X_{(p,q)}=X'_{(p,q)}$ pour tout $(p,q)\in V\times W$, et par suite $X=X'$, ce qui montre que X appartient au module engendré par les $\mathrm{Rel}_1.Y_\nu$ $(1\leq\nu\leq r)$. Une démonstration analogue s'appliquerait aux transformations infinitésimales orientées suivant W.

Il résulte de là que :

<u>tout champ (de tenseurs, de multicovecteurs, de multivecteurs) de classe C^k orienté suivant V (resp.: suivant W) est combinaison linéaire à coefficients dans $F^k(V\times W)$ de relèvements de champs (de tenseurs, de multicovecteurs, de multivecteurs) de classe C^k (ou même de classe C^∞) de V (resp.: de W).</u>

§ 11. LES OPÉRATEURS $\theta(X)$.

Nous désignerons dans ce qui suit par V une variété et par X une transformati:n infinitésimale de V ; la lettre k désignera soit un entier >0 soit le symbole ∞ ; on conviendra que, si $k = \infty$, $k-1$ représente encore le symbole ∞ . Les notations pour les champs de tenseurs, les formes différentielles et les champs de multivecteurs seront celles introduites au § 10 .

Proposition 1.- Il existe une dérivation $\theta(X)$ et une seule de l'anneau $T^k(V)$ dans l'anneau $T^{k-1}(V)$ qui possède les propriétés suivantes : a) si $f \in F^k(V)$, $\theta(X).f$ est la fonction Xf ; b) si $f \in F(V)$, $\theta(X).df$ est le champ de covecteurs $d(Xf)$; c) si Y est une transformation infinitésimale de V , $\theta(X).Y$ est la transformation infinitésimale $[X,Y]$.

L'anneau $T^k(V)$ est engendré par $F^k(V)$, par les df (pour $f \in F(V)$) et par les transformations infinitésimales de V ; il ne peut donc y a voir plus d'une dérivation $\theta(X)$ possédant les propriétés requises. Si $f \in F^k(V)$, on a $Xf = \langle X,df \rangle \in F^{k-1}(V)$, et, si f,g sont dans $F^k(V)$, $X(fg) = \langle X,(dg)g+f(dg) \rangle = (Xf)g+f(Xg)$, ce qui montre que l'application $f \to Xf$ est une dérivation de $F^k(V)$ dans $F^{k-1}(V)$. Soit maintenant $L^k(V)$ le module des champs de vecteurs de classe C^k sur V ; si $Y \in L^k(V)$, nous désignerons par $\theta(X).Y$ l'application $f \to X(Yf)-Y(Xf)$ de $F(V)$ dans $F^{k-1}(V)$. Si donc Y est une transformation infinitésimale, on a $\theta(X).Y = [X,Y]$. Les applications de $F(V)$ dans $F^{k-1}(V)$ forment évidemment un module sur $F^{k-1}(V)$ (et, *a fortiori*, sur $F^k(V)$), et l'application $Y \to \theta(X).Y$ de $L^k(V)$ dans ce module est une représentation du groupe additif de $L^k(V)$. De plus, on a, si $Y \in L^k(V)$ et $g \in F^k(V)$,

$$(1) \qquad \theta(X).gY = (Xg)Y + g(\theta(X).Y) \quad .$$

En effet, si $f \in F(V)$, $(\theta(X).gY).f = X(g(Yf)) - gY(Xf) = (Xg)(Yf) + gX(Yf) - gY(Xf)$, ce qui démontre (1). Il résulte de (1) que, si Y est une transformation infinitésimale et $g \in F^k(V)$, $\theta(X).gY$ est un champ de vecteurs de classe C^{k-1}. Or tout élément de $L^k(V)$ est une somme de termes de la forme gY, les g étant dans $F^k(V)$ et les Y des transformations infinitésimales de V (cor. 2 à la prop. 1, § 10) ; on en conclut que $\theta(X)$ applique $L^k(V)$ dans $L^{k-1}(V)$.

Nous nous proposons maintenant de définir $\theta(X).\omega$ pour tout élément ω de $D^k(V)$. Nous établirons d'abord le lemme suivant :

Lemme 1. Soit Λ une application de ~~xxx~~ ${}^{(a,b)}T^{\infty}(V)$ (où a et b sont des entiers $\geqq 0$) dans $F^k(V)$ qui soit une représentation du groupe additif de ${}^{(a,b)}T^{\infty}(V)$ et qui soit telle que $\Lambda(ft) = f\Lambda(t)$ si $f \in F(V)$, $t \in {}^{(a,b)}T^{\infty}(V)$. Il existe alors un $u \in {}^{(b,a)}T^{k}(V)$ et un seul tel que $\Lambda(t) = \langle t, u \rangle$ pour tout $t \in {}^{(a,b)}T^{\infty}(V)$.

Il existe un nombre fini d'éléments u_ν $(1 \leqq \nu \leqq N)$ de ${}^{(a,b)}T^{\infty}(V)$ et d'éléments u'_ν $(1 \leqq \nu \leqq N)$ de ${}^{(b,a)}T^{\infty}(V)$ tels que l'on ait $t = \sum_{\nu=1}^{N} \langle t, u'_\nu \rangle u_\nu$ pour tout $t \in {}^{(a,b)}T(V)$ (prop. 1, § 10) ; l'élément $u = \sum_{\nu=1}^{N} \Lambda(u_\nu) u'_\nu$ possède alors la propriété requise. Pour démontrer son unicité, il suffit de montrer que si $v \in {}^{(b,a)}T(V)$ est tel que $\langle t, v \rangle = 0$ pour tout $t \in {}^{(a,b)}T^{\infty}(V)$, on a $v = 0$; or cette condition entraîne, en vertu de la prop. 1, § 10, que $\langle t, v \rangle = 0$ pour tout $t \in {}^{(a,b)}T(V)$, d'où $v = 0$.

Ceci dit, soit ω un élément de $D^k(V)$. Posons, pour $Y \in L^{\infty}(V)$, $\Lambda(Y) = X(\langle \omega, Y \rangle) - \langle \omega, [X, Y] \rangle$; Λ est donc une représentation du groupe additif $L^{\infty}(V)$ dans le groupe additif $F^{k-1}(V)$. Si $g \in F(V)$ on a, en vertu de (1), $[X, gY] = (Xg)Y + g[X, Y]$; il en résulte que $\Lambda(gY) = g\Lambda(Y)$. Il existe donc, en vertu du lemme 1, un élément $\theta(X).\omega$ et un seul de $D^{k-1}(V)$ tel que

(2) $\quad X(\langle \omega, Y\rangle) = \langle \omega, [X,Y]\rangle = \langle \theta(X).\omega, Y\rangle$

pour tout $Y \in \mathcal{L}^{\infty}(V)$. Il est clair que l'application $\omega \to \theta(X).\omega$ est une représentation du groupe additif de $\mathcal{D}^k(V)$ dans celui de $\mathcal{D}^{k-1}(V)$. Si $g \in F^k(V)$, on a $X(\langle g\omega, Y\rangle) = (Xg)\langle \omega, Y\rangle + g.X(\langle \omega, Y\rangle)$, d'où

(3) $\quad \theta(X).g\omega = (Xg)\omega + g\ \theta(X).\omega$.

Si f $F(V)$, on a $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$, égalité que l'on peut mettre sous la forme $\langle d(Xf), Y\rangle = X(\langle df, Y\rangle) - \langle df, [X,Y]\rangle$; il en résulte que $\theta(X).df = d(Xf)$.

Les modules $\mathcal{D}^k(V)$ et $\mathcal{L}^k(V)$ sont des sous-modules de $\mathcal{T}^k(V)$, et leur somme dans $\mathcal{T}^k(V)$ est directe ; de plus, $\mathcal{T}^k(V)$ est le produit tensoriel des algèbres tensorielles de $\mathcal{D}^k(V)$ et de $\mathcal{L}^k(V)$ sur $F^k(V)$. Soit $\mathcal{U}$ l'algèbre tensorielle du module $\mathcal{D}^k(V) + \mathcal{L}^k(V)$, somme directe de $\mathcal{D}^k(V)$ et de $\mathcal{L}^k(V)$; il existe donc une représentation canonique ρ de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{T}^k(V)$ dont le noyau est l'idéal de $\mathcal{U}$ engendré par les $\omega \otimes Y - Y \otimes \omega$, pour $\omega \in \mathcal{D}^k(V)$ et $Y \in \mathcal{L}^k(V)$. Ceci dit, la formule $\theta(X)(\omega + Y) = \theta(X).\omega + \theta(X).Y$ définit une représentation du groupe additif $\mathcal{D}^k(V) + \mathcal{L}^k(V)$ dans le groupe additif $\mathcal{T}^{k-1}(V)$. L'application $f \to Xf$ étant une dérivation de $F^k(V)$ dans $F^{k-1}(V)$, il résulte des formules (1), (3) qu'il existe une dérivation gauche $\theta^*(X)$ d'espèce (ρ, ρ) de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{T}^{k-1}(V)$ qui applique f sur Xf si $f \in F^k(V)$ et qui coïncide avec $\theta(X)$ sur $\mathcal{D}^k(V) + \mathcal{L}^k(V)$. Si $\omega \in \mathcal{D}^k(V)$ et $Y \in \mathcal{L}^k(V)$, on a $\theta^*(X).(\omega \otimes Y - Y \otimes \omega) = (\theta(X).\omega)Y + \omega(\theta(X).Y) - (\theta(X).Y)\omega - Y(\theta(X).\omega) = 0$, puisque ~~xx~~ $\theta(X).\omega \in \mathcal{D}^{k-1}(V)$ et $\theta(X).Y \in \mathcal{L}^{k-1}(V)$. Il en résulte que $\theta^*(X)$ applique sur $\{0\}$ le noyau de la représentation ρ , donc définit, par passa ge aux quotients, une dérivation $\theta(X)$ de $\mathcal{T}^k(V)$ dans $\mathcal{T}^{k-1}(V)$ qui possède les propriétés requises . La prop.1 est donc démontrée.

<u>Proposition 2.- La dérivation</u> $\theta(X)$ <u>de</u> $T^k(V)$ <u>dans</u> $T^{k-1}(V)$ <u>est homogène de degré</u> $(0,0)$.

Elle applique en effet chaque élément d'un certain système de générateurs homogènes de $T^k(V)$ sur un élément de même degré dans $T^{k-1}(V)$.

En particulier, $\theta(X)$ induit une dérivation de $T^k_{cov.}(V)$ dans $T^{k-1}_{cov.}(V)$ et une dérivation de $T^k_{con.}(V)$ dans $T^{k-1}_{con.}(V)$.

<u>Proposition 3. Soient</u> a <u>un entier</u> >0 <u>et</u> $\bar{\omega}$ <u>une permutation de</u> $\{1,\dots,a\}$. <u>Désignons encore par</u> $\bar{\omega}$ <u>les opérateurs de symétrie associés à</u> $\bar{\omega}$ <u>dans les ensembles</u> ${}^aT^k_{cov.}(V)$, ${}^aT^{k-1}_{cov.}(V)$, ${}^aT^k_{con.}(V)$ <u>et</u> ${}^aT^{k-1}_{con.}(V)$. On a alors $\theta(X)\circ\bar{\omega} = \bar{\omega}\circ\theta(X)$.

Il suffit évidemment de le montrer quand $\bar{\omega}$ est une transposition de deux entiers consécutifs i et $i+1$ de l'ensemble $\{1,\dots,a\}$. Or tout élément de ${}^aT^k_{cov.}(V)$ est somme d'éléments de la forme $tuu't'$, où $t\in {}^{i-1}T^k_{cov.}(V)$, $u,u'\in D^k(V)$ et $t'\in {}^{a-i+1}T^k_{cov.}(V)$. On a

$$(\theta(X)\circ\bar{\omega}).tuu't' = (\theta(X).t)u'ut'+t(\theta(X).u')ut'+tu'(\theta(X).u)t'+tu'u(\theta(X).t')$$

et ceci est égal à $(\bar{\omega}\circ\theta(X)).tuu't'$. Une démonstration analogue s'applique au cas des tenseurs contrevariants.

<u>Corollaire. Si</u> t <u>est un champ de tenseurs covariants ou contrevariants</u>, on a $\theta(X)(\mathrm{Alt}.t) = \mathrm{Alt}.(\theta(X).t)$, $\theta(X)(\mathrm{Sym}.t) = \mathrm{Sym}.(\theta(X).t)$.

<u>Proposition 4.- Soient</u> a,b <u>des entiers</u> >0 <u>et</u> i,j <u>des indices tels que</u> $1\leq i\leq a$, $1\leq j\leq b$; <u>désignons par</u> $\chi_{i,j}$ <u>l'opération de contraction par rapport aux indices</u> i <u>et</u> j <u>dans</u> ${}^{(a,b)}T(V)$. <u>On a, si</u> $t\in {}^{(a,b)}T^k(V)$, $\theta(X)(\chi_{i,j}.t) = \chi_{i,j}(\theta(X).t)$.

Tout élément de ${}^{(a,b)}T^k(V)$ est une somme de termes de la forme $u\omega vYw$, où $u \in {}^{(i-1,0)}T^k(V)$, $\omega \in \mathcal{D}^\infty(V)$, $v \in {}^{(a-i+1,j-1)}T^k(V)$, $Y \in \mathcal{L}^\infty(V)$ et $w \in {}^{(0,b-j+1)}T^k(V)$, et on a $\chi_{i,j}(u\omega vYw) = \langle \omega, Y \rangle uvw$, d'où $\theta(X)(\chi_{i,j}.u\omega vYw) = X(\langle \omega,Y\rangle).uvw + \langle \omega,Y\rangle(\theta(X).uvw)$. Or, il résulte de la formule (2) que $X(\langle \omega,Y\rangle) = \langle \theta(X).\omega,Y\rangle + \langle \omega,\theta(X).Y\rangle$. Par ailleurs, on a $\chi_{i,j}(\theta(X).u\omega vYw) = \langle \omega,Y\rangle ((\theta(X).u)vw + u(\theta(X).v) + uv(\theta(X).w)) + \langle \theta(X).\omega,Y\rangle uvw + \langle \omega,\theta(X).Y\rangle uvw$.
On a donc bien $\theta(X)(\chi_{i,j}.u\omega vYw) = \chi_{i,j}(\theta(X).u\omega vYw)$, ce qui démontre la prop.4 .

<u>Corollaire.</u> <u>Si</u> t,t' <u>sont des éléments de</u> $T^k(V))$, <u>on a</u>
$\theta(X).\langle t,t'\rangle = \langle \theta(X).t,t'\rangle + \langle t,\theta(X).t'\rangle$.

Il suffit évidemment de montrer qu'il en est ainsi quand t est ~~...~~homogène d'un certain degré (a,b) et t' homogène de degré (b,a) . Or on a alors $\langle t,t'\rangle = \chi_{1,1}\circ\ldots\circ\chi_{a+b,1}.tt'$ et le corollaire résulte alors de la formule $\theta(X).tt' = (\theta(X).t)t' + t(\theta(X).t')$.

Il importe de remarquer que, si $t \in T^k(V)$ et si l est un entier >0 et $<k$ (un entier >0 quelconque si $k=\infty$), $\theta(X).t$ a la même signification, que l'on considère t comme élément de $T^k(V)$ ou de $T^l(V)$.

Soient maintenant X et Y des transformations infinitésimales de V . Supposons que k soit un entier $\geqq 2$ ou le symbole ∞ ; si $k=\infty$, convenons que $k-2$ représente encore le symbole ∞ . On peut considèrer $\theta(X)$ et $\theta(Y)$ comme des dérivations de $T^{k-1}(V)$ dans $T^{k-2}(V)$ qui appliquent $T^k(V)$ dans $T^{k-1}(V)$; l'opération $[\theta(X),\theta(Y)] = \theta(X)\circ\theta(Y) - \theta(Y)\circ\theta(X)$ donne donc une dérivation de $T^k(V)$ dans $T^{k-2}(V)$. Nous allons montrer que

$$(4) \qquad [\theta(X),\theta(Y)] = \theta([X,Y])$$

cette égalité signifiant que les deux membres ont le même effet sur tout élément de $\mathcal{T}^k(V)$. Les deux membres représentant des dérivations de $\mathcal{T}^k(V)$ dans $\mathcal{T}^{k-2}(V)$, il suffit de montrer qu'ils ont le même effet sur les éléments d'un système de générateurs de $\mathcal{T}^k(V)$. Considérons d'abord les effets des deux membres de (4) sur une fonction $f \in F^k(V)$; nous avons dans ce cas à montrer que $[X,Y]f = X(Yf)-Y(Xf)$. C'est évident si $f \in F(V)$. Pour le montrer dans le cas général, désignons par p un point de V ; f coïncide alors sur un voisinage de p avec une fonction f' de la forme $H(f_1,\dots,f_r)$, où $f_1,\dots,f_r$ sont des fonctions de $F(V)$ et $H=H(x_1,\dots,x_r)$ une fonction de classe C^k sur R^r . Il en résulte que $[X,Y]f$, $X(Yf)$ et $Y(Xf)$ coïncident sur un voisinage de p avec $[X,Y]f'$, $X(Yf')$ et $Y(Xf')$ respectivement. Il suffira donc de montrer que $[X,Y]f = X(Yf)-Y(Xf)$ quand f est de la forme $H(f_1,\dots,f_r)$. Posons $H_i = \partial H/\partial x_i$, $H_{ij} = \partial^2 H/\partial x_i \partial x_j$; on a alors $[X,Y]f = \sum_{i=1}^{r} H_i(f_1,\dots,f_r)[X,Y]f_i$ et

$$X(Yf) = \sum_{i,j=1}^{r} H_{ij}(f_1,\dots,f_r)(Xf_j)(Yf_i) + \sum_{i=1}^{r} H_i(f_1,\dots,f_r)X(Yf_i)$$

$$Y(Xf) = \sum_{i,j=1}^{r} H_{ij}(f_1,\dots,f_r)(Xf_i)(Yf_j) + \sum_{i=1}^{r} H_i(f_1,\dots,f_r)Y(Xf_i),$$

et la formule $[X,Y]f = X(Yf)-Y(Xf)$ résulte de ce que l'on a $H_{ij}=H_{ji}$ $(1 \leqq i , j \leqq r)$. Considérons maintenant les effets des deux membres de (4) sur un élément de la forme df , où $f \in F(V)$. On a $[\theta(X),\theta(Y)].df = d(X(Yf))-d(Y(Xf)) = d([X,Y]f) = \theta([X,Y]).df$. Soit enfin Z une transformation infinitésimale de V ; on a, en vertu de l'identité de Jacobi, $[\theta(X),\theta(Y)].Z = [X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]] = -[Z,[X,Y]] = \theta([X,Y]).Z$. La formule (4) est donc démontrée.

Soit $P_{\mathcal{C}}$ l'homomorphisme canonique de $\mathcal{T}_{cov.}(V)$ sur $\mathcal{C}(V)$.

L'opération $P_{\mathcal{C}} \circ \theta(X)$ est une dérivation gauche d'espèce $(P_{\mathcal{C}}, P_{\mathcal{C}})$ de $T^k_{cov.}(V)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(V)$. De plus, on sait que le noyau de $P_{\mathcal{C}}$ se compose des éléments $t \in T^k_{cov.}(V)$ tels que $\mathrm{Alt}.t=0$; il résulte donc du cor. à la prop.3 que $\theta(X)$ applique le noyau de la restriction de $P_{\mathcal{C}}$ à $T^k_{cov.}(V)$ dans lui-même ; il en résulte que $\theta(X)$ définit par passa-ge aux quotients une dérivation de $\mathcal{C}^k(V)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(V)$, dérivation qu'on désigne encore par $\theta(X)$. On voit de même que $\theta(X)$ définit une dérivation, encore notée $\theta(X)$, de $\mathcal{M}^k(V)$ dans $\mathcal{M}^{k-1}(V)$. On a donc, si $t \in T^k_{cov.}(V)$ et $u \in T^k_{con.}(V)$,

$$(5) \qquad P_{\mathcal{C}}(\theta(X).t) = \theta(X)(P_{\mathcal{C}}.t) \ ; \quad P_{\mathcal{M}}(\theta(X).u) = \theta(X)(P_{\mathcal{M}}.u) .$$

Montrons maintenant que l'on a, pour $\omega \in \mathcal{C}^k(V)$ et $\xi \in \mathcal{M}^k(V)$,

$$(6) \qquad J_{\mathcal{C}}(\theta(X).\omega) = \theta(X)(J_{\mathcal{C}}.\omega) \ ; \quad J_{\mathcal{M}}(\theta(X).\xi) = \theta(X)(J_{\mathcal{M}}.\xi) .$$

Il suffit de démontrer la première formule (6) dans le cas où ω est homogène, disons de degré a. La dérivation $\theta(X)$ de $\mathcal{C}^k(V)$ étant évidemment homogène de degré 0, $J_{\mathcal{C}}(\theta(X).\omega)$ est un champ de tenseurs covariants alternés de degré a dont l'image par $P_{\mathcal{C}}$ est $a!\theta(X).\omega$. D'autre part, $J_{\mathcal{C}}.\omega$ est un champ de tenseurs covariants alternés, et il en est par suite de même de $\theta(X)(J_{\mathcal{C}}.\omega)$, et l'image de $\theta(X)(J_{\mathcal{C}}.\omega)$ par $P_{\mathcal{C}}$ est $a!\theta(X).\omega$ en vertu de (5). La restriction de $P_{\mathcal{C}}$ à l'ensemble des champs de tenseurs covariants alternés étant biunivoque, la première formule (6) est démontrée ; la seconde se démontre d'une manière analogue.

<u>Proposition 5.</u> <u>Si ω est une forme différentielle de classe C^k et ξ un champ de multivecteurs de classe C^k, on a</u>

$$X(\langle \omega , \xi \rangle) = \langle \theta(X).\omega , \xi \rangle + \langle \omega, \theta(X).\xi \rangle .$$

Soit u un élément de $T^k_{con.}(V)$ tel que $P_{\mathcal{M}}.u = \xi$. On a $\langle \omega, \xi \rangle = \langle \dot{J}_{\mathcal{C}} . \xi , u \rangle$, $\langle \theta(X).\omega , \xi \rangle = \langle J_{\mathcal{C}} (\theta(X).\omega), u \rangle$ et $P_{\mathcal{M}}(\theta(X).u) = \theta(X).\xi$, d'où $\langle \omega, \theta(X).\xi \rangle = \langle J_{\mathcal{C}} .\omega, \theta(X).u \rangle$. La prop.5 résulte donc du cor. à la prop.4 .

Proposition 6. Soient ω une forme différentielle de classe C^k et ξ un champ de multivecteurs de classe C^k . On a alors $\theta(X) \circ \iota(\omega) - \iota(\omega) \circ \theta(X) = \iota(\theta(X).\omega)$ et $\theta(X) \circ \iota(\xi) - \iota(\xi) \circ \theta(X) = \iota(\theta(X).\xi)$.

L'application $\iota : \omega \to \iota(\omega)$ est une représentation de $\mathcal{C}^k(V)$ dans l'algèbre E des endomorphismes de la structure de module de $\mathcal{M}^k(V)$ sur $F^k(V)$. Il en résulte que l'application $\omega \to [\theta(X), \iota(\omega)] = \theta(X) \circ \iota(\omega) - \iota(\omega) \circ \theta(X)$ est une dérivation gauche d'espèce (ι, ι) de $\mathcal{C}^k(V)$ dans E , et il en est de même de l'application $\omega \to \iota(\theta(X).\omega)$. Il suffira donc de démontrer la première formule de la prop.6 quand ω est soit un élément de $F^k(V)$ soit de la forme df , $f \in F(V)$. Supposons d'abord que $\omega = g \in F^k(V)$; $\iota(\omega)$ est alors l'opérateur de multiplication par g dans $\mathcal{M}^k(V)$, et il faut montrer que $\theta(X)(g\xi) - g(\theta(X).\xi) = (Xg)\xi$ pour tout $\xi \in \mathcal{M}^k(V)$; or cette formule est vraie puisque $\theta(X)$ est une dérivation de $\mathcal{M}^k(V)$. Supposons maintenant que $\omega = df$, $f \in F(V)$; $\iota(df)$ est alors une antidérivation de $\mathcal{M}^k(V)$, homogène de degré -1 . Puisque $\theta(X)$ est une dérivation homogène de degré 0, $[\theta(X), \iota(df)]$ et $\iota(\theta(X).df)$ sont des antidérivations de $\mathcal{M}^k(V)$ dans $\mathcal{M}^{k-1}(V)$. Pour démontrer qu'elles sont identiques, il suffit de montrer qu'elles ont le même effet sur une fonction g de $F^k(V)$ ou sur une transformation infinitésimale Y de V . Il est clair qu'elles annullent toutes deux g . On a
$[\theta(X), \iota(df)].Y = X(Yf) - [X,Y]f = Y(Xf) = \iota(d(Xf)).Y = \iota(\theta(X).df).Y$.
La première formule de la prop.6 est donc démontrée ; la deuxième se démontrerait de manière analogue.

Enfin, on notera que la formule (4) reste valab-le si on y considère $\theta(X)$, $\theta(Y)$ et $\theta([X,Y])$ comme des dérivations de $\mathcal{C}^k(V)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(V)$ ou de $\mathcal{M}^k(V)$ dans $\mathcal{M}^{k-1}(V)$.

Proposition 7.- Soit φ une application de classe C de la variété V dans une variété W. Supposons que X corresponde par φ à une transformation infinitésimale Y sur W. Alors, si u représente un champ de tenseurs covariants ou une forme différentielle de classe C^k sur W, on a $(\theta(Y).u)\circ\varphi = \theta(X).(u\circ\varphi)$.

Désignons par Φ les applications $u \to u\circ\varphi$ de $\mathcal{T}^k_{cov.}(W)$ dans $\mathcal{T}^k_{cov.}(V)$ et de $\mathcal{C}^k(W)$ dans $\mathcal{C}^k(V)$. Les applications $u \to (\theta(Y).u)\circ\varphi$ et $u \to \theta(X).(u\circ\varphi)$ sont alors des dérivations gauches d'espèce $(\Phi, \bar{\Phi})$; il suffira donc de démontrer la formule de la prop.7 dans les cas où u est soit une fonction $g \in F^k(W)$ soit de la forme df, $f \in F(W)$. Dans le premier cas, la formule en question est exactement celle qui exprime que Y et X se correspondent par φ. Si $u = df$, on a $(\theta(Y).df)\circ\varphi = d(Yf)\circ\varphi = d(Yf\circ\varphi) = d(X(f\circ\varphi)) = \theta(X).(df\circ\varphi)$. La prop.7 est donc démontrée.

Soient maintenant V et W des variétés, et Y une transformation infinitésimale sur V. Les transformations infinitésimales Y et $Rel_1.Y$ se correspondent par la projection de $V\times W$ sur V. Si donc t est un champ de tenseurs covariants de classe C^k sur V, on a $Rel_1.\theta(Y).t = \theta(Rel_1.Y).Rel_1 t$. Par ailleurs, si Y' est une transformation infinitésimale quelconque sur V, on a

$Rel_1.\theta(Y).Y' = \theta(Rel_1.Y).Rel_1.Y'$, en vertu de la prop.6, §7. On en conclut que la formule

$$Rel_1.(\theta(Y).a) = \theta(Rel_1.Y).Rel_1.a$$

est vraie toutes les fois que a représente un champ (de tenseurs, de multicovecteurs, de multivecteurs) de classe C^k sur V . Montrons maintenant que

$$\theta(Rel_1 Y).Rel_2.b = 0$$

pour tout champ b (de tenseurs, de multicovecteurs, de multivecteurs) de classe C^k sur W . Si $b \in F^k(W)$, on a $Rel_2.b = 1 \otimes b$, $d(1\otimes b)$ est orienté suivant W et par suite orthogonal à $Rel_1.Y$, ce qui démontre la formule dans ce cas. Si $b=dh$, $h \in F(W)$, on a $Rel_2.b = d(1\otimes h)$ et la formule est vraie dans ce cas parce que $\theta(Rel_1.Y).Rel_2 b =$ $= d((Rel_1.Y)(1\otimes h))=0$. Supposons maintenant que $b=Z$ soit une transformation infinitésimale sur W . Nous a-vons alors à montrer que $[Rel_1.Y, Rel_2.Z]=0$. Il résulte immédiatement du lemme 1, § 9 qu'il suffira de montrer que cette transformation infinitésimale applique sur 0 toute fonction de l'une ou l'autre des formes $g\otimes 1$ (avec $g \in F(V)$) ou $1\otimes h$ (avec $h \in F(W)$). Or on a $(Rel_2.Z)(g\otimes 1)=0$, $(Rel_2.Z)((Rel_1.Y)(g\otimes 1)) = (Rel_2.Z)(Yg\otimes 1)=0$, ce qui montre que $[Rel_1.Y,Rel_2.Z]$ applique $g\otimes 1$ sur 0 ; et on verrait de même que cette transformation infinitésimale applique $1\otimes h$ sur 0 .

De même, si Z est une transformation infinitésimale sur W , on a

$$Rel_2.(\theta(Z).b) = \theta(Rel_2.Z).Rel_2.b$$

$$\theta(Rel_2.Z).Rel_1 a = 0$$

toutes les fois que a et b représentent des champs (de tenseurs, de multicovecteurs, de multivecteurs) de classe C^k sur V et W respectivement.

<u>Si Y et Z sont des transformations infinitésimales de V et de W</u>, $\theta(\mathrm{Rel}_1.Y)$ <u>et</u> $\theta(\mathrm{Rel}_2.Z)$ <u>sont des opérateurs homogènes de degré</u> $(0,0,0,0)$ <u>sur</u> $T^k(V\times W)$, <u>muni de sa gradation admettant</u> Z^4 <u>comme groupe de degrés</u>. En effet, $T^k(V\times W)$ admet un ensemble de générateur homogènes (relativement à cette gradation) composé des éléments de $F^k(V\times W)$, des champs de covecteurs $\mathrm{Rel}_1.\eta$ et $\mathrm{Rel}_2.\zeta$, où $\eta\in D^\infty(V)$, $\zeta\in D^\infty(W)$ et des transformations infinitésimales $\mathrm{Rel}_1.Y$ et $\mathrm{Rel}_2.Z$, où Y parcourt les transformations infinitésimales de V et Z celles de W. Or $\theta(\mathrm{Rel}_1.Y)$ et $\theta(\mathrm{Rel}_2.Z)$ appliquent $F^k(V\times W)$ dans lui-même, et il résulte des formules écrites plus haut qu'elles transforment chacun des générateurs $\mathrm{Rel}_1.\eta$, $\mathrm{Rel}_2.\zeta$, $\mathrm{Rel}_1.Y$, $\mathrm{Rel}_2.Z$ en un élément de même degré. Etant des dérivations, ces opérateurs sont homogènes. Le même raisonnement montre que $\theta(\mathrm{Rel}_1.Y)$ <u>et</u> $\theta(\mathrm{Rel}_2.Z)$, <u>considérés comme opérateurs sur</u> $\mathcal{C}^k(V\times W)$ <u>ou sur</u> $\mathcal{M}^k(V\times W)$ <u>sont homogènes de degré</u> $(0,0)$ <u>si on munit ces anneaux de leurs gradations admettant</u> Z^2 <u>comme groupe de degrés</u>.

§ 12. LE COBORD D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE.

On désignera par V une va-riété et par la lettre k ou bien un entier > 0 ou bien le symbole ∞ ; on convient que $k-1 = \infty$ dans le cas où $k = \infty$.

Soit ω un champ de covecteurs de classe C^k sur V. Nous nous proposons d'établir une condition nécessaire pour que ω soit la différentielle d'une fonction de $F^k(V)$. On peut toujours mettre ω sous la forme $\sum_{i=1}^{r} g_i df_i$, les g_i appartenant à $F^k(V)$ et les f_i à $F(V)$; nous allons montrer que, si $\omega = df$, avec $f \in F^k(V)$, on a $\sum_{i=1}^{r} dg_i \wedge df_i = 0$. Il suffira de montrer que, si X et Y sont des transformations infinitésimales quelconques, $\langle \sum_{i=1}^{r} dg_i \wedge df_i , X \wedge Y \rangle = 0$, ou encore $\sum_{i=1}^{r} (Xg_i)(Yf_i) - \sum_{i=1}^{r} (Yg_i)(Xf_i) = 0$. Or on a $\theta(X).df = \sum_{i=1}^{r} (Xg_i)df_i + \sum_{i=1}^{r} g_i d(Xf_i)$, d'où

$$Y(Xf) = \langle \theta(X).df, Y \rangle = \sum_{i=1}^{r} (Xg_i)(Yf_i) + \sum_{i=1}^{r} g_i Y(Xf_i) .$$

Echangeons X et Y dans cette formule, et retranchons l'une de l'autre les deux formules ainsi obtenues : il vient

$$[X,Y]f = \sum_{i=1}^{r} (Yg_i)(Xf_i) - \sum_{i=1}^{r} (Xg_i)(Yf_i) + \sum_{i=1}^{r} g_i([X,Y] f_i) .$$

Mais, $[X,Y]$ étant une transformation infinitésimale, on a aussi $[X,Y]f = \langle df, [X,Y] \rangle = \sum_{i=1}^{r} g_i([X,Y] f_i)$; on a donc bien $\sum_{i=1}^{r} dg_i \wedge df_i = 0$.

La condition $\sum_{i=1}^{r} dg_i \wedge df_i = 0$ est en particulier satisfaite dans le cas où $\sum_{i=1}^{r} g_i df_i = 0$. On en déduit que, si on représente un champ de covecteurs ω de classe C^k sous la forme $\sum_{i=1}^{r} g_i df_i$, les g_i étant dans $F^k(V)$ et les f_i dans $F(V)$, la forme différentielle (de degré 2 et de classe C^{k-1}) $\sum_{i=1}^{r} dg_i \wedge df_i$ ne dépend que de ω, et non de la représentation qu'on en a choisie. Cette forme différentielle s'appelle le <u>cobord</u> de ω, et se désigne par $d\omega$. Il est clair que

$d(df)=0$ si $f \in F^k(V)$ est tel que $df \in F^k(V)$. L'application $\omega \to d\omega$ est évidemment une représentation du groupe additif de $D^k(V)$. Montrons que l'on a

(1) $d(g\omega) = dg \wedge \omega + gd\omega \quad (g \in F^k(V)\ ,\ \omega \in D^k(V))$.

Ecrivons $\omega = \sum_{i=1}^r g_i df_i$, $g_i \in F^k(V)$, $f_i \in F(V)$ $(1 \leq i \leq r)$, d'où $g\omega = \sum_{i=1}^r gg_i df_i$, et $d(g\omega) = dg \wedge \sum_{i=1}^r g_i df_i + g \sum_{i=1}^r dg_i \wedge df_i$, ce qui démontre notre formule.

Nous allons maintenant étendre l'opération de cobord aux formes différentielles de tous les degrés.

<u>Théorème 2.</u> <u>Il existe une application</u> $\omega \to d\omega$ <u>et une seule de l'anneau</u> $\mathcal{C}^k(V)$ <u>des formes différentielles de classe</u> C^k <u>sur</u> V <u>dans</u> $\mathcal{C}^{k-1}(V)$ <u>qui possède les propriétés suivantes</u> : a) <u>c'est une antidérivation de l'anneau gradué</u> $\mathcal{C}^k(V)$ <u>dans</u> $\mathcal{C}^{k-1}(V)$; b) <u>si</u> g <u>est une fonction de classe</u> C^k <u>sur</u> V, <u>l'image de</u> g <u>est sa différentielle</u> dg ; c) <u>si</u> f <u>est une fonction de classe</u> C^∞ <u>sur</u> V, <u>on a</u> $d(df)=0$.

L'anneau $\mathcal{C}^k(V)$ étant engendré par $F^k(V)$ et par les df, $f \in F(V)$, il ne peut exister plus d'une application possédant ces propriétés. Nous avons défini plus haut une application $\omega \to d\omega$ de $D^k(V) = {}^1\mathcal{C}^k(V)$ dans ${}^2\mathcal{C}^{k-1}(V)$. L'algèbre $\mathcal{C}^k(V)$ étant l'algèbre extérieure du module $D^k(V)$ sur $F^k(V)$, et les éléments homogènes de degré 2 de $\mathcal{C}^{k-1}(V)$ appartenant au centre de $\mathcal{C}^{k-1}(V)$, il résulte de la formule (1) écrite plus haut qu'il existe une antidérivation de $\mathcal{C}^k(V)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(V)$ qui applique g sur dg si $g \in F^k(V)$ et ω sur $d\omega$ si $\omega \in D^k(V)$. On a $d(df)=0$ non seulement si $f \in F(V)$, mais encore, comme on l'a vu plus haut, toutes les fois que $f \in F^k(V)$ et $df \in D^k(V)$.

On notera que, si ω est une forme différentielle de classe C^l, où l est ou bien un entier $> k$ (si k est un entier) ou bien le symbole ∞, $d\omega$ est le même que l'on considère ω comme élément de $\mathcal{C}^k(V)$ ou de $\mathcal{C}^l(V)$.

Définition 1. Si ω est une forme différentielle de classe C^k, l'image $d\omega$ de ω par l'application définie au th.2 s'appelle le cobord de ω.

Proposition 1.- L'application d du th.2 est homogène de degré $+1$.

En effet, $F^k(V) \cup \mathcal{D}^k(V)$ est un ensemble de généra-teurs homogènes de $\mathcal{C}^k(V)$, et l'image par d d'un élément de cet ensemble est de degré d'une unité plus élevé que celui de l'élément.

Proposition 2.- Si k est soit un entier >1 soit ∞, on a $d(d\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \mathcal{C}^k(V)$.

Puisque d est une antidérivation homogène de degré $+1$ de $\mathcal{C}^k(V)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(V)$, $d \circ d$ est une dérivation de $\mathcal{C}^k(V)$ dans $\mathcal{C}^{k-2}(V)$ (dans $\mathcal{C}^\infty(V)$ si $k=\infty$) ; on a $d(dg)=0$ pour tout $g \in F^k(V)$ et $d(d(df))=0$ pour tout $f \in F(V)$; $\mathcal{C}^k(V)$ étant engendré par $F^k(V)$ et par les df, $f \in F(V)$, on a $d \circ d=0$.

Remarque. On montrera plus tard, au moyen de la théorie de l'intégration des formes différentielles, que l'on a encore $d(d\omega)=0$ si ω est un élément de $\mathcal{C}^1(V)$ tel que $d\omega$ appartienne encore à $\mathcal{C}^1(V)$.

Proposition 3.- Soit X une transformation infinitésimale de V. On a alors, pour tout $\omega \in \mathcal{C}^k(V)$,

$$\theta(X).\omega = d(\iota(X).\omega) + \iota(X)(d\omega) .$$

On sait que $\iota(X)$ est une antidérivation homogène de degré -1 de $\mathcal{C}^k(V)$; $d \circ \iota(X) + \iota(X) \circ d$ est donc une dérivation de $\mathcal{C}^k(V)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(V)$. Pour montrer qu'elle est identique à $\theta(X)$, il suffit de montrer qu'elle coincide avec $\theta(X)$ sur l'ensemble

$F^k(V) \cup d(F(V))$, où $d(F(V))$ est l'ensemble des df, $f \in F(V)$. Or, si $g \in F^k(V)$, on a $\iota(X).g = 0$, $\iota(X).dg = \langle X, dg \rangle = Xg = \theta(X).dg$. Si $f \in F(V)$, on a $d(df)=0$, $d(\iota(X).df) = d(\langle X, df \rangle) = d(Xf) = \theta(X).df$. La prop.3 est donc démontrée.

Proposition 4. Soit φ une application de classe C^2 d'une variété V dans une variété W. Si $\omega \in \mathcal{C}^1(W)$, on a $d(\omega \circ \varphi) = d\omega \circ \varphi$.

Soit Φ l'homomorphisme $\omega \to \omega \circ \varphi$ de $\mathcal{C}^1(W)$ dans $\mathcal{C}^1(V)$. Les applications $\omega \to d(\omega \circ \varphi)$ et $\omega \to d\omega \circ \varphi$ sont des dérivations gauches d'espèce $(\Phi \circ I, \Phi)$ de $\mathcal{C}^1(W)$ dans $\mathcal{C}^o(V)$, I étant l'involution principale de $\mathcal{C}^1(W)$ (qui conserve les éléments homogènes de degrés pairs de $\mathcal{C}^1(W)$ et qui change en leurs opposés les éléments homogènes de degrés impairs). Pour montrer que ces applications sont identiques, il suffit donc de montrer que $d(g \circ \varphi) = dg \circ \varphi$ pour tout $g \in F^1(W)$ et que $d(df \circ \varphi) = d(df) \circ \varphi$ pour tout $f \in F(W)$. On sait que la première formule est vraie ; la seconde l'est aussi puisque $d(df \circ \varphi) = d(d(f \circ \varphi)) = 0$.

Considérons maintenant une variété qui est le produit de deux variétés V et W. Dans ce cas, l'algèbre $\mathcal{C}(V \times W)$ peut, comme on le sait, être munie d'une gradation dont le groupe des degrés est Z^2. C'est à cette gra-dation que nous nous référerons dans ce qui suit. L'application $\omega \to d\omega$ de $\mathcal{C}^k(V \times W)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(V \times W)$ n'est pas homogène ; en effet, si $f \in F^k(V \times W)$, df est la somme de ses première et seconde différentielle partielle $d_V f$ et $d_W f$ qui ne sont en général nulles ni l'une ni l'autre. Nous nous proposons de représenter d comme somme de deux antidérivations homogènes. Soit $\mathcal{D}^k(V \times W)$ le module des champs de covecteurs de classe C^k sur $V \times W$; on sait que ce module est engendré (sur $F^k(V \times W)$) par les éléments

$d(g\otimes 1)$ $(g \in F(V))$ et $d(1\otimes h)$ $(h \in F(W))$. Nous allons montrer que, si un élément ω de $\mathcal{D}^k(V\times W)$ est mis sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} f_i d(g_i\otimes 1) + \sum_{j=1}^{s} f_{r+j} d(1\otimes h_j)$$

(où $f_1,\dots,f_{r+s}$ sont dans $F^k(V\times W)$, $g_1,\dots,g_r$ dans $F(V)$ et $h_1,\dots,h_s$) dans $F(W)$), l'élément

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{r} d_V f_i \wedge d(g_i\otimes 1) + \sum_{j=1}^{s} d_V f_{r+j} \wedge d(1\otimes h_j)$$

ne dépend que de ω et non de la manière dont on l'a mis sous la forme indiquée. Il suffit de montrer que, si $\omega=0$, l'élément (2) est 0. Or on a alors (pour raison d'homogénéité) $\sum_{i=1}^{r} f_i d(g_i\otimes 1) = \sum_{j=1}^{s} f_{r+j} d(1\otimes h_j)=0$, et par suite aussi $\sum_{i=1}^{r} df_i \wedge d(g_i\otimes 1) = \sum_{j=1}^{s} df_{r+j} \wedge d(1\otimes h_j)=0$. Or les composantes homogènes de degrés (2,0) et (1,1) de $\sum_{i=1}^{r} df_i \wedge d(g_i\otimes 1)$ et de $\sum_{j=1}^{s} df_{r+j} \wedge d(1\otimes h_j)$ respectivement sont $\sum_{i=1}^{r} d_V f_i \wedge d(g_i\otimes 1)$ et $\sum_{j=1}^{s} d_V f_{r+j} \wedge d(1\otimes h_j)$; ces composantes étant séparément nulles, l'expression (2) est nulle. Que ω soit nul ou non, nous désignerons par $d_V\omega$ la valeur de l'expression (2). Nous obtenons ainsi une représentation d_V du groupe additif $\mathcal{D}^k(V\times W)$ dans le groupe additif $\mathcal{C}^{k-1}(V\times W)$. Si f et f' sont des fonctions de $F^k(V\times W)$, on a $d(f'f)=(df')f+f')(df)$, d'où, en séparant les composantes homogènes, $d_V(f'f)=(d_Vf')f+f'(d_Vf)$. Il en résulte immédiatement que

$$d_V(f'\omega) = d_Vf' \wedge \omega + f' d_V\omega$$

pour tout $\omega \in \mathcal{D}^k(V\times W)$. Par ailleurs, si $\omega \in \mathcal{D}^k(V\times W)$, $d_V\omega$ est homogène de degré 2 relativement à la gradation de $\mathcal{C}^{k-1}(V\times W)$ admettant Z comme groupe des degrés. Il en résulte, comme dans la démonstration du th.2, qu'il existe une antidérivation, notée d_V, de $\mathcal{C}^k(V\times W)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(V\times W)$ qui prolonge les applications déjà définies $f \to d_V f$ $(f \in F^k(V\times W))$ et $\omega \to d_V\omega$ $(\omega \in D^k(V\times W))$; d_V est de plus univoquement déterminé par ces conditions. Si $f \in F^k(V\times W)$, si $g_1,\dots,g_r$ sont des fonctions de $F(V)$ et $h_1,\dots,h_s$ des fonctions de $F(W)$, l'image par d_V du produit

$$(3) \quad f\wedge d(g_1\otimes 1)\wedge\dots\wedge d(g_r\otimes 1)\wedge d(1\otimes h_1)\wedge\dots\wedge d(1\otimes h_s)$$

est le produit qu'on en déduit en remplacant le premier facteur f par $d_V f$ (d_V applique en effet les $d(g_i\otimes 1)$ et les $d(1\otimes h_j)$ sur 0).

On définirait de même une antidérivation d_W de $\mathcal{C}^k(V\times W)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(V\times W)$ qui applique tout élément de la forme (3) sur le produit qu'on en déduit en y remplacant le premier facteur f par $d_W f$. Or tout élément de $\mathcal{C}^k(V\times W)$ est une somme d'éléments de la forme (3). Puisque $df = d_V f + d_W f$, on a

$$\boxed{d = d_V + d_W}.$$

<u>Définition 2.- Si V et W sont des variétés, les opérateurs d_V et d_W définis ci-dessus sur l'ensemble des formes différentielles de classe C^k sur $V\times W$ s'appellent respectivement le premier et le second cobord partiel.</u>

<u>Proposition 5.- L'anneau $\mathcal{C}^k(V\times W)$ étant muni de sa gradation fine, d_V est homogène de degré $(1,0)$ et d_W de degré $(0,1)$.</u>

Un élément de la forme (3) est homogène de degré (r,s). Puisque $d_V f$ et $d_W f$ sont homogènes de degrés respectifs $(1,0)$ et $(0,1)$, les images de l'élément en question par d_V et d_W sont homogènes de degrés respectifs $(r+1,s)$ et $(r,s+1)$; tout élément de $\mathcal{C}^k(V\times W)$ étant somme d'éléments de la forme (3), la prop.5 est démontrée.

Corollaire. Si une forme différentielle ω de classe C^k sur $V\times W$ est orientée suivant V (resp.: suivant W), $d_V\omega$ (resp.: $d_W\omega$) est orienté suivant V (resp.: suivant W).

Proposition 6.- Soit η (resp.: ζ) une forme différentielle de classe C^k sur V (resp.: sur W). On a alors

$$d_V(\mathrm{Rel}_1.\eta) = d(\mathrm{Rel}_1.\eta) = \mathrm{Rel}_1.d\eta \; ; \quad d_W(\mathrm{Rel}_1.\eta)=0$$

$$d_W(\mathrm{Rel}_2.\zeta) = d(\mathrm{Rel}_2.\zeta) = \mathrm{Rel}_2.d\zeta \; ; \quad d_V(\mathrm{Rel}_2.\zeta)=0 .$$

Il est clair que $\mathrm{Rel}_1.\eta = \eta\circ \mathrm{pr}_1$; on a donc, en vertu de la prop.4, $d(\mathrm{Rel}_1.\eta)= \mathrm{Rel}_1.d\eta$. Si on suppose que η est homogène de degré a, $\mathrm{Rel}_1.\eta$ est évidemment homogène de degré $(a,0)$. La forme $\mathrm{Rel}_1.d$ étant homogène de degré $(a+1,0)$, $d_V(\mathrm{Rel}_1.\eta)$ étant homogène de degré $(a+1,0)$ et $d_W(\mathrm{Rel}_1.\eta)$ étant homogène de degré $(a,1)$, on voit que $d_W(\mathrm{Rel}_1.\eta)=0$, ce qui démontre le premier groupe de formules de la prop.6 dans le cas où η est homogène. On passe de là au cas d'une forme quelconque η en la décomposant en ses composantes homogènes. Le second groupe de formules de la prop.6 se démontre de manière analogue.

Proposition 7.- Supposons que k soit ou bien un entier >1 ou bien le symbole ∞. On a alors $d_V\circ d_V = d_W\circ d_W = 0$, $d_V\circ d_W + d_W\circ d_V = 0$.

Soit ω un élément homogène de degré (a,b) de $\mathcal{C}^k(V\times W)$. On a alors $d(d\omega)=0$; mais il résulte immédiatement de la prop.5 que la composante homogène de degré $(a+2,b)$ de $d(d\omega)$ est $d_V(d_V\omega)$, que sa composante homogène de degré $(a+1, b+1)$ est $d_V(d_W\omega)+d_W(d_V\omega)$ et que sa composante homogène de degré $(a,b+2)$ est $d_W(d_W\omega)$; ces composantes homogènes étant nulles, la prop.7 est démontrée.

§ 13. CHAMPS PARAMÉTRIQUES.

Soit V une variété. Nous allons considèrer des champs (de tenseurs, de multicovecteurs, de multivecteurs) sur V qui dépendent d'un paramètre w, qui peut varier dans un ensemble W. Nous désignerons par $A(V)$ un anneau qui peut être ou bien $\mathcal{T}(V)$ ou bien $\mathcal{C}(V)$ ou bien $\mathcal{M}(V)$, et nous considérerons des applications t de W dans $A(V)$. L'ensemble de toutes ces applications possède évidemment une structure d'anneau. L'anneau $A(V)$ possède une gradation dont le groupe des degrés Γ est Z^2 si $A(V) = \mathcal{T}(V)$, Z si $A(V)$ est $\mathcal{C}(V)$ ou $\mathcal{M}(V)$. Nous nous limiterons à la considération de celles des applications t qui possèdent la propriété suivante : il n'y a qu'un nombre fini d'éléments γ de Γ tels que la composante homogène de degré γ de $t(w)$ soit $\neq 0$ pour au moins un $w \in W$ (cette condition est d'ailleurs automatiquement satisfaite si $A(V)$ est $\mathcal{C}(V)$ ou $\mathcal{M}(V)$). Les applications qui possèdent cette propriété forment évidemment un sous-anneau de l'anneau de toutes les applications de W dans $A(V)$; nous désignerons ce sous-anneau par $A(W;V)$. Si $\gamma \in \Gamma$, nous désignerons par ${}^{\gamma}A(W;V)$ l'ensemble des $t \in A(W;V)$ tels que, pour tout $w \in W$, $t(w)$ soit homogène de degré γ ; $A(W;V)$ est donc la somme directe $\sum_{\gamma \in \Gamma} {}^{\gamma}A(W;V)$, et cette décomposition définit sur $A(W;V)$ une structure graduée. L'anneau des éléments homogènes de degré 0 de $A(W;V)$ est évidemment celui de toutes les applications de W dans l'anneau $\Phi(V)$ des fonctions sur V ; nous désignerons cet anneau par $\Phi(W;V)$.

Aux opérations algèbriques sur les champs on peut faire correspondre des opérations algèbriques sur les éléments des anneaux $A(W;V)$. Ainsi :

si $\overline{\omega}$ est une permutation de l'ensemble $\{1,\ldots,a\}$, où a est un entier ≥ 0, il correspond à $\overline{\omega}$ des opérateurs de symétrie $\mathfrak{s}\overline{\omega}$ sur ${}^{(a,0)}\mathcal{T}(W;V)$ et ${}^{(0,a)}\mathcal{T}(W;V)$, définis par la formule

$$(\overline{\omega}\, t)(w) = \overline{\omega}\,(t(w)) \qquad \text{pour tout } w \in W \ ;$$

désignant par $\mathcal{T}_{cov.}(W;V)$ et $\mathcal{T}_{con.}(W;V)$ les sous-anneaux $\sum_{a \geqq 0} {}^{(a,0)}\mathcal{T}(W;V)$ et $\sum_{a \geqq 0} {}^{(0,a)}\mathcal{T}(W;V)$, aux opérateurs Sym. et Alt. sur $\mathcal{T}_{cov.}(V)$ et $\mathcal{T}_{con.}(V)$ correspondent des opérateurs Sym. et Alt. sur $\mathcal{T}_{cov.}(W;V)$ et $\mathcal{T}_{con.}(W;V)$ définis par

$$(\text{Sym.}\, t)(w) = \text{Sym.}(t(w)) \;;\; (\text{Alt.}\, t)(w) = \text{Alt.}(t(w)) \quad \text{pour} \quad w \in W \;;$$

à la forme bilinéaire $(t,t') \to \langle t,t' \rangle$ sur $\mathcal{T}(V) \times \mathcal{T}(V)$ correspond une forme bilinéaire $(t,t') \to \langle t,t' \rangle$ sur $\mathcal{T}(W;V) \times \mathcal{T}(W;V)$ ($\mathcal{T}(W;V)$ étant ici considéré comme module sur son sous-anneau $\Phi(W;V)$) définie par

$$(\langle t, t' \rangle)(w) = \langle t(w), t'(w) \rangle \quad \text{pour tout} \quad w \in W \;;$$

si i,j,a,b sont des entiers tels que $1 \leqq i \leqq a$, $1 \leqq j \leqq b$, à l'opération de contraction $\chi_{i,j}$ par rapport aux indices i et j correspond une application linéaire $\chi_{i,j}$ de ${}^{(a,b)}\mathcal{T}(W;V)$ dans ${}^{(a-1,b-1)}\mathcal{T}(W;V)$ définie par

$$(\chi_{i,j} \cdot t)(w) = \chi_{i,j}(t(w)) \quad \text{pour tout} \quad w \in W \;;$$

aux homomorphismes canoniques $P_{\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{T}_{cov.}(T)$ sur $\mathcal{C}(V)$ et de $\mathcal{T}_{con.}(V)$ sur $\mathcal{M}(V)$ correspondent des homomorphismes $P_{\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{T}_{cov.}(W;V)$ sur $\mathcal{C}(W;V)$ et de $\mathcal{T}_{con.}(W;V)$ sur $\mathcal{M}(V)$ définis par

$$(P_{\mathcal{C}} \cdot t)(w) = P_{\mathcal{C}}(t(w)) \;;\; (P_{\mathcal{M}} \cdot t)(w) = P_{\mathcal{M}}(t(w)) \quad \text{si } w \in W \;;$$

aux applications linéaires $J_{\mathcal{C}}$ et $J_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{C}(V)$ dans $\mathcal{T}_{cov.}(V)$ et de $\mathcal{M}(V)$ dans $\mathcal{T}_{con.}(V)$ correspondent des applications linéaires $J_{\mathcal{C}}$ et $J_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{C}(W;V)$ dans $\mathcal{T}_{cov.}(W;V)$ et de $\mathcal{M}(W;V)$ dans $\mathcal{T}_{con.}(W;V)$ définies par

$(J_{\mathcal{C}} \cdot c)(w) = J_{\mathcal{C}}(c(w))$; $(J_{\mathcal{M}} \cdot m)(w) = J_{\mathcal{M}}(m(w))$ pour $w \in W$,

si $c \in \mathcal{C}(W;V)$ et $m \in \mathcal{M}(W;V)$;

à la forme bilinéaire canonique $(\omega , \xi) \to \langle \omega , \xi \rangle$ sur $\mathcal{C}(V) \times \mathcal{M}(V)$ correspond une forme bilinéaire $(c , m) \to \langle c , m \rangle$ sur $\mathcal{C}(W;V) \times \mathcal{M}(W;V)$ définie par

$$(\langle c , m \rangle)(w) = \langle c(w), m(w) \rangle \quad \text{pour tout} \quad w \in W ;$$

à la représentation $\omega \to \imath(\omega)$ de $\mathcal{C}(V)$ dans l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{M}(V)$ (considéré comme module sur $\Phi(V)$) correspond une représentation $c \to \imath(c)$ de $\mathcal{C}(W;V)$ dans l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{M}(W;V)$ (considéré comme module sur $\Phi(W;V)$) qui associe à tout $c \in \mathcal{C}(W;V)$ l'opération $\imath(c)$ définie par $(\imath(c) . m)(w) = \imath(c(w)) . m(w)$ pour tout $m \in \mathcal{M}(W;V)$ et tout $w \in W$; de même, à la représentation $\xi \to \imath(\xi)$ de $\mathcal{M}(V)$ dans l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{C}(V)$, on peut associer une représentation $m \to \imath(m)$ de $\mathcal{M}(W;V)$ dans l'annea des endomorphismes de $\mathcal{C}(W;V)$.

Nous laissons au lecteur le soin de généraliser aux opérations que nous venons de définir les assertions relatives aux diverses relations qui existent entre les opérations algèbriques sur les champs de tenseurs.

Soit maintenant Ξ un ensemble d'applications de W dans $\Phi(V)$ qui possède les propriétés suivantes :

a) <u>si</u> f <u>et</u> g <u>sont des éléments de</u> Ξ , <u>on a</u> $f+g \in \Xi$;

b) <u>si</u> $f \in \Xi$ <u>et si</u> f <u>est une fonction de</u> F(V), <u>l'application</u> $w \to \mathrm{f} f(w)$ <u>appartient à</u> Ξ .

Nous allons associer à Ξ une partie $A(\Xi ; V)$ de $A(W;V)$. Observons d'abord qu'à tout élément t de A(V) on peut associer l'application constante $w \to t$ de W dans A(V) ; ceci permet d'identifier A(V) à un sous-anneau de A(W;V) . En particulier, nous appellerons champs constants de classe C^{∞} les applications constantes de W dans $A(V)$ dont la valeur est un champ de classe C^{∞} sur V. Ceci dit, nous désignerons par $A(\Xi;V)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de champs constants de classe C^{∞} à coefficients dans Ξ. Il est clair que $A(\Xi;V)$ est un sous-groupe additif de $A(W;V)$ et que, si t est un champ constant de classe C^{∞}, la condition $\xi \in A(\Xi;V)$ entraîne $\xi t \in A(\Xi;V)$. Si Ξ est un sous-anneau de l'ensemble des applications de W dans $\Phi(V)$, $A(\Xi;V)$ est un sous-anneau de $A(W;V)$.

Proposition 1. Si $\overline{\omega}$ est une permutation de $\{1,\dots,a\}$, où a est un entier $\geqq 0$, les opérateurs de symétrie associés à $\overline{\omega}$ appliquent les ensembles ${}^{a}T_{cov.}(\Xi;V)$ et ${}^{a}T_{con.}(\Xi;V)$ dans eux-mêmes. Les opérateurs Sym. et Alt. appliquent les ensembles $T_{cov.}(\Xi;V)$ et $T_{con.}(\Xi;V)$ dans eux-mêmes. Si i,j,a,b sont des entiers tels que $1 \leqq i \leqq a$, $1 \leqq j \leqq b$, l'opérateur $\chi_{i,j}$ de contraction par rapport aux indices i et j applique ${}^{(a,b)}T(\Xi;V)$ dans ${}^{(a-1,b-1)}T(\Xi;V)$. On a $P_{\mathcal{C}}(T_{cov.}(\Xi;V)) = \mathcal{C}(\Xi;V)$, $P_{\mathcal{M}}(T_{con.}(\Xi;V)) = \mathcal{M}(\Xi;V)$, $J_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(\Xi;V)) \subset T_{cov.}(\Xi;V)$, $J_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}(\Xi;V)) \subset T_{con.}(\Xi;V)$.

Proposition 2. Supposons que Ξ soit un sous-anneau de l'anneau des applications de W dans $\Phi(V)$. Alors, si t, t' sont dans $T(\Xi;V)$, $\langle t, t' \rangle$ est dans Ξ ; si $c \in \mathcal{C}(\Xi;V)$ et $m \in \mathcal{M}(\Xi;V)$, $\langle c, m \rangle$ est dans Ξ, $\iota(c)$ applique $\mathcal{M}(\Xi;V)$ dans lui-même et $\iota(m)$ applique $\mathcal{C}(\Xi;V)$ dans lui-même.

La vérification de ces assertions ne présente aucune difficulté ; nous laissons au lecteur le soin de la faire.

Proposition 3.- Pour qu'un élément t de $T(W;V)$ appartienne à $T(\Xi\,;V)$, il est nécessaire et suffisant que, pour tout champ de tenseurs u de classe C^{∞} sur V, $\langle t,u\rangle$ appartienne à Ξ. Pour qu'un élément $c\in \mathcal{C}(W;V)$ appartienne à $\mathcal{C}(\Xi\,;V)$, il est nécessaire et suffisant que, pour tout champ de multivecteurs ξ de classe C^{∞} sur V, $\langle c,\xi\rangle$ appartienne à Ξ. Pour qu'un élément $m\in \mathcal{M}(W;V)$ appa-rtienne à $\mathcal{M}(\Xi\,;V)$, il est nécessaire et suffisant que, pour toute forme différentielle ω de classe C^{∞} sur V, $\langle \omega,m\rangle$ appartienne à Ξ.

Si $t\in T(\Xi\,;V)$, on peut écrire $t=\sum_{i=1}^{r} f_i t_i$, où les f_i sont dans Ξ et les t_i des éléments de $T^{\infty}(V)$. Si $u\in T^{\infty}(V)$, on a $\langle t,u\rangle=\sum_{i=1}^{r} f_i\langle t_i,u\rangle\in\Xi$. Supposons réciproquement que $t\in T(W;V)$ soit tel que $\langle t,u\rangle\in\Xi$ pour tout $u\in T^{\infty}(V)$. Faisant usa ge de la prop.1, § 10, dont nous utiliserons les notations, on peut écrire, si $w\in W$, $t(w)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\langle t(w),u'_{\nu}\rangle u_{\nu}$. Les applications $w\to\langle t(w),u'_{\nu}\rangle$ appartiennent par hypothèse à Ξ ; il en résulte que $t\in T(\Xi\,;V)$. Les autres assertions de la prop.3 se démontrent de manière analogue en utilisant la prop.2, § 10.

Ceci dit, nous supposerons à partir de maintenant que W est un espace topologique. Nous désignerons alors par Ξ^{k} l'ensemble des applications continues de W dans l'espace $\mathcal{E}^{k}(V)$ défini au § 8 (la lettre k représentant soit un entier ≥ 0 soit le symbole ∞). L'ensemble Ξ^{k} est donc un sous-anneau de l'anneau des applications de W dans $\Phi(V)$. Les champs paramétriques appa-rtenant aux anneaux $A(\Xi^{0};V)$ sont dits continus. Il est clair que, si $a\in A(\Xi^{k};V)$, et $w\in W$, $a(w)$ est un champ de classe C^{k}.

Soit X une transformation infinitésimale sur V . Supposant $k > 0$ et $a \in A(\Xi^k;V)$, on peut définir un élément $\theta(X).a$ de $A(W;V)$ par la formule $(\theta(X).a)(w)=\theta(X).a(w)$ pour tout $w \in W$. <u>L'élément</u> $\theta(X).a$ <u>appartient à</u> $A(\Xi^{k-1};V)$ (où on convient que $k-1=\infty$ si $k=\infty$) . Ecrivons en effet $a = \sum_{i=1}^r f_i a_i$ où les a_i sont des champs constants de classe C^∞ ; on a alors $\theta(X).a = \sum_{i=1}^r (\theta(X).f_i)a_i + \sum_{i=1}^r f_i(\theta(X).a_i)$. Or l'application $f \to \theta(X).f$ $(f \in F^k(V))$ est une application continue de $\mathcal{E}^k(V)$ dans $\mathcal{E}^{k-1}(V)$; il en résulte immédiatement que les $\theta(X).f_i$ sont dans Ξ^{k-1}, ce qui démontre notre a-ssertion. Supposant toujours $k > 0$, soit c un élément de $\mathcal{C}(\Xi^k;V)$; on peut alors définir un élément dc de $\mathcal{C}(W;V)$ par la formule $(dc)(w)=d(c(w))$ pour tout $w \in W$. <u>L'élément</u> dc <u>appartient à</u> $\mathcal{C}(\Xi^{k-1};V)$. Ecrivons en effet $c = \sum_{i=1}^r f_i\omega_i$, les f_i étant dans Ξ^k et les ω_i étant des formes différentielles de classe C^∞ sur V . Ona a alors $dc = \sum_{i=1}^r df_i \wedge \omega_i + \sum_{i=1}^r f_i d\omega_i$; il suffira donc de montrer que les df_i sont dans $\mathcal{C}(\Xi^{k-1};V)$. Pour ce faire, il suffira, en vertu de la prop.3, d'établir que, pour toute transformation infinitésimale X sur V , $\langle df_i,X\rangle$ appartient à Ξ^{k-1} ; or il en est bien ainsi puisque $\langle df_i,X\rangle = \theta(X).f_i$.

Supposons maintenant que W soit localement compact et qu'on ait donné une mesure de Radon μ sur W . L'ensemble $\Xi_{l.s.}$ des applications f de W dans $\Phi(V)$ qui possèdent la propriété suivante : pour tout $p \in V$, la fonction $w \to (f(w))(p)$ est localement sommable sur W , possède les propriétés requises plus haut pour les ensembles Ξ ; il est clair que $\Xi^k \subset \Xi_{l.s.}$ pour tout k . Soit a un élément de $A(\Xi_{l.s.};V)$, et soit E une partie relativement compacte mesura ble de W . Mettons a sous la forme $\sum_{i=1}^r f_i a_i$, où les f_i

sont dans $\Xi_{l.s.}$ et les a_i des champs constants de classe C^{∞}.

On peut définir des fonctions g_i sur V par la formule

$g_i(p) = \int_E (f_i(w))(p).d\mu$ pour tout $p \in V$. Le champ $a = \sum_{i=1}^{r} g_i a_i$ ne dépend pas de la manière dont on a représenté $\mathfrak{a}$ sous la forme indiquée. En effet, si $A(V) = \mathcal{T}(V)$, soit b un élément quelconque de $\mathcal{T}^{\infty}(V)$; si $A(V) = \mathcal{C}(V)$, soit b un élément quelconque de $\mathcal{M}^{\infty}(V)$, et, si $A(V) = \mathcal{M}(V)$, soit b un élément quelconque de $\mathcal{C}^{\infty}(V)$; on a alors

$$\langle a,b \rangle = \int_E \langle \mathfrak{a}(w),b \rangle . d\mu$$

et notre assertion résulte de ce qu'un champ $a \in A(V)$ est déterminé par la donnée des $\langle a,b \rangle$ pour tous les b (cf. prop. 1,2, § 10). Nous désignerons le champ a par la notation $\int_E \mathfrak{a}(w).d\mu$.

<u>Proposition 4.- Soit μ une mesure de Radon sur l'espace topologique localement compact W, et soit E une partie mesurable relativement compacte de W. Soit $\mathfrak{a}$ un élément de $A(\Xi^k;V)$ (où k représente soit un entier ≥ 0 soit le symbole ∞) ; le champ $\int_E \mathfrak{a}(w).d\mu$ est alors de classe C^k. Supposons maintenant que $k \neq 0$, et soit X une transformation infinitésimale sur V. On a alors</u>

$\theta(X). \int_E \mathfrak{a}(w).d\mu = \int_E (\theta(X). \mathfrak{a})(w).d\mu$. <u>De plus, si</u> $\mathfrak{a} \in C(\Xi^k;V)$, <u>on a</u> $d(\int_E c(w).d\mu) = \int_E (dc)(w).d\mu$.

Nous considèrerons d'abord le cas où $\mathfrak{a} = f$ est un élément de Ξ^k. L'application $w \to f(w)$ de W dans $\mathcal{E}^0(V)$ étant continue, la fonction $(p,w) \to (f(w))(p)$ sur $V \times W$ est continue, et l'application qui à tout $p \in V$ fait correspondre la fonction $w \to (f(w))(p)$ sur W est une application continue de V dans l'espace des fonctions continues sur W, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. L'image par cette application d'une partie compacte K de V est donc un ensemble de fonctions sur W dont les restrictions à l'adhérence $\bar{E}$ de E forment un ensemble de fonctions équicontinues sur $\overline{E}$. L'espace V étant localement compact, on en conclut que la fonction $p \to \int_E (f(w))(p).d\mu$, c'est-à-dire la fonction $\int_E f(w).d\mu$, est continue sur V. Désignons maintenant par $\mathcal{R}$ l'espace des mesures de Radon sur W, muni de la topologie de la convergence vague ; on sait que, si Λ est un ensemble équicontinu de fonctions continues sur $\overline{E}$, les fonctions $\mu \to \int_E \lambda(w).d\mu$ pour $\lambda \in \Lambda$ forment une famille de fonctions équicontinues sur $\mathcal{R}$. Il en résulte immédiatement que l'application $\mu \to \int_E f(w).d\mu$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{E}^0(V)$ est continue. Ceci dit, supposons que $k > 0$, et soit X une transformation infinitésimale sur V. Il est clair que, si μ est une masse ponctuelle sur W, $\int_E f(w).d\mu$ est une fonction de classe C^k sur V et que $\theta(X).\int_E f(w).d\mu = \int_E (\theta(X).f)(w).d\mu$. Ces propriétés sont donc encore vraies toutes les fois que μ appartient à l'ensemble $\mathcal{R}_0$ des combinaisons linéaires de masses finies. Or on sait que $\mathcal{R}_0$ est dense dans $\mathcal{R}$; si μ est un élément quelconque de $\mathcal{R}$, μ est donc la limite d'une base de filtre $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{R}_0$. Soit D un opérateur différentiel sur $F^k(V)$; D étant une application continue de $\mathcal{E}^k(V)$ dans $\mathcal{E}^0(V)$, l'application $w \to Df(w)$ de W dans $\mathcal{E}^0(V)$ est continue. On a donc

$$\int_E Df(w).d\mu = \lim_{\mathcal{B}} \int Df(w).d\mu' = \lim_{\mathcal{B}} D\left(\int_E f(w).d\mu'\right).$$

Posons $g_{\mu'} = \int_{\mu'} f(w).d\mu'$ pour $\mu' \in \mathcal{R}_0$; on voit que, pour tout opérateur différentiel D sur $F^k(V)$, l'image de $\mathcal{B}$ par l'application $\mu' \to Dg_{\mu'}$ converge vers une limite dans $\mathcal{E}^0(V)$. Il en résulte immédiatement que l'image de $\mathcal{B}$ par l'application $\mu' \to g_{\mu'}$ est un filtre de Cauchy dans $\mathcal{E}^k(V)$. Or, l'espace $\mathcal{E}^k(V)$ est complet ; on en conclut que $\int_E f(w).d\mu$, qui est la limite dans $\mathcal{E}^0(V)$ de l'image de $\mathcal{B}$ par l'application $\mu' \to g\mu'$, appartient à $F^k(V)$

et est la limite dans $\mathcal{E}^k(V)$ de l'image de $\mathcal{B}$ par l'application $\mu' \to g_{\mu'}$. Il en résulte immédiatement que l'on a, pour tout opérateur différentiel D sur $F^k(V)$, $D(\int_E f(w).d\mu) = \int_E (Df(w)).d\mu$, d'où en particulier $\theta(X).\int_E f(w).d\mu = \int_E (\theta(X).f).d\mu$. Puisque $\langle d\mu, X\rangle = \theta(X).f$, il en résulte que $\int_E (df)(w).d\mu = d(\int_E f(w).d\mu)$. La prop.4 est donc établie dans le cas où $\mathfrak{a}$ est un élément de Ξ^k. Pour passer au cas général, écrivons $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^r f_i a_i$, les f_i étant dans Ξ^k et les a_i des champs constants de classe C^∞. On a alors $\int_E \mathfrak{a}(w).d\mu = \sum_{i=1}^r (\int_E f_i(w).d\mu)a_i$, ce qui montre que $\int_E \mathfrak{a}(w).d\mu$ est de classe C^k. De plus, $\theta(X).\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^r (\theta(X).f_i)a_i + \sum_{i=1}^r f_i(\theta(X).a_i)$, d'où il résulte que $\theta(X).\int_E \mathfrak{a}(w).d\mu = \int_E (\theta(X).\mathfrak{a})(w).d\mu$. Enfin, si $\mathfrak{a} \in \mathcal{C}(\Xi^k;V)$, on a $d\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^r df_i \wedge a_i + \sum_{i=1}^r f_i da_i$, d'où $d(\int_E \mathfrak{a}(w).d\mu) = \int_E (d\mathfrak{a})(w).d\mu$. La prop.4 est donc démontrée.

Considérons maintenant le cas où W est lui-même une variété. Il y a alors lieu de considérer l'ensemble Ξ'^k des applications f de W dans $\Phi(V)$ telles que la fonction $(p,w) \to (f(w))(p)$ soit de classe C^k sur la variété produit $V \times W$. L'ensemble Ξ'^k est contenu dans l'ensemble Ξ^k considéré plus haut. Pour le montrer, établissons d'abord que, si D est un opérateur différentiel sur $F^k(V)$, il y a un opérateur différentiel D' sur $F^k(V \times W)$ tel que $(Df)\otimes 1 = D'(f\otimes 1)$ pour tout $f \in F^k(V)$. Il en est évidemment ainsi si D est un opérateur de multiplication par une fonction de $F(V)$ ou si D est une transformation infinitésimale X de V (dans ce dernier cas, on peut prendre $D' = \mathrm{rel}_1.X$); il en résulte tout de suite que notre assertion est vraie pour tout opérateur différentiel D sur $F^k(V)$. Ceci dit, si $f \in \Xi'^k$, désignons par f' la fonction $(p,w) \to (f(w))(p)$. On a donc, avec les notations utilisées plus haut, $(Df')' = D'f'$, où Df est l'application $w \to D(f(w))$. Il en résulte que, pour tout opérateur différentiel D sur $F^k(V)$, la fonction $(Df)'$ est continue, donc que l'application $w \to Df(w)$ de W dans $\mathcal{E}^0(V)$ est continue ; cela entraîne la continuité de f en tant qu'application de W dans $\mathcal{E}^k(W)$. Si $\mathfrak{a} \in A(\mathbb{E}'^k ; V)$, posons $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^r f_i a_i$, les f_i étant dans $\mathbb{E}'^k$ et les a_i des champs constants de classe C^∞ sur V . La formule $\mathfrak{a}' = \sum_{i=1}^r f_i' \, \mathrm{Rel}_1 . a_i$ représente alors un champ de classe C^k sur $V \times W$, et on a, pour tout $(p,w) \in V \times W$, $\mathfrak{a}'|_{(p,w)} = (\mathrm{Rel}_1 \, \mathfrak{a}(w))_{(p,w)}$, ce qui montre que $\mathfrak{a}'$ est bien déterminé par la donnée de $\mathfrak{a}$. De plus, il est clair que $\mathfrak{a}'$ est orienté suivant V . Soit réciproquement $\mathfrak{a}'$ un champ de classe C^k sur $V \times W$ orienté suivant V . Si $w \in W$, il existe un champ $\mathfrak{a}(w)$ sur V tel que $(\mathrm{Rel}_1 . \mathfrak{a}(w))_{(p,w)} = \mathfrak{a}'|_{(p,w)}$ pour tout $p \in V$. Montrons que l'application $\mathfrak{a} : w \to \mathfrak{a}(w)$ appartient à $A(\mathbb{E}'^k ; V)$. Supposons d'abord que $\mathfrak{a}'$ soit un champ de tenseurs. Soit b un champ de tenseurs constant de classe C^∞ sur V ; on a alors, pour $(p,w) \in V \times W$, $\langle \mathfrak{a}(w), b \rangle (p) = \langle \mathfrak{a}', \mathrm{Rel}_1 . b \rangle (p,w)$; mais $\mathrm{Rel}_1 . b$ est un champ de tenseurs de classe C^∞ sur $V \times W$, d'où il résulte que $\langle \mathfrak{a}', \mathrm{Rel}_1 . b \rangle$ est une fonction de classe C^k sur $V \times W$, et par suite que l'application $w \to \langle \mathfrak{a}(w), b \rangle$ appartient à $\mathbb{E}'^k$. Il en résulte en vertu de la prop.3 que $\mathfrak{a}$ appartient à $T(\mathbb{E}'^k ; V)$. Une démonstration analogue s'applique au cas où $\mathfrak{a}'$ est une forme différentielle ou un champ de multivecteurs. On voit donc qu'il y a une correspondance biunivoque $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ entre les éléments de $A(\mathbb{E}'^k ; V)$ et les champs de classe C^k sur $V \times W$.

Les applications a de W dans $A(V)$ qui appartiennent à $A(\mathcal{E}'^{k};V)$ seront appelées <u>applications de classe</u> C^k. Si a est une application de classe C^k de W dans $A(V)$, nous désignerons par $\mathrm{Rel}_1 . a$ le champ a' définit plus haut sur $V \times W$. On a donc, pour tout $(p,w) \in V \times W$,

$$\boxed{(\mathrm{Rel}_1 . a)_{(p,w)} = (\mathrm{Rel}_1 . a(w))_{(p,w)}}.$$

Ceci dit, soit T une transformation infinitésimale sur W. Supposons que $k \neq 0$; $\theta(\mathrm{Rel}_2 . T)$ est alors un opérateur sur les champs de classe C^k sur $V \times W$ et transforme tout champ orienté suivant V en un champ orienté suivant V. Il résulte de là qu'on peut faire agir T sur les applications de classe C^k de W dans $A(V)$: si a est l'une de ces applications, on définit $T.a$ par la condition que

$$\boxed{\mathrm{Rel}_1 .(T.a) = \theta(T).(\mathrm{Rel}_1 . a)}.$$

L'application $a \longrightarrow T.a$ est évidemment une dérivation de l'anneau $A(\mathcal{E}'^{k};V)$ dans $A(\mathcal{E}'^{k-1};V)$ (on convient que $k-1 = \infty$ si $k = \infty$) et cette dérivation est homogène de degré nul. Supposons maintenant que k soit ou bien un entier > 1 ou bien ∞, et soit X une transformation infinitésimale sur V. On sait que $[\mathrm{Rel}_1 . X, \mathrm{Rel}_2 . T] = 0$; il en résulte que les opérateurs $\theta(\mathrm{Rel}_1 . X)$ et $\theta(\mathrm{Rel}_2 . T)$ commutent entre eux, d'où la formule

$$(1) \qquad \boxed{T.(\theta(X).a) = \theta(X).(T.a)}$$

pour toute application a de classe C^k de W dans $A(V)$.

Supposons maintenant que W soit un intervalle de R. Si T est la transformation infinitésimale $\partial / \partial w$ sur W, on pose, pour toute application a de classe C^k de W dans $A(V)$, $\partial a / \partial w = T.a$.

Si w_1 et w_2 sont des points de W, on a

$$(2) \qquad \boxed{a(w_2) - a(w_1) = \int_{w_1}^{w_2} (\partial a/\partial w)(w).dw} \,.$$

Revenons maintenant au cas d'une variété W quelconque, et désignons par c une application de classe C^k de W dans $\mathcal{C}(V)$. Nous allons montrer que l'on a

$$(3) \qquad \boxed{\mathrm{Rel}_1.dc = d_V(\mathrm{Rel}_1.c)} \,.$$

Il suffit évidemment de démontrer cette formule dans le cas où $c = \mathfrak{f}\,\omega$, $\mathfrak{f}$ étant dans $\mathcal{E}'^k$ et ω étant une forme différentielle de classe C^∞ sur V. On a alors $dc = d\mathfrak{f} \wedge \omega + \mathfrak{f}\, d\omega$, d'où $\mathrm{Rel}_1.dc = (\mathrm{Rel}_1.d\mathfrak{f}) \wedge (\mathrm{Rel}_1.\omega) + (\mathrm{Rel}_1.\mathfrak{f})(\mathrm{Rel}_1.d\omega)$. Soit (p,w) un point de $V \times W$, et soit $f = \mathrm{Rel}_1.\mathfrak{f}$. On a $(\mathrm{Rel}_1.d\mathfrak{f})_{(p,w)} =$ $= d_p(\mathfrak{f}(w))$ (en ~~xxx~~ identifiant $D_p(V)$ à un sous-espace de $D_{(p,w)}(V \times W)$). Or $\mathfrak{f}(w)$ est la fonction $p \to f(p,w)$; $d_p(\mathfrak{f}(w))$ est donc la première différentielle partielle $(d_V f)_{(p,w)}$ de f en (p,w), d'où $\mathrm{Rel}_1.d\mathfrak{f} = d_V(\mathrm{Rel}_1.\mathfrak{f})$. Par ailleurs, on a $\mathrm{Rel}_1.d\omega = d(\mathrm{Rel}_1.\omega) = d_V(\mathrm{Rel}_1.\omega)$ (prop.6, § 12). On a $d_V(\mathrm{Rel}_1.c) = d_V((\mathrm{Rel}_1.\mathfrak{f})(\mathrm{Rel}_1.\omega)) = d_V(\mathrm{Rel}_1.\mathfrak{f}) \wedge (\mathrm{Rel}_1.\omega) +$ $+ (\mathrm{Rel}_1.\mathfrak{f})\, d_V(\mathrm{Rel}_1.\omega)$; notre formule est donc démontrée.

§ 14. HOMOTOPIES.

167 bis

<u>Définition 1. Soient φ et ψ des applications continues d'un espace</u> V <u>dans un espace</u> W . <u>On dit qu'une application continue</u> η <u>de l'espace</u> $V \times [0,1]$ <u>dans</u> W <u>est une homotopie de φ à ψ si on a</u> $\varphi(p) = \eta(p,0)$, $\psi(p) = \eta(p,1)$ <u>pour tout</u> $p \in V$.

S'il en est ainsi, l'application $(p,t) \to \eta(p,1-t)$ est une homotopie de ψ à φ . S'il existe au moins une homotopie de φ à ψ , on dit que φ et ψ sont <u>homotopes</u> .

La lettre k désignera dans ce qui suit soit un entier >0 soit le symbole ∞ .

<u>Définition 2.- Soient φ et ψ des applications de classe C^k d'une variété</u> V <u>dans une variété</u> W . <u>Une application η de classe C^k de</u> $V \times R$ <u>dans</u> W <u>est appelée une homotopie de classe C^k de φ à ψ si on a</u> $\eta(p,0) = \varphi(p)$, $\eta(p,1) = \psi(p)$ <u>pour tout</u> $p \in V$.

<u>Proposition 1.- Soient φ et ψ des applications de classe C^k d'une variété</u> V <u>dans une variété</u> W . <u>Pour que φ et ψ soient homotopes, il faut et suffit qu'il existe une homotopie de classe C^k de φ à ψ</u> .

La condition est évidemment suffisante. Supposons maintenant φ et ψ homotopes. La réunion Z des ensembles $V \cup \{0\}$ et $V \cup \{1\}$ est évidemment une sous-variété fermée de $V \times R$. L'application η_1 de Z dans W définie par $\eta_1(p,0) = \varphi(p)$ et $\eta_1(p,1) = \psi(p)$ est une application de classe C^k de Z dans W . Soit par ailleurs η une homotopie de φ à ψ . Prolongeons η en une application η^* de $V \times R$ dans W en posant $\eta^*(p,t) = \varphi(p)$ si $t < 0$, $\eta^*(p,t) = \psi(p)$ si $t > 1$; l'application η^* est visiblement continue, et sa restriction à Z est η_1 . Il résulte donc de la prop.5, §9 qu'il existe une application de classe C^k de $V \times R$ dans W qui prolonge η^* ; cette application est une homotopie de classe C^k de φ à ψ .

 163

Nous allons supposer dans ce qui suit que k est ou bien un entier > 1 ou bien le symbole ∞ ; on convient que, si k est ∞, k-1 représente le symbole ∞.

Théorème 3.- Soient φ et ψ des applications de classe C^k d'une variété V dans une variété W, homotopes l'une à l'autre. Il existe alors une application σ de l'ensemble $\mathcal{C}^o(W)$ des formes différentielles de classe C^o sur W dans $\mathcal{C}^o(V)$ qui possède les propriétés suivantes : a) c'est une représentation du groupe additif de $\mathcal{C}^o(W)$ dans celui de $\mathcal{C}^o(V)$; b) c'est une application homogène de degré -1 de $\mathcal{C}^o(W)$ ~~dans~~ dans $\mathcal{C}^o(V)$; c) si $\omega \in \mathcal{C}^k(W)$, $\sigma(\omega)$ est dans $\mathcal{C}^{k-1}(V)$ et on a

$$\omega \circ \psi - \omega \circ \varphi = d.\sigma(\omega) + \sigma(d\omega) .$$

Il existe une homotopie η de classe C^k de φ à ψ. A toute forme différentielle ω sur W on peut alors faire correspondre la forme différentielle $\omega \circ \eta$ sur la variété $V \times R$. Or, l'ensemble $\mathcal{C}(V \times R)$ est muni d'une gradation admettant Z^2 comme groupe des degrés ; appelons composante suivant V d'une forme différentielle ζ sur $V \times R$ la somme des composantes homogènes de ζ dont les degrés sont de la forme $(a,0)$. Nous allons déterminer la composante suivant V de $\omega \circ \eta$. Si $t \in R$, soit η_t l'application $p \to \eta(p,t)$ de V dans W ; désignons par c l'application $t \to \omega \circ \eta_t$ de R dans $\mathcal{C}(V)$; nous allons montrer que la composante suivant V de $\omega \circ \eta$ est $\mathrm{Rel}_1 . c$. Les applications $\omega \to \omega \circ \eta$ de $\mathcal{C}(W)$ dans $\mathcal{C}(V \times R)$ et $\omega \to \omega \circ \eta_t$ de $\mathcal{C}(W)$ dans $\mathcal{C}(V)$ sont des représentations d'anneaux ; par ailleurs il est clair que la composante suivant V d'un produit de formes différentielles sur $V \times R$ est le produit des composantes suivant V de ces formes. Il suffira donc d'établir notre assertion dans le cas où ω est soit une fonction sur W, soit de la forme dh, $h \in F(W)$.

C'est évident dans le premier cas ; dans le second cas, la composante suivant V de $\omega\circ\eta = d(h\circ\eta)$ est $d_V(h\circ\eta)$, et notre assertion résulte de la formule (3), § 13 . Si $\omega \in C^k(W)$, on a $\omega\circ\eta \in C^{k-1}(V\times R)$, et il en résulte que c est une application de classe C^{k-1} de V dans R . On a $\omega\circ\varphi = c(0)$, $\omega\circ\psi = c(1)$, d'où

$$\omega\circ\psi - \omega\circ\varphi = \int_0^1 (\partial c/\partial t)(t).dt \ .$$

Soit T la transformation infinitésimale $\mathrm{Rel}_2.(\partial/\partial t)$ sur $V\times R$. On a donc $\mathrm{Rel}_1.(\partial c/\partial t) = \theta(T).\mathrm{Rel}_1.c$. On a par ailleurs

$$\theta(T).\omega\circ\eta = d(\iota(T).\,\omega\circ\eta) + \iota(T).d(\omega\circ\eta) \ .$$

Or $\iota(T)$ est une opération homogène de degré $(0,-1)$ sur $C(V\times R)$; d'autre part, le degré d'un élément homogène $\neq 0$ de $C(V\times R)$ est ou bien de la forme $(a,0)$ ou bien de la forme $(a,1)$; on en conclut que, pour tout $\zeta\in C(V\times R)$, $\iota(T).\zeta$ est orienté suivant V . Il y a donc, pour tout $\omega\in C(W)$, une application $s(\omega)$ de R dans $C(V)$ telle que $\mathrm{Rel}_1.s(\omega) = \iota(T).\omega\circ\eta$; si $\omega\in C^0(W)$, $s(\omega)$ est de classe C^0 , et, si $\omega\in C^k(W)$, $s(\omega)$ est de classe C^{k-1} . Les opérateurs de cobord partiels d_V et d_R étant homogènes de degrés respectifs $(1,0)$ et $(0,1)$, la composante suivant V de $d(\iota(T).\omega\circ\eta)$ est $d_V(\iota(T).\omega\circ\eta) = d_V(\mathrm{Rel}_1.s(\omega))$ qui est égale, en vertu de la formule (3), § 13 , à $\mathrm{Rel}_1.d\,s(\omega)$. La formule écrite plus haut donne donc

$$\partial c/\partial t = d\,s(\omega) + s(d\omega) \ .$$

Posons maintenant $\sigma(\omega) = \int_0^1 (s(\omega))(t).dt$ pour tout $\omega\in C^0(W)$; $\sigma(\omega)$ est donc dans $C^0(V)$; si $\omega\in C^k(W)$, on a $\sigma(\omega)\in C^{k-1}(V)$ et $d\sigma(\omega) = \int_0^1 (d\,s(\omega))(t).dt$ (prop.4, § 13). Il résulte immédiatement de là que l'application $\omega\to\sigma(\omega)$ possède les propriétés requises, ce qui démontre le th.3 .

Remarque. Si l est un entier >0 qui est $<k$ dans le cas où k est un entier, et si $\omega \in \mathcal{C}^l(W)$, $\omega \circ \eta$ appartient à $\mathcal{C}^l(V\times R)$; il en résulte que $\sigma(\omega)$ appartient à $\mathcal{C}^l(V)$ et que la formule énoncée dans le th.3 est encore vraie, même si $l=1$.

On dit qu'un espace topologique est retractile si l'application identique de cet espace sur lui-même est homotope à une application constante de l'espace dans lui-même.

Proposition 2.- Si V est une variété retractile, et si k représente ou bien un entier >0 ou bien le symbole ∞, toute forme différentielle ω de classe C^k sur V, homogène de degré $a>0$, telle que $d\omega=0$ peut se mettre sous la forme $d\eta$, η étant une forme différentielle homogène de degré $a-1$ et de classe C^k.

Soit en effet φ une application constante de V dans lui-même homotope à l'application identique ψ ; φ et ψ sont alors de classe C^∞. Si $g\in F(V)$, la fonction $g\circ\varphi$ est constante, d'où $dg\circ\varphi=0$; on a donc $\omega\circ\varphi=0$ pour toute forme différentielle homogène de degré >0. La prop.2 résulte alors immédiatement du th.1, puisque $\omega\circ\psi=\omega$.

Corollaire 1.- Si ω est une forme différentielle homogène de degré >0 et de classe C^k $(k\neq 0)$ sur R^n, et si $d\omega=0$, ω est le cobord d'une forme différentielle de classe C^k sur R^n.

En effet, l'application $(x,t)\rightarrow tx$ $(0\leqq t\leqq 1)$ est une homotopie de l'application constante $x\rightarrow 0$ de R^n à l'application identique de R^n.

Corollaire 2.- Soit ω une forme différentielle homogène de degré >0 et de classe C^k sur une variété V, telle que $d\omega=0$. Si $p\in V$, il y a un voisinage de p sur lequel ω coïncide avec le cobord d'une forme différentielle de classe C^k.

Soit U l'intérieur d'un voisinage cubique compact de p dans V ; U est donc homéomorphe à un cube Q de R^n . Si x_0 est le centre de Q , l'application $(x,t) \to x_0 + t(x - x_0)$ est une homotopie de l'application constante $x \to x_0$ de Q à son application identique. La restriction ω' de ω à U peut donc s'écrire sous la forme $d\eta'$, où η' est une forme différentielle de classe C^k sur U . Soit h une fonction de F(V) égale à 1 sur un voisinage de p et dont le support soit contenu dans U . La forme différentielle η qui coïncide avec $h\eta'$ sur U et qui est nulle en dehors de U est de classe C^k et ω coïncide avec $d\eta$ sur un voisinage de p .

Rappelons qu'une application φ d'un espace V dans un espace W est appelée <u>propre</u> si, pour toute partie compacte L de W , l'ensemble $\overset{-1}{\varphi}(L)$ est compact dans V . Deux applications continues propres φ et ψ de V dans W sont dites être <u>proprement homotopes</u> s'il existe une homotopie de φ à ψ qui soit une application propre de $V \times [0,1]$ dans W .

<u>Proposition 3. Les notations étant celles du th. 3, supposons de plus que φ et ψ soient proprement homotopes. On peut alors imposer à l'opération σ la condition supplémentaire suivante : si ω est une forme différentielle de $C^o(W)$ dont le support est compact, le support de $\sigma(\omega)$ est compact.</u>

Soit η' une homotopie p de φ à ψ qui soit une application propre de $V \times [0,1]$ dans W . Prolongeons η' en une application continue de $V \times R$ dans W telle que $\eta'_1(p,t) = \varphi(p)$ si $t < 0$, $\eta'_1(p,t) = \psi(p)$ si $t > 1$. Soit $(W_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert dispersé de W par des ensembles relativement compacts. Soit P l'ensemble des points $((p,t),q)$ de $(V \times R) \times W$ qui possèdent la propriété suivante : il existe un $j \in J$ tel que $\eta'_1(p,t)$ et q appartiennent tous deux à W_j .

Cet ensemble est un voisinage du graphe de l'application η'_1 . Il y a donc une application η de classe C^k de $V \times R$ dans W qui coïncide avec η'_1 (donc avec η') sur les ensembles $V \times \{0\}$ et $V \times \{1\}$ et qui est telle que $((p,t), \eta'(p,t)) \in P$ pour tout $(p,t) \in V \times R$. Soit L une partie compacte de W , et soit L' l'adhérence de la réunion de ceux des W_j qui rencontrent L ; L' est donc compact. Si $(p,t) \in V \times R$ est tel que $\eta(p,t) \in L$, on a $\eta'(p,t) \in L'$. Or, l'ensemble des $p \in V$ pour lesquels il existe un $t \in R$ tel que $\eta'_1(p,t) \in L'$ est compact. On voit donc qu'il existe une homotopie η de classe C^k de φ à ψ qui possède la propriété suivante : si L est une partie compacte de W , la projection sur V de l'ensemble $\overset{-1}{\eta}(L)$ est contenue dans une partie compacte de V . Ceci dit, construisons l'application σ comme dans la démonstration du th.3, et supposons que ω soit un élément à support compact L de $C^0(W)$. Le support de $\omega \circ \eta$ est évidemment contenu dans $\overset{-1}{\eta}(L)$; il en est donc de même de celui de $\iota(T).\omega \circ \eta$. Il en résulte qu'il existe une partie compacte K de V telle que, pour tout $t \in R$, le support de $(s(\omega))(t)$ soit contenu dans K ; ceci étant, le support de $\sigma(\omega)$ est évidemment contenu dans K , ce qui montre que $\sigma(\omega)$ est à support compact .

§ 15 . INTÉGRATION DES FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR R^n .

1 . Formes différentielles sur R^n .

Nous désignerons par $x_1,\ldots,x_n$ les coordonnées sur R^n . Toute forme différentielle ω , homogène de degré n sur R^n , peut alors se mettre sous la forme $f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, f étant une fonction sur R^n dont le support est le même que celui de ω . Pour que ω soit de classe C^1 , il faut et suffit qu'il en soit ainsi de f ; dans ce cas, on a $d\omega = 0$, et on sait que ω est le cobord d'une forme différentielle η de classe C^1 et de degré n-1 . Supposons de plus que ω soit à support compact ; on peut alors se demander à quelle condition il est possible de choisir η de manière à avoir également un support compact. Une forme différentielle η homogène de degré n-1 et de classe C^1 peut se mettre sous la forme

$$\eta = \Sigma_{i=1}^n (-1)^{i+1} g_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \quad ,$$

les g_i étant des fonctions de classe C^1 (le $\wedge$ sur dx_i signifie que ce facteur doit être omis du produit) ; et on a

$$d\eta = (\Sigma_{i=1}^n \partial g_i/\partial x_i)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \quad .$$

Pour que η soit à support compact, il faut et suffit que chacune des fonctions g_i soit à support compact . Or, si g_i est une fonction à support compact et de classe C^1 , on a $\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial g_i/\partial x_i)(x_1,\ldots,x_n).dx_i=0$; en effet, si le support de g_i est contenu dans le cube de centre origine et de côté 2a , notre intégrale est égale à

$$\int_{-a}^{+a} (\partial g_i/\partial x_i) dx_i = g_i(x_1,\ldots,a\ ,\ldots,x_n) - g_i(x_1,\ldots,-a,\ldots,x_n)=0 \ .$$

Désignant par dv la mesure de Lebesgue sur R^n , il résulte de là que $\int_{R^n} (\partial g_i/\partial x_i).dv = 0$. Si donc f est de classe C^1 et à support compact une condition nécessaire pour que $f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ soit le cobord d'une forme différentielle à support compact est que $\int_{R^n} f.dv = 0$.

<u>Cette condition est aussi suffisante.</u> Supposons la en effet satisfaite. Si $1 \leqq i \leqq n$, nous identifierons R^n de la manière habituelle à $R^i \times R^{n-i}$; nous désignerons par dv_i la mesure de Lebesgue sur R^i, et, si f est une fonction à support compact sur R^n, nous désignerons par $\int_{R^i} f.dv_i$ la fonction qui, à tout point $(a_{i+1},\dots,a_n) \in R^{n-i}$ fait correspondre le nombre $\int_{R^i} f(x_1,\dots,x_i,a_{i+1},\dots,a_n)dv_i$. Supposons que, pour un certain $i < n$, nous ayons une fonction f_i de classe C^1 sur R^n dont le support est contenu dans un certain cube compact $\overline{Q}$ (dont nous supposerons l'intérieur non vide) et qui soit telle que $\int_{R^{i+1}} f_i.dv_{i+1} = 0$. L'intérieur de $\overline{Q}$ n'étant pas vide, on peut trouver une fonction de classe C^1, soit u, sur R^i dont le support est contenu dans la projection de $\overline{Q}$ sur R^i et qui soit telle que $\int_{R^i} u.dv_i = 1$. Posons

$$g_{i+1}(x_1,\dots,x_n) = u(x_1,\dots,x_i).\int_{-\infty}^{x_{i+1}}\left(\int_{R^i} f_i.dv_i\right)dx_{i+1}$$

Le support de cette fonction est contenu dans $\overline{Q}$. Soient en effet $(a_1,\dots,a_n)$ le centre de $\overline{Q}$ et $2c$ son côté. Si l'un des nombres $x_1,\dots,x_i$ est tel que $|x_j - a_j| > c$, on a $u(x_1,\dots,x_i)=0$. Si $x_{i+1} < a_{i+1} - c$, on a $f_i(x'_1,\dots,x'_n)=0$ toutes les fois que $x'_{i+1} \leqq x_{i+1}$, d'où $(\int_{R^i} f_i.dv_i)(x'_1,\dots,x'_n)=0$, ce qui montre que la condition $x_{i+1} < a_{i+1}-c$ entraîne $g_{i+1}(x_1,\dots,x_n)=0$. On voit de même que, si $x_{i+1} > a_{i+1}+c$, $g_{i+1}(x_1,\dots,x_n)$ est égal à $(\int_{R^{i+1}} f_i.dv_{i+1})(x_1,\dots,x_n)$, qui est nul par hypothèse. Enfin, si j est un indice $> i+1$ et si $|x_j - a_j| > c$, on a $(\int_{R^i} f.dv_i)(x_1,\dots,x_n)=0$, et $g_{i+1}(x_1,\dots,x_n)=0$. On a le support de f_i étant compact, la fonction $\int_{R^i} f_i.dv_i$ est de classe C^1 ; la valeur de cette fonction en un point dont la $(i+1)$-ième coordonnée est $< a_i - c$ étant nulle, la fonction

$\int_{-\infty}^{x_{i+1}} \left(\int_{R^i} f.dv_i \right) dx_{i+1}$ est de classe C^1, et il en est de même de g_{i+1}. On a $\partial g_{i+1}/\partial x_{i+1} = u . \int_{R^i} f_i.dv_i$. Si nous posons $f_{i-1} = f_i - \partial g_{i+1}/\partial x_{i+1}$, f_{i-1} est une fonction de classe C^1 à support contenu dans $\overline{Q}$, et on a $\int_{R^i} f_{i-1}.dv_i = 0$. Ceci dit, soit f une fonction de classe C^1 sur R^n dont le support est contenu dans un cube compact $\overline{Q}$. Si l'intérieur de $\overline{Q}$ est vide, on a $f=0$. Supposant qu'il n'en soit pas ainsi, on voit que, si $\int_{R^n} f.dv = 0$, on peut construire de proche en proche des fonctions $f_{n-1}=f, \ldots, f_0$ qui possèdent les propriétés suivantes : ce sont des fonctions de classe C^1 à supports contenus dans $\overline{Q}$; si $1 \leq i \leq n-1$, $f_i - f_{i-1}$ est de la forme $\partial g_{i+1}/\partial x_{i+1}$, où g_{i+1} est une fonction de classe C^1 à support contenu dans $\overline{Q}$; on a $\int_{-\infty}^{x_i} f_{i-1}.dv_i = 0$. On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_0.dx_1 = 0$; si on pose $g_1 = \int_{-\infty}^{x_1} f_0.dx_1$, g_1 est une fonction de classe C^1 à support contenu dans $\overline{Q}$, et on a $\partial g_1/\partial x_1 = f_0$. Il en résulte que $f = \sum_{i=1}^{n} \partial g_i/\partial x_i$.

Nous avons donc établi le résultat suivant :

Proposition 1.- Soit f une fonction de classe C^1 sur R^n, à support compact. Pour que $f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ soit le cobord d'une forme différentielle de classe C^1 à support compact, il faut et suffit que $\int_{R^n} f.dv = 0$. Supposons la condition satisfaite, et soit $\overline{Q}$ un cube compact de R^n qui contienne le support de f ; $f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ est alors le cobord d'une forme différentielle de classe C^1 à support contenu dans $\overline{Q}$.

Définition 1.- Soit $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^0 sur R^n. Si le support de ω est compact, le nombre $\int_{R^n} f.dv$ s'appelle l'intégrale de ω et se désigne par $\int \omega$.

Soit U une partie ouverte de R^n. Si ω est une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^0 sur U dont le support est une partie compacte de U, la forme différentielle ω^* sur R^n qui prolonge ω et qui est nulle en dehors de U est de classe C^0 et à support compact ; son intégrale s'appelle aussi l'intégrale de ω, et se désigne indifféremment par $\int \omega$ ou par $\int_U \omega$. Il est clair que la fonction $\omega \to \int \omega$ sur l'espace vectoriel (sur R) des formes différentielles de degré n, de classe C^0, à supports compacts, est une fonction linéaire.

2. Degrés d'applications.

Soient U et U' des parties ouvertes non vides de R^n ; nous allons considérer dans ce qui suit des applications continues de U dans U'. Si φ est l'une de ces applications, on dit, rappelons-le, que φ est propre si, pour toute partie compacte L' de U', l'ensemble $\overset{-1}{\varphi}(L')$ est une partie compacte de U.

Soit φ une application propre de classe C^∞ de U dans U', et soit x un point de U. Soit Q' un cube ouvert de centre $\varphi(x)$ et dont l'adhérence $\overline{Q}'$ est contenue dans U' ; nous allons montrer qu'il existe un nombre $\delta(\varphi\,;\,x)$ qui possède la propriété suivante : si ω' est une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^1 sur U' dont le support est contenu dans $\overline{Q}'$, on a

$$\int_U \omega' \circ \varphi = \delta(\varphi\,;\,x) \int_{U'} \omega' .$$

Observons tout d'abord que cette égalité a un sens puisque, φ étant propre, le support de $\omega' \circ \varphi$ est une partie compacte de U. Ceci dit, les deux membres de l'égalité à démontrer sont des fonctions linéaires sur l'espace vectoriel des formes ω' satisfaisant aux conditions indiquées. Il suffira donc de montrer que l'égalité $\int \omega' = 0$ entraîne $\int \omega' \circ \varphi = 0$. Or, si $\int \omega' = 0$, ω' est le cobord d'une forme différentielle η' de classe C^1 sur U' dont le support est contenu dans $\overline{Q}'$ (prop.1, n°1) ; on a donc $\omega' \circ \varphi = d(\eta' \circ \varphi)$, et $\eta' \circ \varphi$ est une forme différentielle de classe C^1 dont le support est une partie compacte de U . Il en résulte immédiatement, en vertu de la prop.1, n°1 que $\int \omega' \circ \varphi = 0$, ce qui démontre notre assertion.

Le nombre $\delta(\varphi ; x)$ est évidemment uniquement déterminé par la condition que nous lui avons imposée (car on peut toujours prendre ω' telle que $\int_{U'} \omega' \neq 0$) ; de plus, il ne dépend évidemment pas du choix du cube $\overline{Q}'$ satisfaisant aux conditions imposées. Ce nombre s'appelle le <u>degré de l'application</u> φ <u>au point</u> x .

Les notations étant les mêmes que plus haut, on observera que, si N est un voisinage de x tel que $\varphi(N) \subset Q'$, on a $\delta(\varphi ; y) = \delta(\varphi ; x)$ pour tout $y \in N$. Il en résulte immédiatement que le degré de φ est le même en tous les points d'une composante connexe de U .

<u>Théorème 4</u>. <u>Soit</u> U <u>une partie ouverte connexe de</u> R^n , <u>et soit</u> φ <u>une application propre de classe</u> C^∞ <u>de</u> U <u>dans une partie ouverte</u> U' <u>de</u> R^n. <u>Il existe alors un nombre</u> δ <u>et un seul qui possède la propriété suivante</u> : <u>si</u> ω' <u>est une forme différentielle homogène de degré</u> n <u>et de classe</u> C^1 <u>sur</u> U' <u>dont le support est une partie compacte de</u> U', <u>on a</u>

$$\int \omega' \circ \varphi = \delta \int \omega'$$

Prenons en effet pour δ la valeur commune du degré de φ en chaque point de U . On peut trouver des fonctions h'_j $(1 \leq j \leq r)$ de F(U') dont la somme est égale à 1 sur le support de ω' telles que, pour chaque j , le support de h'_j soit contenu dans un cube compact contenu dans U' . On a donc $\int (h'_j \omega') \circ \varphi = \delta \int h'_j \omega'$ pour chaque j ; puisque $\omega' = \sum_{j=1}^r h'_j \omega'$, il en résulte que $\int \omega' \circ \varphi = \delta \int \omega'$. Le nombre δ possède donc la propriété requise ; il est évidemment déterminé de manièr unique par cette propriété.

Définition 2. Les notations étant celles du th.4, le nombre δ s'appelle le degré de l'application φ.

Proposition 2.- Soit φ une application propre de classe C^{∞} d'une partie ouverte connexe U de R^n dans une partie ouverte U' de R^n. Il existe alors une fonction continue ρ à valeurs >0 sur U qui possède la propriété suivante : si ψ est une application de classe C^{∞} de U dans U' telle que, pour tout $x \in U$, $\psi(x)$ soit à une distance $<\rho(x)$ de $\varphi(x)$, ψ est propre et a même degré que φ.

Il existe une fonction continue bornée ρ à valeurs >0 sur U telle que, pour tout $x \in U$, la boule fermée $B(x)$ de centre $\varphi(x)$ et de rayon $\rho(x)$ soit contenue dans U'. En effet, si $U'=R^n$, on peut prendre $\rho=1$; sinon, la frontière de U' n'est pas vide, et on peut prendre pour $\rho(x)$ le nombre $\inf.\{1, \rho_1(x)\}$, où $\rho_1(x)$ est la distance de $\varphi(x)$ à la frontière de U'. Soit L une partie compacte de U', et soit $A(L)$ l'ensemble des $x \in U$ tels que $B(x)$ rencontre L ; nous allons montrer que $A(L)$ est contenu dans une partie compacte de U. Si $U' \neq R^n$, soit a la distance de L à la frontière de U', et soit x un point de $A(L)$. Désignons par b la distance de $\varphi(x)$ à la frontière de U' ; on a donc $b > \rho(x)$, et, puisque $B(x)$ rencontre L, $b+\rho(x) \geqq a$; on a donc $b \geqq a/2$. L'ensemble $\varphi(A(L))$ est donc contenu dans l'ensemble des points de U' qui possèdent les propriétés suivantes : leurs distances à L sont au plus égales à la borne supérieure des valeurs prises par ρ, et, si $U' \neq R^n$, leurs distances à la frontière de U' sont $\geqq a/2$. Cet ensemble est évidemment fermé et borné, donc compact ; φ étant propre, $A(L)$ est contenu dans une partie compacte de U. Ceci dit, soit ψ une application de classe C^{∞}

de U dans U' qui possède la propriété de l'énoncé de la prop.2 ; il est clair que $\overset{-1}{\psi}(L)$ est contenu dans $A(L)$, ce qui montre que ψ est propre. Si $x \in U$ et $0 \leq t \leq 1$, posons $\eta(x,t) = t\,\varphi(x) + (1-t)\psi(x)$; il est clair que η est une application continue de $U \times [0,1]$ dans U' et que, pour toute partie compacte L de U', $\overset{-1}{\eta}(L)$ est contenu dans $A(L) \times [0,1]$. Les applications φ et ψ sont donc <u>proprement homotopes</u>. Soit ω' une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^1 dont le support est une partie compacte de U'. On a $d\omega' = 0$; il résulte donc du th.3 et de la prop.3, § 14 que $\omega' \circ \varphi - \omega' \circ \psi$ est le cobord d'une forme différentielle de classe C^1 <u>à support compact</u> sur U. On en déduit que $\int \omega' \circ \varphi = \int \omega' \circ \psi$; ceci étant vrai pour tout ω' possédant les propriétés indiquées, φ et ψ ont même degré.

Nous allons maintenant déterminer le degré d'une application φ qui est un isomorphisme de U avec une sous-variété ouverte de R^n. Nous nous appuierons pour cela sur le lemme suivant :

<u>Lemme 1</u>. <u>Soient</u> U_i $(i=1,2)$ <u>des parties ouvertes connexes de</u> R^n, U'_i <u>des parties ouvertes de</u> R^n. <u>Soit</u> φ_i <u>une application propre de classe</u> C^∞ <u>de</u> U_i <u>dans</u> U'_i. <u>Supposons qu'il existe une partie ouverte non vide</u> W' <u>de</u> $U'_1 \cap U'_2$ <u>qui possède les propriétés suivantes : l'ensemble</u> $\overset{-1}{\varphi_2}(W')$ <u>est identique à</u> $\overset{-1}{\varphi_1}(W')$, <u>et</u> φ_1 <u>coïncide avec</u> φ_2 <u>sur cet ensemble. Les degrés de</u> φ_1 <u>et de</u> φ_2 <u>sont alors égaux</u>.

On peut trouver une forme différentielle ω' homogène de degré n et de classe C^1 sur R^n dont le support est une partie compacte de W' et dont l'intégrale n'est pas nulle. Si ω'_i est la restriction de ω' à U'_i $(i=1,2)$, on a $\int \omega'_i = \int \omega' \neq 0$. Par ailleurs, il résulte de nos hypothèses qu'il existe une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^1 sur R^n dont le support est une partie compacte de $U_1 \cap U_2$

et dont les restrictions à U_1 et à U_2 sont $\omega'\circ\varphi_1$ et $\omega'\circ\varphi_2$. On a donc $\int \omega'\circ\varphi_1 = \int \omega'\circ\varphi_2$; il en résulte que φ_1 et φ_2 ont même degré.

Ceci dit, soit φ une application propre de classe C^∞ d'une partie connexe U de R^n dans une partie ouverte U' de R^n. Supposons qu'il existe un point $a \in U$ qui possède les propriétés suivantes : a) la différentielle de φ en a est de rang n ; b) on a $\varphi(x) \neq \varphi(a)$ pour tout point $x \neq a$ de U. Il y a donc un voisinage compact N_1 de a dans U tel que la restriction de φ à N_1 soit biunivoque. Montrons qu'il y a un voisinage compact N de a dans U tel que, si $x \in N$, on ait $\varphi(x) = \varphi(x')$ pour tout $x' \neq x$ de U. S'il n'en était pas ainsi, il existerait deux suites (x_r), (x'_r) de points de U telles que $x_r \in N_1$ (pour tout r), $\lim_{r\to\infty} x_r = a$, $\varphi(x_r) = \varphi(x'_r)$ et $x'_r \neq x_r$ pour tout r ; les points x'_r appartiendraient tous à l'ensemble compact $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(N_1))$, et la suite (x'_r) aurait donc une valeur d'adhérence a' dans U ; φ étant biunivoque sur N_1, aucun x'_r n'est dans N_1, d'où $a' \neq a$, ce qui est impossible puisqu'on aurait $\varphi(a') = \varphi(a)$.

Soit ρ une fonction continue bornée à valeurs > 0 sur U telle que, pour tout $x \in U$, la boule fermée de centre $\varphi(x)$ et de rayon $\rho(x)$ soit contenue dans U' ; la fonction ρ possède alors la propriété énoncée dans la prop.2 (cf. la démonstration de cette proposition). Soit a la plus petite valeur prise par ρ sur N, d'où $a > 0$. Soit λ_0 l'application affine de R^n tangente à φ en a ; λ_0 est donc inversible, et on sait qu'il existe un nombre $e > 0$ tel que $\| \lambda_0(x') - \lambda_0(x) \| \geq e \| x' - x \|$ pour tout couple (x, x') de points de R^n (on désigne par $\|u\|$ la distance à l'origine d'un point de R^n). On sait que $\|\varphi(x) - \lambda_0(x)\|$ est $o(\|x - a\|)$; il existe donc un nombre $r > 0$ qui possède les propriétés suivantes :

la boule fermée B de centre a et de rayon r est contenue dans N ; on a $er/4 < a$ et $\|\varphi(x)-\lambda_0(x)\| \leqq (e/4)\|x-a\|$ pour tout $x \in B$.

L'application φ étant de rang n en a, il y a un nombre $b > 0$ tel que $\varphi(B)$ contienne la boule fermée de centre $\varphi(a)$ et de rayon b. Soit e' le plus petit des nombres $a-er/4$, $er/16$ et b, et soit λ une application affine inversible de R^n sur lui-même telle que

$$(2) \quad \|\lambda(x)-\lambda_0(x)\| \leqq e' \quad \text{pour tout } x \in B.$$

Nous allons montrer que le degré de φ est égal à celui de l'application induite par λ sur U. Il existe une fonction $u \in F(U)$ ~~xxx~~ qui possède les propriétés suivantes : u est égale à 1 sur la boule fermée B' de centre a et de rayon $r/2$; u est nulle en dehors de B, et on a $0 \leqq u(x) \leqq 1$ pour tout $x \in U$. Posons, si $x \in U$,

$\psi(x) = (1-u(x))\varphi(x) + u(x)\lambda(x)$; l'application ψ de U dans R^n est de classe C^∞, coïncide avec λ sur B' et avec φ en dehors de B

Si $x \in B$, on a

$$\|\varphi(x)-\lambda(x)\| \leqq \|\varphi(x)-\lambda_0(x)\| + \|\lambda_0(x)-\lambda(x)\|$$
$$\leqq er/4 + e' \leqq a \leqq \rho(x)$$

et $\|\psi(x)-\varphi(x)\| \leqq \|\varphi(x)-\lambda(x)\|$. On a donc $\|\psi(x)-\varphi(x)\| \leqq \rho(x)$ pour tout $x \in U$; il en résulte d'abord que $\psi(U) \subset U'$, puis, en vertu de la prop. 2, que ψ est une application propre de U dans U' de même degré que φ.

Montrons maintenant que, pour tout $x \neq a$ dans U, on a $\psi(x) \neq \psi(a)$. Considérons d'abord le cas d'un point x n'appartenant pas à B. On a $\|\lambda(a)-\lambda_0(a)\| \leqq b$ et $\varphi(a)=\lambda_0(a)$; le point $\lambda(a)=\psi(a)$ appartient donc à $\varphi(B)$ et peut s'écrire $\varphi(a')$ avec un $a' \in B$. Puisque $B \subset N$, on a $\varphi(a') \neq \varphi(x)$ si $x \neq a'$, d'où $\psi(a) \neq \varphi(x) = \psi(x)$ si x n'est pas dans B.

Supposons maintenant que $x \in B$; si $x \in B'$, on a $\psi(x) = \lambda(x) \neq \lambda(a)$ si $x \neq a$ (puisque λ est biunivoque). Reste à considèrer le cas où x est dans B mais non dans B'. On a alors

$$\psi(x)-\lambda(a) = (1-u(x))(\varphi(x)-\lambda(x)) - (\lambda(a)-\lambda(x)) .$$

Nous avons vu plus haut que $\|\varphi(x)-\lambda(x)\| \leqq er/4 + e'$.

Par ailleurs, on a $\|\lambda(a)-\lambda_0(a)\| \leqq e'$, $\|\lambda(x)-\lambda_0(x)\| \leqq e'$, d'où

$$\|\lambda(x)-\lambda(a)\| \geqq \|\lambda_0(x)-\lambda_0(a)\| -2e'$$
$$\geqq e\,\|x-a\| \;-2e' \geqq er/2 - 2e' .$$

Il en résulte que

$$\psi(x)-\lambda(a) \geqq er/2 - 2e' - (er/4 + e') \geqq er/16$$

ce qui démontre notre assertion dans ce cas .

Procédant de la manière que plus haut pour l'application φ , on en déduit qu'il existe un voisinage ouvert P de a dans U , que nous pouvons supposer contenu dans B' , tel que $\psi(x) \neq \psi(x')$ si $x \in P$, $x' \in U$, $x' \neq x$. L'ensemble $\psi(P) = \lambda(P)$ est ouvert (parce que λ est un homéomorphisme), ψ coïncide avec λ sur P et on a $P = \overset{-1}{\psi}(\psi(P)) = \overset{-1}{\lambda}(\lambda(P))$. Il résulte donc du lemme 1 que le degré de ψ est égal à celui de l'application induite par λ sur U ; or nous savons déjà que ce degré est égal à celui de φ .

Il nous reste maintenant à déterminer le degré d'une application de U induite par une application affine inversible de R^n . Soit A l'espace des applications affines inversibles de R^n sur lui-même, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ; si $\lambda \in A$, soit $\delta(\lambda)$ le degré de l'application induite par λ sur U . L'ensemble des $\lambda \in A$ qui satisfont à la condition (2) ci-dessus est un voisinage de λ_0 dans A ; et on a vu que la fonction δ est constante sur ce voisinage (nous appliquons maintenant les considérations précédentes au cas où φ est elle-même induite par une application affine λ_0) ; il en résulte que la fonction δ est constante sur chaque composante connexe de $\mathcal{A}$. Or l'espace $\mathcal{A}$ est homéomorphe au produit de l'espace des translations de R^n par l'espace du groupe $GL(n;R)$ des applications linéaires inversibles de R^n ; ce dernier possède deux composantes connexes composées respectivement des applications qui préservent l'orientation et de celles qui l'inversent. Soient $\mathcal{A}^+$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ qui conservent l'orientation de R^n et $\mathcal{A}^-$ l'ensemble de ceux qui l'inversent ; $\mathcal{A}^+$ et $\mathcal{A}^-$ sont donc les composantes de $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{A}^+$ contient l'application identique, dont le degré est évidemment 1 ; le degré de tout élément de $\mathcal{A}^+$ est donc 1 . Pour déterminer le degré des éléments de $\mathcal{A}^-$, observons que $\mathcal{A}^-$ contient l'application s : $(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow (-x_1,x_2,\dots,x_n)$ dont le carré est évidemment l'identité. Or on a le résultat suivant :

<u>Proposition 3.- Soient</u> U,U' <u>et</u> U'' <u>des parties ouvertes connexes de</u> R^n , φ <u>une application propre de classe</u> C^∞ <u>de</u> U <u>dans</u> U' <u>et</u> φ' <u>une application propre de classe</u> C^∞ <u>de</u> U' <u>dans</u> U'' ; <u>l'application</u> $\varphi'\circ\varphi$ <u>de</u> U <u>dans</u> U'' <u>est alors propre et son degré est le produit de ceux de</u> φ <u>et de</u> φ' .

Soit en effet L'' une partie compacte de U'' , et soit $\psi = \varphi'\circ\varphi$. On a $\overset{-1}{\psi}(L'') = \overset{-1}{\varphi}(\overset{-1}{\varphi'}(L''))$; or $\overset{-1}{\varphi'}(L'')$ est une partie compacte de U', d'où il résulte que $\overset{-1}{\psi}(L'')$ est une partie compacte de U . Par ailleurs, si ω'' est une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^1 sur U'' dont le support est une partie compacte de U'', on a, en désignant par δ et δ' les degrés de φ et de φ' ,

$$\int \omega''\circ\psi = \int(\omega''\circ\varphi')\circ\varphi = \delta\int\omega''\circ\varphi' = \delta\delta'\int\omega''$$

d'où il résulte que le degré de ψ est $\delta\delta'$.

Ceci dit, revenons à l'opération s considérée plus haut, et soit δ son degré. Il résulte de la prop.3 que $\delta^2 = 1$, d'où $\delta = \pm 1$. Soit par ailleurs f' une fonction de classe C^1 dont le support est une partie compacte de sU, qui est $\neq 0$ mais qui ne prend que des valeurs $\geqq 0$; si nous posons $\omega' = f'\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, nous avons $\omega' \circ s = -(f' \circ s) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, d'où $\int \omega' > 0$ et $\int \omega' \circ s < 0$. On en conclut que $\delta = -1$. Nous avons donc démontré la

Proposition 4.- Soit φ une application propre de classe C^∞ d'une partie ouverte connexe U de R^n dans une partie ouverte de R^n. Supposons qu'il existe un point a de U qui possède les propriétés suivantes : φ est de rang n en a, et on a $\varphi(x) \neq \varphi(a)$ pour tout $x \neq a$ dans U. Le degré de φ est alors +1 ou -1 suivant que l'application affine tangente à φ en a préserve ou non l'orientation de R^n.

Si on identifie l'espace tangent à R^n en l'un quelconque de ses points à R^n lui-même, on voit qu'on peut encore dire que le degré de φ est +1 ou -1 suivant que la différentielle de φ en a préserve ou non l'orientation de R^n.

Si φ est un isomorphisme de U avec une sous-variété ouverte de R^n, les conditions de la prop.4 sont satisfaites pour tout $a \in U$. On dit alors que φ préserve ou non l'orientation suivant que l'application affine tangente à φ en l'un quelconque des points de U préserve ou non l'orientation.

Remarque. La notion de degré que nous venons de définir pour les applications propres de classe C^∞ peut se généraliser aux applications continues propres quelconques (cela résulte par exemple facilement de la prop.2). Nous étudierons cette notion dans sa généralité dans le livre consacré à la topologie algèbrique ; nous y établirons notamment que le degré est toujours un nombre entier.

3. Variétés orientées.

Rappelons qu'un espace vectoriel $\mathcal{L}$ de dimension finie sur R est susceptible de deux orientations différentes. Soient $\mathcal{D}$ le dual de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ l'algèbre extérieure sur $\mathcal{D}$; n désignant la dimension de $\mathcal{L}$, soit ${}^{n}\mathcal{C}$ l'espace des éléments homogènes de degré n de $\mathcal{C}$; on peut se donner une orientation o de $\mathcal{L}$ en se donnant un élément $\omega \neq 0$ de ${}^{n}\mathcal{C}$; les éléments de ${}^{n}\mathcal{C}$ de la forme $a\omega$, $a \neq 0$, sont dits positifs ou négatifs relativement à l'orientation o de $\mathcal{L}$ suivant que a est > 0 ou < 0.

Ceci dit, soit V une variété de dimension n . Supposons donnée, pour chaque $p \in V$, une orientation $o(p)$ de l'espace $\mathcal{L}_p(V)$ tangent à V en p . Nous dirons que ces orientations forment un système cohérent si la condition suivante est satisfaite : si ω est une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^0 sur V et si $p \in V$ est tel que ω_p soit positif (relativement à $o(p)$), alors il existe un voisinage N de p tel que, pour tout q N, ω_q soit positif (relativement à $o(q)$) . On dit qu'une variété V est orientable s'il existe un système cohérent d'orientations des espaces tangents à V ; et on appelle variété orientée une structure constituée par les données d'une variété et d'un système cohérent d'orientations des espaces tangents à ~~xxx~~ cette variété.

Proposition 5.- Pour qu'une variété V soit orientable, il faut et suffit qu'il existe une forme différentielle ω homogène de degré n égal à la dimension de V , de classe C^0 , telle que $\omega_p \neq 0$ pour tout $p \in V$.

Supposons d'abord la condition satisfaite. Si $p \in V$, soit $o(p)$ l'orientation de $\mathrm{L}_p(V)$ définie par la condition que ω_p soit positif. Ce système d'orientations est cohérent. Soient en effet p un point de V et ω' une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^0 telle que ω'_p soit positif. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ un système de coordonnées autour de p ; il existe alors des fonctions continues g et g' telles que ω et ω' coincident sur un voisinage de p avec les formes différentielles $g\, df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ et $g'\, df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ respectivement. On a $g(p) \neq 0$, $g'(p) \neq 0$ et $(g'(p))(g(p))^{-1} > 0$. Si on pose, pour tout $q \in V$, $\omega'_q = h(q)\, \omega_q$, on a, pour les points q d'un voisinage de p, $g'(q) = g(q)h(q)$, ce qui montre que $h(q) > 0$ pour tous les points d'un voisinage de p, donc que ω'_q est positif (relativement à $o(q)$) pour tous les points d'un voisinage de p.

Supposons réciproquement la variété V orientable. Choisissons un système cohérent d'orientations $o(p)$ des espaces tangents à V ; pour chaque $p \in V$, choisissons une forme différentielle ω^p homogène de degré n et de classe C^0 telle que ω^p_q soit positif, puis un voisinage $U(p)$ de p tel que ω^p_q soit positif pour tout $q \in U(p)$. Soit $(h_j)_{j \in J}$ une famille dispersée de fonctions de $\mathcal{F}(V)$ telle que, pour tout j le support de h_j soit contenu dans l'un des $U(p)$, soit dans $U(p_j)$, et que $h_j(q) \geqq 0$ pour tout $q \in V$. Si $q \in V$ est tel que $h_j(q) \neq 0$, $h_j \omega^{p_j}$ est positif en q. Si nous posons $\omega = \sum_{j \in J} h_j \omega^{p_j}$, la forme différentielle ω est de classe C^0 et est positive en tout point de V.

Remarque. La démonstration montre que, si V est orientée, il existe une forme différentielle ω homogène de degré n et de classe C^0 qui est positive en tout point de V. Par ailleurs, il est clair que

que l'on peut choisir les formes ω^p de la démonstration de classe C^∞ ; on voit donc que, si V est orientée, il y a une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^∞ sur V qui est positive en tout point de V.

Soit V une variété orientable <u>connexe</u>. Si ω et ω' sont des formes différentielles homogènes de degré n égal à la dimension de V, de classe C^0 et partout $\neq 0$ sur V, il est clair qu'il existe une fonction continue u partout $\neq 0$ sur V telle que $\omega' = u\omega$. Puisque V est connexe, la fonction u garde un signe constant sur V ; il en résulte qu'<u>une variété connexe orientable n'est susceptible que de deux orientations</u>.

Soient V et V' des variétés orientées, et V_0 et V'_0 les variétés sous-jacentes de V et de V'. Supposons que V et V' soient de même dimension n, et soit φ une application de classe C^1 de V dans V'. Soit p un point de V tel que φ soit de rang n en p ; $d_p\varphi$ est alors un isomorphisme de l'espace tangent $L_p(V_0)$ en p à V_0 avec l'espace tangent $L_{p'}(V'_0)$ au point $p' = \varphi(p)$. Désignons par $L_p(V)$ et $L_{p'}(V')$ les espaces vectoriels orientés obtenus en munissant $L_p(V_0)$ et $L_{p'}(V'_0)$ des orientations définies par celles de V et de V' ; ces espaces s'appellent les <u>espaces tangents orientés</u> à V et à V' en p et en p'. Si $d_p\varphi$ est un isomorphisme de $L_p(V)$ avec $L_{p'}(V')$, on dit que φ <u>préserve l'orientation</u> en p ; sinon, qu'il l'inverse. Pour que φ préserve l'orientation en p, il est évidemment nécessaire et suffisant que, si ω' est une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^0 sur V', positive en p',

$\omega' \circ \varphi$ soit positive en p sur V . Il en résulte immédiatement que, si φ préserve l'orientation en p , φ préserve aussi l'orientation en tout point d'un voisinage assez petit de p . Supposons maintenant que φ soit un isomorphisme de V_o avec V'_o ; nous dirons alors que φ préserve l'orientation, ou encore que φ est un isomorphisme de V avec V' si φ préserve l'orientation en tout point de V . Si V est connexe, il suffit pour cela que φ préserve l'orientation en au moins un point de V . En effet, il existe évidemment une structure de variété V^* admettant V_o comme variété sous-jacente telle que φ soit un isomorphisme de V^* avec V' , et notre assertion résulte alors du fait qu'une variété connexe n'est susceptible que de deux orientations.

Il est clair que la donnée d'une orientation sur une variété V détermine une orientation (dite orientation induite) sur toute sous-variété ouverte de V . La variété R^n est munie d'une orientation bien déterminée, à savoir celle pour laquelle la forme différentielle $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ est partout positive (les x_i désignant les coordonnées sur R^n) ; toute sous-variété ouverte de R^n est donc munie d'une orientation bien déterminée, induite par celle de R^n . Si U et U' sont des sous-variétés ouvertes de R^n , la notion d'isomorphisme de U avec U' préservant l'orientation telle qu'elle vient d'être définie ci-dessus est identique à celle définie au n° 2 .

4. Intégration des formes différentielles sur une variété orientée.

Soit d'abord V une variété orientée telle qu'il existe un isomorphisme φ de la variété orientée V avec une sous-variété ouverte U de R^n (munie de l'orientation induite par celle de R^n). Soit ω une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^1 dont le support est une partie compacte de V ; le support de $\omega \circ \varphi^{-1}$ est alors une partie compacte de U . L'intégrale $\int_U \omega \circ \varphi^{-1}$ ne dépend pas des choix de φ et de U : Soit en effet φ' un isomorphisme de la variété orientée V avec une sous-variété ouverte U' de R^n ; l'application $\psi = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ est alors un isomorphisme de U avec U' qui préserve évidemment l'orientation. On a $\omega \circ \varphi^{-1} = (\omega \circ \varphi'^{-1}) \circ \psi$, d'où $\int_U \omega \circ \varphi^{-1} = \int_{U'} \omega \circ \varphi^{-1}$ (le degré de ψ étant 1), ce qui démontre notre assertion. Le nombre $\int_U \omega \circ \varphi^{-1}$ s'appelle l'intégrale de ω sur V et se désigne par $\int \omega$ ou $\int_V \omega$. L'application $\omega \longrightarrow \int \omega$ est évidemment une fonction linéaire sur l'espace vectoriel sur R formé des formes différentielles homogènes de degré n , de classe C^1 , à supports compacts sur V . Si le support de ω est contenu dans une sous-variété ouverte V' de V (que nous munissons de l'orientation induite par celle de V), et si ω' est la restriction de ω à V', on a $\int \omega' = \int \omega$.

Soit maintenant V une variété orientée quelconque. Tout point de V est alors contenu dans au moins une sous-variété ouverte U de V qui (munie de l'orientation induite par celle de V) admet un isomorphisme avec une sous-variété ouverte de R^n (où n est la dimension de V) . Il existe donc une famille dispersée $(h_j)_{j \in J}$ de fonctions de F(V) telle que $\sum_{j \in J} h_j = 1$ et que, pour tout j , le support de h_j soit contenu dans une sous-variété ouverte orientée U_j de V qui admet un isomorphisme avec une sous-variété ouverte de R^n . Soit ω une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^1 sur V dont le support soit compact ; il n'y a donc qu'un nombre fini d'indices $j \in J$ pour lesquels $h_j\omega \neq 0$; si η_j est la restriction de $h_j\omega$ à U_j, la somme $\sum_{j\in J}\int_{U_j}\eta_j$ a un sens. La valeur de cette somme ne dépend pas des choix des fonctions h_j et des sous-variétés U_j. Soit en effet $(h'_{j'})_{j'\in J'}$ une famille dispersée de fonctions de $F(V)$ de somme 1 telle que, pour tout $j'\in J'$, le support de $h'_{j'}$ soit contenu dans une sous-variété ouverte orientée $U'_{j'}$ de V qui admet un isomorphisme avec une partie ouverte de R^n. Si $\zeta_{j,j'}$ est la restriction de $h_jh'_{j'}\omega$ à U_j, il n'y a qu'un nombre fini de couples (j,j') pour lesquels $\zeta_{j,j'} \neq 0$, et on a $\eta_j = \sum_{j'\in J'}\zeta_{j,j'}$, d'où

$$\sum_{j\in J}\int_{U_j}\eta_j = \sum_{j\in J,\, j'\in J'}\int_{U_j}\zeta_{j,j'} .$$

De même, si $\eta'_{j'}$ et $\zeta'_{j,j'}$ désignent les restrictions de $h'_{j'}\omega$ et de $h_jh'_{j'}\omega$ à $U'_{j'}$, on a

$$\sum_{j'\in J'}\int_{U'_{j'}}\eta'_{j'} = \sum_{j\in J,\, j'\in J'}\int_{U'_{j'}}\zeta'_{j,j'} .$$

Or les supports de $\zeta_{j,j'}$ et de $\zeta'_{j,j'}$ sont tous deux contenus dans $U_j\cap U'_{j'}$ et $\zeta_{j,j'}$ coïncide avec $\zeta'_{j,j'}$ sur $U_j\cap U'_{j'}$, d'où $\int_{U_j}\zeta_{j,j'} = \int_{U'_{j'}}\zeta'_{j,j'}$ et par suite

$$\sum_{j\in J}\int_{U_j}\eta_j = \sum_{j'\in J'}\int_{U'_{j'}}\eta'_{j'} ,$$

ce qui démontre notre assertion.

Le nombre $\sum_{j\in J}\int_{U_j}\eta_j$ s'appelle l'<u>intégrale de</u> ω <u>sur</u> V et se désigne par $\int\omega$ ou par $\int_V\omega$.

<u>L'application</u> $\omega \to \int\omega$ <u>est une fonction linéaire sur l'espace vectoriel sur</u> R <u>formé des formes différentielles homogènes de degré</u> n, <u>de classe</u> C^1, <u>à supports compacts</u>. Cela résulte en effet immédiatement de la définition.

Si V' est une sous-variété orientée ouverte de V , et si le support de ω est contenu dans V', l'intégrale de ω est évidemment égale à celle de sa restriction à V' .

On dit qu'une forme différentielle ω sur V est ≥ 0 si, pour tout p V , ω_p est ou bien nul ou bien positif. Si ω est une forme différentielle homogène de degré n , de classe C^1 , à support compact, et si $\omega \geq 0$, l'intégrale de ω est ≥ 0 et est >0 si $\omega \neq 0$. Il suffit évidemment de le démontrer dans le cas où V est une sous-variété ouverte de R^n ; on a alors $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, où f est une fonction de classe C^1 à valeurs ≥ 0 et à support compact, et l'intégrale de ω est $\int_V f.dv$, dv étant la mesure de Lebesgue. On sait que cette intégrale est ≥ 0 et est $\neq 0$ si $f \neq 0$.

Soit ω une forme différentielle homogène de degré n de classe C^1 à support compact sur une variété connexe orientée V , et soit V' la variété orientée qui admet la même variété sous-jacente que V mais pas la même orientation. On a alors

$$\int_{V'} \omega = - \int_V \omega$$

Ici encore, il suffit de se limiter au cas où V admet un isomorphisme φ avec une sous-variété ouverte U de R^n . Soit s la symétrie par rapport à un hyperplan de R^n ; $s \circ \varphi$ est alors un isomorphisme de la variété orientée V' avec la sous-variété ouverte sU de R^n . On a $\int_V \omega = \int_U \omega \circ \overset{-1}{\varphi}$ et $\int_{V'} \omega = \int_{sU} (\omega \circ \overset{-1}{\varphi} \circ \overset{-1}{s}) = \int_{sU} (\omega \circ \overset{-1}{\varphi}) \circ \overset{-1}{s}$; ces deux nombres sont opposés parce que $\overset{-1}{s} = s$ est de degré -1 .

Théorème 5 .- Soit ω une forme différentielle homogène de degré n , de classe C^1 , à support compact, sur une variété orientée V de dimension n . Pour que ω soit le cobord d'une forme différentielle ζ de classe C^1 à support compact sur V , il est nécessaire que $\int \omega = 0$; cette condition est aussi suffisante dans le cas où V est connexe .

Le th.5 est vrai dans le cas où V est isomorphe à l'intérieur Q d'un cube compact de R^n, en vertu de la prop.1, n°1 (on observera que que toute partie compacte de Q est contenue dans un cube compact contenu dans Q). Pour passer au cas général, introduisons une suite $(h_j)_{1 \leqq j < \infty}$ de fonctions de $F(V)$ de somme 1 telle que, pour chaque j, le support de h_j soit contenu dans une sous-variété ouverte U_j de V qui est l'intérieur d'un ensemble cubique compact. Supposons que $\omega = d\zeta$, où ζ est une forme différentielle de classe C^1 à support compact. Posons $\omega_j = d(h_j \zeta)$; il n'y a donc qu'un nombre fini d'indices j pour lesquels $\omega_j \neq 0$, et on a $\omega = \sum_{j \in J} \omega_j$. Les supports de ω_j et de $h_j \zeta$ sont des parties compactes de U_j ; soient ω'_j et ζ'_j les restrictions de ces formes différentielles à U_j. On a $\omega'_j = d\zeta'_j$, d'où $\int \omega'_j = 0$ et par suite $\int \omega_j = 0$. Ceci étant vrai pour tout j, on a $\int \omega = 0$. Supposons maintenant que V soit connexe. Définissons par récurrence une fonction $j(r)$ $(1 \leqq r < \infty)$ comme suit : $j(1) = 1$; si $j(1), j(2), \dots, j(r)$ sont déjà définis, $j(r+1)$ est le plus petit entier $j \neq j(1), \dots, j(r)$ tel que U_j rencontre $U_{j(1)} \cup \dots \cup U_{j(r)}$ (il existe au moins un entier j possédant cette propriété, car sinon $U_{j(1)} \cup \dots \cup U_{j(r)}$ et $\bigcup_{j \neq j(1), \dots, j(r)} U_j$ seraient deux ensembles ouverts disjoints non vides dont la réunion serait V, ce qui est impossible). Nous poserons $U'_r = U_{j(r)}$. Montrons que $\bigcup_{r=1}^{\infty} U'_r = V$. Il suffit de montrer que l'ensemble ouvert $\bigcup_{r=1}^{\infty} U'_r$ n'a aucun point frontière dans V. Or, supposons que p soit un point frontière de cet ensemble. Il y aurait alors un j tel que $p \in U_j$, et U_j rencontrait $\bigcup_{r=1}^{\infty} U'_r$, donc aussi $\bigcup_{r=1}^{s} U'_r$ pour un certain $s > 0$. On aurait donc $j(s') < j$ pour tout $s' \geqq s$, ce qui est impossible, l'application $r \to j(r)$ étant évidemment biunivoque. Posons, pour tout entier s,

$W_s = \bigcup_{r=1}^{s} U'_r$; toute partie compacte de V est donc contenue dans W_s pour s assez grand. Nous montrerons par récurrence sur s que toute forme différentielle ω homogène de degré n, de classe C^1, dont le support est une partie compacte de W_s , telle que $\int \omega = 0$, est le cobord d'une forme différentielle de classe C^1 à support compact sur V . Observons d'abord que notre assertion est vraie si le support de ω est une partie compacte de l'un des U'_r . En effet, la restriction de ω à U'_r est alors le cobord d'une forme différentielle ζ' sur U'_r , de classe C^1, dont le support est une partie compacte de U'_r . Si ζ est la forme différentielle sur V qui prolonge ζ' et qui est nulle en dehors de U'_r , ζ est de classe C^1 et on a $d\omega = \zeta$. Il en résulte que notre assertion est vraie pour $s=1$. Supposons maintenant que $s > 1$ et que notre assertion soit vraie pour $s-1$. Soit ω une forme différentielle qui possède, relativement à s , les propriétés énoncées plus haut. On peut trouver des fonctions u et v de $F(V)$ telles que $u+v$ soit égal à 1 sur le support de ω , que le support de u soit contenu dans W_{s-1} et que celui de v soit contenu dans U'_s . Par ailleurs, l'ensemble $U'_s \cap W_{s-1}$ n'est pas vide ; soit ω' une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^1 dont le support est une partie compacte de $U'_s \cap W_{s-1}$ et dont l'intégrale est $\neq 0$. Il existe alors un nombre a tel que $\int (v\,\omega - a\,\omega') = 0$; on a $\omega = u\omega + v\omega$ et $\int \omega = 0$; il en résulte que $\int (u\omega + a\omega') = 0$. Le support de $v\omega - a\omega'$ est une partie compacte de U'_s et celui de $u\omega + a\omega'$ est une partie compacte de W_{s-1} ; chacune de ces formes est donc le cobord d'une forme différentielle de classe C^1 à support compact sur V , et il en est de même de $\omega = (u\omega + a\omega') + (v\omega - a\omega')$, ce qui démontre notre assertion pour s . Le th;5 est donc démontré.

4. Mesure de Radon associée à une forme différentielle.

Soit V une variété orientée de dimension n , et soit ω_0 une forme différentielle homogène de degré n et de classe C^∞ sur V qui est partout >0 . Désignons par $F^1_{\text{comp.}}(V)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 à supports compacts sur V ; l'application $f \to \int f\omega_0$ est une fonction linéaire sur $F^1_{\text{comp.}}(V)$. Nous allons montrer que cette fonction est continue relativement à la topologie induite sur $F^1(V)$ par celle de $\mathcal{D}^0(V)$. Soit $(h_j)_{1 \leqq j < \infty}$ une suite de fonctions de $F(V)$ à supports compacts qui possède les propriétés suivantes : on a $\sum_{j=1} h_j = 1$, et, pour tout j , $0 \leqq h_j \leqq 1$, $h_j \neq 0$; soit a_j le nombre >0 $\int h_j\omega_0$. Soit L_j le supports de h_j ; l'ensemble des fonctions continues f à supports compacts telles que $\sup_{p \in L_j} |f(p)| \leqq 2^{-j}a_j^{-1}\alpha$ (où α est un nombre >0 donné quelconque) est un voisinage M de 0 dans $\mathcal{D}^0(V)$. Soit f une fonction de $M \cap F^1_{\text{comp.}}(V)$; on a $f = \sum_{j=1}^{\infty} fh_j$, et il n'y a qu'un nombre fini d'indices j pour lesquels fh_j soit $\neq 0$, d'où $\int f\,\omega_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \int fh_j\omega_0$. Or les formes différentielles $(2^{-j}a_j^{-1}\alpha\, h_j - fh_j)\omega_0$ et $(fh_j - 2^{-j}a_j^{-1}\alpha\, h_j)\omega_0$ sont partout $\geqq 0$ et ont par suite des intégrales $\geqq 0$, d'où $\left|\int fh_j\omega_0\right| \leqq 2^{-j}\alpha$ et par suite $\left|\int f\omega_0\right| \leqq \alpha$, ce qui démontre notre assertion. La fonction $f \to \int f\omega_0$ peut donc se prolonger en une mesure de Radon sur V , mesure que nous désignerons par $\mu(\omega_0)$.

Si ω_0' est une autre forme différentielle qui satisfait aux mêmes conditions que ω_0 , on peut écrire $\omega_0' = f_0\omega_0$ où f_0 est une fonction continue >0 sur V . Si $f \in F^1_{\text{comp.}}(V)$, on a $\int f\,\omega_0' = \int ff_0\omega_0$; l'ensemble $F^1_{\text{comp.}}(V)$ étant dense dans $\mathcal{D}^0(V)$, il en résulte immédiatement que la mesure de Radon $\mu(\omega_0')$ est $f_0\mu(\omega_0)$.

Soit maintenant ω une forme différentielle homogène de degré n quelconque sur V ; on peut écrire $\omega = g\omega_0$, g étant une fonction sur V ; que nous représenterons par la notation ω/ω_0. Soit ω'_0 une autre forme différentielle sur V qui possède les mêmes propriétés que ω_0 ; si ω/ω_0 est sommable (resp.: localement sommable) relativement à $\mu(\omega_0)$, alors ω/ω'_0 est sommable (resp.: localement sommable) relativement à $\mu(\omega'_0)$. En effet, si $\omega'_0 = f_0\omega_0$, on a $\omega/\omega'_0 = f_0^{-1}(\omega/\omega_0)$ et nous avons vu que $\mu(\omega'_0) = f_0\,\mu(\omega_0)$, ce qui démontre notre assertion. Si ω/ω_0 est sommable (resp.: localement sommable) relativement à $\mu(\omega_0)$, nous dirons que la forme différentielle ω est <u>sommable</u> (resp.: <u>localement sommable</u>). Si ω est sommable, on voit comme plus haut que le nombre $\int(\omega/\omega_0)\cdot d\mu(\omega_0)$ ne dépend pas du choix de ω_0. Nous appellerons ce nombre l'<u>intégrale de</u> ω, et nous le désignerons par $\int\omega$; cette définition est évidemment en accord avec celle précédemment donnée dans le cas où ω est de classe C^1 et à support compact.

Toute forme différentielle homogène de degré n et de classe C^0 est localement sommable, et est sommable si son support est compact.

Si ω est localement sommable et si f est une fonction de $\mathcal{D}^0(V)$, $f\omega$ est sommable, et l'application $f \to \int f\omega$ est une mesure de Radon $\mu(\omega)$ sur V ; si $\omega' = g\,\omega$, on a $\mu(\omega') = g\mu(\omega)$. Les parties de V qui sont mesurables (resp.: négligeables) relativement à $\mu(\omega_0)$ le sont aussi par rapport à toutes les mesures $\mu(\omega)$ (ω décrivant l'ensemble des formes localement sommables) ; ces parties sont dites mesurables (resp.: négligeables). Les parties ouvertes ou fermées de V sont toutes mesurables.

Si A est une partie mesurable de V et φ_A la fonction caractéristique de A, une forme différentielle ω homogène de degré n est dite sommable sur A si $\varphi_A \omega$ est sommable ; le nombre $\int \varphi_A \omega$ s'appelle alors l'intégrale de ω sur A et se désigne par $\int_A \omega$. Si ω est localement sommable, ω est sommable sur toute partie mesurable relativement compacte de V.

Soit U une sous-variété ouverte orientée de V ; si ω_o est une forme différentielle sur V qui possède les propriétés énoncées au début de ce n°, la restriction de ω_o à U est de classe C^∞ et partout > 0 sur U. Il en résulte bien facilement que, si ω est une forme différentielle homogène de degré n sur V qui est localement sommable (resp.: sommable sur U), la restriction ω' de ω à U est localement sommable (resp.: sommable) ; de plus, si ω est sommable sur U, on a $\int \omega' = \int_U \omega$.

5. La formule de Stokes.

Soient V une variété orientée de dimension n et U une partie ouverte relativement compacte de V. Soit p un point de la frontière de U ; nous dirons que p est un point lisse de la frontière de U si la condition suivante est satisfaite : il existe un voisinage cubique compact C de p et un système de coordonnées $(f_1, \ldots, f_n)$ sur C tels que $U \cap C$ soit l'ensemble des points $q \in C$ tels que $f_n(q) > f_n(p)$

et que la forme différentielle $(-1)^n df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ soit >0 en p. Soit W l'ensemble des points lisses de la frontière de U ; cet ensemble est manifestement relativement ouvert par rapport à la frontière de U. Il est d'autre part évident que W est l'ensemble des points d'une variété de dimension n-1 régulièrement plongée dans V (cf. prop. 3, §6). Nous allons orienter cette variété. Soit p un point de W, et soit $(f_1,\ldots,f_n)$ un système de coordonnées autour de p qui possède la propriété énoncée plus haut (relativement à un voisinage cubique compact convenable C de p) ; la trace de $df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}$ sur W est alors $\neq 0$ en p, et nous proposons d'orienter l'espace tangent à W en p par la condition que cette forme différentielle sur W soit >0 en p. Il faut pour cela montrer que l'orientation en question ne dépend pas du système de coordonnées $(f_1,\ldots,f_n)$ satisfaisant aux conditions imposées. Soient donc C' un voisinage cubique compact de p dans V et $(f'_1,\ldots,f'_n)$ un système de coordonnées sur C' tels que $U \cap C'$ soit l'ensemble des points de C' tels que $f'_n(q) > f'_n(p)$ et que la forme différentielle $(-1)^n df'_1 \wedge \ldots \wedge df'_n$ soit >0 en p. Soit N un voisinage ouvert de p contenu dans $C \cap C'$ dont l'image par l'application $q \to (f_1(q),\ldots,f_n(q))$ soit un cube ouvert de R^n. Il existe alors des fonctions $H_i = H_i(x_1,\ldots,x_n)$ de classe C^∞ sur R^n $(1 \leq i \leq n)$ telles que f'_i coïncide avec $H_i(f_1,\ldots,f_n)$ sur N. Soient D le déterminant fonctionnel de $H_1,\ldots,H_n$ par rapport à $x_1,\ldots,x_n$ et D' celui de $H_1,\ldots,H_{n-1}$ par rapport à $x_1,\ldots,x_{n-1}$; posons $a_i = f_i(p)$ $(1 \leq i \leq n)$. La forme $df'_1 \wedge \ldots \wedge df'_n$ coïncide sur U avec $D(f_1,\ldots,f_n) df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ il en résulte que le nombre $D(a_1,\ldots,a_n)$ est >0. La restriction de $df'_1 \wedge \ldots \wedge df'_{n-1}$ à W coïncide sur $W \cap N$ avec celle de

$D'(f_1,\ldots,f_n)df_1\wedge\ldots\wedge df_{n-1}$. Pour démontrer que notre orientation de l'espace tangent en p à W ne dépend pas du choix de $f_1,\ldots,f_n,C$, il nous suffira donc de montrer que $D'(a_1,\ldots,a_n)$ est un nombre >0 . Or, la fonction f'_n est constante sur $W\cap N$; on a donc $(\partial H_n/\partial x_i)(a_1,\ldots,a_n)=0$ si $i<n$. Soit par ailleurs (pour t réel assez voisin de a_n) q_t le point de N tel que $f_i(q_t)=a_i$ $(1\leqq i\leqq n-1)$, $f_n(q_t)=t$; le signe de $f'_n(q_t)$ est donc le même que celui de $f_n(q_t)$. Il en résulte que le nombre $H_n(a_1,\ldots,a_{n-1},t)$ est $>H_n(a_1,\ldots,a_n)$ si $t>a_n$, d'où $(\partial H_n/\partial x_n)(a_1,\ldots,a_n)\geqq 0$. Or on a

$$D(a_1,\ldots,a_n) = D'(a_1,\ldots,a_n)(\partial H_n/\partial x_n)(a_1,\ldots,a_n) .$$

Le membre de gauche de cette égalité étant >0 , on voit que $D'(a_1,\ldots,a_n)>0$, ce qui démontre notre assertion.

Nous avons donc défini, pour tout $p\in W$, une orientation de l'espace tangent à W en p . Les notations étant les mêmes que plus haut, il est clair que la restriction de la forme $df_1\wedge\ldots\wedge df_{n-1}$ à W est encore positive en tout point de $W\cap C$; nos orientations des espaces tangents à W forment donc un système cohérent et définissent par suite une orientation de la variété W . La variété orientée ainsi définie s'appelle le <u>bord de</u> U , et se désigne par $\mathring{U}$. Si ζ est une forme différentielle homogène de degré $n-1$ sur V dont la trace sur $\mathring{U}$ est sommable, l'intégrale de cette trace se désignera par $\int_{\mathring{U}}\zeta$.

L'ensemble W s'appelle la <u>partie lisse</u> de la frontière de U ; l'ensemble des points de la frontière de U qui n'appartiennent pas à W s'appelle la <u>partie non lisse</u> de la frontière de U ; c'est un ensemble compact .

Soit maintenant ζ une forme différentielle homogène de degré n-1 et de classe C^1 sur V . Supposons que le support de ζ ne rencontre pas la partie non lisse de la frontière de U . La trace de ζ sur $\dot{U}$ est alors une forme différentielle de classe C^1 sur $\dot{U}$ dont le support est une partie compacte de $\dot{U}$. Nous nous proposons de démontrer la formule

$$(1) \qquad \int_U d\zeta = \int_{\dot{U}} \zeta \quad . \; .$$

Il existe un nombre fini de fonctions $h_1,\ldots,h_r$ de F(V) qui possèdent les propriétés suivantes : a) la fonction $\sum_{j=1}^r h_j$ est égale à 1 en tout point du support de ζ contenu dans l'adhérence $\bar{U}$ de U ; b) pour chaque j , le support de h_j est contenu dans l'intérieur d'un ensemble cubique compact C_j de V qui ou bien est contenu dans U ou bien contient un point $p_j \in \dot{U}$, et, dans le second cas, il existe un système de coordonnées $(f_{1;j},\ldots,f_{n;j})$ sur C_j tel que $U \cap C_j$ soit l'ensemble des $q \in C_j$ tels que $f_{n;j}(q) > f_{n;j}(p_j)$, et la forme différentielle $(-1)^n df_{1;j} \wedge \ldots \wedge df_{n;j}$ est >0 en p_j . On a alors $\int_U d\zeta = \sum_{j=1}^r \int_U d(h_j \zeta)$, et la restriction de ζ à $\dot{U}$ est la somme des restrictions des formes $h_j \zeta$. Tout revient donc à démontrer la formule (1) dans le cas où le support de ζ est contenu dans l'intérieur de l'un des ensembles C_j . Nous désignerons alors par C celui des C_j dont l'intérieur contient le support de ζ . Si $C \subset U$, la trace de ζ sur $\dot{U}$ est nulle, et l'intégrale $\int_U d\zeta = \int d\zeta$ est nulle en vertu du th.5 . Supposons donc que C soit l'un des C_j qui ne sont pas dans U . Nous poserons alors $p_j=p$, $f_{i;j}=f_i$ $(1 \leq i \leq n)$; nous pouvons supposer sans restriction de généralité que $f_i(p)=0$ $(1 \leq i \leq n)$. Soit Q le cube image de l'intérieur de C par l'application φ : $q \to (f_1(q),\ldots,f_n(q))$, et soit Q' l'intersection de Q avec l'hyperplan $x_n=0$ de R^n , hyperplan que nous identifierons à R^{n-1} . La forme $\zeta \circ \varphi^{-1}$ peut se mettre sous la forme

$$\zeta \circ \varphi^{-1} = \sum_{i=1}^{n} g_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

où chaque g_i est une fonction de classe C^∞ sur Q dont le support est une partie compacte de Q (le $\wedge$ sur dx_i signifie que ce facteur doit être omis du produit). Le nombre $\int_{\dot U} \zeta$ est égal à $\int_{Q'} g_n(x_1,\ldots,x_{n-1},0).dv_{n-1}$, où dv_{n-1} est la mesure de Lebesgue sur R^{n-1}. Soit h la fonction $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \partial g_i/\partial x_i$, d'où $d(\zeta \circ \varphi^{-1}) = h dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. La forme $(-1)^n df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$, étant >0 en p et partout $\neq 0$ sur l'intérieur de C, qui est connexe, est partout >0 sur l'intérieur de C. Soit P l'ensemble des points de Q dont la dernière coordonnée x_n est >0 ; on a donc $\int_U d\zeta = (-1)^n \int_P h.dv_n$, où dv_n est la mesure de Lebesgue sur R^n.

Il suffira donc d'établir les formules

$$\int_P (\partial g_i/\partial x_i).dv_n = 0 \quad \text{si} \quad i < n$$

$$\int_P (\partial g_n/\partial x_n).dv_n = - \int_{Q'} g_n.dv_{n-1}$$

Soit a la borne supérieure des valeurs prises par x_n sur Q. Si $i<n$, nous écrivons

$$\int_P (\partial g_i/\partial x_i).dv_n = \int_0^a \left(\int_{Q'} (\partial g_i/\partial x_i)(x_1,\ldots,x_{n-1},y)dv_{n-1}\right)dy .$$

Or, si on désigne par $(\partial g_i/\partial x_i)_y$ la fonction $(x_1,\ldots,x_{n-1}) \to$ $\to (\partial g_i/\partial x_i)(x_1,\ldots,x_{n-1},y)$, la forme différentielle $(\partial g_i/\partial x_i)_y dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$ est, au signe près, le cobord de la forme différentielle $g_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$, dont le support est une partie compacte de Q'. Il en résulte que $\int_{Q'} (\partial g_i/\partial x_i)_y dv_{n-1} = 0$ pour tout y.

On a d'autre part

$$\int_P (\partial g_n/\partial x_n).dv_n = \int_{Q'} \left(\int_0^a (\partial g_n/\partial x_n)(x_1,\ldots,x_{n-1},y)dy\right).dv_{n-1}$$

Or il y a un nombre $a' < a$ (et > 0) tel que $g_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = 0$ si $a' \leqq y < a$; on a donc $\int_0^a (\partial g_n / \partial x_n)(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)dy = -g_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, et nos formules sont démontrées.

Nous nous proposons maintenant de généraliser la formule (1) au cas où le support de ζ rencontre la partie non lisse de la frontière de U. Il nous faudra pour cela faire certaines hypothèses restrictives.

Si ω désigne une forme différentielle homogène de degré n sommable sur V, les nombres $\left|\int u\,\omega\right|$, où u parcourt l'ensemble des fonctions continues sur V telles que $|u(p)| \leqq 1$ pour tout $p \in V$, sont bornés. En effet, si ω_0 est une forme différentielle satisfaisant aux conditions énoncées au début de paragraphe, et si $\omega = g\omega_0$, la fonction g est par hypothèse sommable relativement à la mesure de Radon $\mu(\omega_0)$, qui est évidemment une mesure positive. Les nombres $\left|\int u\omega\right|$ sont donc au plus égaux à l'intégrale de $|g|$ par rapport à $\mu(\omega_0)$. Nous poserons $\|\omega\| = \sup_{|u| \leq 1} \left|\int u\omega\right|$. Ceci dit, nous dirons qu'une partie compacte E de V est <u>différentiellement négligeable</u> s'il existe une suite (u_r) de fonctions de $F^1(V)$ qui possède les propriétés suivantes :

a) <u>chaque fonction</u> u_r <u>est nulle sur un voisinage de</u> E <u>et égale à</u> 1 <u>en dehors d'une partie compacte de</u> V ; <u>si</u> M <u>est un voisinage de</u> E, <u>il existe un</u> r_0 <u>tel que, pour tout</u> $r \geqq r_0$, u_r <u>soit égale à</u> 1 <u>en dehors de</u> M ;

b) <u>les fonctions</u> u_r <u>sont bornées dans leur ensemble</u> ;

c) <u>si</u> ζ <u>est une forme différentielle homogène de degré</u> $n-1$ <u>et de classe</u> C^0 <u>quelconque sur</u> V, <u>on a</u> $\lim_{r \to \infty} \|du_r \wedge \zeta\| = 0$.

[On notera qu'il résulte de a) que $du_r \wedge \zeta$ est à support compact, et par suite sommable]. Si ces conditions sont satisfaites, nous dirons que (u_r) est une <u>suite d'approche</u> pour l'ensemble E.

Théorème 6 (Stokes).

Soient V une variété orientée de dimension n et U une partie ouverte relativement compacte de V. Supposons les conditions suivantes satisfaites : a) si ζ est une forme différentielle homogène de degré $n-1$ et de classe C^0 sur V, la trace de ζ sur le bord $\dot{U}$ de U est sommable ; b) la partie non lisse de la frontière de U est différentiellement négligeable. Soit alors ζ une forme différentielle homogène de degré $n-1$ et de classe C^1 sur V ; on a

$$\int_U d\zeta = \int_{\dot{U}} \zeta$$

Soit en effet (u_r) une suite d'approche pour la partie non lisse E de la frontière de U. Chaque u_r étant nul sur un voisinage de E, on a, en vertu de la formule démontrée plus haut,

$$\int_U d(u_r\zeta) = \int_{\dot{U}} u_r\zeta \quad .$$

On a $d(u_r\zeta)=du_r \wedge \zeta + u_r d\zeta$. Puisque $\lim_{r\to\infty}\|du_r \wedge \zeta\| = 0$, l'intégrale $\int_V du_r \wedge \zeta$, qui peut se mettre sous la forme $\int \chi\, du_r \wedge \zeta$ (où χ est la fonction caractéristique de U) tend vers 0 quand r augmente indéfiniment. On a par ailleurs $\lim_{r\to\infty} u_r(p) = 1$ pour tout $p \in U$. Les fonctions u_r étant bornées dans leur ensemble et $d\zeta$ étant sommable sur U, on a $\lim_{r\to\infty}\int_V u_r d\zeta = \int_V d\zeta$. L'égalité $\lim_{r\to\infty} u_r(p)=1$ est encore vraie pour tout point $p \in \dot{U}$; la trace de ζ sur $\dot{U}$ étant sommable, il en résulte que $\lim_{r\to\infty}\int_{\dot{U}} u_r\zeta = \int_{\dot{U}} \zeta$, ce qui démontre le th.6.

Le théorème que nous venons de démontrer n'est utile que si on a des critères permettant de reconnaitre qu'un ensemble est différentiellement négligeable. C'est un pareil critère que nous nous proposons maintenant d'établir.

Lemme 1.- Soient E et E' des parties compactes différentiellement négligeables de V ; $E \cup E'$ est alors différentiellement négligeable.

Soient (u_r) et (u'_r) des suites d'approche pour E et pour E' . Posons $u''_r = u_r u'_r$. Chaque u''_r est donc nul sur un voisinage de $E \cup E'$ et est égal à 1 en dehors d'un voisinage compact de $E \cup E'$. Soit M un voisinage de $E \cup E'$; il existe alors des indices r_o, r'_o tels que, si $r \geqq \max.\{r_o, r'_o\}$, u_r et u'_r soient égaux à 1 en dehors de M , ce qui entraîne que u''_r est égal à 1 en dehors de M . Les fonctions u''_r sont évidemment bornées dans leur ensemble . Soit ζ une forme différentielle homogène de degré n-1 et de classe C^o sur V . On a

$$du''_r \wedge \zeta = u'_r \, du_r \wedge \zeta + u_r \, du'_r \wedge \zeta \quad .$$

Or, soit b une borne supérieure des valeurs prises par fonctions $|u_r|, |u'_r|$ $(1 \leqq r < \infty)$. On a alors $\| u'_r \, du_r \wedge \zeta \| \leqq b \, \| du_r \wedge \zeta \|$ et $\| u_r \, du'_r \wedge \zeta \| \leqq b \, \| du'_r \wedge \zeta \|$ d'où il résulte que $\| du''_r \wedge \zeta \|$ tend vers 0 quand r augmente indéfiniment.

Il est clair que toute partie différentiellement négligeable de la variété V qui est contenue dans une partie ouverte U de V est une partie différentiellement négligeable de la sous-variété ouverte U de V . D'autre part, si φ est un isomorphisme de V avec une variété orientée V', et E une partie compacte de V , pour que E soit différentiellement négligeable, il faut et suffit que $\varphi(E)$ le soit dans V' . Ces remarques et le lemme 1 permettent de ramener la recherche des partiesdifférentiellement négligeables d'une variété orientée V quelconque au même problème pour la variété R^n .

Lemme 2.- <u>Soit E une partie compacte de R^n . Si $\rho > 0$, soit $B(E;\rho)$ l'ensemble des points de R^n dont les distances à E sont $\leq \rho$. Si on a $\lim_{\rho \to 0} (1/\rho).\mathrm{vol}\, B(E;\rho) = 0$ (où vol X représente le volume d'un ensemble X) , L'ensemble E est différentiellement négligeable</u> .

Montrons d'abord qu'il existe une constante γ, qui ne dépend que de n, et qui possède la propriété suivante : si E est une partie compacte de R^n, il existe une fonction f de classe C^1 sur R^n qui est nulle sur un voisinage de E, qui est égale à 1 en dehors de $B(E;1)$ et qui est bornée, ainsi que ses dérivées partielles, par la constante γ. Soit d'abord f_1 une fonction continue nulle sur $B(E;1/2)$ et égale à 1 en dehors de $B(E;3/4)$ et telle que $f_1(x) \in [0,1]$ pour tout $x \in R^n$. Soit par ailleurs g une fonction à valeurs $\geqq 0$, de classe C^∞, dont le support est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon $1/4$, telle que $\int_{R^n} g.dv = 1$ (dv étant la mesure de Lebesgue). Posons $f(x) = \int_{R^n} g(x-y)f_1(y).dv(y)$; la fonction f est donc de classe C^∞. Il est clair qu'elle est nulle sur $B(E;1/4)$ et qu'elle est égale à 1 en dehors de $B(E;1)$. Ses valeurs sont toutes comprises entre 0 et 1. Enfin, on a $(\partial f/\partial x_i)(x) = \int_{R^n} (\partial g/\partial x_i)(x-y)f_1(y).dv(y)$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Si γ est une borne supérieure des valeurs prises par les valeurs absolues des dérivées partielles de g, on voit facilement que $\gamma \geqq 4 > 1$, et f et ses dérivées partielles sont bornées en valeur absolue par γ.

Faisant usage d'une homothétie de rapport ρ, on voit que, si E est une partie compacte de R^n et ρ un nombre > 0, il y a une fonction f_ρ de classe C^1 sur R^n qui est nulle sur un voisinage de E, qui est égale à 1 en dehors de $B(E;\rho)$, telle que $|f_\rho(x)| \leqq \gamma$, $|(\partial f_\rho/\partial x_i)(x)| \leqq \rho^{-1}\gamma$ pour tout $x \in R^n$.

Soit maintenant ζ une forme différentielle homogène de degré $n-1$ et de classe C^1 sur R^n ; posons

$$\zeta = \Sigma_{i=1}^{n} z_i \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

où les z_i sont des fonctions continues. Soit u une fonction continue sur R^n telle que $|u(x)| \leqq 1$ pour tout x. On a

$u\, df_\rho \wedge \zeta = u(\Sigma_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, z_i\, \partial f_\rho / \partial x_i)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Soit β une borne supérieure des valeurs prises par les fonctions $|z_i|$ sur $B(E;1)$. Les fonctions $\partial f_\rho / \partial x_i$ sont nulles en dehors de $B(E\,;\,\rho)$. On voit donc que, si $\rho \leqq 1$, on a $\int u\, df_\rho \wedge \zeta \leqq$ $\leqq \eta\beta\gamma\, \rho^{-1}$ vol $B(E\,;\,\rho)$. Si donc la condition énoncée dans le lemme 2 est satisfaite, la suite de fonctions $(f_{1/r})_{1 \leqq r < \infty}$ est une suite d'approche pour l'ensemble E .

Il résulte du lemme 2 que toute partie compacte E d'une variété affine de dimension $\leqq n-2$ de R^n est différentiellement négligeable. En effet, appliquant une transformation affine, on peut supposer sans restreindre la généralité que $E \subset R^{n-2}$, R^n étant identifié canoniquement à $R^{n-2} \times R^2$. Si ρ est un nombre > 0 , soit E'_ρ l'ensemble des points de R^{n-2} dont les distances à E sont $\leqq \rho$, et soit $v'(\rho)$ le volume de cet ensemble dans R^{n-2} ; c'est une fonction de ρ qui est bornée sur l'intervalle $[0,1]$. L'ensemble $B(E;\rho)$ est contenu dans le produit de E' par le disque fermé de centre origine et de rayon ρ dans R^2 , d'où vol $B(E;\rho) \leqq \pi \rho^2\, v'(\rho)$, ce qui démontre notre assertion . Il est facile de déduire de là, au moyen du lemme 1 , que toute partie compacte d'une variété de dimension $\leqq n-2$ régulièrement plongée dans une variété V de dimension n est différentiellement négligeable dans V .

Théorème 6 bis. Soit U une partie ouverte relativement compacte d'une variété orientée V de dimension n . Supposons satisfaite la condition suivante : pour tout point p de la frontière de U , il existe un voisinage cubique compact $C(p)$ de p et un système de coordonnées $(f_1^p,\ldots,f_n^p)$ sur $C(p)$ tels que l'image de $U \cap C(p)$ par l'application

$q \to (f_1^p(q), \ldots, f_n^p(q))$ soit l'ensemble des points de l'image de $C(p)$ contenus dans un polyèdre $P(p)$ de R^n. Soit ζ une forme différentielle homogène de degré $n-1$ et de classe C^1 sur V. La trace de ζ sur le bord $\dot{U}$ de U est alors sommable, et on a

$$\int_U d\zeta = \int_{\dot{U}} \zeta$$

On peut naturellement supposer que $P(p)$ est compact. Sa frontière se compose alors de la réunion d'un nombre fini d'ensembles dont les uns sont des parties relativement ouvertes et relativement compactes de variétés affines de dimension $n-1$ tandis que les autres sont des parties compactes de variétés affines de dimensions $\leqq n-2$. Soit φ^p l'application $q \to (f_1^p(q), \ldots, f_n^p(q))$ de $C(p)$ dans R^n, et soit E la partie non lisse de la frontière de U. On voit que l'image de $E \cap C(p)$ par φ^p est contenue dans la réunion d'un nombre fini de parties compactes de sous-variétés affines de dimensions $\leqq n-2$ de R^n, ce qui montre que $E \cap C(p)$ est différentiellement négligeable (rappelons que l'application φ^p peut se prolonger en un isomorphisme d'une sous-variété ouverte de V contenant $C(p)$ avec une sous-variété ouverte de R^n). Par ailleurs, E est la réunion d'un nombre fini des ensembles de la forme $E \cap C(p)$, d'où il résulte que E est différentillement négligeable. Par ailleurs, si ζ est une forme différentielle homogène de degré $n-1$ et de classe C^0 sur R^n, la trace de ζ sur une partie ouverte relativement compacte d'une variété affine de dimension $n-1$ est sommable. Désignons par $\dot{U}(p)$ l'intersection de $\dot{U}$ avec l'intérieur de $C(p)$; on voit que, si ζ est une forme différentielle homogène de degré $n-1$ et de classe C^0 sur V, la trace de ζ sur $\dot{U}(p)$ est sommable. L'ensemble $\dot{U}$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini des $\dot{U}(p)$; il en résulte que la tra-ce ζ sur $\dot{U}$ est sommable. Le th.6 bis résulte donc du th.5 .

Le théorème 6 bis s'applique en particulier au cas où $V=R^n$ et où U est un polyèdre convexe de la structure d'espace affine de R^n . Il est clair que la partie lisse de la frontière de U est alors la réunion des faces de U , tandis que la partie non lisse est la réunion des facettes de codimensions >1 . Soient F une face de U ; la structure de variété orientée du bord $\dot{U}$ de U définit alors une orientation de F , donc aussi une orientation de l'hyperplan H engendré par F . L'espace R^n étant muni de sa structure de variété affine orientée, nous allons voir que l'orientation ainsi définie de H est celle par rapport à laquelle U est du côté positif de H (cf. Alg.,chap.IX,   ). Soit en effet $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ une base affine ordonnée de R_n telle que $A_0 \in U$, que $A_1, \ldots, A_n$ soient dans H et que l'orientation de H définie par la base ordonnée $(A_1, \ldots, A_n)$ coïncide avec celle définie par l'orientation du bord $\dot{U}$ de U . Si $x \in R^n$, posons $x = \sum_{i=0}^n u_i(x) A_i$, les $u_i(x)$ étant des nombres de somme 1 . Si $x \in H$, on peut écrire $x - A_1 = \sum_{i=2}^n u_i(x)(A_i - A_1)$; les restrictions de $u_2, \ldots, u_n$ à H forment un système de coordonnées sur H , et il résulte de nos hypothèses que la trace de $du_2 \wedge \ldots \wedge du_n$ sur H est partout >0 . La fonction u_0 étant >0 sur U et $u_0, u_2, \ldots, u_n$ formant un système de coordonnées sur R^n , on voit que la forme différentielle $(-1)^n du_2 \wedge \ldots \wedge du_n \wedge du_0 = - du_0 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n$ est >0 sur R^n .

Puisque $u_0=1-(u_1+\dots+u_n)$, on en conclut que $du_1\wedge\dots\wedge du_n$ est positif sur R^n, ce qui signifie que la base ordonnée $(A_0,A_1,\dots,A_n)$ de R^n définit l'orientation naturelle de R^n ; A_0 étant dans U, on voit que U est du côté positif de H. Nous pouvons encore exprimer ce résultat de la manière suivante : si U est un polyèdre convexe de R^n $(n > 1)$, la variété orientée $\dot U$ s'obtient en munissant chaque face de U de l'orientation définie par U sur cette face (U étant muni de l'orientation induite par l'orientation naturelle de R^n).
