RÉDACTION N° 166

COTE : NBR 067

TITRE : ALGÈBRES DE LIE (ÉTAT 1)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 70

NOMBRE DE FEUILLES : 70

Archives
sept. 1952

NBR 067 166 2

ALGÈBRES de LIE - Etat 1

Commentaires. Les instructions reçues ont été approximativement respectées

Birkhoff-homologie. Dans l'Etat présent, l'homologie ajoute ceci : un énoncé limpide des Lemmes de Whitehead - une présentation rapide des récurrences conduisant à ces Lemmes - un usage clair de l'opérateur de Casimir qui devient un opérateur d'homotopie. C'est dire qu'elle ajoute surtout des pages. On n'a pas donné le passage direct ($H^1(g,M)=(0)$ pour tout M) $\Longrightarrow$ ($H^2(g,M)=(0)$ pour tout M) qui exige une technique homologique hors de propos. On aurait voulu que l'homologie n'intervienne ici que comme une commodité de langage. Il est bien clair que ce n'est pas possible et qu'il faut, ou bien la camoufler intégralement comme dans le rapport Chevalley ou bien l'aborder en s'appuyant sans hésiter sur le chapitre d'algèbre homologique. Le Théorème de Birkhoff servirait alors à montrer que le complexe de cochaînes utilisé donne "la bonne théorie".

Radical. On a fait grand usage du radical Jacobson (= radical nilpotent). C'est lui et non le plus grand idéal nilpotent qui doit jouer dans le Théorème de Malcev.

Répliques. On s'est dégonflé dans la démonstration d'un point "évident" malheureusement essentiel (Lemme 7, n°4, § 2). La seconde édition d'algèbre multilinéaire devrait essayer de limiter les difficultés d'exposition qu'on rencontre là .

Ado, Iwasawa. Le Théorème d'Iwasawa (existence d'une splotting algebra pour toute extension abélienne) est au moins aussi interessant que le Théorème d'Ado qui est sensiblement plus faible et s'en déduit directement. Il ne semble pas que l'on connaisse de démonstration "transcendante" du Théorème d'Iwasawa. Abandonner la démonstration algèbrique d'Ado reviendrait donc dans l'état actuel des choses à renoncer au résultat d'Iwasawa. On a donné ici une démonstration simultanée des deux résultats par la méthode de H. Chandra.

Notations. Ayant à parler constamment d'algèbres de fous, on dira algèbre de Lie là où l'usage est de dire algèbre associative.

ALGÈBRES de LIE. (Etat 1).

Dans ce chapitre on notera $\alpha\beta$ au lieu de $\alpha \circ \beta$ le composé de deux homomorphismes ou de deux applications linéaires α, β. On notera $\alpha.u$ l'image d'un élément u par un homomorphisme α.

Paragraphe 1. Algèbres de Lie sur un anneau, représentations.

Dans ce paragraphe, A désignera un anneau commutatif unitaire.

N°1. Définitions.

Définition 1. Une algèbre non associative $\mathfrak{g}$ sur un anneau commutatif unitaire A est appelée une *algèbre de Lie* si sa loi de composition multiplicative, notée $(x,y) \longrightarrow [x,y]$, vérifie les identités

(1) $$[x,x] = 0$$

(2) $$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

pour $x,y,z \in \mathfrak{g}$.

Le produit $[x,y]$ est appelé le *crochet* de x et y. L'identité (2) est appelée *l'identité de Jacobi*.

Le crochet $[x,y]$ étant une fonction bilinéaire des facteurs, la condition (1) entraîne l'identité et l'identité de Jacobi peut s'écrire

(1)' $$[x,y] + [y,x] = 0 .$$

(2)' $$[x,[y,z]] = [[x,y], z] + [y,[x,z]] .$$

Exemple. Soit L une algèbre associative sur A. Le commutateur $[a,b] = ab-ba$ est une fonction bilinéaire de a et b considérés comme éléments du A-module L. On vérifie facilement que la loi de composition multiplicative $(a,b) \longrightarrow [a,b]$ dans le A-module L définit une algèbre de Lie sur A.

Définition 2. Etant donné un module M sur A, on appelle *algèbre de Lie des endomorphismes de M et l'on note* $\mathfrak{gl}(M)$ l'algèbre de Lie définie dans le A-module des endomorphismes de M par la loi de composition multiplicative $(\alpha,\beta) \longrightarrow [\alpha,\beta] = \alpha\beta-\beta\alpha$ où α et β sont des endomorphismes de M.

Toute sous-algèbre d'une algèbre de Lie est une algèbre de Lie.

<u>Exemples</u>. Soit M une algèbre (non nécessairement associative) sur A. Les dérivations de M, c'est-à-dire les endomorphismes du A-module M vérifiant la condition $\alpha.(uv) = (\alpha.u)\, v + u(\alpha.v)$ quels que soient $\cancel{\alpha}$ $u, v \in M$, constituent une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(M)$.

Soit M l'algèbre des fonctions de classe C^{∞} à valeurs réelles sur un groupe de Lie réel G. Les transformations infinitésimales du groupe des translations à gauche dans G constituent une sous-algèbre de l'algèbre de Lie (sur le corps des réels) des dérivations de M. C'est l'<u>algèbre de Lie</u> du groupe G.

<u>Définition 3</u>. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite <u>abélienne</u> lorsque $[x,y] = 0$ quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$.

Cette terminologie vient de ce que les transformations infinitésimales d'un groupe de Lie connexe commutent entre elles si et seulement si le groupe est abélien.

Tout A-module peut évidemment être muni d'une manière triviale d'une structure d'algèbre de Lie abélienne sur A.

N°2. <u>Idéaux</u>. Il résulte de l'identité (1)' que, dans une algèbre de Lie, il n'y a pas à distinguer entre les idéaux à droite et les idéaux à gauche, tout idéal étant bilatère. On parlera donc simplement d'<u>idéal</u>. Tout quotient d'une algèbre de Lie par un idéal est une algèbre de Lie.

<u>Exemple</u>. Soit G' un sous-groupe invariant fermé dans un groupe de Lie G. Les transformations infinitésimales du groupe des translations à gauche de G par des éléments de G' constituent un idéal de l'algèbre de Lie de G.

Les propriétés suivantes sont des conséquences faciles de l'identité de Jacobi.

<u>Lemme 1</u>. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Par définition, un élément de $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $[y,z]$ avec $y \in \mathfrak{a}$ et $z \in \mathfrak{b}$. D'après l'identité de Jacobi, on a pour tout $x \in g$,

$$[x,[y,z]] = [[x,y], z] + [y, [x,z]] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$$

puisque $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux.

<u>Définition 4</u>. On appelle <u>idéal dérivé</u> d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et l'on note $D\mathfrak{g}$, l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

La suite des idéaux dérivés successifs de $\mathfrak{g}$ se définit par induction sur l'entier $p > 0$ en posant $D^p\mathfrak{g} = D(D^{p-1}\mathfrak{g}) = [D^{p-1}\mathfrak{g}, D^{p-1}\mathfrak{g}]$. Chaque $D^p\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ d'après le Lemme 1. On a évidemment $D^{p+1}\mathfrak{g} \subset D^p\mathfrak{g}$ quel que soit l'entier $p > 0$.

<u>Proposition 1</u>. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'homomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ applique l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}$ sur l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. C'est une conséquence triviale de la définition.

Une algèbre de Lie est abélienne lorsque son idéal dérivé est l'idéal (0). La Proposition 1 montre donc que le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie abélienne si et seulement si $\mathfrak{a}$ contient l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}$.

<u>Lemme 2</u>. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les éléments $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[x,y] \in \mathfrak{a}$ pour tout y dans $\mathfrak{b}$ constituent un idéal de $\mathfrak{g}$.

Ces éléments constituent visiblement un sous-module du module $\mathfrak{g}$. D'autre part, si $[x,y] \in \mathfrak{a}$ pour tout $y \in \mathfrak{b}$, alors quel que soit $z \in \mathfrak{g}$,

$$[[x,z],y] = [x, [z,y]] - [z,[x,y]] \in \mathfrak{a}$$

d'après l'identité de Jacobi.

En particulier, l'annulateur d'un idéal est un idéal.

<u>Définition 5</u>. On appelle <u>centre</u> d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'idéal des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[x,y] = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$.

Une algèbre de Lie abélienne est donc une algèbre de Lie qui coincide avec son centre.

Lemme 3. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le centre de $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

En effet, si x est dans le centre de $\mathfrak{a}$, alors quels que soient $y \in \mathfrak{g}$, $[x,y] \in \mathfrak{a}$ car $\mathfrak{a}$ est un idéal. Pour tout $z \in \mathfrak{a}$, on a d'après l'identité de Jacobi $[[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = 0$, ce qui prouve que $[x,y]$ est dans le centre de $\mathfrak{a}$ qui est donc un idéal de $\mathfrak{g}$.

N°3. Produits et extensions. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie sur un même anneau A. La loi de composition multiplicative du produit direct $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ est définie par

$$((x,x'),(y,y')) \longrightarrow ([x,x'],[y,y'])$$

quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$ et $x',y' \in \mathfrak{g}'$. Il est évident que cette loi vérifie les identités (1) et (2) de la Définition 1. Le produit direct de deux algèbres de Lie est donc une algèbre de Lie.

Définition 6. Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}$ deux algèbres de Lie sur un même anneau A et soit λ un homomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathfrak{a}$ et l'homomorphisme λ constituent ce que l'on appelle une extension de $\mathfrak{g}$, notée $(\mathfrak{a}, \lambda)$. Le noyau de λ est appellé le noyau de l'extension $(\mathfrak{a}, \lambda)$.

Exemple. Si $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{g}$ sont deux algèbres de Lie sur A, le produit direct $\mathfrak{c} \times \mathfrak{g}$ et l'homomorphisme λ qui applique un élément $(z,x) \in \mathfrak{c} \times \mathfrak{g}$ sur $x \in \mathfrak{g}$ constituent une extension de $\mathfrak{g}$ dont le noyau est l'idéal des éléments de la forme $(z,0)$ avec $z \in \mathfrak{c}$. Ce noyau est isomorphe à $\mathfrak{c}$.

Exemple. Soit $\mathfrak{d}$ l'algèbre de Lie des dérivations d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur A. Dans le produit direct $\mathfrak{d} \times \mathfrak{g}$ des A-modules $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{g}$, on définit le crochet de deux éléments en posant

$$[(\alpha,x), (\beta,y)] = ([\alpha,\beta], [x,y] + \alpha.y - \beta.x)$$

quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$ et $\alpha, \beta \in \mathfrak{d}$. On vérifie facilement que la loi de composition multiplicative définie dans $\mathfrak{d} \times \mathfrak{g}$ par ce crochet vérifie les identités (1) et (2) de la définition 1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ ainsi définie est appelée l'<u>holomorphe</u> de $\mathfrak{g}$. L'application A-linéaire $\mu : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{d}$ définie par $\mu.(\alpha,x) = \alpha$ quel que soit $(\alpha,x) \in \mathfrak{d} \times \mathfrak{g}$ est visiblement un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$. Donc $(\mathfrak{h}, \mu)$ est une extension de $\mathfrak{d}$. Son noyau est l'idéal des éléments de $\mathfrak{h}$ qui sont de la forme $(0,x)$; il est donc isomorphe à $\mathfrak{g}$.

<u>Définition 7</u>. Deux extensions $(\mathfrak{a}, \lambda)$ et $(\mathfrak{b}, \mu)$ d'une même algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sont dites équivalentes si il existe un isomorphisme ν de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{b}$ tel que $\lambda = \mu\nu$.

<u>Définition 8.</u> Une extension $(\mathfrak{a}, \lambda)$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite <u>inessentielle</u> si il existe une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ qui soit un sous-module supplémentaire dans $\mathfrak{a}$ du noyau de λ. L'extension est dite <u>triviale</u> si il existe un idéal de $\mathfrak{a}$ qui soit un sous-module supplémentaire dans $\mathfrak{a}$ du noyau de λ.

Il est évident que dans l'exemple du produit direct $\mathfrak{c} \times \mathfrak{g}$ considéré plus haut, les éléments de la forme $(0,x)$ constituent un idéal supplémentaire dans $\mathfrak{c} \times \mathfrak{g}$ du noyau de λ. L'extension $(\mathfrak{c} \times \mathfrak{g}, \lambda)$ est donc triviale. De même dans l'exemple de l'holomorphe $\mathfrak{h}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, les éléments de la forme $(\alpha, 0) \in \mathfrak{d} \times \mathfrak{g}$ constituent une sous-algèbre de $\mathfrak{h}$ supplémentaire du noyau $(0, \mathfrak{g})$ de μ. L'extension $(\mathfrak{h}, \mu)$ de $\mathfrak{d}$ est donc inessentielle.

<u>Proposition 2</u>. Pour qu'une extension $(\mathfrak{a}, \lambda)$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit inessentielle, il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme λ' de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}$ tel que $\lambda\lambda'$ soit l'automorphisme identique de $\mathfrak{g}$.

Supposons en effet que $(\mathfrak{a}, \lambda)$ soit une extension inessentielle de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ supplémentaire du noyau de λ, et si λ' est l'isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{b}$ inverse de la restriction de λ à $\mathfrak{b}$, alors λ' est un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}$ tel que $\lambda\lambda'$ soit l'identité de $\mathfrak{g}$. Réciproquement, si il existe un homomorphisme $\lambda' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ tel que $\lambda\lambda'$ soit l'automorphisme identique de $\mathfrak{g}$, alors l'image de λ' est une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ supplémentaire du noyau de λ, donc $(\mathfrak{a}, \lambda)$ est une extension inessentielle de $\mathfrak{g}$.

<u>Proposition 3</u>. Pour qu'une extension $(\mathfrak{a}, \lambda)$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit triviale, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à l'extension $(\mathfrak{c} \times \mathfrak{g}, \mu)$ de $\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{c}$ est le noyau de λ et μ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{c} \times \mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$.

<u>Démonstration</u>. Supposons en effet que $(\mathfrak{a}, \lambda)$ soit une extension triviale de $\mathfrak{g}$. Il existe alors un endomorphisme σ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ dont la restriction au noyau $\mathfrak{c}$ de λ est l'identité et dont l'idéal des zéros est supplémentaire de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{a}$. L'application linéaire $\nu : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{c} \times \mathfrak{g}$ définie par $\nu . z = (\sigma . z, \lambda . z)$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{c} \times \mathfrak{g}$. Soit μ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{c} \times \mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$. On a $\lambda = \mu\nu$, par conséquent l'extension $(\mathfrak{a}, \lambda)$ est équivalente à l'extension $(\mathfrak{c} \times \mathfrak{g}, \mu)$. Réciproquement, il a été remarqué que l'extension $(\mathfrak{c} \times \mathfrak{g}, \mu)$ de $\mathfrak{g}$ est triviale, toute extension équivalente est donc triviale.

N°4. <u>Représentations</u>.

<u>Définition 9</u>. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un anneau A et $\mathfrak{gl}$ (M) l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un A-module M. Un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}$ (M) est appelé une <u>représentation</u> de $\mathfrak{g}$ dans M. Si A est un corps, on appelle dimension de la représentation la dimension (finie ou infinie) de M sur A.

Compte-tenu de la définition du crochet dans $\mathfrak{gl}(M)$ (cf. N°1), une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un A-module M est donc une application A-linéaire $x \to \rho(x)$ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre des endomorphismes de M telle que

$$\rho(x)\,\rho(y) - \rho(y)\,\rho(x) = \rho\,([x,y])$$

quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, la restricion à $\mathfrak{b}$ d'une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M est une représentation de $\mathfrak{b}$ dans M .

<u>Définition 10</u>. Une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans un module M est dite <u>fidèle</u> si c'est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(M)$.

<u>Exemples</u>. Etant donné un A-module M , l'application identique de $\mathfrak{gl}(M)$ dans $\mathfrak{gl}(M)$ est une représentation fidèle de $\mathfrak{gl}(M)$ dans M . Etant donnés une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et un module M sur A , la <u>représentation nulle</u> de $\mathfrak{g}$ dans M associe à tout élément de $\mathfrak{g}$ l'endomorphisme nul de M.

Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(M)$ une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans un module M et soit $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans le noyau de ρ . Si α est l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, il existe un homomorphisme et un seul ρ' de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{gl}(M)$ tel que $\rho = \rho'\alpha$. Une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M définit donc une représentation dans M du quotient de $\mathfrak{g}$ par tout idéal $\mathfrak{h}$ contenu dans son noyau. Si $\mathfrak{h}$ est le noyau de ρ , alors la représentation ρ' de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dans M est fidèle.

<u>Définition 11</u>. Etant donnée une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur A , on appelle <u>endomorphisme adjoint d'un élément</u> $x \in \mathfrak{g}$ et l'on note $ad(x)$ l'endomorphisme du A-module $\mathfrak{g}$ tel que $ad(x).y = [x,y]$ quel que soit $y \in \mathfrak{g}$.

<u>Proposition 4</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une ~~xxx~~ algèbre de Lie sur A . Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme adjoint $ad(x)$ est une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'application $x \to ad(x)$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans le A-module $\mathfrak{g}$.

La première assertion résulte de ce que l'identité de Jacobi peut s'écrire

$$\mathrm{ad}(x).[y,z] = [\mathrm{ad}(x).y,z] + [y,\mathrm{ad}(x).z].$$

La seconde assertion résulte de ce que l'identité de Jacobi peut s'écrire

$$\mathrm{ad}([x,y]).z = \mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y).z - \mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(x).z \quad .$$

Définition 12.- Etant donnée une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur A , la représentation $x \to \mathrm{ad}(x)$ de $\mathfrak{g}$ dans le A-module $\mathfrak{g}$ est appelée la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.

Le noyau de la représentation adjointe est le centre de l'algèbre de Lie.

Définition 13.- Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A et $T(\mathfrak{g})$ l'algèbre tensorielle du A-module $\mathfrak{g}$. Un module à gauche (respectivement à droite) sur $T(\mathfrak{g})$ est appelé un module de représentation de $\mathfrak{g}$ ou brièvement un $\mathfrak{g}$-module à gauche (resp. à droite) si son annulateur contient le tenseur

$$x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$$

quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$. Le quotient de $T(\mathfrak{g})$ par l'idéal bilatère $J(\mathfrak{g})$ engendré par ces tenseurs est appelé l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$ et noté $U(\mathfrak{g})$.

Les notations étant celles de la Définition 13, pour tout entier $p > 0$, la fonction

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_p) = (-1)^p \; x_p \otimes x_{p-1} \otimes \ldots x_1 \qquad (x_i \in g)$$

est une fonction multilinéaire du produit direct de p modules isomorphes au A-module $\mathfrak{g}$ qui prend ses valeurs dans le A-module $T^p(\mathfrak{g})$ des tenseurs d'ordre p . Il existe donc (Alg. Chap. III, § 1, n°7) un endomorphisme α_p de $T^p(\mathfrak{g})$ entièrement déterminé par la condition

$$\alpha_p.(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots x_p) = (-1)^p \; x_p \otimes x_{p-1} \otimes \ldots \; x_1 \quad .$$

Soit α l'endomorphisme du A-module $T(\mathfrak{g})$ dont la restriction à chaque $T^p(\mathfrak{g})$ est α_p pour $p > 0$ et dont la restriction aux scalaires est l'identité de $T^0(\mathfrak{g})$. On vérifie immédiatement que α est un automorphisme du A-module $T(\mathfrak{g})$ tel que $\alpha.(t \otimes t') = (\alpha.t') \otimes (\alpha.t)$ quels que soient $t, t' \in T(\mathfrak{g})$. D'autre part, quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$, on a

$$\alpha.(x \otimes y - y \otimes x - [x,y]) = y \otimes x - x \otimes y - [y,x]$$

et par suite $\alpha.J(\mathfrak{g}) \subset J(\mathfrak{g})$. Si M est un $\mathfrak{g}$-module à droite, en posant $te = e(\alpha.t)$ pour tout $e \in M$ et $t \in T(\mathfrak{g})$, on définit dans M une structure de module à gauche sur $T(\mathfrak{g})$ dont l'annulateur contient encore $J(\mathfrak{g})$. C'est donc une structure de $\mathfrak{g}$-module à gauche. Pour cette raison, il sera suffisant d'envisager des $\mathfrak{g}$-modules à gauche et, sauf mention expresse du contraire, <u>les modules de représentation de $\mathfrak{g}$ devront être entendus comme $\mathfrak{g}$-modules à gauche</u>.

Etant donné un module à gauche M sur $T(\mathfrak{g})$, <u>on désignera par t_M l'endomorphisme du groupe abélien</u> M défini par multiplication à gauche par le tenseur t. On observera que tout t_M est un endomorphisme de M considéré comme module sur A par restriction aux scalaires de sa structure de module sur $T(\mathfrak{g})$.

<u>Proposition 5</u>. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A et $x \rightarrow \rho(x)$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un A-module M. Il existe dans M une structure de module de représentation de $\mathfrak{g}$ et une seule telle que $x_M = \rho(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

<u>Démonstration</u>. L'application A-linéaire $x \rightarrow \rho(x)$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(M)$ se prolonge en un homomorphisme de l'algèbre associative $T(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre associative des endomorphismes de M. Elle définit donc dans M une structure de module à gauche sur $T(\mathfrak{g})$ telle que $x_M = \rho(x)$ pour tout x dans $\mathfrak{g}$. On a

$$(x \otimes y - y \otimes x - [x,y])_M = \rho(x)\,\rho(y) - \rho(y)\,\rho(x) - \rho([x,y]) = 0$$

quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$, ce qui signifie que M est un module de représentation de $\mathfrak{g}$. L'unicité résulte de ce que l'algèbre $T(\mathfrak{g})$ est engendrée par l'unité et les tenseurs d'ordre 1, c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{g}$.

Muni de cette structure de g-module, M est appelé le <u>module de la représentation</u> ρ .

<u>Proposition 6</u>. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A et M un $\mathfrak{g}$-module. L'application $x \to x_M$ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre des endomorphismes de M considéré comme module sur A est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M .

On a en effet

$$x_M y_M - y_M x_M - [x,y]_M = (x \otimes y - y \otimes x - [x,y])_M = 0$$

quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$.

La représentation $x \to x_M$ est appelée la représentation <u>associée</u> au $\mathfrak{g}$-module M .

Ces propositions servirons à passer du point de vue représentation au point de vue module de représentation et inversement.

Il résulte de la définition 13 que tout sous-module, tout module quotient d'un module de représentation est un module de représentation. De même, l'annulateur d'un produit direct de modules M_i sur l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ contenant l'intersection des annulateurs des modules M_i , tout <u>produit direct de $\mathfrak{g}$-modules est un $\mathfrak{g}$-module</u>.

<u>Définition 14</u>. Une représentation ρ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est appelée simple (respectivement semi-simple) si le module de la représentation ρ est un module simple (respectivement semi-simple) sur $T(\mathfrak{g})$.

<u>Définition 15</u>. Etant donné un module de représentation M d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on appelle <u>algèbre enveloppante</u> de M et l'on note $E(\mathfrak{g}, M)$, l'algèbre des endomorphismes t_M de M où t est un tenseur arbitraire de $\mathfrak{g}$.

L'algèbre tensorielle étant engendrée par le tenseur unité et les éléments de $\mathfrak{g}$, l'algèbre enveloppante de M est engendrée par l'automorphisme identique de M et les endomorphismes x_M où $x \in \mathfrak{g}$. L'homomorphisme canonique $t \to t_M$ de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre $E(\mathfrak{g}, M)$ induit un homomorphisme de l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre enveloppante de M .

N°5 . Produits tensoriels et Applications de modules de représentation.

Proposition 7. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un anneau A et soit M_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) une famille finie de modules de représentation de $\mathfrak{g}$. Dans le produit tensoriel $P = \bigotimes_i M_i$ des A-modules M_i , il existe une structure de $\mathfrak{g}$-module et une seule telle que

$$(3) \qquad x(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots u_n) = \sum_{i=1}^{i=n} u_1 \otimes \dots (xu_i) \otimes \dots u_n$$

quels que soient $x \in \mathfrak{g}$ et $u_j \in M_j$ ($1 \leqslant j \leqslant n$).

Démonstration. Pour un x donné dans g , chaque terme $u_1 \otimes \dots (xu_i) \otimes \dots u_n$ est une fonction multilinéaire des u_j ($1 \leqslant j \leqslant n$) à valeurs dans P . Il existe donc un endomorphisme x_P du A-module P tel que $x_P.(u_1 \otimes \dots u_n)$ soit égal au second membre de l'égalité (3). On a

$$(x_P y_P - y_P x_P).(u_1 \dots u_n) = \sum_{i=1}^{i=n} u_1 \otimes \dots ((xy-yx)u_i) \otimes \dots u_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} u_1 \otimes \dots ([x,y]\, u_i) \otimes \dots u_n = [x,y]_P.(u_1 \otimes \dots u_n)$$

quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$. Donc $x \to x_P$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans P . On conclut en appliquant la proposition 5 .

En particulier, si M est un module de représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur A , la formule (3) définit dans chaque module $\bigotimes_p M$ des tenseurs d'ordre p ($p > 0$) de M une structure de g-module. On peut également obtenir cette structure de g-module dans les $\bigotimes_p M$ en définissant une représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre tensorielle T du A-module M de la manière suivante. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on désigne par x_T la <u>dérivation</u> de l'algèbre T dont la restriction à M est l'endomorphisme x_M (Cf. Alg.,Chap.III). La dérivation $[x,y]_T$ prolongeant $[x,y]_M = x_M y_M - y_M x_M$ est $x_T y_T - y_T x_T$. Par conséquent, $x \to x_T$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans le A-module T . Pour tout entier $p \geqslant 0$, le module de tenseurs $\bigotimes_p M$ est un sous-module du module de cette représentation. Pour $p > 0$, on obtient dans $\bigotimes_p M$ la structure de $\mathfrak{g}$-module définie par la formule (3). Pour $p=0$, on obtient le module de la représentation nulle de $\mathfrak{g}$ dans A .

<u>Proposition 8</u>. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A , M_i $(1<i<n)$ une famille finie de $\mathfrak{g}$-modules, N un $\mathfrak{g}$-module. Dans le module L des applications multilinéaires du A-module $\prod_i M_i$ dans le A-module N , il existe une structure de $\mathfrak{g}$-module et une seule telle que

$$(4) \qquad (xf)(u_1,u_2,\dots u_n)= x(f(u_1,u_2,\dots,u_n))- \sum_{i=1}^{i=n} f(u_1,\dots xu_i,\dots,u_n)$$

quels que soient $x\in\mathfrak{g}$, $u_j\in M_j$, et $f\in L$.

La démonstration, analogue à la précédente consiste à vérifier que la formule (4) définit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans L .

<u>Exemple</u>. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A et M un $\mathfrak{g}$-module. Dans le dual $M^* = \mathcal{L}(M,A)$, si l'on adopte dans A la représentation nulle de $\mathfrak{g}$, la formule (4) définit une structure de $\mathfrak{g}$-module. C'est le $\mathfrak{g}$-module <u>dual</u> du $\mathfrak{g}$-module M . On a $(xf)(u) = -f(xu)$ quels que soient $x\in\mathfrak{g}$, $f\in M^*$ et $u\in M$, c'est-à-dire que $x_{M^*} = -{}^t x_M$. La représentation $x \to -{}^t x_M$ de $\mathfrak{g}$ dans M^* est appelée la <u>représentation duale</u> de la représentation $x \to x_M$.

N°6. <u>Invariants</u>. Toute représentation linéaire d'un groupe de Lie réel connexe dans un espace vectoriel V sur le corps des réels définit une représentation de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans V . Pour qu'un vecteur $v\in V$ soit invariant par les opérations du groupe, il faut et il suffit que, pour tout $x\in\mathfrak{g}$, v soit un zéro de l'endomorphisme x_V . Le point de vue de la représentation des groupes a motivé la .

<u>Définition 16</u>. Soit M un module de représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur A . Un élément $u\in M$ est appelé un <u>invariant</u> de M si $xu = 0$ pour tout $x\in\mathfrak{g}$.

Il est clair que les invariants d'un $\mathfrak{g}$-module M constituent un sous-module de représentation de $\mathfrak{g}$. Plus généralement,

<u>Lemme 4</u>. Soient $\mathfrak{h}$ un idéal dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur A et M un $\mathfrak{g}$-module. Les éléments $u \in M$ tels que $xu = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$ constituent un sous-module du $\mathfrak{g}$-module M .

Soit en effet N l'ensemble des $u \in M$ tels que $xu=0$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$. C'est visiblement un sous-module de M considéré comme module sur A . En outre, si $u \in N$, alors, pour tout $y \in \mathfrak{g}$, on a
$x(yu) = (xy)u = y(xu)-[x,y]u = 0$ quel que soit $x \in \mathfrak{h}$. Par suite $yu \in N$, ce qui prouve que N est un sous-module de représentation de $\mathfrak{g}$.

<u>Exemples</u>. 1. Pour qu'un élément d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit un invariant du module de la représentation adjointe, il faut et il suffit qu'il soit dans le centre de $\mathfrak{g}$.

2) Soient M et N deux modules de représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur A . Pour qu'une application A-linéaire de M dans N soit un homomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules, il faut et il suffit que ce soit un invariant du module de représentation $\mathcal{L}(M,N)$ défini par la formule (4).

3) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A et M un module de représentation de g . Pour qu'une application bilinéaire $f : M \times M \longrightarrow M$ soit un invariant du module de représentation $\mathcal{L}_2(M,M)$ défini par la formule (4), il faut et il suffit que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, x_M soit une <u>dérivation</u> de l'algèbre sur A définie dans M par la loi de composition multiplicative $(u,v) \longrightarrow f(u,v)$ $(u,v \in M)$. En effet, on doit avoir

$$x_M \cdot f(u,v) = f(x_M \cdot u,v) + f(u,x_M \cdot v)$$

quels que soient $x \in \mathfrak{g}$, $u,v \in M$.

L'exemple suivant est particulièrement important.

<u>Définition 17</u>. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur A et M un module de représentation de g qui, considéré comme module sur A possède une base finie. On appelle <u>forme bilinéaire associée à M</u> la fonction bilinéaire symétrique $\mathrm{Tr}(x_M y_M)$ de $x,y \in \mathfrak{g}$. La forme bilinéaire $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y))$

associée au module de la représentation adjointe est appelée la forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}$.

Dans le A-module d'applications $\mathcal{L}_2(g,A)$, la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ et la représentation nulle de $\mathfrak{g}$ dans A définissent, par la formule (4), une structure de $\mathfrak{g}$-module. Pour tout module de représentation M de $\mathfrak{g}$, <u>la forme bilinéaire</u> $B_M(x,y)$ <u>associée à M est un invariant du $\mathfrak{g}$-module</u> $\mathcal{L}_2(g,A)$, c'est-à-dire que

$$B_M([x,y],z) + B_M(y,[x,z]) = 0$$

quels que soient $x,y,z \in \mathfrak{g}$. On a en effet,

$$Tr([x,y]_M z_M) + Tr(y_M[x,z]_M) = Tr(x_M y_M z_M - y_M x_M z_M + y_M x_M z_M - y_M z_M x_M) = 0$$

car la trace d'un produit de deux endomorphismes ne dépend pas de l'ordre des facteurs.

<u>Remarque</u>. Pour une algèbre de Lie donnée $\mathfrak{g}$, il peut exister des formes bilinéaires symétriques invariantes qui ne sont pas associées à un module de représentation de $\mathfrak{g}$.

N°7. <u>Algèbres enveloppantes universelles</u>. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un anneau A et $T(\mathfrak{g})$ l'algèbre tensorielle du A-module $\mathfrak{g}$. On désigne respectivement par $J(\mathfrak{g})$ et $I(\mathfrak{g})$ les idéaux bilatères de $T(\mathfrak{g})$ engendrés par les tenseurs de la forme $x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$ et $x \otimes y - y \otimes x$ $(x,y \in \mathfrak{g})$. Les quotients de $T(\mathfrak{g})$ par $J(\mathfrak{g})$ et $I(\mathfrak{g})$ sont respectivement l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$ (Définition 13) et l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ du A-module $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, alors $J(\mathfrak{g}) = I(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{g})$ s'identifie à $S(\mathfrak{g})$. Les relations entre $J(\mathfrak{g})$ et $I(\mathfrak{g})$ seront décrites dans le cas général par les deux Lemmes suivants.

<u>Lemme 5</u>. Si t est un tenseur d'ordre p dans $I(\mathfrak{g})$, alors il existe dans $J(\mathfrak{g})$ un tenseur t' tel que t-t' soit d'ordre p-1 .

<u>Démonstration</u>. L'idéal $I(\mathfrak{g})$ étant engendré par des tenseurs homogènes d'ordre 2, un tenseur t d'ordre p dans $I(\mathfrak{g})$ peut s'écrire

$$t = \sum_{i=1}^{i=r} a_i \otimes (x_i \otimes y_i - y_i \otimes x_i) \otimes b_i$$

où $x_i, y_i \in \mathfrak{g}$ et où, pour chaque valeur de l'indice i, a_i et b_i sont des tenseurs homogènes dont la somme des ordres est p-2 . Posant

$$t' = \sum_{i=1}^{i=r} a_i \otimes (x_i \otimes y_i - y_i \otimes x_i - [x_i, y_i]) \otimes b_i$$

on a $t' \in J(\mathfrak{g})$ et t-t' est d'ordre p-1 .

<u>Lemme 6</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps A . Quel que soit l'entier p , si un tenseur t est est dans $J(\mathfrak{g})$ et si ses composantes d'ordre $> p$ sont nulles, alors sa composante d'ordre p est dans $I(\mathfrak{g})$.

<u>Démonstration</u>. Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ une base ordonnée de $\mathfrak{g}$. On sait (Alg. Chap.III, § 4, n°1) que les tenseurs décomposables de la forme $x_{k_1 k_2 \dots k_p} = x_{k_1} \otimes x_{k_2} \otimes \dots x_{k_p}$, où (k_j) parcourt l'ensemble des suites de p entiers de l'intervalle $[1, n]$ constituent une base du sous-espace $T_p(\mathfrak{g})$ des tenseurs d'ordre p pour $p > 0$, une base de $T_0(\mathfrak{g})$ étant le tenseur unité I . On désigne par N_p le sous-espace de $T_p(\mathfrak{g})$ engendré par les tenseurs $x_{k_1 k_2 \dots k_p}$ où $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \dots k_p \leqslant n$, le sous-espace N_0 étant $T_0(\mathfrak{g})$. La démonstration du Lemme consistera à prouver <u>l'existence d'une représentation</u> $x \to \rho(x)$ de $\mathfrak{g}$ <u>dans l'espace</u> N <u>somme directe des</u> N_p <u>qui possède pour tout entier</u> $p \geqslant 0$ <u>la propriété suivante</u> :

(C_p). <u>Quels que soient</u> $x \in \mathfrak{g}$ <u>et</u> $t \in N_p$, <u>les composantes d'ordre</u> $> p+1$ <u>de</u> $\rho(x).t$ <u>sont nulles et la composante d'ordre</u> p+1 <u>de</u> $\rho(x).t$ <u>est égale à</u> $x \otimes t$ <u>modulo</u> $I(\mathfrak{g})$.

Admettant en effet l'existence d'une telle représentation, on considère dans N la structure de $\mathfrak{g}$-module qu'elle définit. Si t est un tenseur dont les composantes d'ordre $> p$ sont nulles, alors il en est de même de $t_N.I \in N$ et si t_p est la composante d'ordre p de t , alors la composante d'ordre p de $t_N.I$ est égale à t_p modulo $I(\mathcal{G})$. Si donc l'on suppose que $t \in J(\mathcal{G})$, alors t est dans l'annulateur de tout $\mathcal{G}$-module, c'est-à-dire que $t_N=0$. Il en résulte bien que $t_p \in I(\mathcal{G})$.

Pour prouver l'existence d'une représentation $x \to \rho(x)$ de $\mathcal{G}$ dans N vérifiant la condition C_p quel que soit $p \geqslant 0$, on commencera (Partie I) par définir une application linéaire de $\mathcal{G}$ dans l'espace des endomorphismes de N qui vérifie ces conditions, puis (Partie II), on vérifiera que c'est une représentation de $\mathcal{G}$. On pose $N_{(p)} = N_o+N_1+\dots N_p$.

Partie I. Supposons obtenu pour un entier $p > 0$ une application linéaire $x \to \rho_{p-1}(x)$ de g dans l'espace d'applications linéaires $\mathcal{L}(N_{(p-1)},N_{(p)})$ vérifiant la condition C_r pour $r < p$. Pour $p = 1$, on posera $\rho_o(x).I = x$. On va définir une application linéaire $x \to \rho_p(x)$ de g dans $\mathcal{L}(N_{(p)},N_{(p+1)})$ en posant $\rho_p(x) = \rho_{p-1}(x)$ sur $N_{(p-1)}$ et en définissant pour chaque indice i ($1 \leqslant i \leqslant n$) l'image par $\rho_p(x_i)$ des tenseurs de base de N_p au moyen des conditions :

A $\quad \rho_p(x_i).x_{k_1\dots k_p} = x_{i\,k_1\dots k_p} \qquad$ si $i \leqslant k_1$

B $\quad \rho_p(x_i).x_{k_1\dots k_p} = \rho_{p-1}([x_i,x_{k_1}]).x_{k_2\dots k_p} + \rho_p(x_{k_1})\rho_{p-1}(x_i).x_{k_2\dots k_p}$

si $i > k_1$

La condition A définit $\rho_p(x_1)$. Supposant alors que $\rho_p(x_j)$ a été défini pour $j < i$, alors $\rho_p(x_i).x_{k_1\dots k_p}$ est défini sans ambiguité par A si $i \leqslant k_1$ et, compte-tenu des deux hypothèses inductives faites, par B si $i > k_1$. Il est clair que l'application $\mathcal{G} \to \mathcal{L}(N_{(p)},N_{(p+1)})$ ainsi définie vérifie la condition C_r pour tout $r \leqslant p$. On obtient alors une application linéaire $x \to \rho(x)$ de $\mathcal{G}$ dans l'espace des endomorphismes de N qui vérifie pour tout r la condition C_r en posant $\rho(x) = \rho_p(x)$ sur N_p .

Partie II. On va maintenant vérifier que $x \to \rho(x)$ est une représentation de $\mathcal{G}$ dans N en prouvant que $d(x,y)=\rho(x)\rho(y)-\rho(y)\rho(x)-\rho([x,y])=0$ quels que soient $x,y \in \mathcal{G}$. Pour vérifier cette égalité sur N_p $(p \geqslant 0)$, il suffit de montrer que les vecteurs de base de N_p sont annulés par les endomorphismes $d(x_i,x_j)$ où $1 \leqslant j < i \leqslant n$. On a

$\rho(x_i)\rho(x_j).I = \rho(x_j)\rho(x_i).I + \rho([x_i,x_j]).I$ d'après B . Donc $d(x_i,x_j)=0$ sur N_o. On procède alors par induction sur l'entier p en supposant

H) $d(x,y) = 0$ <u>sur</u> N_{p-1} <u>quels que soient</u> $x,y \in \mathcal{G}$.

Pour démontrer que $d(x_i,x_j)=0$ sur N_p on remarquera que si $j \leqslant k_1$, donc en particulier si $j=1$, alors quel que soit $i > j$, on a d'après A

$$\rho(x_i)\rho(x_j).x_{k_1\ldots k_p} = \rho(x_i).x_{j\,k_1\ldots k_p}$$

où $x_{k_1\ldots k_p}$ est un élément de base de N_p . D'après B , on a

$$\rho(x_i).x_{j\,k_1..k_p} = \rho(x_j)\,\rho(x_i).x_{k_1\ldots k_p} + \rho([x_i,x_j]).x_{k_1\ldots k_p}$$

c'est-à-dire que $d(x_i,x_j).x_{k_1\ldots k_p} = 0.$ Il en résulte en particulier que $d(x_i,x_1)=0$ sur N_p quel que soit $i > j$. Supposons que

H') $d(x_i,x_r).N_p=(0)$ <u>pour</u> $1 \leqslant r < j < i \leqslant n$.

On va montrer que $d(x_i,x_j).N_p=(0)$. Le calcul précédent montre que le seul cas à envisager est celui où $k_1 < j$. On pose $t = x_{k_2\ldots k_p}$ si $p > 1$ et $t=I$ si $p=1$. On a alors d'après B

$$\rho(x_i)\rho(x_j).x_{k_1\ldots k_p} = \rho(x_i)\rho(x_k)\rho(x_j).t + \rho(x_i)\,\rho([x_j,x_{k_1}]).t \quad .$$

D'après H', puisque $k_1 < j$,

$$\rho(x_i)\rho(x_{k_1})\rho(x_j).t = \rho(x_{k_1})\rho(x_i)\rho(x_j).t + \rho([x_i,x_{k_1}])\rho(x_j).t$$

D'après H , puisque t est dans N_{p-1},

$$\rho(x_{k_1})\rho(x_i)\rho(x_j).t = \rho(x_{k_1})\rho(x_j)\rho(x_i).t + \rho(x_k)\rho([x_i,x_j]).t \quad .$$

D'après H' ,

$$\rho(x_{k_1})\rho(x_j)\rho(x_i).t = \rho(x_j)\rho(x_{k_1})\rho(x_i).t + \rho([x_{k_1},x_j])\rho(x_i).t \ .$$

D'après H ,

$$\rho(x_j)\rho(x_{k_1})\rho(x_i).t = \rho(x_j)\rho(x_i)\rho(x_{k_1}).t + \rho(x_j)\rho([x_{k_1},x_i]).1$$

Or $\rho(x_{k_1}).t = x_{k_1\ldots k_p}$ d'après A ; en ajoutant ces égalités, on obtient donc, compte-tenu de la définition de $d(x_i,x_j)$

$$\begin{aligned} d(x_i,x_j).x_{k_1\ldots k_p} &= \rho(x_i)\rho([x_j,x_{k_1}]).t - \rho([x_j,x_{k_1}])\rho(x_i).t \\ &+ \rho(x_j)\,\rho([x_{k_1},x_i]).t - \rho([x_{k_1},x_i])\,\rho(x_j).t \\ &+ \rho(x_{k_1})\,\rho([x_i,x_j]).t - \rho([x_i,x_j])\rho(x_{k_1}).t \end{aligned}$$

ce qui, compte tenu de H s'écrit

$$d(x_i,x_j).x_{k_1\ldots k_p} = ([x_i,[x_j,x_{k_1}]]+[x_j,[x_{k_1},x_i]]+[x_{k_1},[x_i,x_j]]).t = 0$$

d'après l'identité de Jacobi ....

<u>Proposition 9</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps A : La restriction à $\mathfrak{g}$ de l'homomorphisme canonique de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ est un <u>isomorphisme</u>.

En effet, si $x \in \mathfrak{g} \cap J(\mathfrak{g})$, alors d'après le Lemme 6, sa composante de plus haut degré dans l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ c'est-à-dire x est dans $I(\mathfrak{g})$. Puisque $I(\mathfrak{g})$ est un idéal engendré par des tenseurs d'ordre 2 , il en résulte que $x = 0$.

<u>Remarque</u>. L'homomorphisme canonique de $T(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{g})$ définit dans l'espace $U(\mathfrak{g})$ une structure de module à gauche sur $T(\mathfrak{g})$ dont l'annulateur est $J(\mathfrak{g})$. C'est donc une structure de $\mathfrak{g}$-module. La représentation associée $x \to x_U$ est une représentation <u>fidèle</u> de $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})$. En effet si $x_U = 0$, alors $x \otimes I = x$ doit avoir une image canonique nulle dans $U(\mathfrak{g})$ ce qui entraîne $x=0$ d'après la proposition 9. On voit donc que toute algèbre de Lie de dimension finie sur un corps admet une

une représentation <u>fidèle</u>. On observera que l'espace de cette représentation est de dimension infinie sur le corps. On montrera plus loin (§ 4) l'existence d'une représentation fidèle de <u>dimension finie</u>.

<u>Théorème 1</u> (Poincaré). Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps K de caractéristique 0 et soit $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ le sous-espace engendré par les tenseurs symétriques de l'espace $\mathfrak{g}$. La restriction à $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ de l'homomorphisme canonique de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{g})$.

<u>Démonstration</u>. Pour montrer que l'homomorphisme canonique $T(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ applique $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{g})$, il suffit de vérifier que tout tenseur de $\mathfrak{g}$ est somme d'un tenseur dans $J(\mathfrak{g})$ et d'un tenseur dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$. Ceci est trivial pour les tenseurs d'ordre 0 qui sont symétriques. Supposons donc démontré que tout tenseur d'ordre $< p$ est dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) + J(\mathfrak{g})$. Puisque le corps K est de caractéristique 0, tout tenseur d'ordre p est égal, modulo $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, à un tenseur $t \in I(\mathfrak{g})$ d'ordre p. D'après le Lemme 5, $t \in J(\mathfrak{g}) + T_{p-1}(\mathfrak{g})\, J(\mathfrak{g}) + \mathcal{S}(\mathfrak{g})$.

Il reste à prouver que $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \cap J(\mathfrak{g}) = (0)$. Soit en effet t un tenseur non nul dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et soit t_p sa composante d'ordre maximum différente de 0. Si $t \in J(\mathfrak{g})$, alors d'après le Lemme 6, $t_p \in I(\mathfrak{g})$. Mais $t_p \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et $I(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{S}(\mathfrak{g}) = (0)$ contrairement à l'hypothèse $t_p \neq 0$.

N°8. <u>Cohomologie</u>. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un anneau A et M un module de représentation de $\mathfrak{g}$. On désigne par $C^p(\mathfrak{g}, M)$ le module des applications multilinéaires alternées de $\mathfrak{g}^p$ (considéré comme produit direct de A-modules) dans M. Pour p=0, on pose $C^0(\mathfrak{g}, M) = M$ et pour $p < 0$, on pose $C^p(\mathfrak{g}, M) = (0)$. Les éléments de la somme directe $C^*(\mathfrak{g}, M)$ des A-modules $C^p(\mathfrak{g}, M)$ sont appelés des <u>cochaînes</u> de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M

Les cochaînes appartenant à $C^p(\mathfrak{g},M)$ sont dites de degré p.

A tout $y \in \mathfrak{g}$, on associe l'endomorphisme $i(y)$ de $C^*(\mathfrak{g},M)$ qui applique chaque sous-module $C^p(\mathfrak{g},M)$ dans $C^{p-1}(\mathfrak{g},M)$ et qui, pour $p > 0$ est donné par la formule

(5) $$(i(y).f)(x_1,\dots x_{p-1}) = -f(y,x_1,\dots x_{p-1})$$

quels que soient $f \in C^p(\mathfrak{g},M)$ et $(x_1,\dots x_{p-1}) \in \mathfrak{g}^{p-1}$. On a

(6) $$i(y)^2 = 0$$

quel que soit $y \in \mathfrak{g}$.

On a vu (Prop.8) que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ et la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M définissaient une représentation de $\mathfrak{g}$ dans le module des applications multilinéaires de $\mathfrak{g}^p$ dans M. Il résulte immédiatement de la formule (4) que $C^p(\mathfrak{g},M)$ est un sous-module de cette représentation. Il existe donc une représentation $y \longrightarrow \theta(y)$ de $\mathfrak{g}$ dans $C^*(\mathfrak{g},M)$ telle que la restriction de $\theta(y)$ à $C^0(\mathfrak{g},M)$ soit y_M et que pour $p > 0$, la restriction de $\theta(y)$ à $C^p(\mathfrak{g},M)$ soit donnée par la formule :

(7) $$(\theta(y).f)(x_1,x_2,\dots x_p) = y_M.f(x_1,\dots x_p) - \sum_{i=1}^{i=p} f(x_1,\dots [y,x_i],\dots x_p).$$

Puisque $y \longrightarrow \theta(y)$ est une représentation de $\mathfrak{g}$, on a

(8) $$\theta(x)\theta(y) - \theta(y)\theta(x) = \theta([x,y])$$

quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$.

Il résulte facilement des formules (5) et (7) que

(9) $$\theta(x)\, i(y) - i(y)\theta(x) = i([x,y])$$

quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$.

On va maintenant définir un endomorphisme d de $C^*(\mathfrak{g},M)$ qui applique chaque sous-module $C^p(\mathfrak{g},M)$ dans $C^{p+1}(\mathfrak{g},M)$. Si $(x_1,\dots x_r)$ est un élément de $\mathfrak{g}^r$ (r entier > 1), on notera par $(x_1,\dots \hat{x}_i,\dots x_r)$ d'élément de $\mathfrak{g}^{r-1}$ obtenu en omettant x_i dans la suite des composantes de

$(x_1, \dots x_r)$, ceci <u>quel que soit</u> $i \in [1,r]$. Avec cette convention, l'endomorphisme d sera défini par les conditions

$$(d.f)(x) = -x_M.f \qquad \text{si} \quad f \in C^0(\mathfrak{g}, M) = M$$

$$(10) \quad (d.f)(x_1, \dots x_{p+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} f([x_i, x_j], x_1, \dots \hat{x}_i, \dots \hat{x}_j, \dots x_{p+1}) + \sum_i (-1)^i \ (x_i)_M . f(x_1, \dots \hat{x}_i, \dots x_{p+1})$$

si $f \in C^p(\mathfrak{g}, M)$, $p > 0$ et $(x_1, \dots x_{p+1}) \in \mathfrak{g}^{p+1}$.

Dans le second membre de (10), la première somme porte sur tous les couples d'indices i,j tels que $1 \leqslant i < j \leqslant p+1$. La seconde porte sur les $i \in [1, p+1]$. Chacune d'elle donne une application multilinéaire <u>alternée</u> de $\mathfrak{g}^{p+1}$ dans M .

Quel que soit $y \in \mathfrak{g}$, on a

$$(11) \qquad d\,\iota(y) + \iota(y)\,d = \theta(y) \ .$$

En effet, si $f \in C^0(\mathfrak{g}, M)$, on a $(d\,\iota(y) + \iota(y)d).f = \iota(y)d.f = -(d.f)(x) = x_M.f$ et si $f \in C^p(\mathfrak{g}, M)$ avec $p > 0$, alors

$$((d\,\iota(y) + \iota(y)d).f)(x_1, \dots x_p) = \sum_j (-1)^j \ f([y, x_j], x_1, \dots \hat{x}_j, \dots x_p) + y_M.f(x_1, \dots x_p)$$

d'après les formules (5) et (10). Puisque f est alternée, on obtient bien le second membre de (7).

Il est clair que, si f est une cochaîne <u>de degré</u> > 0 et si $\iota(y).f = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$, alors $f = 0$. On va appliquer cette remarque à la démonstration de la formule

$$(12) \qquad d\theta(y) - \theta(y)d = 0 \qquad \text{pour tout} \quad y \in \mathfrak{g} \ .$$

On a d'après (8), (9), (11),

$$\iota(x)(d\theta(y) - \theta(y)d) = \theta(x)\theta(y) - d\,\iota(x)\ \theta(y) - \iota([x,y])\ d - \theta(y)\ \iota(x)d =$$
$$= \theta(x)\theta(y) - \theta(y)\theta(x) - d\,\iota([x,y]) - \iota([x,y])d - (d\theta(y) - \theta(y)d)\ \iota(x) =$$
$$= -(d\theta(y) - \theta(y)\ d)\ \iota(x) \ .$$

Supposons donc que (12) soit vérifiée sur $C^p(\mathfrak{g},M)$ (ce qui est trivial pour $p<0$) et soit $f\in C^{p+1}(\mathfrak{g},M)$. Si $p+1>0$, alors $f'=(d\theta(y)-\theta(y)d).f$ est de degré $p+2>0$. Le calcul précédent montre que $\iota(x).f')=0$ pour tout $x\in\mathfrak{g}$, donc $f'=0$.

On démontre de la même manière que

(13) $$d^2=0$$

On a d'après (12) et (11), $\iota(x)\,d^2=d^2\iota(x)$ pour tout $x\in\mathfrak{g}$. Supposons donc que (13) soit vérifiée sur $C^p(\mathfrak{g},M)$ (ce qui est trivial si $p<0$) et soit $f\in C^{p+1}(\mathfrak{g},M)$. Si $p+1>0$, alors $d^2.f$ est de degré $p+3>0$. On a $\iota(x)\,d^2.f=d^2\iota(x).f=0$ pour tout $x\in\mathfrak{g}$, donc $d^2.f=0$.

Muni de l'endomorphisme d, le module gradué $C(\mathfrak{g},M)$ est donc un <u>complexe</u> (Alg. Homologique). Le sous-module $Z^p(\mathfrak{g},M)$ des <u>cocycles</u> de degré p (c'est-à-dire des zéros de d dans $C^p(\mathfrak{g},M)$) contient le sous-module $B^p(\mathfrak{g},M)=d.C^{p-1}(\mathfrak{g},M)$ des <u>cobords</u> de degré p.

On suppose désormais que A <u>est un corps</u> et que $\mathfrak{g}$ est de dimension finie n sur A. Chaque espace $C^p(\mathfrak{g},M)$ est alors de dimension finie sur A et $C^p(\mathfrak{g},M)=(0)$ si $p>n$.

Le quotient $Z^p(\mathfrak{g},M)/B^p(\mathfrak{g},M)$ est appelé l'<u>espace de cohomologie de degré</u> p <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>à valeurs dans</u> M et sera noté $H^p(\mathfrak{g},M)$. Pour $p=0$, on a $B^0(\mathfrak{g},M)=(0)$ et $Z^0(\mathfrak{g},M)$ est le sous-espace des invariants du $\mathfrak{g}$-module M. Par conséquent, $H^0(\mathfrak{g},M)$ est l'espace des <u>invariants de</u> M.

Si M et N sont deux $\mathfrak{g}$-modules et si φ est un homomorphisme de M dans N, alors, pour toute cochaîne $f\in C^p(\mathfrak{g},M)$, φf est une cochaîne dans $C^p(\mathfrak{g},N)$. L'homomorphisme $\varphi:M\to N$ se prolonge donc en une

une application linéaire φ' de l'espace $C^*(\mathfrak{g},M)$ dans l'espace $C^*(\mathfrak{g},N)$ qui conserve les degrés. Il résulte immédiatement de (10) que $\varphi' d = d\varphi'$. L'application φ' induit donc pour tout p (Alg. homologique) une application $\tilde{\varphi}: H^*(\mathfrak{g},M) \to H^*(\mathfrak{g},N)$. Si $(0) \to L \to M \to N \to (0)$ est une suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules (c'est-à-dire si l'image de chaque homomorphisme coincide avec le noyau du suivant), alors, puisque A est un corps les applications prolongées

$$(0) = C^*(g,(0)) \to C^*(g,L) \to C^*(g,M) \to C^*(g,N) \to C^*(g,(0)) = (0)$$

constituent encore une suite exacte. Il en résulte (alg. homologique) qu'<u>il existe une suite exacte d'applications linéaires</u> :

$$\ldots H^{p-1}(\mathfrak{g},N) \to H^p(\mathfrak{g},L) \to H^p(\mathfrak{g},M) \to H^p(\mathfrak{g},N) \to H^{p+1}(\mathfrak{g},L)\ldots$$

<u>Paragraphe 2</u>. <u>Radical</u>, <u>forme bilinéaire associée à un module de représentation</u>. Dans ce paragraphe, on envisagera uniquement des algèbres de Lie de dimension finie sur un corps K . Les modules de représentation seront sous-entendus de dimension finie sur K .

$N^o 1$. <u>Algèbres de Lie résolubles</u>. On appelle <u>suite de composition</u> d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ une suite finie de sous-algèbres $\mathfrak{g}_i$ $(0 \leq i \leq p)$ ayant pour premier terme $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, pour dernier terme $\mathfrak{g}_p = (0)$ et telle que $\mathfrak{g}_{i+1}$ soit un idéal dans $\mathfrak{g}_i$ $(0 \leq i < p)$. Les quotients $\mathfrak{g}_i / \mathfrak{g}_{i+1}$ s'appellent les <u>quotients de la suite de composition</u>. On dit que la ssuite de composition est strictement décroissante si les quotients diffèrent tous de (0).

<u>Définition 1</u>. Une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps K est appelée <u>résoluble</u> si elle admet une suite de composition dont tous les quotients sont abéliens.

<u>Exemple</u>. Toute algèbre de Lie abélienne est résoluble. L'algèbre de Lie de dimension deux sur K admettant une base x_1, x_2 telle que $[x_1, x_2] = x_2$ est résoluble.

Proposition 1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble. Toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est résoluble. Pour tout idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est résoluble. Si ($\mathfrak{b}$, λ) est une extension de $\mathfrak{g}$ et si le noyau de λ est résoluble, alors $\mathfrak{b}$ est résoluble.

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}_i$ $(0 \leqslant i \leqslant p)$ une suite de composition de $\mathfrak{g}$ dont les quotients sont abéliens. Si $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, alors les sous-algèbres $\mathfrak{g}'_i = \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}'$ constituent une suite de composition de $\mathfrak{g}'$ dont les quotients sont abéliens. De même les quotients $(\mathfrak{g}_i + \mathfrak{h})/\mathfrak{h}$ constituent une suite de composition de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dont les quotients, isomorphes à $(\mathfrak{g}_i + \mathfrak{h})/(\mathfrak{g}_{i+1} + \mathfrak{h})$ sont abéliens. Enfin, si $(\mathfrak{b}, \lambda)$ est une extension de $\mathfrak{g}$, les images inverses $\lambda^{-1}.\mathfrak{g}_i$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{b}$ telles que chaque $\lambda^{-1}, \mathfrak{g}_{i+1}$ soit un idéal dans $\lambda^{-1}.\mathfrak{g}_i$ et que chaque quotient $\lambda^{-1}.\mathfrak{g}_i/\lambda^{-1}.\mathfrak{g}_{i+1}$ isomorphe à $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ soit abélien $(0 \leqslant i \leqslant p)$. Le noyau $\mathfrak{n}$ de λ étant $\lambda^{-1}.\mathfrak{g}_p$, si $\mathfrak{n}_j$ $(0 \leqslant j \leqslant q)$ est une suite de composition de $\mathfrak{n}$ dont les quotients sont abéliens, les sous-algèbres

$$\mathfrak{b} = \lambda^{-1}.\mathfrak{g}_0 \supset \lambda^{-1}.\mathfrak{g}_1 \supset \dots \lambda^{-1}.\mathfrak{g}_p = \mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 \supset \mathfrak{n}_1 \supset \dots \mathfrak{n}_q = (0)$$

constituent une suite de composition de $\mathfrak{b}$ dont les quotients sont abéliens.

Proposition 2. Dans une algèbre de Lie, la somme de deux idéaux résolubles est un idéal résoluble.

Démonstration. Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux résolubles dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le quotient $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ est résoluble d'après la proposit.1. Or $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ est isomorphe à $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$. Soit λ l'homomorphisme canonique de $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ sur $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$. L'extension $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \lambda)$ de l'algèbre de Lie résoluble $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ a pour noyau $\mathfrak{b}$ qui est résoluble. D'après la proposition 1, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est donc résoluble.

Cette proposition montre que le sous-espace engendré par les idéaux résolubles d'une algèbre de Lie de dimension finie est un idéal résoluble contenant tous les idéaux résolubles.

Définition 2. On appelle radical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$.

Proposition 3. Si $\mathfrak{n}$ est le radical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ est (0).

En effet, l'image inverse du ~~xxxxxx~~ radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ par l'homomorphisme canonique $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ est un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et $(\mathfrak{h}, \lambda)$ est une extension du radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ dont le noyau $\mathfrak{n}$ est résoluble. Il résulte donc de la proposition 2 que $\mathfrak{h}$ est résoluble, c'est-à-dire que $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$. Le radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ est donc (0).;

Proposition 4. Pour qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit résoluble, il faut et il suffit qu'il existe un entier $k > 0$ tel que l'idéal dérivé k-ième $D^k\mathfrak{g} = (0)$.

Démonstration. Supposons $\mathfrak{g}$ résoluble et soit $\mathfrak{g}_i$ $(0 \leq i \leq p)$ une suite de composition de $\mathfrak{g}$ dont les quotients sont abéliens. On a pour tout $i < p$, $D\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ et par conséquent $D^p\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_p = (0)$. Réciproquement soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $D^k\mathfrak{g} = (0)$. Les sous-algèbres $\mathfrak{g}_i = D^i\mathfrak{g}$ $(0 \leq i \leq k)$ constituent une suite de composition de $\mathfrak{g}$ car pour $i < k$, $D^{i+1}\mathfrak{g}$ est l'idéal dérivé de $D^i\mathfrak{g}$ (on convient d'écrire $D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$). Ses quotients sont abéliens et par conséquent, $\mathfrak{g}$ est résoluble.

N°2. Théorème d'Engel.

Lemme 1. Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie résoluble et M un module de représentation de $\mathfrak{g}$ différent de (0). Si pour tout $x \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme x_M est nilpotent, alors le sous-module des invariants de M n'est pas nul.

<u>Démonstration</u>. On utilisera une suite de composition de $\mathfrak{g}$ dont tous les quotients sont de dimension 1. Une telle suite existe dans toute algèbre de Lie résoluble. En effet, de toute suite de composition de dont les quotients sont abéliens, on peut extraire une suite de composition strictement décroissante dont les quotients sont abéliens. Parmi toutes les suites de composition strictement décroissantes de $\mathfrak{g}$ dont les quotients sont abéliens, soit $\mathfrak{g}_i$ $(0 \leq i \leq p)$ une suite ayant un nombre maximum de termes. Ses quotients sont de dimension 1 car, si $\mathfrak{g}_i / \mathfrak{g}_{i+1}$ était de dimension > 1, on pourrait intercaler un terme supplémentaire entre $\mathfrak{g}_i$ et $\mathfrak{g}_{i+1}$ sans que la suite cesse d'être strictement décroissante.

Désignons alors par I_i le sous-espace des invariants de M considéré comme module de représentation de $\mathfrak{g}_i$. On va montrer par induction sur i que $I_i \neq (0)$. C'est trivial pour $i = p$ car $\mathfrak{g}_p = (0)$ et par suite $I_p = M$. Supposons démontré que $I_i \neq (0)$ pour un entier $i > 0$. Puisque $\mathfrak{g}_i$ est un idéal dans $\mathfrak{g}_{i-1}$, I_i est un sous-module de M considéré comme module de représentation de $\mathfrak{g}_{i-1}$ (par. 1, n°6, Lemme 4). Soit y un élément de $\mathfrak{g}_{i-1}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}_i$. Puisque tout élément de $\mathfrak{g}_{i-1}$ est égal, modulo le sous-espace $\mathfrak{g}_i$ au produit de y par un scalaire, I_{i-1} est le sous-espace des zéros de la restriction de y_M à I_i. Puisque $I_i \neq (0)$ et que y_M est nilpotent, ce sous-espace I_{i-1} n'est pas nul. On arrive ainsi à la conclusion $I_0 \neq (0)$ annoncée.

<u>Définition 3</u>. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite <u>nilpotente</u> si, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, ad(x) est nilpotent.

<u>Lemme 2</u>. Toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble.

<u>Démonstration</u>. Parmi les <u>sous-algèbres</u> résolubles de $\mathfrak{g}$, soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de dimension maximum. Soit λ l'application linéaire canonique de $\mathfrak{g}$ sur l'espace $M = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. On définit une représentation $x \to x_M$ de $\mathfrak{h}$ dans M en posant $x_M \lambda = \lambda \, \mathrm{ad}(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$,

ce qui est licite car $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre. L'endomorphisme x_M se déduisant de $ad(x)$ par passage au quotient est nilpotent. D'après le Lemme 1, si $M \neq (0)$, il existe dans M un vecteur invariant $u \neq 0$. Soit u' un vecteur de $\mathfrak{g}$ tel que $\lambda . u' = u$. On a $\lambda\, ad(x).u' = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$, c'est-à-dire que le sous-espace $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathfrak{h}$ et u' est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{h}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{h}'$. Une suite de composition de $\mathfrak{h}$ dont les quotients sont abéliens fournira donc avec $\mathfrak{h}'$ une suite de composition de $\mathfrak{h}'$ dont les quotients sont abéliens. Il en résulte que $\mathfrak{h}'$ est résoluble, contrairement à l'hypothèse faite sur $\mathfrak{h}$. On a donc $M = (0)$ ce qui signifie que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

<u>Remarque</u>. Il existe par contre des algèbres de Lie résolubles qui ne sont pas nilpotentes. Par exemple, dans l'algèbre de Lie de dimension deux, engendrée par x_1, x_2 avec $[x_1, x_2] = x_2$, l'endomorphisme $ad(x_1)$ n'est pas nilpotent.

<u>Lemme 3</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Si il existe une représentation fidèle $x \to \rho(x)$ de $\mathfrak{g}$ dans un espace M telle que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\rho(x)$ soit nilpotent, alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente.

<u>Démonstration</u>. Quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$, $\rho(ad(x).y) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)$. On en déduit immédiatement par induction sur p que pour tout entier $p > 0$, $\rho(ad(x)^p.y)$ est une somme de termes de la forme $\pm \rho(x)^r \rho(y) \rho(x)^s$ avec $r+s=p$. Puisque pour tout $x \in \mathfrak{g}$ il existe un entier k tel que $\rho(x)^k = 0$, on a alors $\rho(ad(x)^{2k}.y) = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$. Puisque la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M est fidèle, il en résulte que $ad(x)^{2k} = 0$, et par conséquent que $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

Théorème 1. (Engel). Si $M \neq (0)$ est un module de représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ tel que x_M soit nilpotent pour tout $x \in \mathfrak{g}$, alors le sous-module des invariants de M n'est pas nul.

Démonstration. Supposons d'abord que la représentation $x \to x_M$ soit fidèle. Alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente d'après le Lemme 3, donc résoluble d'après le Lemme 2 et le Théorème résulte donc du Lemme 1. Si le noyau $\mathfrak{h}$ de la représentation $x \to x_M$ n'est pas (0), on se ramène au cas d'une représentation fidèle en remarquant que les invariants du $\mathfrak{g}$-module M sont les invariants de M considéré comme module de la représentation fidèle de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et que ce $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$-module satisfait encore aux conditions de l'énoncé.

Corollaire 1. Toute représentation simple d'une algèbre de Lie par des endomorphismes nilpotents est la représentation nulle de dimension un.

En effet, le module de la représentation doit coïncider d'après le Théorème d'Engel avec le sous-module de ses invariants qui ne serait pas simple si sa dimension était différente de un.

Corollaire 2. Le centre d'une algèbre de Lie nilpotent $\mathfrak{g} \neq (0)$ n'est pas (0).

En effet, appliqué à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, le Théorème d'Engel montre l'existence d'un $y \neq 0$ dans $\mathfrak{g}$ tel que $ad(x).y = [x,y] = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

Corollaire 3. Une algèbre de Lie qui contient un idéal nilpotent non nul contient un idéal abélien non nul.

En effet, le centre de l'idéal nilpotent qui n'est pas nul d'après le Corollaire 2 est un idéal de l'algèbre de Lie d'après le Lemme 3 par.1.

Théorème 2. Soient $\mathfrak{b}$ un idéal dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et M un module de représentation de $\mathfrak{g}$. Si pour tout $x \in \mathfrak{b}$, x_M est nilpotent, alors pour tout $x \in \mathfrak{b}$, x_M est dans le radical de l'algèbre associative enveloppante de M.

Démonstration. Soit $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots M_p = (0)$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module M. Chaque quotient $Q_i = M_i/M_{i+1}$ $(0 \leqslant i < p)$ est un module de représentation simple de $\mathfrak{g}$. Pour tout $x \in \mathfrak{b}$, l'endomorphisme x_{Q_i} de Q_i qui se déduit de x_M par passage au quotient est nilpotent. Le Théorème d'Engel prouve donc que le sous-module des invariants de Q_i considéré comme module de représentation de $\mathfrak{b}$ n'est pas nul. Mais puisque $\mathfrak{b}$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$, il résulte du Lemme 4 par.1 que ce sous-module d'invariants est également un sous-module de Q_i considéré comme $\mathfrak{g}$-module. Par suite il coïncide avec Q_i ce qui signifie que, pour tout i $(0 \leqslant i < p)$, $x_M . M_i \subset M_{i+1}$. Quel que soit le tenseur t sur $\mathfrak{g}$, on a $t_M . M_i \quad M_i$, par conséquent, $x_M t_M . M_i \quad M_{i+1}$ et par suite $(x_M t_M)^p . M = (0)$. Il en résulte que x_M est dans le radical de l'algèbre enveloppante de M qui est l'algèbre des endomorphismes de la forme t_M.

Le plus grand idéal nilpotent. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ c'est-à-dire un idéal tel que pour tout $x \in \mathfrak{h}$, la restriction de ad(x) à $\mathfrak{h}$ soit nilpotente. Puisque $\mathfrak{h}$ est un idéal, on a ad(x). $\mathfrak{g} \in \mathfrak{h}$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$, par conséquent ad(x) est nilpotent pour tout $x \in \mathfrak{h}$. Le Théorème précédent, appliqué au module de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ montre donc que pour tout $x \in \mathfrak{h}$, ad(x) est dans le radical de l'algèbre enveloppante E de ce module. Inversement, l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que ad(x) soit dans le radical de E est visiblement un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ qui contient donc tous les idéaux nilpotents de $\mathfrak{g}$. On l'appelle le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$.

N°3. Le radical nilpotent.

Définition 4. On appelle radical nilpotent d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'intersection des noyaux des représentations simples de $\mathfrak{g}$. Une algèbre de Lie dont le radical nilpotent est (0) est dite réductive.

Proposition 5. Pour qu'une algèbre de Lie soit réductive, il faut et il suffit qu'elle possède une représentation semi-simple fidèle.

Démonstration. La condition est trivialement suffisante. Supposons inversement ~~xx~~ que le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ soit (0). Parmi les représentations semi-simples de $\mathfrak{g}$, choisissons une représentation dont le noyau $\mathfrak{h}$ est de dimension minimum r. Soit M le module de cette représentation. Si $r \neq 0$, alors $\mathfrak{h}$ contient un élément $x \neq 0$ et puisque x n'est pas dans le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$, il existe un $\mathfrak{g}$-module N tel que $x_N \neq 0$. Alors $M \times N$ est un $\mathfrak{g}$-module semi-simple et le noyau de la représentation associée est au plus de dimension $r-1$, car il est contenu dans $\mathfrak{h}$ et ne contient pas x. Ceci étant contraire à l'hypothèse faite sur $\mathfrak{h}$, on a $r = 0$.

Il résulte de cette proposition qu'un produit direct d'algèbres réductives $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ est encore une algèbre réductive. En effet, si M (resp. N) est le module d'une représentation semi-simple fidèle de $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}$), alors on définit dans l'espace $M \times N$ une représentation fidèle de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ en posant

$$(x,y)_{M\times N}.(u,v) = (x_M.u, y_N.v)$$

quels que soient $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{b}$, $u \in M$ et $v \in N$. Il est clair que cette représentation est semi-simple.

Toute algèbre de Lie abélienne est réductive. D'après ce qui précède, il suffit en effet de montrer qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension un est réductive puisque toute algèbre de Lie abélienne est isomorphe à un produit direct d'algèbres de dimension un. Si $x \neq 0$ est une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et si V est un espace vectoriel de dimension deux engendré par les vecteurs e_1 et e_2, on définit une représentation simple fidèle de $\mathfrak{g}$ dans V en posant $x_V.e_1 = e_2$ et $x_V.e_2 = -e_1$.

Ceci montre que le radical nilpotent est en général plus petit que le plus grand idéal nilpotent.

<u>Proposition 6</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Pour qu'un idéal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ soit contenu dans le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$, il faut et il suffit que, pour tout module de représentation M de $\mathfrak{g}$, x_M soit nilpotent pour tout x dans $\mathfrak{h}$.

<u>Démonstration</u>. Soit x un élément du radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ et soit $E(\mathfrak{g}, M)$ l'algèbre enveloppante d'un $\mathfrak{g}$-module M. Tout module simple à gauche sur $E(\mathfrak{g}, M)$ de dimension finie sur le corps K est un $\mathfrak{g}$-module simple. Par conséquent x_M est dans l'annulateur de tout module simple sur $E(\mathfrak{g}, M)$ (de dimension finie sur K) ce qui prouve qu'il est dans le radical de $E(\mathfrak{g}, M)$.

Inversement, soit $\mathfrak{h}$ un idéal vérifiant les conditions de l'énoncé, et soit M un module de représentation simple de $\mathfrak{g}$. La restriction à $\mathfrak{h}$ de la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M étant une représentation de $\mathfrak{h}$ par des endomorphismes nilpotents, il résulte du Théorème d'Engel que le sous-espace I des $e \in M$ tels que $x_M . e = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$ n'est pas nul. Or c'est un $\mathfrak{g}$-sous-module de M d'après le Lemme 4 par.1. On a donc $I = M$ ce qui prouve que $\mathfrak{h}$ est dans le noyau de toute représentation simple de $\mathfrak{g}$.

N°4. <u>Répliques</u>.

Dans ce n° on désignera par V un espace vectoriel de dimension n sur le corps K et par V_q^p l'espace tensoriel $(\overset{p}{\otimes} V) \otimes (\overset{q}{\otimes} V^*)$, V_0^0 étant K. La représentation canonique de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ dans V définit dans chaque espace V_q^p une représentation $\alpha \to \alpha_q^p$ de $\mathfrak{gl}(V)$. Compte tenu des formules (3) et (4) du § 1, on a en posant $\alpha^* = -\alpha^t$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{gl}(V)$,

(1) $$\alpha_q^p . (u_1 \otimes u_2 \dots u_p \otimes v_1^* \otimes v_2^* \otimes \dots v_p^* =$$
$$\sum_{i=1}^{i=p} u_1 \otimes \dots (\alpha . u_i) \dots u_p \otimes v_1^* \otimes \dots v_q^* + \sum_{j=1}^{j=q} u_1 \otimes \dots u_p \otimes v_1^* \dots (\alpha^* . v_j^*) \otimes \dots v_q^*$$

quels que soient les $u_i \in V$ et les $v_j^* \in V^*$. Si $p=q$, on pose $\alpha_q^p = 0$.

<u>Définition 5</u>. Un endomorphisme β de l'espace vectoriel V est appelé une <u>réplique</u> de l'endomorphisme α si, quels que soient les entiers $p,q \geqslant 0$, tout zéro de α^p_q dans V^p_q est un zéro de β^p_q.

<u>Lemme 4</u>. Toute réplique d'un endomorphisme α est un polynome en α.

<u>Démonstration</u>. Identifions V^1_1 avec l'espace $\mathcal{L}(V,V)$ des endomorphismes de V par l'isomorphisme qui fait correspondre à un tenseur $(u \otimes v^*)$ l'endomorphisme appliquant $u' \in V$ en $\langle u', v^* \rangle u$. L'endomorphisme ρ^1_1 de V^1_1 transforme alors un endomorphisme γ de V en l'endomorphisme $\rho^1_1.\gamma = \rho\gamma - \gamma\rho$. Il en résulte que, si β est une réplique de α, pour tout endomorphisme γ de V tel que $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, on a $\beta\gamma = \gamma\beta$. Ceci prouve que β est un polynome en α.

<u>Lemme 5</u>. Si α est un endomorphisme diagonal de V, alors quels que soient les entiers $p,q \geqslant 0$, α^p_q est un endomorphisme diagonal. Si $e_1, e_2, \dots e_n$ est une base de V constituée par des vecteurs propres de α et si λ_i désigne la valeur propre de e_i, alors, pour tout endomorphisme h de K considéré comme espace vectoriel sur son corps premier, l'endomorphisme β de V défini par $\beta.e_i = (h.\lambda_i)e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est une réplique de α.

<u>Démonstration</u>. Soit (e^*_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ la base duale de (e_i). On a $\alpha^*.e^*_i = -\alpha^t.e^*_i = -\lambda_i\, e_i$. Les tenseurs décomposables de V^p_q de la forme $t = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \dots e_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \dots e_{j_q}$ où $i_1, i_2, \dots i_p$ et $j_1, j_2 \dots j_q$ sont des suites arbitraires d'entiers dans $[1,n]$ constituent une base de V^p_q. On a d'après (1),

$$\alpha^p_q.t = \left(\sum_{r=1}^{r=p} \lambda_{i_r} - \sum_{s=1}^{s=q} \lambda_{j_s}\right) t$$

ce qui prouve que V^p_q admet une base de vecteurs propres pour α^p_q qui est donc diagonal. Le même calcul montre que

$$\beta^p_q.t = \left(h.\left(\sum_{r=1}^{r=p} \lambda_{i_r} - \sum_{s=1}^{s=q} \lambda_{j_s}\right)\right) t$$

Par conséquent, si t' est un tenseur dans V^p_q tel que $\alpha^p_q.t' = \lambda t'$, $(\lambda \in K)$, alors $\beta^p_q.t' = (h.\lambda)t'$. En particulier tout zéro de α^p_q est un zéro de β^p_q, ce qui prouve que β est une réplique de α.

Lemme 6. Si α est un endomorphisme de V dont toutes les racines sont dans le corps K, alors la composante diagonale et la composante nilpotente de α sont des répliques de α.

Démonstration. Soient δ et ν les composantes diagonale et nilpotente de α. D'après le Lemme 5, δ^p_q est diagonal et il résulte immédiatement de (1) que ν^p_q est nilpotent quels que soient les entiers $p,q \geqslant 0$. Puisque $\gamma \to \gamma^p_q$ est une représentation de $\mathfrak{gl}(V)$, on a $\alpha^p_q = \delta^p_q + \nu^p_q$ et $[\delta^p_q, \nu^p_q] = [\delta, \nu]^p_q = 0$. Par conséquent, δ^p_q et ν^p_q sont les composantes diagonale et nilpotente de α^p_q. Tout zéro de α^p_q est donc un zéro de δ^p_q et de ν^p_q, ce qui prouve que δ et ν sont des répliques de α.

Lemme 7. Si β est une réplique de α, alors quels que soient $p,q \geqslant 0$, β^p_q est une réplique de α^p_q.

Démonstration. On peut évidemment supposer $p+q \neq 0$, car sur V^o_o les endomorphismes α^o_o et β^o_o sont nuls. Posons $U = V^p_q$. L'espace $U^r_s = (\overset{r}{\otimes} U) \otimes (\overset{s}{\otimes} U^*)$ est un module de représentation de $\mathfrak{gl}(U)$. La représentation $\gamma \to \gamma^p_q$ de $\mathfrak{gl}(V)$ dans $\mathfrak{gl}(U)$ y définit une représentation $\gamma \longrightarrow (\gamma^p_q)^r_s$ de $\mathfrak{gl}(V)$. L'isomorphisme canonique de $U^o_1 = U^*$ sur V^q_p est compatible avec les structures de $\mathfrak{gl}(V)$ modules. Il en résulte que l'isomorphisme canonique φ de U^r_s sur V^{pr+qs}_{ps+qr} est également compatible avec les structures de $\mathfrak{gl}(V)$-modules, c'est-à-dire que $\gamma^{pr+qs}_{ps+qr}\varphi = \varphi(\gamma^p_q)^r_s$ pour tout $\gamma \in \mathfrak{gl}(V)$. Par suite, si $e \in U^r_s$ est un zéro de $(\alpha^p_q)^r_s$, alors $\varphi.e$ est un zéro de α^{pr+qs}_{ps+qr}, donc de β^{pr+qs}_{ps+qr} et par conséquent, e est un zéro de $(\beta^p_q)^r_s$.

<u>Proposition 7</u>. Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K de caractéristique 0 . Pour qu'un endomorphisme α de V soit nilpotent, il faut et il suffit que pour toute réplique β de α , $\mathrm{Tr}\ \alpha\beta = 0$.

<u>Démonstration</u>. D'après le Lemme 4, si β est une réplique de α , alors $\alpha\,\beta = \beta\alpha$; par conséquent, si α est nilpotent, il en est de même de $\alpha\beta$ et l'on a donc $\mathrm{Tr}\ \alpha\beta = 0$.

Supposons inversement que α soit un endomorphisme de V tel que $\mathrm{Tr}\ \alpha\beta = 0$ pour toute réplique β de α . On montrera que α est nilpotent en supposant d'abord que toutes ses racines sont dans le corps K ce qui permet de l'écrire comme somme de sa composante diagonale δ et de sa composante nilpotente ν qui sont encore des endomorphismes de V . Soit e_i une base de V constituée par des vecteurs propres de δ $(1 \leq i \leq n)$. On pose $\delta . e_i = \ell_i\, e_i$ où $\ell_i \in K$. Les scalaires ℓ_i engendrent dans K, considéré comme espace vectoriel sur son corps primitif R, un espace vectoriel de dimension finie P . Si $\delta \neq 0$, alors $P \neq \{0\}$ et une base $u_1, u_2, \ldots u_p$ de P contient au moins un élément. Pour tout $\ell \in P$, on pose $\ell = \sum_{j=1}^{j=p} h_j(\ell) u_j$ où les $h_j(\ell)$ sont des fonctions R-linéaires de P à valeur dans R . Soit f un endomorphisme de K considéré comme espace vectoriel sur R tel que, pour tout $\ell \in P$, $f.\ell = h_1(\ell) \in R \subset K$. D'après le Lemme 5, l'endomorphisme β de V défini par $\beta . e_i = (f.\ell_i) e_i$ $(1 \leq i \leq n)$ est une réplique de δ , par conséquent (Lemme 6) une réplique de α . Il résulte du Lemme 4 que β et ν sont des polynomes en α , donc que $\beta\nu = \nu\beta$. Par suite, ν étant nilpotent, $\mathrm{Tr}\ \beta\nu = 0$. On doit donc avoir $\mathrm{Tr}\ \beta\delta = 0$. Mais $\mathrm{Tr}\ \beta\delta = \sum_{i=1}^{i=n} h_1(\ell_i)\ell_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=p} h_1(\ell_i)\, h_j(\ell_i)\, u_j$. Les fonctions $h_j(\ell)$ étant à valeur dans R et les u_i étant linéairement indépendants par rapport à R , il en résulte que $\sum_{i=1}^{i=n} h_1(\ell_i)^2 = 0$. Mais puisque la caractéristique de K est 0, son corps primitif R est isomorphe au corps des rationnels.

On a donc $h_1(\ell_i)=0$ pour tout i contrairement à la définition des u_i. Par conséquent, $\delta=0$ et $\alpha = \nu$ est nilpotent.

On va maintenant démontrer la proposition dans le cas général. Soit L une extension algèbrique de degré fini de K contenant les racines de l'endomorphisme α .

Si ℓ_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ est une base de L considéré comme espace vectoriel sur K , il existe des endomorphismes β_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ de V tels que $\beta = \sum_{j=1}^{j=s} \ell_j \beta_j$. Les K-isomorphismes canoniques $V \rightarrow V_{(L)} = L \otimes V$ et $V^* \longrightarrow (V_{(L)})$ définissent quels que soient les entiers $p,q \geqslant 0$ un K-isomorphisme canonique de V^p_q dans $(V_{(L)})^p_q$. Cet isomorphisme se prolonge en un L-isomorphisme de $L \otimes V^p_q$ sur $(V_{(L)})^p_q$. En utilisant la formule (1), on vérifie facilement que, si l'on identifie $L \otimes V^p_q$ et $(V_{(L)})^p_q$ au moyen de cet isomorphisme, alors, pour tout endomorphisme γ de V , on a

$$(2) \qquad (\gamma_{(L)})^p_q \cdot (\ell \otimes e) = \ell \otimes (\gamma^p_q \cdot e)$$

quels que soient $\ell \in L$ et $e \in V^p_q$. Par conséquent, si u est un zéro de α^p_q , alors $1 \otimes u$ est un zéro de $(\alpha_{(L)})^p_q$. Puisque β est par hypothèse une réplique de α , $1 \otimes u$ est donc un zéro de β^p_q , c'est à dire, d'après (2), que $\sum_{j=1}^{j=s} \ell_j \otimes (\beta_j)^p_q \cdot u = 0$. Il en résulte que $(\beta_j)^p_q \cdot u = 0$ pour tout j et donc que <u>chaque β_j est une réplique</u> de α . Par conséquent, $\mathrm{Tr}\, \beta\alpha_{(L)} = \sum_{j=1}^{j=s} \ell_j \,(\beta_j)_{(L)}\alpha_{(L)} = \sum_{j=1}^{j=s} \ell_j \,\mathrm{Tr}\, \beta_j\alpha = 0$. Ceci ayant lieu pour toute réplique β de $\alpha_{(L)}$, la première partie de la démonstration prouve que $\alpha_{(L)}$ et par conséquent α sont nilpotents.

N°5. <u>Modules de représentation algèbrique</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 et soit M un module de représentation de $\mathfrak{g}$. Pour que l'endomorphisme x_M correspondant à un $x \in \mathfrak{g}$ soit dans le radical de l'algèbre enveloppante de M , il est nécessaire que

$x_M y_M$ soit nilpotent pour tout $y \in \mathfrak{g}$, donc en particulier $\mathrm{Tr}\ x_M y_M = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$. On va montrer que, pour certains modules de représentation, cette condition est suffisante.

Définition 6. Un module de représentation M d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dit algébrique si, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, toute réplique de l'endomorphisme x_M de M est de la forme y_M avec $y \in \mathfrak{g}$.

Proposition 8. Soient M un module de représentation algébrique d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps de caractéristique 0 et x un élément de $\mathfrak{g}$. Pour que x_M soit dans le radical de l'algèbre enveloppante de M, il faut et il suffit que $\mathrm{Tr}\ x_M y_M = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$.

On a déjà observé que la condition était nécessaire. D'autre part, la forme bilinéaire $B_M(y,z) = \mathrm{Tr}\ y_M z_M$ associée à M étant invariante (§ 1, n°6), le sous-espace $\mathfrak{h}$ des éléments $y \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathrm{Tr}\ y_M z_M = 0$ pour tout $z \in g$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Mais si $y \in \mathfrak{h}$, alors $\mathrm{Tr}\ y_M \beta = 0$ pour toute réplique β de y_M puisque M étant un module de représentation algébrique, toute réplique de y_M est de la forme z_M avec $z \in g$. Il résulte donc de la proposition 7 que pour tout y dans l'idéal $\mathfrak{h}$, y_M est nilpotent. Le Théorème 2 du n°2 montre donc que pour tout $x \in \mathfrak{h}$, x_M est dans le radical de l'algèbre enveloppante de M.

Dans le cas d'un module de représentation quelconque, on a le résultat moins précis qui suit.

Théorème 3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0. Si M est un module de représentation de $\mathfrak{g}$ et si $x \in \mathfrak{g}$ vérifie la condition $\mathrm{Tr}\ x_M y_M = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$, alors quel que soit $z \in \mathfrak{g}$, $[x,z]_M$ est dans le radical de l'algèbre enveloppante de M.

Démonstration. Soit $\mathfrak{h}$ l'image dans $\mathfrak{gl}(M)$ de la représentation $x \to x_M$ de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h}'$ le sous-espace des $\alpha \in \mathfrak{gl}(M)$ tels que $[\alpha, x_M] \in \mathfrak{h}$ pour tout $x \in g$. Puisque $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de l'algèbr de Lie $\mathfrak{gl}(M)$, l'identité de Jacobi montre que $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(M)$. La restriction à $\mathfrak{h}'$ de l'isomorphisme identique de $\mathfrak{gl}(M)$ définit dans M une représentation de $\mathfrak{h}'$. Nous allons montrer que le module de cette représentation est algèbrique.

Les notations étant celles du n°4, identifions $\mathfrak{gl}(M)$ avec l'espace tensoriel M_1^1. Quels que soient les endomorphismes α, β de l'espace M, on a $\alpha_1^1.\beta = \alpha\beta-\beta\alpha$. Par conséquent, pour qu'un endomorphisme α de M soit dans $\mathfrak{h}'$, il faut et il suffit que $\alpha_1^1.\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}$. Soit β une réplique de $\alpha\in\mathfrak{h}'$; d'après le lemme 7, β_1^1 est une réplique de l'endomorphisme α_1^1 de l'espace M_1^1. C'est donc un polynome en α_1^1 d'après le Lemme 4. On a donc $\beta_1^1.\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}$, ce qui prouve que $\beta\in\mathfrak{h}'$ et donc que M est un module de représentation algèbrique de $\mathfrak{h}'$. Soit alors un $x\in\mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{Tr}\ x_M y_M = 0$ pour tout $y\in\mathfrak{g}$. Quels que soient $z\in\mathfrak{g}$ et $\beta\in\mathfrak{h}'$, on a $\mathrm{Tr}[x,z]_M\beta = \mathrm{Tr}\ (x_M z_M \beta - z_M x_M \beta) =$ $= \mathrm{Tr}\ x_M[z_M,\beta] = 0$ car $[z_M,\beta]\in\mathfrak{h}$. La proposition 8 montre donc que $[x,z]_M$ est dans le radical de l'algèbre enveloppante $E(\mathfrak{h}',M)$ de M considéré comme module de représentation de $\mathfrak{h}'$, donc à fortiori dans le radical de l'algèbre enveloppante $E(\mathfrak{g},M)$ de M (considéré comme $\mathfrak{g}$-module) qui est contenue dans $E(\mathfrak{h}',M)$ puisque $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}'$.

N°6. <u>Forme bilinéaire et cohomologie</u>.

<u>Proposition 9</u>. Soit M un module de représentation simple d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps de caractéristique 0. Si il existe dans $\mathfrak{g}$ un idéal $\mathfrak{h}\neq(0)$ tel que la restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme bilinéaire associée à M soit non dégénérée, alors $H^p(\mathfrak{g},M) = (0)$ pour tout entier p.

<u>Démonstration</u>. Soit $B(x,y)$ la forme bilinéaire associée à M. Si (y_i) $(1 \leqslant i \leqslant r)$ est une base de l'espace $\mathfrak{h}$, alors il existe dans $\mathfrak{h}$ une base (y'_j) $(1 \leqslant j \leqslant r)$ orthogonale à (y_i) c'est-à-dire telle que $B(y_i,y'_j)=\delta_{ij}$ quels que soient $i,j \in [1,r]$. Puisque $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, quels que soient $x \in \mathfrak{g}$ et $k \in [1,r]$, il existe des scalaires a_{ks} et a'_{ks} $(1 \leqslant s \leqslant r)$ tels que

$$(3) \qquad [x,y_k] = \sum_{s=1}^{s=r} a_{ks}\, y_s \;, \qquad [x,y'_k] = \sum_{s=1}^{s=r} a'_{ks}\, y'_s$$

Mais $B(x,y)$ étant invariante, on a quels que soient k et s

$$B([x,y_k]),y'_s\,) + B\,(y_k,[x,y'_s]) = 0 \quad \text{ce qui prouve que}$$

$$(4) \qquad a_{ks} + a'_{sk} = 0 \qquad (k,s \in [1,r])$$

est une conséquence des égalités (3).

Ceci étant, on démontre la proposition en construisant un <u>opérateur d'homotopie</u> dans le complexe $C^*(\mathfrak{g},M)$ des cochaînes de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M (§ 1, n°8). Soit ρ l'endomorphisme de l'espace $C^*(\mathfrak{g},M)$ qui applique chaque sous-espace $C^p(\mathfrak{g},M)$ dans $C^{p-1}(\mathfrak{g},M)$ et qui pour $p > 0$ est défini par

$$(\rho.f)(x_1,\ldots x_{p-1}) = \sum_{k=1}^{k=r} (y_k)_M . f(y'_k,x_1,\ldots\, x_{p-1})$$

Si $x \in \mathfrak{g}$ et si $\iota(x)$ est l'endomorphisme défini au § 1, n°8 par la formule (5), alors on a

$$(5) \qquad \rho\;\iota(x) + \iota(x)\;\rho = 0$$

De même, si $\theta(x)$ est l'endomorphisme défini au § 1, n°8 par la formule (7) on a

$$\begin{aligned}((\theta(x)\rho-\rho.\theta(x)).f)(x_1,\ldots x_{p-1}) &= \sum_k x_M(y_k)_M.f(y'_k,x_1,\ldots x_{p-1}) \\ &- \sum_k (y_k)_M x_M.f(y'_k,x_1,\ldots x_{p-1}) \\ &+ \sum_k (y_k)_M\;.f([x,y'_k]\;,x_1,\ldots x_{p-1}\end{aligned}$$

Puisque $x_M(y_k)_M - (y_k)_M x_M = [x,y_k]_M$, il résulte des relations (4) que

(6) $\theta(x)\rho = \rho\theta(x)$

pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Si d est la différentielle de $C^*(\mathfrak{g},M)$ définie au § 1, n°8, on a, compte-tenu des relations (5), (6) et ((11),n°8, § 1) :

$$\iota(x)(d\rho + \rho d) = \theta(x)\rho - d\,\iota(x)\rho - \rho\,\iota(x)d = (d\rho + \rho d)\,\iota(x) + \theta(x)\rho$$
$$-\rho\theta(x) = (d\rho + \rho d)\,\iota(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{g} .$$

Soit d'autre part γ l'endomorphisme $-\sum_k (y_k)_M(y_k')_M$ de l'espace M . Il se prolonge en un endomorphisme Γ de $C^*(\mathfrak{g},M)$ qui applique toute cochaîne f sur la cochaîne γ^f . On a évidemment $\iota(x)\Gamma = \Gamma\iota(x)$ pour tout x dans $\mathfrak{g}$. On en déduit que

(7) $\rho d + d\rho = \Gamma$.

En effet, l'égalité a lieu sur $C^0(\mathfrak{g},M) = M$ car pour tout $f \in M$, on a

$(d\rho + \rho d).f = \rho\, d.f = -\sum_k (y_k)_M(y_k')_M.f$

Supposons qu'elle soit vérifiée sur $C^p(\mathfrak{g},M)$ avec $p \geqslant 0$, alors compte-tenu de (6) si $f \in C^{p+1}(\mathfrak{g},M)$ on a pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

$\iota(x)(d\rho + \rho d).f = (d\rho + \rho d)\,\iota(x).f = \Gamma\iota(x).f = \iota(x)\Gamma.f$ ce qui entraîne $(d\rho + \rho d).f = \Gamma.f$ puisque f est de degré > 0 .

Puisque $\rho\theta(x) = \theta(x)\rho$ et que $d\theta(x) = \theta(x)d$ (§ 1,n°8, formule (12)), on a $\Gamma\,\theta(x) = \theta(x)\Gamma$. En particulier, la restriction γ de Γ à $C^0(\mathfrak{g},M) = M$ commute avec la restriction x_M de $\theta(x)$. Par conséquent, l'image $\gamma.M$ de γ est un sous-module de représentation de $\mathfrak{g}$. Puisque M est simple, on doit avoir $\gamma.M = (0)$ ou $\gamma.M = M$. La première alternative est écartée du fait que, par définition de B(x,y), la trace de γ est égale à r qui n'est pas nul puisque $\mathfrak{h} \neq (0)$ et puisque le corps est supposé de caractéristique 0. On voit donc que γ , et par conséquent Γ sont des <u>isomorphismes</u>. Puisque $d^2=0$, on a $\Gamma d = d\Gamma$ et donc

$\Gamma^{-1} d = d\Gamma^{-1}$. Il en résulte que $d(\rho\Gamma^{-1}) + (\rho\Gamma^{-1})d = \Gamma\Gamma^{-1}$ est l'automorphisme identique de l'espace $C^*(\mathfrak{g},M)$. Tout cocycle $f \in C^*(\mathfrak{g},M)$ est donc égal au cobord $d(\rho\Gamma^{-1}).f$ ce qui prouve que pour tout p, $H^p(\mathfrak{g},M)=(0)$.

<u>Remarque</u>. L'endomorphisme γ de M qui ne dépend que de l'idéal $\mathfrak{h}$ est appelé l'opérateur de Casimir.

<u>Paragraphe 3</u>. <u>Algèbres de Lie semi-simples</u>. Les conventions de ce paragraphe sont les mêmes que celles du paragr.2 .

N°1. <u>Théorème fondamental</u>.

<u>Définition 1</u>. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite <u>simple</u> si elle n'est pas abélienne et si elle ne possède pas d'autres idéaux que les idéaux (0) et $\mathfrak{g}$.

On écarte les algèbres de Lie abéliennes de manière à ne pas avoir parmi les algèbres simples les algèbres de dimension un qui sont exagérément simples.

L'objet de ce paragraphe est la démonstration du

<u>Théorème 1</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps K de caractéristique 0 . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) tout module de représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

2) le seul idéal abélien de $\mathfrak{g}$ est l'idéal (0),

3) la forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}$ n'est pas dégénérée,

4) le radical de $\mathfrak{g}$ est (0)

5) $\mathfrak{g}$ est isomorphe à un produit direct d'algèbres simples.

<u>Définition 2</u>. Une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps de caractéristique 0 est appelée <u>semi-simple</u> si elle vérifie les conditions du Théorème 1.

On trouvera la <u>démonstration</u> de ce Théorème dans les n°1,2 et 3 de ce paragraphe, suivant le schéma

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] (1) \arrow[r, Rightarrow, "\text{Pr.1}"'] & (5) \arrow[r, Rightarrow, "\text{Pr.2}"'] & (4) \arrow[r, Rightarrow, "\text{Pr.3}"'] & (2) \arrow[d, Rightarrow, shift right, "\text{Pr.5}"'] \arrow[r, Rightarrow, "\text{Pr.7}"'] & (1) \\ & & & (3) \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\text{Pr.4}"'] & \end{tikzcd}$$

Les propositions 1,2,3,4, contrairement aux propositions 5 et 7 ne font pas intervenir d'hypothèse sur la caractéristique du corps.

<u>Proposition 1</u>. Si tous les modules de représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sont semi-simples, alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à un produit d'algèbre simple

<u>Démonstration</u>. Supposons d'abord que le module de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ soit simple. Il n'existe alors dans $\mathfrak{g}$ pas d'autre idéal que $\mathfrak{g}$ et (0). D'autre part, $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne car dans le cas contraire, l'application linéaire $x \to x_N$ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre des endomorphismes de l'espace $N = K \times \mathfrak{g}$ définie par $x_N.(1,y)=(0,x)$ quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$ serait une représentation de g dans N qui ne serait pas semi-simple car $(0,\mathfrak{g})$ serait un sous-module ne possédant pas de sous-module supplémentaire dans N.

Remarquons maintenant que si tous les modules de représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sont semi-simples et si $\mathfrak{h}$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$, alors tous les modules de représentation de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ peuvent être considérés comme modules de représentation de $\mathfrak{g}$ et sont par conséquent semi-simples. On va alors démontrer la proposition dans le cas général en procédant par induction sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g} \neq (0)$ et n'est pas simple, alors il existe dans $\mathfrak{g}$ un idéal $\mathfrak{h}$ tel que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soient de dimension inférieure à la dimension de $\mathfrak{g}$. Puisque le module de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, est semi-simple il existe dans $\mathfrak{g}$ un idéal $\mathfrak{h}'$ supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$. Il résulte alors de l'hypothèse inductive et de la remarque précédente que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont isomorphes à des produits directs d'algèbres simples. Mais puisque $\mathfrak{g}$ est une extension triviale de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ est isomorphe au produit direct de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, ce qui achève la démonstration.

<u>Lemme 1</u>. Si les algèbres de Lie $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ont pour radical (0), alors le radical du produit direct $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ est (0).

L'homomorphisme $\rho : (x,y) \longrightarrow x$ de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ <u>sur</u> $\mathfrak{a}$ applique le radical $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ sur un idéal de $\mathfrak{a}$ qui est résoluble d'après le Prop. 1 du § 2. On a donc $\rho . \mathfrak{h} = (0)$ ce qui signifie que $\mathfrak{h} \subset (0, \mathfrak{b})$. On démontre de la même manière que $\mathfrak{h} \subset (\mathfrak{a}, 0)$ ce qui prouve que $\mathfrak{h} = (0)$.

En effet, si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie simple, son radical ne peut être $\mathfrak{a}$ car on devrait avoir $D\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$, donc $D\mathfrak{a} = (0)$ alors que $\mathfrak{a}$ n'est pas abélienne. Le radical de $\mathfrak{a}$ est donc (0). La proposition s'en déduit par application répétée du Lemme 1 .

<u>Proposition 3</u>. Si le radical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est (0), alors (0) est le seul idéal abélien de $\mathfrak{g}$.

Car un idéal abélien est résoluble.

<u>Proposition 4</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie dont la forme bilinéaire fondamentale n'est pas dégénérée. Le seul idéal abélien de $\mathfrak{g}$ est l'idéal (0).

Soit en effet $\mathfrak{h}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Si $x \in \mathfrak{h}$ et $y \in \mathfrak{g}$, alors $ad(y)ad(x)$ applique $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ est un idéal. D'autre part $ad(x).\mathfrak{h} = (0)$ car $\mathfrak{h}$ est abélien. Il en résulte que $(ad(y)ad(x))^2 = 0$. Par conséquent $Tr\, ad(x)ad(y) = 0$ quels que soient $x \in \mathfrak{h}$ et $y \in \mathfrak{g}$; ceci entraîne $x=0$, donc $\mathfrak{h} = (0)$.

N°2. <u>Forme bilinéaire associée à un module de représentation d'une algèbre de Lie sans idéal abélien</u>.

<u>Théorème 1</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 dont le seul idéal abélien est l'idéal (0). Pour tout module de représentation fidèle M de $\mathfrak{g}$ et tout idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, la restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme bilinéaire associée à M n'est pas dégénérée.

<u>Démonstration</u>. Soit $B(x,y)$ la forme bilinéaire associée à M et $\mathfrak{h}'$ le sous-espace des $x \in \mathfrak{h}$ tels que $B(x,y)=0$ pour tout $y \in \mathfrak{h}$. La forme $B(x,y)$ étant invariante (§ 1, n°6) on a $B([z,x]),y) = -B(x,[z,y]) = 0$

<u>Proposition 2</u>: Si une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un produit d'algèbres simples, alors le radical de $\mathfrak{g}$ est (0).

quels que soient $x \in \mathfrak{h}'$, $y \in \mathfrak{h}$ et $z \in \mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{h}'$ est un <u>idéal dans</u> $\mathfrak{g}$. Il en résulte que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$ (Lemme 1, n°1, § 1). Le Théorème 3 du § 2, n°6 appliqué à M considéré comme module de représentation de $\mathfrak{h}$ montre que x_M est nilpotent pour tout $x \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Mais puisque $x \longrightarrow x_M$ est une représentation fidèle de $\mathfrak{g}$, donc aussi de $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']$, le Lemme 3 du n°2, § 2 montre que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']$ est un idéal nilpotent. D'après le corollaire 3 au Théorème d'Engel (Théorème 1, n°2, § 2), il en résulte que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'] = (0)$, car autrement $\mathfrak{g}$ possèderait un idéal abélien $\neq (0)$. Par conséquent, $\mathfrak{h}'$ est dans le centre de $\mathfrak{h}$. Mais le centre de $\mathfrak{h}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ (Lemme 3, n°2, § 1). On a donc $\mathfrak{h}' = (0)$, ce qui achève la démonstration.

<u>Proposition 5.</u> Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ n'a pas d'autre idéal abélien que (0), alors sa forme bilinéaire fondamentale n'est pas dégénérée.

En effet, le noyau de la représentation adjointe étant un idéal abélien, cette représentation adjointe est fidèle. Il suffit donc d'appliquer le Théorème 1 au cas $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.

<u>Lemme 2.</u> Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 n'ayant pas d'autre idéal abélien que l'idéal (0). La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est alors semi-simple. Si $\mathfrak{h}$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ n'ont pas d'idéal abélien autre que l'idéal (0).

<u>Démonstration</u>. Soit B la forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}$. Puisque la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est fidèle, il résulte du Théorème 1 que B ainsi que la restriction de B à $\mathfrak{h}$ sont des formes bilinéaires non dégénérées. Par conséquent, les éléments de $\mathfrak{g}$ orthogonaux à $\mathfrak{h}$ suivant B constituent un sous-espace $\mathfrak{h}'$ supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. La forme B étant invariante, $\mathfrak{h}'$ est un <u>idéal</u> de $\mathfrak{g}$. Les idéaux de $\mathfrak{g}$ étant les sous-modules de la représentation adjointe, on a ainsi prouvé

que cette représentation est semi-simple. En outre, tout idéal dans $\mathfrak{h}$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$ et par conséquent $\mathfrak{h}$ ne contient pas d'autre idéal abélien que (0). La même propriété est vérifiée par $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ qui est isomorphe à l'idéal $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$.

Proposition 6. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 dont le seul idéal abélien est (0). Pour tout module de représentation M de $\mathfrak{g}$, le noyau de la représentation $x \to x_M$ est l'idéal des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathrm{Tr}\ x_M y_M = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$.

Soient $\mathfrak{h}$ le noyau de la représentation $x \to x_M$ et $\mathfrak{b}$ l'idéal des z orthogonaux à $\mathfrak{g}$ suivant la forme bilinéaire associée à M. On a trivialement $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$. D'autre part, le Lemme 1 a montré l'existence d'un idéal $\mathfrak{h}'$ supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ qui n'a pas d'autre idéal abélien que l'idéal (0). La restriction à $\mathfrak{h}'$ de la représentation $x \to x_M$ étant fidèle, il résulte du Théorème 1 que la forme bilinéaire associée à M, considéré comme module de représentation de $\mathfrak{h}'$, est non dégénérée sur $\mathfrak{h}'$. Or cette forme est la restriction de la forme bilinéaire associée au $\mathfrak{g}$-module M. Il en résulte que $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}' = (0)$ et donc $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}$.

N°3. Modules de représentation des algèbres de Lie sans idéal abélien.

Le but de ce n° est de montrer que si une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 possède la propriété 2) du Théorème 1, alors elle possède aussi la propriété 1).

Soit M un module de représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps K de caractéristique quelconque et soit N un sous-module de M. On désigne par L le module quotient M N et par λ l'homomorphisme canonique de M sur L. Soit μ un isomorphisme de l'espace vectoriel L dans M tel que $\lambda\mu$ soit l'identité de L. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on désigne par $f(x)$ l'application linéaire de L dans M définie par $f(x).u = x_M \mu.u - \mu\, x_L.u$. Puisque $\lambda x_M = x_L \lambda$, on voit que

$\lambda f(x).u=0$, par conséquent $f(x).L \subset N$. On obtient donc ainsi une application linéaire $x \to f(x)$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{L}(L,N)$. Les représentations de $\mathfrak{g}$ dans L et N définissent une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{L}(L,N)$ (Prop.8, n°5, § 1) ; $f(x)$ est donc une cochaîne de degré 1 de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le module de représentation $V = \mathcal{L}(L,N)$ (n°8, § 1). Quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$ et $u \in L$, on a par définition de l'endomorphisme d ,

$$(d.f)(x,y) = f([x,y]) - x_V.f(y) + y_V.f(x)$$

$$= f([x,y]) - (x_N f(y) - f(y)x_L) + (y_N f(x) - f(x)\, y_L)$$

Or pour tout $u \in L$, on a $f([x,y]).u = [x,y]_M \mu.u - \mu[x,y]_L.u$ et

$$(x_M f(y) - f(y)x_L).u = x_M y_M \mu.u - x_M \mu\, y_L.u - y_M \mu\, x_L.u + \mu\, y_L x_L.u$$

$$(y_M f(x) - f(x)y_L).u = y_M x_M \mu.u - y_M \mu\, x_L.u - x_M \mu\, y_L.u + \mu\, x_L y_L.u$$

donc $-(x_M f(y) - f(y)x_L).u + (y_M f(x) - f(x)y_L).u = [y,x]_M\, \mu.u - \mu[y,x]_L.u$

Puisque x_N et y_N sont les restrictions à N de x_M et y_M , il en résulte que $(d.f)(x,y)=0$ quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$, c'est-à-dire que $f(x)$ <u>est un cocycle</u>. <u>Sa classe de cohomologie</u> c <u>ne dépend pas de l'isomorphisme</u> $\mu : L \to M$ <u>choisi</u>. En effet, soit μ' un autre isomorphisme de l'espace L dans M tel que $\lambda\, \mu'$ soit l'identité de L . L'application $h = \mu - \mu'$ est une application de L dans N et peut donc être considérée comme une cochaîne de degré 0 de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le module V .
On a $(d.h)(x) = x_N h - h x_L = x_M \mu - \mu\, x_L - x_M \mu' + \mu'\, x_L$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, par conséquent, si l'on désigne par $f'(x)$ le cocycle correspondans à μ', on a $(d.h)(x) = f(x) - f'(x)$ ce qui prouve que $f(x)$ et $f'(x)$ sont cohomologues.

<u>Lemme 3</u>. Pour qu'il existe dans M un sous-module supplémentaire de N , il faut et il suffit que la classe de cohomologie $c \in H^1(\mathfrak{g}, \mathcal{L}(M/N,N))$ soit 0.

En effet, si un tel sous-module existe, cela signifie que l'on peut choisir pour μ un isomorphisme compatible avec les structures de $\mathfrak{g}$-module. Le cocycle $f(x) = x_M\mu - \mu\, x_L$ correspondant est alors nul. Inversement, étant donné le sous-module N de M , supposons que la classe de cohomologie c définie plus haut soit 0 . Cela signifie que, si μ est un isomorphisme de L dans M tel que $\lambda\mu$ soit l'identité de L , il existe une application linéaire h de L dans N telle que $x_M\mu - \mu\, x_L = (d.h)(x) = x_N \mathfrak{h} - \mathfrak{h}\, x_L$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Puisque x_N est la restriction de x_M à N , ceci prouve que $\mu - \mathfrak{h}$ est un homomorphisme du $\mathfrak{g}$-module L dans le $\mathfrak{g}$-module M . Or $\lambda(\mu - \mathfrak{h}) = \lambda\mu$ est l'identité de L. Par conséquent, $(\mu - h).L$ est un sous-module supplémentaire de N dans M .

<u>Lemme 4</u>. Si une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ coïncide avec son idéal dérivé, alors $H^1(\mathfrak{g}, M) = (0)$ pour tout module de représentation nulle M de $\mathfrak{g}$.

En effet, si M est un module de représentation nulle de $\mathfrak{g}$, pour qu'une cochaîne $f(x) \in C^*(\mathfrak{g}, M)$ soit un cocycle, il faut et il suffit que $f([x,y])=0$ quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$, c'est-à-dire que f doit être nulle sur $D\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

<u>Lemme 5</u>. (Premier Lemme de Whitehead). Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 dont le seul idéal abélien est l'idéal (0), alors, pour tout module de représentation M de $\mathfrak{g}$, $H^1(\mathfrak{g}, M)=(0)$.

<u>Démonstration</u>. Supposons d'abord que M soit un module simple. On a $D\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, car d'après le Lemme 2, le quotient de $\mathfrak{g}$ par $D\mathfrak{g}$ n'a pas d'autre idéal abélien que (0). Si donc M est un module de représentation nulle, alors $H^1(\mathfrak{g}, M)=(0)$ d'après le Lemme 4. Si M n'est pas un module de représentation nulle, alors il existe d'après le Lemme 2 un idéal $\mathfrak{h}' (\neq 0)$ dans $\mathfrak{g}$ supplémentaire du noyau de la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M . La proposition 6 montre que la restriction à $\mathfrak{h}'$ de la forme bilinéaire associée à M n'est pas dégénérée. On est donc dans les conditions d'application de la Prop.9, n°6, §2 qui montre que $H^1(\mathfrak{g}, M)=(0)$.

On démontre le Lemme dans le cas général par induction sur la dimension de M . Supposons le vérifié pour les $\mathfrak{g}$-modules de dimension $< n$. Si M est un $\mathfrak{g}$-module de dimension n et n'est pas simple, alors il existe dans M un sous-module N tel que N et M/N soient de dimensions $< n$. Dans la suite exacte ... $H^1(\mathfrak{g},N) \to H^1(\mathfrak{g},M) \to H^1(\mathfrak{g},M/N)$ ... (cf. n°8, § 1), qui est associée à la suite exacte $(0) \to N \to M \to M/N \to (0)$, on a donc $H^1(\mathfrak{g},N) = H^1(\mathfrak{g},M) = (0)$; ceci entraîne $H^1(\mathfrak{g},M) = (0)$.

<u>Proposition 7</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 n'ayant pas d'autre idéal abélien que l'idéal (0). Tout module de représentation de $\mathfrak{g}$ qui est de dimension finie est alors semi-simple.

Ceci résulte des Lemmes 3 et 5 . Bien entendu, il existe toujours des modules de représentation de $\mathfrak{g}$ de dimension infinie qui ne sont pas semi-simples. Par exemple, la structure de $\mathfrak{g}$-module définie dans l'algèbbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$ par l'homomorphisme canonique de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{g})$ n'est pas une structure de $\mathfrak{g}$-module semi-simple.

N°4. <u>Propriétés de permanence</u>. <u>Exemples</u>.

<u>Proposition 8</u>. Tout idéal d'une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple. Tout quotient d'une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple. Tout produit d'algèbres de Lie semi-simples est semi-simple.

Pour les idéaux et les quotients, on utilise la propriété 2) du Théorème 1 et on applique le Lemme 2 du n°2. La propriété 5) du Théorème 1 montre que tout produit d'algèbres semi-simples est semi-simple.

<u>Proposition 9</u>. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique 0 et L une extension de K . Pour que $\mathfrak{g}$ soit semi-simple, il faut et il suffit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^L$ obtenue par extension à L du corps des scalaires soit semi-simple.

Quels que soient $a,b \in L$ et $x,y \in \mathfrak{g}$, on a, par définition de $\mathfrak{g}^L = L \otimes \mathfrak{g}$, $ad(a \otimes x).(b \otimes y) = ab \otimes [x,y]$. Par conséquent, $Tr(ad(a \otimes x)ad(b \otimes y)) = ab\ Tr(ad(x)ad(y))$. La forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}^L$ est donc le prolongement de la forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}$. Pour que la forme fondamentale de $\mathfrak{g}$ soit non dégénérée, il faut et il suffit que son prolongement ne soit pas dégénérée. Compte-tenu de la condition 3) du Théorème 1, ceci démontre l'assertion.

Remarque. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple sur un corps K de caractéristique 0, alors, pour toute extension L de K, $\mathfrak{g}^L$ est semi-simple, mais n'est pas nécessairement simple, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soit V un espace vectoriel de dimension 4 sur un corps K de caractéristique $\neq 2$. Soit e_i $(i=0,1,2,3)$ une base de V et soit $F(u,v)$ une forme bilinéaire symétrique de $u,v \in V$ telle que, si $e = \sum c_i e_i$, $(c_i \in K)$, $F(e,e) = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - c_0^2$. Les endomorphismes α de V tels que $F(\alpha.u,v) + F(u,\alpha.v) = 0$ quels que soient $u,v \in V$, constituent une sous-algèbre $\sigma(F)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$. Le corps de base étant de caractéristique $\neq 2$, les conditions $F(\alpha.e_i,e_j)+F(e_i,\alpha.e_j)$ $(0 \leq i,\ j \leq 3)$ comportent 10 relations linéairement indépendantes et la dimension de $\sigma(F)$ est donc égale à la 16 (= dimension de $\mathfrak{gl}(V)$)$-10 = 6$. On va mettre en évidence une base de $\sigma(F)$ en définissant pour tout $i > 0$ un endomorphisme x_i de V par les conditions $x_i.e_0=e_i$; $x_i.e_i=e_0$ $x_i.e_j=0$ si $j \neq i$ et pour tout couple d'indices distincts $j,k > 0$, un endomorphisme x_{jk} par les conditions $x_{jk}.e_i=0$ (si $i \neq k$ et $i \neq j$), $x_{jk}.e_k=e_j$; $x_{jk}.e_j=-e_k$.
On vérifie immédiatement que $x_{ij}+x_{ji}=0$ quels que soient i,j et que $x_1,x_2,x_3,x_{23},x_{31},x_{12}$ constitue une base de $\sigma(F)$.

Le crochet dans $\sigma(F)$ est donné par les formules

 51

(1) $\quad [x_j, x_k] = x_{jk}$, $[x_{jk}, x_k] = x_j$, $[x_{ij}, x_{jk}] = x_{ik}$

quels que soient les indices distincts $i, j, k \in [1,3]$.

Observons que, si i, j, k sont des indices distincts dans $[1,3]$, alors l'endomorphisme $r(i,j,k) = \mathrm{ad}(x_{ij})\mathrm{ad}(x_{jk})$ de $\sigma(F)$ transforme les éléments de base suivant les formules

$$r(i,j,k).x_i = r(i,j,k).x_j = 0, \quad r(i,j,k).x_k = x_i$$

$$r(i,j,k).x_{jk} = r(i,j,k).x_{ki} = 0 , \quad r(i,j,k).x_{ij} = x_{jk}$$

On va déterminer les idéaux de $\sigma(F)$. Soit h un idéal non nul de $\sigma(F)$ et soit $x = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b_{23}x_{23} + b_{31}x_{31} + b_{12}x_{12}$ un élément $\neq 0$ dans h . Si les a_i sont nuls, alors il existe un $b_{ij} \neq 0$ et l'on a $r(i,j,k).x = b_{ij}x_{jk} \in h$. Il résulte alors immédiatement des relations (1) que $h = \sigma(F)$. Supposons maintenant que $a_k \neq 0$. En multipliant au besoin x par un scalaire, on se ramène au cas où $a_k = 1$. On a alors $r(i,j,k).x = x_i + b_{ij}x_{jk} \in h$. Par conséquent, $x_k + b_{ij}x_{ij} = [x_{ki}, x_i + b_{ij}x_{jk}] \in h$ et $b_{ij}x_k - x_{ij} = [x_j, x_i + b_{ij}x_{jk}] \in h$. On a donc $(1 + b_{ij}^2)x_{ij} \in h$. Supposons que -1 ne soit le carré d'aucun élément du corps K . On a alors $x_{ij} \in h$ et il résulte alors des formules (1) que $h = \sigma(F)$. Dans ce cas, l'algèbre de Lie $o(F)$ ne possède donc pas d'autre idéal que (0). Puisqu'elle n'est pas abélienne, c'est donc une algèbre de Lie <u>simple</u>. Si L est une extension de K contenant des éléments b et $-b$ de carré -1, alors $\sigma(F)^L$ possède encore une base constituée par les éléments x_i et x_{ij} avec les relations (1). Mais dans ce cas, on vérifie immédiatement que les sous-espaces h et h' engendrés respectivement par $(x_i + b\, x_{jk})$ lorsque (i,j,k) parcourt respectivement les permutations paires et impaires de $(1,2,3)$, sont des idéaux de $\sigma(F)^L$ et que $\sigma(F)^L$ est somme directe de h et h' .

<u>Extensions centrales</u>. Une extension $(\mathfrak{b}, \lambda)$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite <u>centrale</u> si le noyau de λ est dans le centre de $\mathfrak{b}$. Il est clair que, si une extension centrale est inessentielle, elle est alors triviale.

Il existe des extensions centrales essentielles. Soient par exemple $\mathfrak{b}$ une algèbre de Lie nilpotente non abélienne de centre $\mathfrak{c}$ et λ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{b}$ sur $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$. Le quotient $\mathfrak{b}/\mathfrak{c} \neq (0)$ étant une algèbre de Lie nilpotente, son centre n'est pas (0) (Corollaire 2 du Théorème 1, n°2, §2). Si l'extension (b,λ) de $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ était inessentielle, donc triviale, l'image inverse par λ du centre de $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ serait dans le centre de $\mathfrak{b}$ et de dimension plus grande que la dimension de $\mathfrak{c}$.

<u>Lemme 6</u>. Toute extension centrale d'une algèbre de Lie semi-simple est triviale.

Soit en effet $(\mathfrak{b}, \lambda)$ une extension centrale de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Puisque le noyau de λ est contenu dans le noyau de la représentation adjointe de $\mathfrak{b}$, le module de cette représentation peut être considéré comme module de représentation de l'algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$. Il est donc semi-simple de qui signifie qu'il existe dans $\mathfrak{b}$ un idéal supplémentaire du noyau de λ .

<u>Exemple</u>. Soit E un espace vectoriel de dimension $n > 1$ sur un corps K de caractéristique p . A une base e_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de E correspond une base x_{ij} $(1 \leqslant i , j \leqslant n)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(E)$ des endomorphismes de E , chaque x_{ij} étant défini par la condition $x_{ij} \cdot e_k = e_{jk} e_i$ quel que soit $k \in [1,n]$. On a $[x_{ij}, x_{kr}] = \delta_{jk} x_{ir} - \delta_{ir} x_{kj}$ quels que soient $i,j;k;r \in [1,n]$. Le sous-espace $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{gl}(E)$ engendré par les éléments $h_i = x_{ii}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{gl}(E)$. Le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{gl}(E)$ est le sous-espace de dimension un engendré par $\sum_{i=1}^{i=n} h_i$. Quels que soient $x,y \in \mathfrak{gl}(E)$, la trace de l'endomorphisme $[x,y] = xy-yx$ de E est 0 . Le sous-espace des endomorphismes de trace 0

est donc un idéal $\mathfrak{sl}(E)$ de codimension un dans $\mathfrak{gl}(E)$. On va déterminer les idéaux de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(E)$.

Soit $\mathfrak{b}$ un idéal non nul dans $\mathfrak{sl}(E)$. Si $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{h}$ et si $x = \sum_{i=1}^{i=n} u_i h_i \in \mathfrak{b}$, alors $\sum_i a_i = 0$. Puisque pour tout couple i,j d'indices distincts dans $[1,n]$, $x_{ij} \in \mathfrak{sl}(E)$, on a $[x,x_{ij}] = (a_i - a_j)x_{ij} \in \mathfrak{h}$, ce qui entraîne que $a_i = a_j$. Par suite $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{c}$ et puisque $\mathfrak{c}$ est de dimension un, $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Ce cas se produit si et seulement si $Tr(\sum_i h_i) = n = 0$ modulo p. Supposons maintenant que l'idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{sl}(E)$ contienne des éléments qui ne sont pas dans $\mathfrak{h}$.

Si $n=2$ et $p \neq 2$, alors $\mathfrak{b}$ contient un élément de la forme $x = v_{12}\, x_{12} + v_{21}\, x_{21}$ modulo $\mathfrak{h}$, l'un des scalaires v_{ij} n'étant pas nul. On a alors $(h_1 - h_2, x) = 2(v_{12}x_{12} - v_{21}x_{21}) \in \mathfrak{b}$. Il en résulte que

$(h_1 - h_2,\ v_{12}x_{12} - v_{21}x_{21}) = 2(v_{12}x_{12} - v_{21}x_{21}) \in \mathfrak{b}$. Par suite, $\mathfrak{b}$ contiant l'un des éléments v_{12}, v_{21}. On en déduit immédiatement que $\mathfrak{b} = \mathfrak{sl}(E)$.

<u>Supposons maintenant</u> $n > 2$. Parmi les éléments de $\mathfrak{b}$ qui ne sont pas dans $\mathfrak{h}$, soit $x = \sum_i u_i\, h_i + \sum_{i \neq j} v_{ij}x_{ij}$ $(u_i, v_{ij} \in K)$ un élément ayant un nombre minimum de composantes v_{ij} différentes de 0. Il existe un couple d'indices distincts $r,s \in [1,n]$ tels que $v_{rs} \neq 0$. Quel que soit $y = \sum_k c_k h_k$, on a $[y,x] = \sum_{k \neq j} c_k v_{kj} x_{kj} - \sum_{i \neq k} c_k\, v_{ik}\, x_{ik} =$ $= \sum_{k \neq j} v_{kj}\, (c_k - c_j) x_{kj}$. Si $\sum_k c_k = 0$, alors $y \in \mathfrak{sl}(E)$ et par suite $[y,x] \in \mathfrak{b}$. <u>Il résulte alors de l'hypothèse faite sur</u> x <u>que si</u> $c_r \neq c_s$ <u>alors</u> $v_{kj} = 0$ <u>lorsque</u> $c_k = c_j$. Si $n > 3$, ou si $n=3$ et $p \neq 3$, alors on peut trouver dans K des éléments c_k tels que $c_r \neq c_s$, $c_r = c_q$ quels que soit l'indice $q \neq r$ et $\neq s$, et $\sum c_k = 0$. On a donc $v_{rq} = v_{qr} = 0$ quel que soit q distinct de r et s. On démontra de la même manière que $v_{sq} = v_{qs} = 0$ quel que soit q distinct de r et s.

Par suite $[x_{rs}, x] = v_{rs}(h_s - h_r)$ et il en résulte que $h_s - h_r \in \mathfrak{b}$. On en déduit alors de proche en proche que tous les éléments de $\mathfrak{sl}(E)$ sont dans $\mathfrak{b}$. On a par exemple pour tout i distinct de r et s, $x_{is} = [x_{is}, h_s - h_r] \in \mathfrak{b}$. On peut aboutir à la même conclusion lorsque p=3 et n=3. En particulier, si p=0, alors $\mathfrak{sl}(E)$ est une algèbre de Lie simple. Par contre, si $n > 2$ et si p divise n, alors $\mathfrak{sl}(E)$ contient $\mathfrak{c}$ et ne contient pas d'autre idéal que (0), $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{sl}(E)$. Il en résulte que $\mathfrak{sl}(E)/\mathfrak{c}$ est une algèbre de Lie simple, et que $\mathfrak{sl}(E)$ est une extension centrale essentielle de l'algèbre simple $\mathfrak{sl}(E)/\mathfrak{c}$. Ceci signifie que la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}(E)$, qui peut être considérée comme représentation de l'algèbre simple $\mathfrak{sl}(E)/\mathfrak{c}$ n'est pas semi-simple. On a là un exemple d'algèbre de Lie (sur un corps de caractéristique $p \neq 0$) qui vérifie la propriété 5) (donc aussi les propriétés 4) et 2) du Théorème 1 et qui ne vérifie pas la propriété 1).

N°5. Le radical nilpotent en caractéristique 0. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de caractéristique 0. Pour qu'un endomorphisme α de V soit nilpotent, il faut et il suffit que $\mathrm{Tr}\,\alpha^p = 0$ pour tout entier $p > 0$ (Alg. II). On utilisera ici ce critère pour montrer que certains éléments d'une algèbre de Lie appartiennent au radical nilpotent.

Lemme 7. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 et $\mathfrak{h}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ contient l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$.

Démonstration. Soit $z = \sum_i [x_i, y_i]$ un élément de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$ ($x_i \in \mathfrak{g}$, $y_i \in \mathfrak{h}$, $i = 1, 2, \ldots r$). Pour tout module de représentation M de $\mathfrak{g}$, on a $\mathrm{Tr}\, z_M = 0$ et, si $p > 1$,

$\mathrm{Tr}\, z_M^p = \sum_i \mathrm{Tr}\, ((x_i)_M (y_i)_M z_M^{p-1} - (y_i)_M (x_i)_M z_M^{p-1}) = \sum_i \mathrm{Tr} (x_i)_M [(y_i)_M, z_M^{p-1}]$

Or $z \in \mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ est un idéal et $[(y_i)_M, z_M] = [y_i, z]_M = 0$ car $\mathfrak{h}$ est abélien. On a donc $\mathrm{Tr}\, z_M^p = 0$ pour tout entier $p > 0$ et par suite z_M est nilpotent. Il résulte donc de la Prop.6 du § 2 que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$ est dans le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$.

<u>Lemme 8</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0. Le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ contient l'intersection du centre de $\mathfrak{g}$ et de l'idéal dérivé $D\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$.

<u>Démonstration</u>. Soit $z = \sum_i [x_i, y_i]$ un élément de $D\mathfrak{g}$ ($x_i, y_i \in g$, $i = 1, 2, \dots r$). Pour tout module de représentation M de g, on a $\mathrm{Tr}\, z_M = 0$ et si $p > 1$, $\mathrm{Tr}\, z_M^p = \sum_i \mathrm{Tr}\, (x_i)_M [(y_i)_M, z_M^{p-1}]$ d'après le calcul du Lemme 6. Or si z est dans le centre de $\mathfrak{g}$, alors $[(y_i)_M, z_M] = [y_i, z]_M = 0$. Par suite $\mathrm{Tr}\, z_M^p = 0$ pour tout entier $p > 0$ et la démonstration s'achève comme celle du Lemme précédent.

<u>Proposition 10</u>. Pour qu'une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 soit réductive, il faut et il suffit qu'elle soit isomorphe à un produit direct d'une algèbre abélienne et d'une algèbre semi-simple.

<u>Démonstration</u>. Puisque le radical d'une algèbre de Lie semi-simple est (0), le radical nilpotent est à fortiori (0), donc les algèbres de Lie semi-simples sont réductives. Or on a observé ($n^o 3$, § 2) que les algèbres de Lie abéliennes sont réductives et que tout produit d'algèbres réductives est une algèbre réductive. Le produit direct d'une algèbre abélienne et d'une algèbre semi-simple est donc une algèbre de Lie réductive.

Inversement, soit $\mathfrak{c}$ le centre d'une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$ sur un corps de caractéristique 0. Soient λ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{h}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$. Soit $\mathfrak{h}'$ l'image inverse de $\mathfrak{h}$ par λ. Puisque $\mathfrak{h}$ est un idéal abélien, $[\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] \subset \mathfrak{c}$.

Le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ étant (0), il résulte du Lemme 8 que $[\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] = 0$, donc que $\mathfrak{h}'$ est un idéal abélien. Le lemme 7 montre alors que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}'] = (0)$, c'est-à-dire que $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{c}$ et donc $\mathfrak{h} = (0)$. Ainsi $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ est semi-simple. Puisque $(\mathfrak{g}, \lambda)$ est une extension centrale de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, il résulte du Lemme 6 que $\mathfrak{g}$ est isomorphe au produit direct $\mathfrak{c} \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{c})$.

<u>Proposition 11</u>. Soit $\mathfrak{r}$ le radical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps de caractéristique 0. Le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ est $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$.

<u>Démonstration</u>. Soit M un module de représentation simple de $\mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{c}$ le noyau de cette représentation. La représentation de $\mathfrak{g}$ dans M définit une représentation simple fidèle de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ qui est donc réductive. Il résulte de la proposition 6 que $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ est isomorphe au produit direct d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple. En particulier, l'intersection du radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ avec l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ est (0). Or l'image canonique de l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ est un idéal résoluble contenu dans l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$. On a donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{c}$. Ceci ayant lieu pour tout $\mathfrak{g}$-module simple, le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ contient l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$.

On va maintenant montrer que le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ est contenu dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ en prouvant qu'il existe une représentation semi-simple de $\mathfrak{g}$ dont le noyau est $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$. L'image canonique de $\mathfrak{r}$ dans le quotient $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ est dans le centre de $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$. D'autre part, puisque $\mathfrak{r}$ est résoluble, il résulte de la Prop.1, n°1, § 2 que l'image inverse dans $\mathfrak{g}$ du radical de $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ donc contenu dans $\mathfrak{r}$. Par suite le radical de $g/[g,r]$ est $\mathfrak{r}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ et $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ est une extension centrale de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Il résulte du Lemme 6 que $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ est isomorphe au produit direct d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple. Par suite (Prop.10) il existe une représentation semi-simple fidèle de $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$. Composée avec l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur

$\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{n}]$, cette représentation donne une représentation semi-simple de $\mathfrak{g}$ dont le noyau est $[\mathfrak{g},\mathfrak{n}]$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 12. Soit x un élément dans une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$ sur un corps de caractéristique 0, et soit M un module de représentation de $\mathfrak{g}$. Pour que x_M soit dans le radical de l'algèbre enveloppante de M, il faut et il suffit que x_M soit nilpotent.

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Inversement, soient x et y deux éléments de $\mathfrak{g}$ tels que x_M et y_M soient nilpotents. On va montrer que $(x+y)_M$ est encore nilpotent. Soit $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots M_p = (0)$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module M . Soit $x \to x_{N_i}$ la représentation de $\mathfrak{g}$ associée au $\mathfrak{g}$-module $M_i/M_{i+1} = N_i$. Il est clair que x_{N_i} et y_{N_i} qui se déduisent de x_M et y_M par restriction à M_i et passage au quotient sont des endomorphismes nilpotents. D'autre part, d'après la proposition 11, $[x,y]$ est dans le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$, donc dans le noyau de la représentation simple $z \to z_{N_i}$ de $\mathfrak{g}$ dans N_i . Il en résulte que $[x_{N_i}, y_{N_i}] = [x,y]_{N_i} = 0$ et donc que $(x+y)_{N_i}$ est nilpotent. Ceci ayant lieu pour toutes les valeurs de l'indice i , on en déduit que $(x+y)_M$ est nilpotent. Les éléments z de $\mathfrak{g}$ tels que z_M soit nilpotent constituent donc un sous-espace de $\mathfrak{g}$. Il résulte immédiatement de la Proposition 11 et de la Prop.6, n°3, § 2 que ce sous-espace est un idéal de $\mathfrak{g}$. On conclut en appliquant le Théorème 2 , n°2, § 2 .

Paragraphe 4. Extensions des algèbres de Lie. Les conventions de ce par. sont les mêmes que celles du paragr. 2 .

N°1. Extensions abéliennes des algèbres de Lie semi-simples. Une extension $(\mathfrak{b},\lambda)$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite abélienne si le noyau $\mathfrak{c}$ de λ est un idéal abélien. Puisque $\mathfrak{c}$ est un idéal, c'est un sous-module de la représentation adjointe de $\mathfrak{b}$. Puisque $\mathfrak{c}$ est abélien, la restriction de $\mathrm{ad}(x)$ à $\mathfrak{c}$ est nulle toutes les fois que $x \in \mathfrak{c}$. Les restrictions à $\mathfrak{c}$ des endomorphismes adjoints de $\mathfrak{b}$ définissent donc une représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $\mathfrak{c}$. On désignera par C le module de cette représentation. On va montrer que l'extension $(\mathfrak{b}, \lambda)$ de $\mathfrak{g}$ définit une classe de cohomologie de degré 2 de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans C.

Soit μ un isomorphisme de l'espace $\mathfrak{g}$ dans l'espace $\mathfrak{b}$ tel que $\lambda\,\mu$ soit l'automorphisme identique de $\mathfrak{g}$. On pose $f(x,y) = [\mu.x, \mu.y] - \mu.[x,y]$ quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$. On a $\lambda\, f(x,y) = [\lambda\,\mu.x, \lambda\,\mu.y] - \lambda\,\mu.[x,y] = 0$ et $f(x,y) + f(y,x) = 0$ quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$; par conséquent, $f(x,y)$ est une cochaîne de degré 2 de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans C (n°8, § 1). Quels que soient x,y,z, on a

$$f([x,y],z) = [\mu.[x,y], \mu.z] - \mu.[[x,y], z]$$

et $$x_C.f(y,z) = [\mu.x,[\mu.y, \mu.z]] - [\mu.x, \mu.[y,z]]$$

donc, compte-tenu de l'identité de Jacobi,

$$(d.f)(x,y,z) = f([x,y],z) - f([x,z],y) + f([y,z],x) - x_C.f(y,z) + y_C.f(x,z) - z_C.f(x,y) = 0$$

c'est-à-dire que $f(x,y)$ est un <u>cocycle</u>. Sa classe de cohomologie $e \in H^2(\mathfrak{g}, C)$ ne dépend pas de l'isomorphisme μ choisi. En effet, soit μ' un autre isomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{b}$ tel que $\lambda\,\mu'$ soit l'automorphisme identique de $\mathfrak{g}$; alors $g(x) = \mu'.x - \mu.x$ $(x \in \mathfrak{g})$ est une cochaîne de degré 1 à valeurs dans C. On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= [\mu'.x - g(x), \mu'.y - g(y)] - \mu'.[x,y] + g([x,y]) = \\ &= g([x,y]) - x_C.g(y) + y_C.g(x) + [\mu'.x, \mu'.y] - \mu'.[x,y] \\ &= (d.g)(x,y) + f'(x,y) \end{aligned}$$

en désignant par $f'(x,y)$ le cocycle défini par μ'.

<u>Lemme 1</u>. Pour que l'extension abélienne $(\mathfrak{b}, \lambda)$ de $\mathfrak{g}$ soit inessentielle, il faut et il suffit que la classe de cohomologie de degré 2 $e \in H^2(\mathfrak{g}, C)$ qu'elle définit soit nulle.

<u>Démonstration</u>. Si l'extension est inessentielle, alors on peut choisir pour μ un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur une sous-algèbre supplémentaire de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{b}$, auquel cas le cocycle correspondant $[\mu.x,\mu.y]-\mu.[x,y]$ est nul. Réciproquement, supposons que la classe de cohomologie définie par l'extension abélienne $(\mathcal{b},\lambda)$ de $\mathcal{G}$ soit nulle. Si μ est un isomorphisme de l'espace $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{b}$ tel que $\lambda\mu$ soit l'automorphisme identique de $\mathcal{G}$, alors le cocycle $f(x,y)=[\mu.x,\ \mu.y]-\mu.[x,y]$ doit être un cobord c'est-à-dire qu'il existe une cochaîne $g(x)$ de degré 1 à valeurs dans C telle que $f(x,y) = g([x,y])-x_C.g(y)+ y_C.g(x)$ quels que soient $[x,y]\in\mathcal{G}$. Posons alors $\rho.x = \mu.x + g(x)$. On a

$$[\rho.x,\ \rho.y]-\rho.[x,y]= f(x,y)-(g([x,y])- x_C.g(y) + y_C.g(x)) = 0$$

Par suite ρ est un homomorphisme compatible avec les structures d'algèbres de Lie. D'autre part $\lambda\rho = \lambda\mu$ est l'identité de $\mathcal{G}$, par conséquent $\rho.\mathcal{G}$ est une sous-algèbre supplémentaire de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{b}$.

<u>Lemme 2.</u> Si toute extension centrale d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est triviale, alors $H^2(\mathcal{G},M) = (0)$ pour tout module de représentation nulle M de $\mathcal{G}$.

En effet, si $f(x,y)$ est un cocycle de degré 2 de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M, on définit dans l'espace $\mathcal{G}\times M$ une structure d'algèbre de Lie en posant quels que soient $x,y\in\mathcal{G}$ et $u,v\in M$:

$$[(x,u),\ (y,v)] = ([x,y],\ f(x,y))$$

Le crochet ainsi défini est visiblement anticommutatif. Il vérifie d'autre part l'identité de Jacobi car $[[(x,u),(y,v)],\ (z,w)]= = ([[x,y],z],\ f([x,y],z))$ quels que soient $x,y,z\in\mathcal{G}$ et $u,v,w\in M$, et $f(x,y)$ étant un cocycle à valeurs dans un module de représentation nulle on a

$$f([x,y],z) + f([y,z],x) + f([z,x],y) = (d.f)(x,y,z) = 0 .$$

L'application $\lambda : (x,u)\longrightarrow x$ est visiblement un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{b} = \mathcal{G}\times M$ sur g dont le noyau (0,M) est dans le centre de $\mathcal{b}$.

Puisque par hypothèse toutes les extensions centrales de $\mathfrak{g}$ sont triviales, c'est qu'il existe un homomorphisme μ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{b}$ tel que $\lambda\mu$ soit l'identité de $\mathfrak{g}$ (l'image de μ étant un idéal de $\mathfrak{b}$). Posons $\mu.x = (x,g(x))$; $g(x)$ est une cochaîne de degré 1 de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M . On a $([x,y],f(x,y)) = [\mu.x,\mu.y] = \mu.[x,y] = ([x,y]$, $g([x,y]))$, par conséquent $f(x,y) = g([x,y]) = (d.g)(x,y)$ donc $f(x,y)$ est cohomologue à 0 .

<u>Lemme 3</u>. (Second Lemme de Whitehead). Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple alors pour tout module de représentation M de $\mathfrak{g}$, on a $H^2(g,M) = 0$.

<u>Démonstration</u>. Supposons d'abord que M soit un module simple. Si c'est un module de représentation nulle, alors, toute extension centrale de $\mathfrak{g}$ étant triviale (Lemme 6, n°4, § 3), on a $H^2(\mathfrak{g},M)=(0)$ d'après le Lemme précédent. Si M n'est pas un module de représentation nulle, alors il existe dans $\mathfrak{g}$ un idéal semi-simple $\mathfrak{h} \neq (0)$ supplémentaire du noyau de la représentation associée à M . (Lemme 2, n°2, § 3). La restriction à $\mathfrak{h}$ de la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M étant fidèle, la restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme bilinéaire associée à M n'est pas dégénérée. (Théorème 1, n°2, § 3). On est donc dans les conditions d'application de la proposition 9, n°6, § 2 qui montre que $H^2(\mathfrak{g},M)=(0)$.

Dans le cas d'une module quelconque, le Lemme se démontre par induction sur la dimension de M . Supposons la propriété vérifiée pour les $\mathfrak{g}$-modules de dimension $< n$. Si M est un $\mathfrak{g}$-module de dimension n et n'est pas simple, alors il existe dans M un sous-module N tel que N et M/N soient de dimension $< n$. Par conséquent, dans la suite exacte $\ldots H^2(\mathfrak{g},N) \rightarrow H^2(\mathfrak{g},M) \rightarrow H^2(\mathfrak{g},M/N)$ que définit la suite exacte $(0) \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow (0)$, on a $H^2(\mathfrak{g},N) = H^2(\mathfrak{g},M/N) = (0)$, d'où il résulte que $H^2(\mathfrak{g},M)=(0)$.

<u>Lemme 4</u>. Toute extension abélienne d'une algèbre de Lie semi-simple est inessentielle.

C'est une conséquence des Lemmes 1 et 3 .

N°2. <u>Extensions résolubles des algèbres de Lie semi-simples</u>. Une extension $(\mathfrak{b},\lambda)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite <u>résoluble</u> si le noyau de λ est résoluble.

<u>Théorème 1</u> (Levi). Toute extension résoluble d'une algèbre de Lie semi-simple est inessentielle.

<u>Démonstration</u>. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. On suppose le Théorème démontré pour les extensions résolubles de $\mathfrak{g}$ dont le noyau est de dimension $< n$. Soit $(\mathfrak{b},\lambda)$ une extension de $\mathfrak{g}$ dont le noyau $\mathfrak{c}$ est un idéal résoluble de dimension n . Si ρ est l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{b}$ sur $\mathfrak{b}/D\mathfrak{c}$, il existe un homomorphisme σ de $\mathfrak{b}/D\mathfrak{c}$ sur g tel que $\sigma\rho = \lambda$ et $(\mathfrak{b}/D\mathfrak{c},\sigma)$ est une extension de $\mathfrak{g}$ dont le noyau $\mathfrak{c}/D\mathfrak{c}$ est abélien. Il résulte alors des Lemmes 1 et 3 que c'est une extension inessentielle. Il existe donc (Prop.3,n°3, §1) un <u>isomorphisme</u> $\sigma' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{b}/D\mathfrak{c}$ tel que $\sigma\sigma'$ soit l'automorphisme identique de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h}'$ l'image inverse par ρ de la sous-algèbre $\sigma'.\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}/D\mathfrak{c}$. La restriction à $\mathfrak{h}$ de ρ définit une extension $(\mathfrak{h},\rho)$ de l'algèbre semi-simple $\sigma'.\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$ dont le noyau $D\mathfrak{c}$ est résoluble. Mais puisque $\mathfrak{c}$ est résoluble, si $\mathfrak{c} \neq (0)$, alors $D\mathfrak{c}$ est de dimension strictement inférieure à n et par suite de l'hypothèse inductive, il existe un isomorphisme ρ' de $\sigma'.\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ tel que $\rho\rho'$ soit l'automorphisme identique de $\sigma'.\mathfrak{g}$. Par suite $\lambda\rho'\sigma' = \sigma\rho\rho'\sigma'$ est l'automorphisme identique de $\mathfrak{g}$ et $\rho'\sigma'$ étant un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{b}$, l'extension $(\mathfrak{b},\lambda)$ est inessentielle.

<u>Corollaire</u>. Soit $\mathfrak{n}$ le radical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps de caractéristique 0. Il existe dans $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{a}$ telle que l'espace $\mathfrak{g}$ soit somme directe des sous-espaces $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$.

Soit en effet λ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{b}$ sur $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}$. Le noyau de l'extension $(\mathfrak{b},\lambda)$ de $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}$ étant résoluble et $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}$ étant semi-simple (Prop.3,n°1, § 2), l'extension $(\mathfrak{b},\lambda)$ est inessentielle et il existe donc dans $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ supplémentaire de $\mathfrak{n}$.

Une telle décomposition de $\mathfrak{b}$ est appelée une décomposition de Levi. On va dans la suite indiquer les rapports existants entre les différentes décompositions de Levi d'une algèbre de Lie fixée.

Lemme 5. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 et x un élément de $\mathfrak{g}$ tel que ad(x) soit nilpotent. L'endomorphisme exp(ad(x)) est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

En effet, ad(x) étant nilpotent, exp(ad(x)) est défini et ad(x) étant une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (Prop.4,n°4, § 1) on a quels que soient $y,z \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}(x)^p . [y,z] = \sum_{r=1}^{r=p} \binom{r}{p} \left[\mathrm{ad}(x)^r . y, \mathrm{ad}(x)^{p-r} . z\right]$$

pour tout entier p (formule de Leibnitz). Il en résulte que

$$\exp(\mathrm{ad}(x)).[y,z] = \sum_p \frac{\mathrm{ad}(x)^p}{p!}.[y,z] = \sum_{0\leq r\leq p} \left[\frac{\mathrm{ad}(x)^r}{r!}.y, \frac{\mathrm{ad}(x)^{p-r}}{(p-r)!}.z\right]$$
$$= \left[\exp(\mathrm{ad}(x)).y, \exp(\mathrm{ad}(x)).z\right]$$

les sommes étant étendues à tous les entiers $p \geqslant 0$ mais ne comprenant qu'une nombre fini de termes non nuls puisque ad(x) est nilpotent.

Définition 1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristiqu e 0. On appelle automorphisme spécial de $\mathfrak{g}$ un élément du groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}$ engendré par les automorphismes de la forme exp(ad(x)) où x est dans le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$.

Cette définition est justifiée car si x est dans le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$, alors (Prop.6,n°3, § 2) ad(x) est nilpotent.

Théorème 2. (Malcev). Soit $(\mathfrak{b},\lambda)$ une extension résoluble de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Si α et β sont deux isomorphismes de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{b}$ tels que $\lambda\alpha = \lambda\beta$ soit l'automorphisme identique de $\mathfrak{g}$, alors il existe un automorphisme spécial ω de $\mathfrak{b}$ tel que $\beta = \omega\alpha$.

Démonstration. Supposons d'abord que le noyau $\mathfrak{c}$ de λ soit abélien. On définit une représentation $x \to x_c$ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $\mathfrak{c}$ en choisissant pour tout $x \in \mathfrak{g}$ un $x' \in \mathfrak{b}$ tel que $\lambda . x' = x$ et en posant x_c = restriction à $\mathfrak{c}$ de $ad(x')$. Puisque $\lambda\alpha = \lambda\beta$, $g(x) = \alpha . x - \beta . x$ est une cochaîne de degré 1 de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le module de représentation $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$. C'est un cocycle car

$$(d.g)(x,y) = g([x,y]) - x_c . g(y) + y_c . g(x) = [\alpha.x, \alpha.y] - [\beta.x, \beta.y] -$$

$$-[\alpha.x, \alpha.y - \beta.y] + [\beta.y, \alpha.x - \beta.x] = 0 \quad \text{quels que soient } x,y \in \mathfrak{g}.$$

Puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, il résulte du premier Lemme de Whitehead (Lemme 5 n°3, § 3) que $g(x)$ est le cobord d'une cochaîne de degré 0 c'est-à-dire qu'il existe un élément $e \in \mathfrak{c}$ tel que $g(x) = x_c . e$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Nous allons montrer que l'on peut choisir pour e un élément du radical nilpotent de $\mathfrak{b}$. En effet, l'idéal $[\mathfrak{c}, \mathfrak{g}]$ est un sous-module de $\mathfrak{c}$ considéré comme module de représentation de $\mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, il existe dans $\mathfrak{c}$ un sous-module supplémentaire de $[\mathfrak{c}, \mathfrak{g}]$ qui ne contient visiblement que des invariants pour la représentation de $\mathfrak{g}$. On a donc $g(x) = x_c . e = x_c . e'$ en désignant par e' la composante de e dans $[\mathfrak{c}, \mathfrak{g}]$. D'après le Lemme n°5, § 3, e' est dans le radical nilpotent de $\mathfrak{b}$. Donc $\exp(ad(e))$ est un automorphisme spécial de $\mathfrak{b}$. Mais $ad(e) . \mathfrak{b} \subset \mathfrak{c}$ car $\mathfrak{c}$ est un idéal et $ad(e) . \mathfrak{c} = 0$ car $\mathfrak{c}$ est abélien. Il en résulte que $ad(e)^2 = 0$ et que par suite

$$\beta.x = \alpha.x - x_c.e' = \alpha.x - [(\alpha.x), e'] = \alpha.x + ad(e').\alpha x = (\exp(ad(e')))\alpha.x$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}$, ce qui prouve le Théorème dans le cas d'une extension abélienne.

Dans le cas d'une extension résoluble quelconque, la démonstration procède par induction sur la dimension du noyau de l'extension. Supposons le Théorème démontré pour les extensions dont le noyau est de dimension

$< n$ et soit $(\mathfrak{b}, \lambda)$ une extension de l'algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$ dont le noyau est un idéal résoluble de dimension n. L'idéal dérivé $D\mathfrak{c}$ est un idéal de $\mathfrak{b}$ (Lemme 1, n°1, §1). Soit ρ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{b}$ sur $\mathfrak{b}/D\mathfrak{c}$ et soit σ l'homomorphisme de $\mathfrak{b}/D\mathfrak{c}$ sur $\mathfrak{g}$ tel que $\sigma\rho = \lambda$. Si α et β sont des isomorphismes de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{b}$ tels que $\lambda\alpha = \lambda\beta$ soit l'automorphisme identique de $\mathfrak{g}$, alors $\rho\alpha$ et $\rho\beta$ sont des isomorphismes de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{b}/D\mathfrak{c}$ pour lesquels $\sigma\rho\alpha = \sigma\rho\beta$ est l'automorphisme identique de $\mathfrak{g}$. L'extension $(\mathfrak{b}/D\mathfrak{c}, \sigma)$ de $\mathfrak{g}$ étant abélienne, il résulte de la première partie de la démonstration qu'il existe un automorphisme spécial ω_1 de $\mathfrak{b}/D\mathfrak{c}$ tel que $\rho\beta = \omega_1\rho\alpha$. Mais le radical de $\mathfrak{b}/D\mathfrak{c}$ est $\mathfrak{c}/D\mathfrak{c}$ car $\mathfrak{c}$ est résoluble et que l'image du radical de $\mathfrak{b}/D\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{g}$ est (0). Donc le radical nilpotent de $\mathfrak{b}/D\mathfrak{c}$ est $[\mathfrak{b}/D\mathfrak{c}, \mathfrak{c}/D\mathfrak{c}]$ (Proposition 11, n°5, §3). C'est donc l'image par ρ du radical nilpotent $[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$ de $\mathfrak{b}$. Il en résulte qu'il existe un automorphisme spécial ω'_1 de $\mathfrak{b}$ tel que $\omega_1\rho = \rho\omega'_1$. Considérons alors la sous-algèbre $D\mathfrak{c} + \beta.\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{b}$. La restriction de λ à $D\mathfrak{c} + \beta.\mathfrak{g}$ définit une extension $(D\mathfrak{c} + \beta.\mathfrak{g}, \lambda)$ de $\mathfrak{g}$. Puisque $\rho\beta = \rho\omega'_1\alpha$, on a $\omega'_1\alpha.\mathfrak{g} \subset D\mathfrak{c} + \beta.\mathfrak{g}$; par conséquent, $\omega'_1\alpha$ et β sont des isomorphismes de $\mathfrak{g}$ dans $D\mathfrak{c} + \beta.\mathfrak{g}$ tels que $\lambda\omega'_1\alpha = \lambda\beta$ soit l'automorphisme identique de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{c} \neq (0)$, puisque $\mathfrak{c}$ est résoluble, $D\mathfrak{c}$ est de dimension $< n$ et il résulte donc de l'hypothèse inductive qu'il existe un automorphisme spécial ω_2 de $D\mathfrak{c} + \beta.\mathfrak{g}$ tel que $\beta = \omega_2\omega'_1\alpha$. Mais tout élément du radical nilpotent de $D\mathfrak{c} + \beta.\mathfrak{g}$ est dans le radical $D\mathfrak{c}$ de $D\mathfrak{c} + \beta.\mathfrak{g}$, donc d'après la proposition 11, n°5, §3 dans le radical nilpotent de $\mathfrak{b}$. Il en résulte que tout automorphisme spécial de $D\mathfrak{c} + \beta.\mathfrak{g}$ est la restriction à $D\mathfrak{c} + \beta.\mathfrak{g}$ d'un automorphisme spécial de $\mathfrak{b}$. En particulier il existe un automorphisme spécial ω'_2 de $\mathfrak{b}$ tel que $\beta = \omega'_2\,\omega'_1\,\alpha$.

N°3 Extensions abéliennes. Théorème d'Ado. L'un des buts de ce n° est de démontrer que toute algèbre de Lie de dimension finie sur un corps de caractéristique 0 possède des représentations fidèles de dimension finie. Si M et N sont deux modules de représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le noyau de la représentation associée au $\mathfrak{g}$-module $M \times N$ est l'intersection des noyaux des représentations associées à M et N. Le noyau de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ étant le centre de $\mathfrak{g}$, il suffit pour obtenir une représentation fidèle de $\mathfrak{g}$ d'avoir une représentation de $\mathfrak{g}$ dont la restriction au centre de $\mathfrak{g}$ soit fidèle. Plus généralement on va étudier les représentations d'un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ qui sont des restrictions de représentations de $\mathfrak{g}$.

Lemme 6. Soit U une algèbre associative qui possède un ensemble fini de générateurs et soit Z un idéal bilatère de codimension finie dans U. Pour tout entier $s > 0$, l'idéal Z^s est de codimension finie dans U.

Démonstration. On commence par démontrer qu'il existe dans U un sous-espace de dimension finie engendrant l'idéal Z. Soient G un sous-espace de dimension finie engendrant l'algèbre U et N un sous-espace supplémentaire de Z dans U. Soit Z' l'idéal bilatère de U engendré par le sous-espace de dimension finie $V = Z \cap (N + N^2 + G)$. On a visiblement $N + N^2 + G \subset Z' + N$, donc $N^2 \subset Z' + N$ et $G \subset Z' + N$. Il en résulte par induction sur p que $G^p \subset Z' + N$ car $G^p = (Z' + N)\, G^{p-1} \subset (Z' + N)(Z' + N) \subset Z' + N$ pour tout $p > 1$. Ceci prouve que $Z' + N = U$ et puisque d'autre part $Z' \subset Z$, il en résulte que $Z' = Z$.

Puisque $Z = Z' = UVU + UV + VU$ et que $U = Z + N$, on voit que tout élément de Z^s est égal, modulo Z^{s+1} à un élément du sous-espace $\sum_{r \leqslant 2s+1} (V+N)^r$ qui est de dimension finie. Ainsi Z^s / Z^{s+1} est de dimension finie pour tout $s > 0$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 7. Soit $\mathfrak{h}$ un idéal abélien dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps K de caractéristique 0. Il existe un module de représentation M de $\mathfrak{g}$, de dimension finie sur K, pour lequel

1) (Ado) si $x \in \mathfrak{h}$ et $x_{\Pi}=0$, alors $x=0$

2) (H.Chandra) si x est dans le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ (n°2, § 2) alors x_{Π} est nilpotent.

3) (Iwasawa) quels que soient $x \in \mathfrak{h}$ et $y \in \mathfrak{g}$, on a $x_{\Pi}y_{\Pi} = 0$.

Démonstration. Elle est longue et procède par induction sur la dimension de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, on obtient un module de représentation de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions du Lemme en définissant une représentation $x \to x_{\Pi}$ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $K \times \mathfrak{g}$ par la condition $x_{\Pi}.(1,y)=(0,y)$ quels que soient $x,y \in \mathfrak{g}$. Supposons donc que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit de dimension $n > 0$ et que le Lemme soit vrai lorsque ce quotient est de dimension $< n$. Pour mettre en oeuvre l'hypothèse inductive, on utilisera l'existence dans $\mathfrak{g}$ d'un idéal $\mathfrak{g}'$ et d'une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) $\mathfrak{g}'$ est un idéal résoluble de dimension $<$ n qui contient $\mathfrak{h}$,

b) $\mathfrak{g}$ est somme directe des sous-espaces $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{b}$

c) si $\mathfrak{m}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}' + \mathfrak{m} \cap \mathfrak{b}$.

Si $\mathfrak{g}$ n'est pas résoluble, on prend pour $\mathfrak{g}'$ le radical de $\mathfrak{g}$ et pour $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre semi-simple supplémentaire de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$ (Théorème de Levi). La propriété c) est vérifiée car $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}'$. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, on prend pour $\mathfrak{g}'$ un idéal contenant $\mathfrak{h}$ de codimension un dans $\mathfrak{g}$. Ceci est possible, car on ne peut avoir $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + D\mathfrak{g}$ du fait que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est résoluble et que par suite, l'image de $D\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ qui est $D(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ doit être de dimension inférieure à n . L'idéal $\mathfrak{g}'$ étant choisi, si $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}'$, on prend pour $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de dimension 1 engendrée par un élément arbitraire de $\mathfrak{g}$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{g}'$. Si $\mathfrak{m}$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{g}'$, cet élément générateur de $\mathfrak{b}$ devra être choisi dans $\mathfrak{m}$. Les conditions a), b) et c) sont alors trivialement vérifiées.

Avant de faire intervenir l'hypothèse inductive, on va utiliser la décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe de $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{b}$ pour définir une <u>représentation</u> de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}'$. D'une manière précise, si $T(\mathfrak{g}')$ est l'algèbre tensorielle de l'espace $\mathfrak{g}'$, on définit une <u>application linéaire</u> $x \to x_T$ <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans l'espace des endomorphismes de l'espace</u> $T(\mathfrak{g}')$ en posant : pour tout $t \in T(\mathfrak{g}')$

$x_T \cdot t = x \otimes t$ si $x \in \mathfrak{g}'$

x_T = dérivation de l'algèbre $T(\mathfrak{g}')$ prolongeant la restriction de $ad(x)$ à $\mathfrak{g}'$ lorsque $x \in \mathfrak{b}$.

Désignons par J l'idéal bilatère de $T(\mathfrak{g}')$ engendré par les tenseurs de la forme $y \otimes z - z \otimes y - [y,z]$ où $y, z \in \mathfrak{g}'$ (Le quotient de $T(\mathfrak{g}')$ par J est par définition l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}'$).

Quels que soient $x, y \in g$, on a

(1) $$(x_T y_T - y_T x_T - [x,y]_T) \cdot T(g') \subset J \quad .$$

Ceci est trivial si $x, y \in \mathfrak{g}'$. Si $x, y \in \mathfrak{b}$, ceci résulte de ce que les dérivations de $T(\mathfrak{g}')$ qui prolongent les restrictions des endomorphismes $ad(z)$ $(z \in b)$ à $\mathfrak{g}'$ définissent une représentation de b dans $T(\mathfrak{g}')$ (n°5-§1). Si $x \in \mathfrak{b}$ et $y \in \mathfrak{g}'$, alors quel que soit $t \in T(g')$, on a

$$x_T y_T \cdot t = x_T \cdot (y \otimes t) = [x,y] \otimes t + y \otimes (x_T \cdot t) = [x,y]_T \cdot t + y_T\, x_T \cdot t$$

puisque $\mathfrak{g}'$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Un idéal bilatère de $T(\mathfrak{g}')$ sera dit <u>stable</u> s'il est appliqué en lui même par tous les endomorphismes x_T lorsque $x \in \mathfrak{g}$. Pour vérifier qu'un idéal est stable, il suffit de vérifier qu'il est appliqué en lui même par tous les endomorphismes x_T où $x \in \mathfrak{b}$.

<u>L'idéal</u> J <u>est stable</u>. En effet, si $x \in \mathfrak{b}$ pour vérifier que $x_T \cdot J \subset J$, puisque x_T est une dérivation de l'algèbre $T(g')$, il suffit de vérifier que $x_T \cdot t \subset J$ pour tout générateur t de l'idéal J. Or on a quels que soient $y, z \in \mathfrak{g}'$

$$x_T\cdot(y\otimes z - z\otimes y - [y,z]) = [x,y]\otimes z + y\otimes[x,z] - [x,z]\otimes y - z\otimes[x,y] -$$
$$-[x,[y,z]] \equiv [[x,y],z] + [y,[x,z]] - [x,[y,z]] \equiv 0 \quad \text{modulo } J\ .$$

Compte tenu de l'hypothèse inductive, et de la propriété a) de $\mathfrak{g}'$, il existe un module de représentation M' de $\mathfrak{g}' \supset \mathfrak{h}$ qui vérifie les conditions du Lemme. Soit S le noyau de l'homomorphisme $t \to t_M$, de $T(\mathfrak{g}')$ sur l'algèbre enveloppante $E(\mathfrak{g}',M')$ du $\mathfrak{g}'$-module M'. Soit R l'idéal des tenseurs de $\mathfrak{g}'$ dont l'image est dans le radical de $E(\mathfrak{g}',M')$. Puisque pour tout élément x du plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}'$ l'endomorphisme $x_{M'}$ est nilpotente (condition 2)) il résulte du Théorème 2, n°2, § 2 que $x \in R$. Les propriétés du $\mathfrak{g}'$-module M' peuvent donc se traduire dans $T(\mathfrak{g}')$ par

1)' $\quad h \cap S = (0)$,

2)' $\quad$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}'$ est contenu dans R ,

3)' $\quad$ quels que soient $x \in \mathfrak{h}$ et $y \in \mathfrak{g}'$, $x \otimes y \in S$.

Puisque $E(\mathfrak{g}',M')$ est de dimension finie, il existe un entier s tel que $R^s \subset S$. L'idéal R^s est stable. En effet, si $x \in \mathfrak{b}$, alors la dérivation x_T de l'algèbre $T(\mathfrak{g}')$ applique le tenseur unité sur 0 et applique tout élément $y \in \mathfrak{g}'$ sur $[x,y] \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}']$. Mais $\mathfrak{g}'$ étant résoluble (a), il résulte de la proposition 11, n°5, § 3 que l'idéal $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}']$ est contenu dans le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$. C'est donc un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}'$ et d'après 2)', on a donc $[x,y] \in R$. Puisque x_T est une dérivation de $T(\mathfrak{g}')$, il en résulte que $x_T\cdot T(\mathfrak{g}') \subset R$; et $x_T\cdot R^s \subset R^s$.

L'idéal bilatère R' de $T(\mathfrak{g}')$ engendré par les tenseurs de la forme $y \otimes z$ avec $y \in \mathfrak{h}$ et $z \in \mathfrak{g}'$ est un idéal stable. En effet, si $x \in \mathfrak{b}$, alors $x_T\cdot(y\otimes z) = [x,y]\otimes z + y\otimes[x,z] \in R'$ quels que soient $y \in \mathfrak{h}$ et $z \in \mathfrak{g}'$, car $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}'$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$. Par conséquent, x_T étant une dérivation de $T(\mathfrak{g}')$, on a $x_T\cdot R' \subset R'$.

L'idéal $Z = J+R+R'$ est un idéal stable de $T(\mathfrak{g}')$. Soit M le quotient $T(\mathfrak{g}')/Z$. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on désigne par x_M l'endomorphisme de M qui se déduit de x_T par passage au quotient. Il résulte de (1) que $x \to x_M$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M. Puisque S est de codimension finie dans $T(\mathfrak{g}')$, qui est engendrée par l'unité et une base de g', il résulte du Lemme 6 que S^s est de codimension finie. Par suite $Z \supset R^s \supset S^s$ est de codimension finie c'est-à-dire que M est un espace de dimension finie. Il reste à vérifier que ce module de représentation de $\mathfrak{g}$ vérifie les trois conditions du Lemme.

1) Si $x \in \mathfrak{h}$ et si $x_M=0$, alors $x_T.T(\mathfrak{g}') \subset Z$ et en particulier si I désigne le tenseur unité, $x_T.I = x \in Z$. Mais $S \supset J$ car M' est un module de représentation de $\mathfrak{g}'$, d'autre part $S \supset R^s$ (on a choisi l'entier s pour cela) et enfin $S \supset R'$ d'après 3)'. Par conséquent $S \supset Z \ni x$ et il résulte alors de 1)' que $x=0$.

2) Si x est dans le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$, il résulte de la condition c) vérifiée par $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{b}$ que x peut s'écrire comme somme d'un élément de $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$ et d'un élément de $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}$. Puisque $\mathfrak{m}$ est résoluble, il résulte de la Proposition 12 du n°5 § 3 que l'ensemble des $z \in \mathfrak{m}$ tels que z_M soit nilpotent constituent un <u>sous-espace</u> de $\mathfrak{m}$. Pour démontrer que x_M est nilpotent, il suffit donc de démontrer que y_M est nilpotent lorsque $y \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$ et lorsque $y \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{b}$. Dans le premier cas, puisque $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}'$, il résulte de la condition 2), que $y \in R$. Par suite $(y_T)^s.T(g') = y^s \otimes T(\mathfrak{g}') \subset R^s \subset Z$ et donc $y_M^s = 0$. Si $y \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}$, alors ad(y) est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$ donc il en est de même de la restriction de ad(y) à $\mathfrak{g}'$. Puisque y_T est la dérivation qui prolonge à $T(\mathfrak{g}')$ cette restriction, pour tout tenseur t $T(\mathfrak{g}')$, il existe un entier q tel que $(y_T)^q.t = 0$.

Puisque l'idéal stable Z est de codimension finie, ceci prouve qu'il existe un entier $k > 0$ tel que $(y_T)^K . T(\mathfrak{g}') \subset Z$ et donc $(y_M)^K = 0$.

3) Quels que soient $x \in \mathfrak{h}$ et $y \in \mathfrak{g}'$, on a d'après 3)'

$x_T\, y_T . T(\mathfrak{g}') = x \otimes y \otimes T(\mathfrak{g}') \subset R' \subset Z$, donc $x_M y_M = 0$. D'autre part, si $y \in \mathfrak{b}$, alors la dérivation y_T de $T(\mathfrak{g}')$ applique $T(\mathfrak{g}')$ dans la sous-algèbre constituée par les tenseurs de $\mathfrak{g}'$ qui ont une composante scalaire nulle. Par conséquent, pour tout $x \in \mathfrak{h}$, on a

$x_T\, y_T . T(\mathfrak{g}') \subset x \otimes \mathfrak{g}' \otimes T(\mathfrak{g}') \subset R' \subset Z$ c'est dire que $x_M\, y_M = 0$.

<u>Théorème 3</u> (Ado). Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique 0. Il existe une représentation fidèle $x \rightarrow x_N$ de $\mathfrak{g}$ qui est de dimension finie sur K et telle que x_N soit nilpotent pour tout élément x appartenant au plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$.

<u>Démonstration</u>. Soit $\mathfrak{h}$ le centre de $\mathfrak{g}$. Soit M un module de représentation de $\mathfrak{g}$ vérifiant vis à vis de l'idéal abélien $\mathfrak{h}$ les conditions 1) et 2) du Lemme précédent. Le produit direct N de M et du module G de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est le module d'une représentation de $\mathfrak{g}$ qui vérifie les conditions du Théorème. En effet, quels que soient $u \in M$ et $x, y \in \mathfrak{g}$, on a $x_N.(u,y) = (x_M.u,\ ad(x).y)$, par conséquent, si $x_N = 0$, alors $ad(x) = 0$, et $x_M = 0$, donc $x = 0$ d'après la condition 1).
Si d'autre part x est dans le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, alors $ad(x)$ est nilpotent et x_M est nilpotent d'après la condition 2).
Par suite x_N est nilpotent.

<u>Théorème 4</u> (Iwasawa). Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 et $(\mathfrak{g}, \mu)$ une extension abélienne de $\mathfrak{a}$. Il existe une extension abélienne <u>inessentielle</u> $(\mathfrak{c}, \lambda)$ de $\mathfrak{a}$ avec un isomorphisme α de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{c}$ tel que $\overset{\lambda}{\mathfrak{g}}\alpha = \mu$.

<u>Démonstration</u>. Soient $\mathfrak{h}$ le noyau abélien de μ et M un module de représentation de $\mathfrak{g}$ vérifiant vis à vis de $\mathfrak{h}$ les conditions 1) et 3) du Lemme 7.