# RÉDACTION N° 163

COTE : NBR 065

TITRE : LIVRE VIII - VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES
CHAPITRE IV (ÉTAT 2) :
ÉTUDE GLOBALE DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 82

NOMBRE DE FEUILLES : 61

Samuel

NBR 065

2

(163)

LIVRE VIII

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

CHAPITRE IV (État 2)

ÉTUDE GLOBALE DES

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

---

Sommaire .



---

Commentaires .

Le rédacteur ne s'est que peu écarté du plan tracé par la Tribu . Sur les instances de Schwartz (qui a fourni la démonstration) on a inséré les théorèmes de prolongement de Whitnev , dont la démonstration est finalement assez simple: en outre ,les propriétés des partitions particulières servant à les démontrer peuvent être utiles ailleurs (p.ex. pour les ensembles différentiellement négligeables) . La méthode proposée pour le th. d'immersion a très bien marché , et permis de réduire la démonstration de 10 à 5 pages . Le rédacteur n'a pas parlé des espaces de fonctions différentiables sur une variété , jugeant que ces ques tions sont mieux à leur place au début du chap. sur les distributions et courants , où il faut de toutes façons définir et étudier plus généralement les espaces de formes différentielles de classe $C^k$ ; par ailleurs , on ne se sert pas de ces espaces avant les distributions . Au § 3 , on n'a pas parlé des applications du th. d'immersion aux propriétés de finitude des divers anneaux et modules de fonctions et champs de tenseurs sur une variété ; jusqu'à preuve du contraire , ces questions semblent au rédacteur avoir tout juste la valeur d'exercices .

Finalement , le rédacteur signale qu'il a donné au terme "sous-variété" le sens de "variété régulièrement plongée" de la rédaction Chevalley , c.à.d. qu'au voisinage de chaque point de la sous-variété W, il y a une carte d'un voisinage U de ce point (dans la variété ambiante V) , qui transforme $U \cap W$ en un ensemble ouvert par rapport à une sous-variété affine de $R^n$ . Le rédacteur est d'avis (après expérience) que c'est là la notion fondamentale : le fait que la sous-variété est fermée ou non est en général secondaire pour la plupart des applications .

-----------

LIVRE VIII

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

CHAPITRE IV (Etat 2)

ÉTUDE GLOBALE

DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

---

## § 1 . Faisceaux de germes de fonctions.

### 1. Germes de fonctions .

Soient E et F deux ensembles , et soit $\mathcal{G}$ un filtre sur E . Désignons par $\mathcal{H}(\mathcal{G},F)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans F , et dont chacune a pour ensemble de définition une partie appartenant à $\mathcal{G}$ . Si f et g sont deux fonction appartenant à $\mathcal{H}(\mathcal{G},F)$ , la relation "il existe un ensemble $X\in\mathcal{G}$ tel que f et g soient définies et égales dans X" est une relation d'équivalence dans $\mathcal{H}(\mathcal{G},F)$; les classes ~~xx~~ d'équivalence suivant cette relation $R(\mathcal{G})$ sont appelées les germes de fonctions à valeurs dans F , correspondant au filtre $\mathcal{G}$ . Soient $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ deux filtres sur E ; pour qu'un germe de fonction $\tilde{f}\in\mathcal{H}(\mathcal{G}_1,F)/R(\mathcal{G}_1)$ soit égal à un germe de fonction $\tilde{g}\in\mathcal{H}(\mathcal{G}_2,F)/R(\mathcal{G}_2)$ , il faut et il suffit que $\mathcal{G}_1=\mathcal{G}_2$ et qu'il existe une fonction ~~xx~~ h définie dans un ensemble de $\mathcal{G}_1$ et appartenant à la fois à $\tilde{f}$ et à $\tilde{g}$ : en effet , ces conditions sont évidemment suffisa tes ; d'autre part , si $\mathcal{G}_1\neq\mathcal{G}_2$ , ilexiste par exemple un ensemble $X_1\in\mathcal{G}_1$ qui n'appartient pas à $\mathcal{G}_2$ ; comme $\tilde{f}$ contient des fonctions dont l'ensemble de définition est $X_1$ , une telle fonction ne peut appartenir à $\mathcal{H}(\mathcal{G}_2,F)$ , ni a fortiori à $\tilde{g}$ , d'où la nécessité des conditions . Exercice (?)

### 2 . Faisceaux de germes de fonctions .

Soient E un espace topologique séparé , F un ensemble , $\Phi$ un ensemble de fonctions à valeurs dans F , dont chacune a pour ensemble de définition une partie de E . Soit f une fonction de $\Phi$ , A son ensemble de définition ; pour tout $x\in A$ soit $\tilde{f}_x$ le germe de fonction qui est la classe d'équivalence de f par rapport

On peut regarder le pt. de vue "ensembles"
(on y ramène les fonctions par graphes)
Question de yoga.

au filtre ayant pour base l'ensemble des voisinages de x <u>par rapport au sous-espace</u> A de E . Soit $\mathcal{F}(\Phi)$ l'ensemble de tous les germes de fonctions correspondant aux fonctions de $\Phi$ ; nous allons définir sur $\mathcal{F}(\Phi)$ une <u>topologie</u> $\mathcal{T}$, de la façon suivante . Pour tout ensemble ouvert $U \subset E$ et toute fonction $f \in \Phi$ ,soit $\underline{T}(U,f)$ l'ensemble des germes $\tilde{f}_x$ correspondant à f et aux points $x \in U$ ; la topologie $\mathcal{T}$ est par définition la topologie <u>engendrée</u> par les ensembles $\underline{T}(U,f)$ ; on notera que $\underline{T}(U,f)$ est vide si U ne rencontre pas l'ensemble de définition de f . Pour tout germe $\tilde{f}_x$ , les ensembles $\underline{T}(U,g)$ contenant $\tilde{f}_x$ forment un <u>système fondamental de voisinages</u> de $\tilde{f}_x$ : en effet , il suffit de montrer que si ~~T(U1~~ $\underline{T}(U_1,g_1)$ et $\underline{T}(U_2,g_2)$ contiennent $\tilde{f}_x$ , leur intersection contient un ensemble $\underline{T}(V,h)$ contenant $\tilde{f}_x$ ; or , l'hypothèse entraîne que $g_1$ et $g_2$ sont égales à une même fonction h dans un voisinage ouvert W de x par rapport à l'ensemble de définition A de h , W étant aussi un voisinage de x par rapport aux ensembles de définition de $g_1$ et $g_2$ ; comme W est l'intersection de A et d'un ensemble ouvert V dans E , $\underline{T}(V,h)$ est contenu dans $\underline{T}(U_1,g_1)$ et $\underline{T}(U_2,g_2)$ .

A tout germe de fonction $\tilde{f}_x \in \mathcal{F}(\Phi)$ correspond le point $x \in E$ ; l'application $\tilde{f}_x \to x$ est appelée la <u>projection</u> de $\mathcal{F}(\Phi)$ dans E et notée p . Il est immédiat que l'image de $\underline{T}(U,f)$ par p est contenue dans U ; la projection p est donc une <u>application continue</u> de $\mathcal{F}(\Phi)$ dans E . En outre , pour tout $x \in E$ , l'ensemble $\overset{-1}{p}(x)$ est un sous-espace <u>discret</u> de $\mathcal{F}(\Phi)$ . En effet , si $\tilde{f}_x$ est un point de cet ensemble correspondant à une fonction $f \in \Phi$ , le voisinage $\underline{T}(U,f)$ de $\tilde{f}_x$ (U voisinage ouvert de x dans E) ne contient aucun point de $\overset{-1}{p}(x)$ distinct de $\tilde{f}_x$ , par définition . En outre , si A est l'ensemble de définition de $f \in \Phi$, l'application $y \to \tilde{f}_y$ de A dans $\mathcal{F}(\Phi)$ est un <u>homéomorphisme</u> ; c'est en effet une application biunivoque , et son application réciproque est la restriction de p à $\underline{T}(E,f)$ qui est continue ; d'autre part , tout voisinage de $\tilde{f}_y$ dans $\mathcal{F}(\Phi)$ contient un ensemble de la forme $\underline{T}(V,f)$ , comme on l'a vu ci-dessus ,

 7



et l'image par p de cet ensemble est $V \cap A$ , voisinage de x par rapport à A .

Nous dirons que l'espace topologique $\mathcal{F}(\Phi)$ ainsi défini est le faisceau de germes de fonctions correspondant aux fonctions de $\Phi$ . Il importe de noter que même lorsque les ensembles de définition des fonctions de $\Phi$ sont ouverts dans E , l'espace $\mathcal{F}(\Phi)$ n'est pas nécessairement séparé .

Exemples .- 1) Prenons E=R , et pour $\Phi$ l'ensemble de toutes les fonctions numériques continues définies dans des parties ouvertes de R . Le faisceau $\mathcal{F}(\Phi)$ n'est pas séparé . En effet , soit f la fonction 0 ; soit d'autre part g une fonction continue dans un voisinage de x=0 , égale à 0 dans chaque intervalle $[1/2n, 1/(2n-1)]$ et non identiquement nulle dans chaque intervalle $[1/(2n+1); 1/2n]$ . Les germes $\tilde{f}_0$ et $\tilde{g}_0$ sont distincts , mais pour tout voisinage ouvert U de 0 dans R , $\underline{T}(U,f)$ et $\underline{T}(U,g)$ ont des éléments communs , savoir les germes $\tilde{f}_x = \tilde{g}_x$ correspondant aux points x des intervalles $]1/2n, 1/(2n-1)[$ contenus dans U .

On peut naturellement , dans l'exemple précédent , supposer g indéfiniment différentiable , et par suite , si on remplace $\Phi$ par l'ensemble des fonctions numériques indéfiniment différentiables , $\mathcal{F}(\Phi)$ n'est pas séparé .

2) Soit E une variété indéfiniment différentiable de dimension n , et soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des sous-variétés de E , ~~de même dimension p<n~~ . Pour toute sous-variété $M \in \mathfrak{S}$ , soit $f^M$ la fonction numérique dont l'ensemble de définition est M et qui est égale à 0 dans M . Si $\Phi$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f^M$ , le faisceau $\mathcal{F}(\Phi)$ n'est pas séparé . On le voit comme dans l'exemple précédent , en prenant $E=R^2$ , p=1 et en considérant les deux variétés d'équations y=0 , y=g(x) (g définie comme dans l'ex 1 , et indéfiniment différentiable) .

On a ainsi ramené les "faisceaux de germes de variétés" aux "faisceaux de germes de fonctions" . On pourrait plus généralement définir des "faisceaux de germes d'ensembles" et y ramener les "faisceaux de germes de fonctions" par le moyen des graphes de ces fonctions ; est-ce utile ?

3) Soit F un espace topologique étalé sur E ; autrement dit (Top.géom., chap., § ) ~~il existe~~ un espace F muni d' une application continue $\pi$ ~~de F sur une partie ouverte $E_0$ de~~ dans E , ~~et~~ t.q. pour tout $y \in F$ , il existe un voisinage ouvert $V_y$ de y dans F tel que la restriction de $\pi$ à $V_y$ soit un homéomorphisme de $V_y$ sur

C'est pédérastique
"On y fout dedans tous les petits bouts
qui ne servent à rien"

Donner | resp. diff.
| resp. anal.



une partie ouverte de E . Désignons par $f^y$ l'application de $\pi(V_y)$ dans F , réciproque de la restriction de $\pi$ à $V_y$ , et soit $\Phi$ l'ensemble de toutes les applications $f^y$ pour $y \in F$ . Montrons que l'application $y \to (\tilde{f}^y)_{\pi(y)}$ est un homéomorphisme de F sur $\mathcal{F}(\Phi)$ . Il suffit de remarquer qu'en vertu des définitions , pour tout $z \in V_y$ , on a $(\tilde{f}^y)_{\pi(z)} = (\tilde{f}^z)_{\pi(z)}$ ; tout élément de $\mathcal{F}(\Phi)$ est donc de la forme $(\tilde{f}^y)_{\pi(y)}$ ; cela montre que $y \to (\tilde{f}^y)_{\pi(y)}$ est une application de F sur $\mathcal{F}(\Phi)$ , et elle est évidemment biunivoque . Comme elle transforme $V_y$ en $\underline{T}(\pi(V_y), f^y)$ , c'est un homéomorphisme .

Inversement , lorsque les ensembles de définition des fonctions de $\Phi$ sont ouverts dans E , il résulte de ce qui a été vu plus haut que $\mathcal{F}(\Phi)$ est étalé sur E . Ainsi Bourbaki se mord la queue (avec discrétion !)

## 3 . Le théorème de Poincaré-Volterra .

Variétés non nécessit. paracompactes

Dans la suite de ce § , nous étudierons plus particulièrement des cas où tout point de $\mathcal{F}(\Phi)$ admet un voisinage compact fermé sur l'intérieur duquel on puisse définir une structure de variété différentiable . Afin qu'on puisse définir sur une composante connexe de $\mathcal{F}(\Phi)$ une structure de variété différentiable , il faudra alors que cette composante connexe soit dénombrable à l'infini . Pour établir ce point , nous utiliserons un théorème de Topologie générale que nous allons démontrer dans ce n° .

THÉORÈME 1 (Poincaré-Volterra) .- Soit X un espace topologique satisfaisant à l'axiome $(O_{III})$ (mais non nécessairement séparé) , connexe et localement connexe . Soit Y un espace topologique dont la topologie admet une base dénombrable $\mathcal{U}$ , et soit p une application continue de X dans Y telle que , pour tout $y \in Y$, $\overset{-1}{p}(y)$ soit un sous-espace discret de X . Soit enfin $\mathcal{V}$ un ensemble de parties fermées de X , telles que chaque point de X soit intérieur à l'une d'elles au moins , et qui jouissent des deux propriétés suivantes : 1° pour tout $V \in \mathcal{V}$ , l'image par p de toute partie fermée de V est un ensemble fermé dans Y ; 2° tout ensemble $V \in \mathcal{V}$ contient une partie dénombrable dense par rapport à V . Alors l'espace X est réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de $\mathcal{V}$ .

Nous dirons que $(W,U)$ est un couple distingué si $W$ est un ensemble ouvert connexe non vide dans $X$ ; contenu dans un ensemble de $\mathcal{V}$, et si $U$ appartient à $\mathcal{U}$ et est tel que $\overset{-1}{p}(U)$ contienne $W$ et ne rencontre pas la frontière $Fr(W)$ de $W$.

Lemme 1.-Pour tout point $x \in X$, il existe un couple distingué $(W,U)$ tel que $x \in W$.

En effet, l'image réciproque du point $p(x)$ étant discrète, il existe dans $X$ un voisinage de $x$ dont tous les points autres que $x$ ont une image $\neq p(x)$ ; comme $X$ satisfait à l'axiome $(O_{III})$, il existe un voisinage fermé $V$ de $x$ qui jouit de la même propriété, et on peut évidemment supposer que $V$ est contenu dans un ensemble de $\mathcal{V}$. En vertu de la condition 1° de l'énoncé du th.1, l'image $p(Fr(\overset{\circ}{V}))$ est fermée dans $Y$ ; comme elle ne contient pas $p(x)$, il existe un ensemble $U \in \mathcal{U}$ qui contient $p(x)$ et ne rencontre par $p(Fr(\overset{\circ}{V}))$. Soit alors $W$ la composante connexe de l'ensemble ouvert $\overset{\circ}{V} \cap \overset{-1}{p}(U)$ qui contient le point $x$ ; c'est un ensemble ouvert dans $X$, puisque $X$ est localement connexe. Il reste à montrer que $\overset{-1}{p}(U)$ ne rencontre pas $Fr(W)$. Comme $X$ est localement connexe et que $W$ est une composante connexe de l'ensemble ouvert $\overset{\circ}{V} \cap \overset{-1}{p}(U)$, tout point frontière de $W$ est point frontière de $\overset{\circ}{V} \cap \overset{-1}{p}(U)$ ; mais si un tel point appartenait à $\overset{-1}{p}(U)$, il serait point frontière de $\overset{\circ}{V}$, ce qui contredit la définition de $U$.

Lemme 2 .- Si $(W,U)$ et $(W',U)$ sont deux couples distingués ayant même second élément, on a $W=W'$ ou $W \cap W'=\emptyset$.

En effet, si $W \cap W'$ n'est pas vide, c'est un sous-ensemble ouvert de $W$ ; nous allons voir qu'il est aussi fermé dans $W$. En effet, s'il existait un point frontière $u$ de $W'$ par rapport à $W$, on aurait $u \in \overset{-1}{p}(U)$ puisque $W \subset \overset{-1}{p}(U)$, et $u \notin \overset{-1}{p}(U)$ puisque $u \in Fr(W')$, ce qui est absurde. Comme $W$ est connexe, on a nécessairement $W \cap W'=W$, c'est-à-dire $W \subset W'$ ; on montre de même que $W' \subset W$.

Lemme 3 .- Etant donné un couple distingué $(W,U)$, l'ensemble des couples distingués $(W',U')$ tels que $W$ rencontre $W'$ est dénombrable.

En effet , $\mathcal{U}$ étant dénombrable , il suffit de prouver que pour un $U' \in \mathcal{U}$ donné, l'ensemble des $W'$ tels que $(W',U')$ soit distingué et que $W'$ rencontre $W$ , est dénombrable . Or , ces ensembles $W'$ sont deux à deux disjoints en vertu du lemme 2 ; il en est de même des ensembles ouverts $W' \cap W$ ; mais comme $W$ contient un ensemble dénombrable partout dense , les ensembles $W' \cap W$ non vides sont nécessairement en infinité dénombrable , ce qui démontre le lemme .

Ces lemmes étant établis , considérons dans $X$ la relation suivante $R$ entre deux points $x,x'$ : "il existe une suite finie de couples distingués $(W_i,U_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ tels que $x \in W_1, x' \in W_n$ et $W_i \cap W_{i+1} \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq n-1$" . On vérifie aussitôt (en vertu du lemme 1) que $R$ est une relation d'équivalence ; en outre , il résulte de la définition de $R$ et du fait que les $W_i$ sont ouverts , que toute classe d'équivalence suivant $R$ est un ensemble ouvert , et par suite à la fois ouvert et fermé . Comme $X$ est connexe , deux points quelconques de $X$ sont donc équivalents mod.$R$ . Nous allons en déduire que $X$ est réunion d'une famille dénombrable de premiers éléments de couples distingués , ce qui achèvera de démontrer le th.1.

Soit $x$ un point quelconque de $X$ ; définissons par récurrence sur $n$ une suite $(C_n)$ d'ensembles ouverts dans $X$ , de la façon suivante . En vertu du lemme 1 , il existe un couple distingué $(W_1,U_1)$ tel que $x \in W_1$ ; on prendra $C_1=W_1$ ; puis $C_n$ sera la réunion de tous les premiers éléments $W$ de couples distingués $(W,U)$ tels que $W$ rencontre $C_{n-1}$ . On prouve aussitôt , par récurrence sur $n$ , et en appliquant le lemme 3 , que $C_n$ est réunion <u>dénombrable</u> de premiers éléments de couples distingués . Montrons enfin que tout point $x'$ de $X$ appartient à un des $C_n$ ; il existe en effet une suite finie $(W'_i,U'_i)_{1 \leq i \leq m}$ de couples distingués tels que $x \in W'_1, x' \in W'_m$ et $W'_i \cap W'_{i+1} \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq m-1$ ; par récurrence sur $i$ , on voit que $W'_i \subset C_{i+1}$ et par suite $x' \in C_{m+1}$.

CQFD

COROLLAIRE 1 .- <u>Soit $Y$ un espace localement compact métrisable de type dénombra-</u>

ble . Soit X un espace connexe et localement connexe , et soit p une application continue de X dans Y jouissant de la propriété suivante : chaque point de X possède un voisinage fermé V tel que la restriction de p à V soit un homéomorphisme de V sur un sous-espace fermé de Y . Alors X est un espace localement compact métrisable de dype dénombrable .

L'hypothèse entraîne d'abord que X est séparé (Top.gén.,chap.I,2$^e$ éd.,§ 6,prop. 3) , puis que X est localement compact , tout sous-espace fermé de Y étant localement compact . On peut en outre appliquer le th.1 en prenant pour $\mathcal{V}$ l'ensemble des parties compactes V de X telles que la restriction de p à V soit un homéomorphisme de V sur une partie (compacte) de Y ; chacun de ces ensembles V est en effet métrisable de type dénombrable . On en conclut que X est réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de $\mathcal{V}$ , d'où le corollaire .

COROLLAIRE 2 .- Soit Y un espace localement connexe et localement compact métrisable et de type dénombrable . Tout espace X séparé , connexe et étalé sur Y est localement connexe , localement compact , métrisable et de type dénombrable .

En effet , chaque point x de X possède un voisinage ouvert U tel que la restriction à U de la projection $\pi$ de X dans Y soit un homéomorphisme ; l'image réciproque par $\pi$ d'un voisinage compact métrisable V de $\pi(x)$ contenu dans $\pi(U)$ est alors un voisinage compact de x dans U , qui est fermé dans X puisque X est séparé . On est alors ramené au cor.1 , car il est évident que X est localement connexe .

COROLLAIRE 3 .- Soit X un espace séparé , connexe et localement connexe , dont chaque pointpossède un voisinage compact métrisable . Soit Y un espace séparé , dont la topologie admet une base dénombrable , et soit p une application continue de X dans Y , telle qu' léimage réciproque de tout point de Y soit un ensemble discret . Alors X est métrisable et de type dénombrable .

En effet , soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des parties compactes et métrisables de X ; comme Y est séparé , $\mathcal{V}$ vérifie les conditions 1° et 2° du th.1. D'où le corollaire .

On remarquera que , dans ce dernier corollaire , il peut se faire que la restriction de p à un voisinage arbitrairement petit V d'un point de X ne soit pas un homéomorphisme de V sur p(V) .

4 . Applications : I . Variétés plongées .

Revenons aux notations du n°2 . Dans toutes les applications qui vont suivre , E sera toujours une variété indéfiniment différentiable (resp. analytique sur le corps R ou le corps C) , de dimension n , et les ensembles de définition des fonctions de $\Phi$ des sous-variétés ~~de même dimension m~~ $\leqslant$ n . Supposons alors que l'ensemble $\Phi$ soit tel que le faisceau $\mathcal{F}(\Phi)$ soit un espace topologique séparé. Comme toute sous-variété de E est un espace localement compact , $\mathcal{F}(\Phi)$ est lui-même un espace localement compact et localement connexe , d'après la définition de ses voisinages . Le cor.1 du th.1 montre alors que toute composante connexe X de $\mathcal{F}(\Phi)$ est un espace localement compact , métrisable , de type dénombrable et localement connexe . En outre , nous allons voir qu'on peut définir sur X une structure de variété indéfiniment différentiable (resp. analytique) de dimension m . En effet , soit $f\in\Phi$ , A l'ensemble de définition de f , x un point de A , V un voisinage ouvert de x dans A , $\varphi$ une carte de V sur un ensemble ouvert de $R^m$ (resp. $C^m$) ; $\varphi\circ p$ est alors un homéomorphisme de $\overset{-1}{p}(V)$ sur $\varphi(V)$ ~~XXXXXXXX~~ , et définit donc une structure de variété sur $\overset{-1}{p}(V)$ par transport de structure . Si g est une seconde fonction de $\Phi$ , ayant pour ensemble de définition B , et telle que $\tilde{f}_x=\tilde{g}_x$ , $A\cap B$ est un voisinage ouvert de x dans A et dans B , donc contient une sous-variété C de dimension m , contenant x , et dans laquelle f et g coïncident , et les structures de variété définies sur $\overset{-1}{p}(C)$ à partir de f et de g sont évidemment les mêmes , ce qui établit notre assertion . La projection p est alors une application indéfiniment différentiable (resp. analytique) .

Comme première application de ce qui précède , considérons un ensemble $\mathfrak{S}$ de sous-variétés de E , de même dimension $m \leq n$ , et pour toute variété $M \in \mathfrak{S}$ ,soit $f^M$ la fonction numérique dont M est l'ensemble de définition , et qui est égale à 0 dans M . Le faisceau $\mathcal{F}(\Phi)$ sera séparé si la condition suivante est vérifiée (S) Pour tout point x commun à deux sous-variétés M,N de $\mathfrak{S}$ , il existe un voisinage U de x dans E tel que $U \cap M = U \cap N$ , ou que $U \cap M \cap N$ ne contienne aucun ensemble ouvert par rapport à M .

En effet , si $\tilde{f}_x$ et $\tilde{g}_y$ sont alors deux points distincts de $\mathcal{F}(\Phi)$ , il est clair que si $x \neq y$ , ces points sont séparés par deux voisinages $\underline{T}(U,f)$ et $\underline{T}(V,g)$ où U et V sont des voisinages de x et y sans point commun ; si au contraire $x=y$, en appliquant la condition (S) aux sous-variétés M et N où sont définies f et g, il résulte de l'hypothèse $\tilde{f}_x \neq \tilde{g}_x$ que l'on ne peut avoir $U \cap M = U \cap N$ pour aucun voisinage U de x dans E ; en prenant U tel que $U \cap M \cap N$ ne contienne aucun ensemble ouvert par rapport à M , on voit que $\underline{T}(U,f)$ et $\underline{T}(U,g)$ n'ont aucun point commun.

Dans tous les cas où la condition (S) est vérifiée , on voit donc que la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$ peut être considérée comme réunion ~~d~~ de "variétés plongées images des composantes connexes de $\mathcal{F}(\Phi)$ par p , qui est localement un isomorphisme de structure de variété indéfiniment différentiable (resp. analytique).

Exemples .- 1) Variétés intégrales maxima d'un système complètement intégrable.

La condition (S) est en particulier réalisée lorsque deux sous-variétés M,N de $\mathfrak{S}$ n'ont de point commun x que si leur intersection est un voisinage de x dans M et dans N . Ceci est en particulier le cas lorsque $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des sous-variétés de E qui sont intégrales d'un système complètement intégrable (chap.III § ) dans E . L'application p est alors une application biunivoque de $\mathcal{F}(\Phi)$ dans E , mais non un isomorphisme si $m<n$ ; par abus de langage , on dit que les composantes connexes de $\mathcal{F}(\Phi)$ sont les variétés intégrales maxima du système com-

Noter que dans ces exemples, les compos. connexes sont des ouverts (il y a locale connexité) plètement intégrable considéré . En général , leurs images par $p$ ne sont pas des sous-variétés de E (géodésiques du tore) .

2) Prolongement analytique d'une sous-variété . Si E est une variété indéfiniment différentiable , l'ensemble $\mathfrak{S}$ de toutes les sous-variétés de E de dimension $m<n$ ne vérifie pas la condition (S) (voir n°2 , exemple 2). Mais cette condition est vérifiée lorsque E est une variété analytique et $\mathfrak{S}$ l'ensemble de toutes les sous-variétés de E , de dimension $m>0$ . En effet , si x appartient à deux telles sous-variétés M,N , il existe un voisinage U de x dans E et un système de coordonnées locales $(z_1,\ldots,z_n)$ dans U tels que $U\cap M$ soit connexe et définie par les n-m équations $z_k=0$ $(1\leq k\leq n-m)$ et $U\cap N$ par n-m équations de la forme $f_k(z_1,\ldots,z_n)=0$ $(1\leq k\leq n-m)$ , où les $f_k$ sont analytiques dans U et de rang n-m . Cela étant , si $U\cap M\cap N$ contenait un ensemble V ouvert par rapport à M , on aurait $f_k(0,\ldots,0,z_{n-m+1},\ldots,z_n)=0$ dans V pour $1\leq k\leq n-m$ ; en vertu du principe de prolongement analytique (chap.II, § ) , on aurait les mêmes relations dans $U\cap M$ tout entier , et par suite $U\cap M=U\cap N$ .

Etant donnée une sous-variété analytique M de E , de dimension $m>0$ , il existe donc une composante connexe et une seule X de $\mathcal{F}(\Phi)$ telle que $p(X)\supset M$ ; on dit que X est le prolongement analytique maximum de la sous-variété M ; on notera qu'en général $p(X)$ n'est pas une sous-variété de E .

5 . Applications : II . Domaine d'existence d'une fonction analytique .

Dans ce qui suit , E est une variété analytique ; F est , soit une variété analytique (sur le même corps que E) , soit un espace localement convexe séparé (sur le même corps que E) ; $\Phi_F$ (ou simplement $\Phi$ ) désignera l'ensemble des fonctions à valeurs dans F , dont l'ensemble de définition est une partie ouverte connexe de E , et qui sont analytiques dans leur ensemble de définition (on rappelle que lorsque F est un espace localement convexe séparé , dire qu'une application $f$ de $A$ dans $F$ est analytique signifie que , pour tout vecteur $a'$ du dual $F'$ de $F$ , $x \rightarrow \langle f(x), a' \rangle$ est une fonction scalaire analytique dans $A$). Dans ces conditions , le faisceau $\mathcal{F}(\Phi)$ (dit <u>faisceau des germes de fonctions analytiques à</u> valeurs dans $F$) est séparé. En effet, si $\tilde{f}_x$ et $\tilde{g}_y$ sont deux points distincts de $\mathcal{F}(\Phi)$ , on voit comme au n°4 que si $x \neq y$ , ces deux points sont séparés par les voisinages $\underline{T}(U,f)$ et $\underline{T}(V,g)$ , où $U$ et $V$ sont des voisinages respectifs de $x$ et $y$ sans point commun ; si au contraire $x=y$ , on peut supposer $f$ et $g$ définies dans l'image réciproque $U$ d'une boule par une carte locale ; si $\underline{T}(U,f)$ et $\underline{T}(U,g)$ avaient un point commun , cela signifierait qu'il existe une partie ouverte $W$ de $U$ dans laquelle $f$ et $g$ coïncident ; mais en vertu du principe du prolongement analytique , on aurait alors $f=g$ dans $U$, et par suite $\tilde{f}_x=\tilde{g}_x$ contrairement à l'hypothèse . Chaque composante connexe $X$ de $\mathcal{F}(\Phi)$ est donc munie d'une structure de <u>variété analytique</u> . Elle est <u>étalée</u> sur $E$ par la projection $p$ , qui , pour tout point $z$ de $X$ , est un isomorphisme d'un voisinage assez petit $V$ de $z$ sur $p(V)$ . Pour toute fonction $f \in \Phi$ , ayant pour ensemble de définition un domaine $A \subset E$ , tous les germes $\tilde{f}_x$ correspondant aux points $x \in A$ appartiennent à une même composante connexe $X_f$ de $\mathcal{F}(\Phi)$ , puisque $\underline{T}(A,f)$ est homéomorphe à $A$ , donc connexe ; on dit que la variété analytique $X_f$ est le <u>domaine d'existence maximum</u> de $f$ , ou la <u>variété de Riemann</u> de $f$ (<u>surface de Riemann</u> lorsque $E$ est une variété analytique complexe de dimension (complexe) 1) . Pour tout point $z \in X_f$ , il existe une fonction $g$ analytique dans un voisina ge de $y=p(z)$ et telle que $z=\tilde{g}_y$ ; on pose $\tilde{f}(z)=g(y)$ , et il est clair que la ~~XX~~ fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est analytique dans $X_f$ ; on dit (par abus de langage) que c'est le prolongement analytique maximum de f ($\tilde{f}$ n'est évidemment pas un prolongement de f , mais on a $\tilde{f}(z)=f(p(z))$ pour tout point z de $\underline{T}(A,f)$) . On dit qu'une fonction $f\in\Phi$ est uniforme si p est un isomorphisme de $X_f$ tout entier sur $p(X_f)$ (autrement dit si p est biunivoque dans $X_f$) ; on peut alors identifier $X_f$ avec sa projection $p(X_f)$ , donc avec une sous-variété ouverte de E .

Soit u une application analytique de F (supposée variété analytique) dans une variété analytique G . Si , à tout germe $\tilde{f}_x$ on fait correspondre le germe $(\widetilde{u\circ f})_x$ , on définit une application continue de $\mathcal{F}(\Phi_F)$ dans $\mathcal{F}(\Phi_G)$ , qui transforme tout ensemble ouvert en un ensemble ouvert , comme il résulte aussitôt de la définition des voisinages ; cette application transforme $X_f$ en un domaine contenu dans $X_{u\circ f}$ , mais qui peut être distinct de $X_{u\circ f}$ ; en outre , elle n'est pas biunivoque en général (exemple : $f(z)=\sqrt{z}$ , $u(z)=z^2$) .

Considérons la projection $p(X_f)$ ~~XX~~ sur E de la variété de Riemann d'une fonction $f\in\Phi$ ; c'est un ensemble ouvert D dans E , mais en général $X_f$ n'est pas un revêtement de D (nombreux exemples , pris parmi les fonctions d'une variable complexe ayant en un point une singularité pour une "détermination" mais non pour d'autres , telles $\log(1+\sqrt{1-x})$ ou la fonction réciproque ~~XX~~ d'une fonction entière telle que sin x/x). Comme $X_f$ est étalé sur D , on sait que , pour que $X_f$ soit un revêtement , il faut et il suffit que tout chemin dans D se relève dans $X_f$ (Top.géom.,chap., § ). Nous allons dans ce qui suit donner deux importants exemples dans lesquels on peut affirmer que $X_f$ est un revêtement de D .

## 6 . Exemples : I . Fonctions implicites .

Nous désignerons par K le corps R ou le corps C ; E sera une variété analyti-

Sommule

NBR 065 19

(163)

Ça doit pouvoir se faire
comme cas particulier de Lelong.
Il désg aindre d'ici



que de dimension m sur K , et F l'espace $K^n$ .

THÉORÈME 2 :- Soient $f_k$ $(1 \leq k \leq n)$ n fonctions à valeurs dans K , analytiques dans $E \times F$ . On suppose que pour tout point $x \in E$ , le système de n équations $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)=0$ $(1 \leq k \leq n)$ admet un nombre fini de solutions , et que pour chacune de ces solutions $y=(y_1, \ldots, y_n)$ , les n fonctions $f_k$ forment un système de rang n au point $(x,y)$ ; on suppose en outre que pour tout $x \in E$ , il existe un voisinage V de x dans E tel que l'ensemble des y satisfaisant à $f_k(z,y)=0$ $(1 \leq k \leq n)$ pour tout $z \in V$ soit borné dans F . Dans ces conditions , pour toute fonction analytique $u=(u_1, \ldots, u_n)$ à valeurs dans F , définie dans un domaine de E et y vérifiant les n équations $f_k(x, u_1(x), \ldots, u_n(x))=0$ $(1 \leq k \leq n)$ , la variété de Riemann $X_u$ de u est un revêtement de E à un nombre fini de feuillets .

Il suffit de montrer que tout chemin $t \to \gamma(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ dans E peut être relevé dans $X_u$ ; posons $x_0=\gamma(0)$ , $x_1=\gamma(1)$ . Nous allons montrer qu'il existe une application continue $t \to v(t)$ de $[0,1]$ dans $X_u$ et une seule telle que v(t) soit le germe$(\tilde{g}^t)_{\gamma(t)}$ d'une fonction analytique $g^t$ vérifiant les équations $f_k(x, g^t(x))=0$ $(1 \leq k \leq n)$ au voisinage du point $\gamma(t)$ , et que v(0) soit identique à $\tilde{u}_{x_0}$ . Pour cela , désignons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des intervalles L d'origine 0 , non réduits à un point , tels que dans L il existe une application v ayant les propriétés précédentes : $\mathfrak{M}$ n'est pas vide , car on peut prendre $v(t)=\tilde{u}_{\gamma(t)}$ dans un voisinage assez petit de 0 par hypothèse . Du fait que $X_u$ est étalé sur E , il résulte que si L et L' sont deux intervalles de $\mathfrak{M}$ tels que $L \subset L'$ , et si v et v' sont les applications correspondantes de L et L' dans $X_u$ , on a $v(t)=v'(t)$ dans L . Si J est la réunion des intervalles de $\mathfrak{M}$ , J appartient donc à $\mathfrak{M}$ , et tout revient à montrer que $J=[0,1]$ . Pour cela , soit $\alpha$ l'extrémité de J ; montrons en premier lieu que lorsque t tend vers $\alpha$ , v(t) tend vers une limite. En effet , soit $x=\gamma(\alpha)$ ; le théorème local sur les fonctions implicites analytitiques (chap. II, § ) prouve que , dans les conditions de l'énoncé , si $y_j$ $(1\leq j\leq q)$ sont les racines distinctes du système d'équations $f_k(x,y)=0$ $(1\leq k\leq n)$, il existe un voisinage V de x et q fonctions $g_j$ $(1\leq j\leq q)$ analytiques dans V , satisfaisant aux équations $f_k(z,g_j(z))=0$ $(1\leq k\leq n)$ pour $z\in V$ , telles que $g_j(x)=y_j$ $(1\leq j\leq q)$ et que , pour tout $z\in V$ , les $g_j(z)$ soient les <u>seules</u> racines de $f_k(z,y)=0$ $(1\leq k\leq n)$ . Il résulte alors aussitôt du th. de Bolzano que l'on a nécessairement $v(t)=(\tilde{g}_j)_{\gamma(t)}$ pour un <u>même</u> indice j et pour $\alpha-\varepsilon\leq t\leq\alpha$ . Par suite v(t) tend vers $(\tilde{g}_j)_x$ lorsque t tend vers $\alpha$ . Si maintenant on avait $\alpha<1$ , on pourrait prolonger v pour $t>\alpha$ en prenant $v(t)=(\tilde{g}_j)_{\gamma(t)}$ dans un petit intervalle d'origine $\alpha$ . Le théorème est donc démontré .

Il résulte aussitôt du th. 2 et de la théorie des revêtements que le nombre de solutions distinctes du système $f_k(x,y)=0$ $(1\leq k\leq n)$ est <u>le même</u> pour tout $x\in E$ ; si $y_j=(y_{jk})_{1\leq k\leq n}$ sont des solutions $(1\leq j\leq q)$ , les $y_j$ sont permutés par le groupe fondamental G de E , donc les fonctions symétriques élémentaires de $y_{1k},\dots,y_{qk}$ sont invariantes par G , et par suite sont des fonctions analytiques dans E tout entier ; autrement dit , chacune des $y_{jk}$ est solution d'une équation algébrique dont le premier membre est un polynôme unitaire de degré q , dont les coefficients sont analytiques dans E . Réciproquement , si les n fonctions $f_k$ sont des polynômes de cette forme , les conditions de l'énoncé du th. 2 sont remplies pourvu qu'en aucun point x de E les polynômes $f_k$ $(1\leq k\leq n)$ n'admettent de racine multiple (si on se donne arbitrairement ces polynômes , on remplacera E par le complémentaire dans E de l'ensemble fermé des points où au moins un des $f_k$ admet une racine multiple).

<u>7 . Exemples : II . Equations différentielles linéaires</u> .

Soit E une variété analytique complexe de dimension 1 , étalée sur un domaine de C ; pour toute fonction f définie dans un voisinage d'un point $x_0\in E$ et ana

Encore un cas particulier de φφοβεrιοs.

Et ça marche sur une variété!

lytique dans ce voisinage , on définit de façon évidente la <u>dérivée</u> , comme étant la dérivée de la fonction $f(\overset{-1}{p}(x))$ ($p$ étant biunivoque au voisinage de $x_o$) . On peut donc parler d'équation différentielle dans $E$ aussi bien que dans le cas où $E$ est un domaine de $C$ .

THÉORÈME 3 .- <u>Soit</u> $y'=\underline{A}(x).y+B(x)$ <u>une équation différentielle linéaire , où</u> $y \in C^n$ , $\underline{A}(x)$ <u>est une matrice d'ordre n analytique dans</u> $E$ , $b(x)$ <u>une fonction analytique dans E à valeurs dans</u> $C^n$ . <u>Pour toute intégrale u de cette équation , définie dans un domaine de</u> $E$ , <u>la surface de Riemann</u> $X_u$ <u>est un revêtement de</u> $E$ .

Il suffit de montrer comme dans la démonstration du th.2 que tout chemin $t \to \gamma(t)$ dans $E$ peut être relevé dans $X_u$ , et on peut évidemment se borner au cas où $\gamma$ est une ligne brisée . On voit aussitôt comme dans le th.2 qu'il existe un intervalle maximal $J$ d'origine $0$ dans lequel est définie une application continue $t \to v(t)$ dans $X_u$ , telle que $v(0)=\tilde{u}_{x_0}$ et que , pour tout $t \in J$ , $v(t)$ soit le germe $(\tilde{g}^t)_{\gamma(t)}$ d'une intégrale $g^t$ de l'équation différentielle donnée , définie au voisinage de $\gamma(t)$ . Montrons que si $\alpha$ est l'extrémité de $J$ , $v(t)$ tend vers une limite quand $t$ tend vers $\alpha$ . Il existe deux valeurs $t' < t''$ telles que $t' < \alpha \leq t''$ et que $\gamma$ soit linéaire dans $[t',t'']$ ; pour $t' \leq t < \alpha$ , ~~XXXXXXXX~~ $g^t(\gamma(s))$ est , pour $s$ voisin de $t$ , intégrale de l'équation différentielle linéaire $y'=c(A(\gamma(s)).y+b(\gamma(s)))$ , où $c=\gamma'(t)=\gamma'(s)$ . Mais les intégrales de cette équation sont définies dans l'intervalle $[t',t'']$ <u>tout entier</u> et entièrement déterminées par leur valeur au point $t'$ : pour $t' \leq t < \alpha$ , $g^t(\gamma(t))$ est donc égale à une <u>même</u> intégrale $w(t)$ de cette équation , ce qui établit notre assertion . Si on avait ~~XX~~ $\alpha < 1$ , on pourrait prolonger $v$ pour $t > \alpha$, en prenant $v(t)=\tilde{h}_{\gamma(t)}$ dans un petit voisinage de $\alpha$ , $h$ étant l'intégrale de l'équation donnée qui prend la valeur $w(\alpha)$ au point $\gamma(\alpha)$ et est définie dans un voisinage de ce point dans $E$ . Ceci démontre le th.3 .

Ceci est le cas du groupe additif R
se ramène au truc précédent..

$x \in V$ $s \in G$ on cherche $s(x)$
t. q. $\omega(s) = \eta(x)$
$\omega$ : forme structurelle

faire ça avec un groupe de Lie quelconque.

À mettre avec groupes de Lie
Fait chez Weil.



Considérons d'abord les équations <u>homogènes</u> ($b=0$) , et soit $x_0$ un point quelconque de $E$ (supposée connexe) ; pour tout lacet $t \to \sigma(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) d'origine et d'extrémité $x_0$ , et toute intégrale $u$ de l'équation linéaire considérée , définie dans un voisinage de $x_0$ , et prenant la valeur $y$ au point $x_0$ , nous désignerons par $\sigma.y$ la valeur de l'intégrale correspondant à $v(\sigma(1))$ , avec les notations précédentes . On voit aussitôt qu'on a $\sigma.(\alpha y+\beta z)=\alpha(\sigma.y)+\beta(\sigma.z)$ , et que $\sigma.y=\sigma'.y$ si les lacets $\sigma$ et $\sigma'$ sont homotopes . Si on désigne par $s$ la classe du lacet $\sigma$ dans le groupe fondamental $G$ de $E$ , on posera $s.y=\sigma.y$ , et on voit que $y \to s.y$ est un <u>endomorphisme</u> de $C^n$ , soit $T_s$ ; il est clair en outre que $s \to T_s$ est une <u>représentation</u> de $G$ dans le groupe des automorphismes de $C^n$ . L'image par cette représentation du groupe $G$ est appelée le <u>groupe de monodromie</u> de l'équation homogène $y'=\underline{A}(x).y$ . On voit facilement que ce groupe (qui dépend du point $x_0$) est déterminé à un automorphisme intérieur près du groupe $GL_n(C)$ , lorsqu'on change de point initial $x_0$ .

Pour étudier l'action du groupe fondamental sur les intégrales d'une équation linéaire non homogène $y'=\underline{A}(x).y+b(x)$ , on peut , en vertu de ce qui précède et de la forme des intégrales d'une telle équation , se ramener au cas où $\underline{A}(x)=0$ (en passant de $E$ à la surface de Riemann d'une intégrale de $y'=\underline{A}(x).y$) , c'est-à-dire au cas où $u$ est une primitive locale d'une fonction analytique . Mais ce cas rentre lui-même dans la troisième application donnée ci-après .

<u>8 . Applications : III . Primitive d'une forme fermée</u> .

Soit $E$ une variété différentiable (resp. analytique) de dimension quelconque, et soit $F$ un espace de Banach . Soit $\omega$ une expression différentielle (ou forme différentielle par abus de langage) de degré 1 , à valeurs dans $F$ , définie et de classe $C^1$ dans $E$ . Nous supposerons que $\omega$ est <u>fermée</u> , c'est-à-dire que $d\omega=0$

NBR 065 25



(chap.III,§ ) : on sait alors (loc.cit.) que dans ces conditions , pour tout $x \in E$ , il existe un voisinage V de x dans lequel admet une <u>primitive</u> u à valeurs dans F , déterminée à une constante additive près ; en outre , si deux de des primitives locales , définies dans V et W respectivement , sont égales en un point de $V \cap W$ , elles coïncident dans la composante connexe de ce point par rapport à $V \cap W$ . On montre alors exactement comme au n°5 que , si $\Phi$ désigne l'ensemble de ces primitives locales , le faisceau $\mathcal{F}(\Phi)$ est <u>séparé</u> . Pour toute primitive locale u , nous désignerons encore par $X_u$ la composante connexe de $\mathcal{F}(\Phi)$ contenant le germe $\tilde{u}_x$ relatif à un point x du domaine de définition de u; c'est une variété différentiable (resp. analytique) <u>étalée</u> sur E . On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 4 .- <u>Pour toute primitive locale u de la forme fermée $\omega$ , la variété $X_u$ est un revêtement de E</u> .

La démonstration se fait exactement comme celle du th.3 , en prenant pour $\gamma$ un chemin continûment différentiable par morceaux dans E . Avec les notations de la démonstration du th.3 (et en supposant $u(x_0)=0$) , la valeur de la primitive locale correspondant à $v(\gamma(1))$ est appelée l'<u>intégrale</u> de la forme différentielle $\omega$ le long de $\gamma$ , et se note $\int_\gamma \omega$ (cas particulier de la notion , définie au chap. des courants , d'intégrale d'une forme différentielle de degré quelconque sur une chaîne) .

Pour tout lacet $\sigma$ d'origine et d'extrémité $x_0$ dans E , soit $a_\sigma = \int_\sigma \omega$ ; il est immédiat que $a_\sigma = a_{\sigma'}$ si $\sigma$ et $\sigma'$ sont homotopes . Si on désigne par s la classe du lacet $\sigma$ dans le groupe fondamental G de E , on peut donc désigner par $a_s$ la valeur commune des $a_\sigma$ pour les lacets $\sigma \in s$ ; on a alors $a_{s's} = a_s + a_{s'}$ ; en d'autres termes , l'application $s \to a_s$ est une <u>représentation</u> de G dans le groupeadditif F . Comme F est abélien , l'image $\Gamma$ de G par cette représentation est isomorphe à un groupe quotient du ~~groupe~~ quotient de G par son groupe des commutateurs , c'est-à-dire à un groupe quotient du groupe d'homologie de E de dimension 1 sur les réels . On dit que $\Gamma$ est le groupe des périodes de la forme $\omega$ ; si $\Gamma$ admet un nombre fini de générateurs , il admet donc aussi une base sur Z; une telle base est appelée système fondamental de périodes de $\omega$.

Comme cas particulier de ce qui précède , on a le

COROLLAIRE ("théorème de Cauchy") .- *L'intégrale d'une forme fermée le long d'un lacet homologue à 0 est nulle* .

En général , la primitive de la forme $\omega$ est définie sur la variété $X_u$ (il est clair d'ailleurs que toutes les variétés $X_u$ peuvent être canoniquement identifiées , deux primitives ne différant que par une constante).

Il faudrait naturellement donner des exemples de tout ce qui précède . Le rédacteur présume que son collègue chargé de la Topologie géométrique aura donné des exemples nombreux de revêtements ; ici , il faudrait naturellement donner des exemples de fonctions qui conduisent précisément à ces revêtements (et poser le problème inverse de trouver des fonctions analytiques ayant une surface de Riemann donnée , en renvoyant à l'endroit (?) où on traitera ce problème , tout au moins dans certains cas particuliers). Pour les équations linéaires , la théorie de Fuchs ne semble guère à sa place ici .

## § 2 . Partitions différentiables de l'unité et théorèmes de prolongement .

### 1 . Partitions différentiables de l'unité .

Soit V une variété (indéfiniment différentiable ; on ne considérera que celles là) de dimension n . Rappelons qu'une partition continue de l'unité est une famille localement finie $(f_\iota)_{\iota \in I}$ (nécessairement dénombrable) de fonctions conti-

Rel qqconque marche si l'on
ne prend que des variables par accroissement

nues dans V , à valeurs dans $[0,1]$ , telles que $\sum_{\iota\in I} f_\iota(x)=1$ pour tout $x\in V$ ; la partition est dite <u>subordonnée</u> à un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota\in I}$ de V ayant même ensemble d'indices I , si , pour tout $\iota\in I$ , le support de $f_\iota$ est contenu dans $U_\iota$ . On dira que la partition de l'unité $(f_\iota)$ est <u>de classe</u> $C^k$ (k entier $\geq 0$ ou $\infty$ ) si chacune des fonctions $f_\iota$ est de classe $C^k$ .

PROPOSITION 1 .- <u>Pour tout recouvrement ouvert localement fini</u> $(U_\iota)_{\iota\in I}$ <u>d'une variété</u> V , <u>il existe une partition de l'unité</u> $(h_\iota)_{\iota\in I}$ <u>de classe</u> $C^\infty$ <u>subordonnée au recouvrement</u> $(U_\iota)_{\iota\in I}$ .

Nous partirons du lemme suivant :

<u>Lemme</u> .- <u>Si</u> $\mathfrak{B}$ <u>est une base de la topologie de</u> V , <u>il existe un recouvrement (dénombrable) de type fini plus fin que</u> $(U_\iota)_{\iota\in I}$ <u>et formé d'ensembles de</u> $\mathfrak{B}$ .

Comme V est dénombrable à l'infini , cette propriété résulte de la démonstration du th.5 de <u>Top.gén.</u>,chap.I,2^e^ éd.,§ 10 : il suffit de remarquer que le recouvrement de type fini qu'on définit dans cette démonstration peut être pris formé d'ensembles appartenant à $\mathfrak{B}$ (en vertu de la définition d'une base de la topologie de V).

Nous appliquerons ce lemme à l'ensemble $\mathfrak{B}$ des parties ouvertes W de V satisfaisant aux conditions suivantes : 1° W est contenu dans un des $U_\iota$ ; 2° il existe une fonction numérique $w\geq 0$ de classe $C^\infty$ définie dans V et ayant pour support $\overline{W}$ . Montrons que $\mathfrak{B}$ est une base de la topologie de V . Soient x un point de V, et N un voisinage de x . Il existe une carte $\theta$ d'un voisinage M de x , contenu dans N et dans un des $U_\iota$ , telle que $\theta(x)=0$ . Soit Q un cube ouvert de centre 0 tel que $\overline{Q}$ soit contenu dans $\theta(M)$ ; si 2a est le côté de Q , la fonction v(z) définie dans $R^n$ , égale à 0 dans $\complement\overline{Q}$ , à

$$\prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{1}{(x_i-a)^2}-\frac{1}{(x_i+a)^2}\right)$$

Un lemme une fois pour toutes

dans $\overline{Q}$ , est de classe $C^\infty$ dans $R^n$ et a pour support $\overline{Q}$ : la fonction w égale à

C'est bien + rapide

Rect $(U_\nu)$ et rect + fin $(W_n)$ (avec $g_n$)

Fonction $\kappa \longrightarrow \nu(\kappa)$ car [illegible] $W_n \subset U_{\nu(n)}$

Prendre $\beta_\nu = \sum_{\nu(\kappa)=n} g_{\nu(\kappa)}$

(Cf pour rédact. Trèves : revoir sa déf de rect + fin)

30



$v\circ\theta$ dans M , à 0 dans $\complement V$ , est donc de classe $C^\infty$ , et son support $\overset{-1}{\theta}(\overline{Q})$ est un voisinage de x contenu dans M , ce qui prouve notre assertion .

Il y a donc un recouvrement de type fini $(W_n)$ formé d'ensembles de $\mathfrak{B}$ et plus fin que $(U_\iota)_{\iota\in I}$ . Soit $w_n$ une fonction $\geqslant 0$ de classe $C^\infty$ et dont le support es $W_n$ ; la famille $(w_n)$ étant localement finie , la somme $f=\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ est définie en tout point de V et est une fonction de classe $C^\infty$ qui est $>0$ pour tout $x\in V$ . Les fonctions $g_n=w_n/f$ sont donc de classe $C^\infty$ et forment une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(W_n)$ .

Soit maintenant $(U'_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini ayant même ensemble d'indices que $(U_\iota)$ et tel que $\overline{U'_\iota}\subset U_\iota$ pour tout $\iota\in I$ ; il existe d'après ce qui précède un ~~XXXXXXX~~ recouvrement de type fini $(W'_n)$ plus fin que $(U'_\iota)$, et une partition de l'unité $(g'_n)$ de classe $C^\infty$ subordonnée à $(W'_n)$ . Définissons par récurrence une partition $(H_m)$ de N et une suite d'indices distincts $\iota_m$ de I de la façon suivante : $\iota_1$ est l'un des indices $\iota\in I$ tels que $W_1\subset U'_\iota$ ,et $H_1$ est l'ensemble de tous les entiers n tels que $W_n\subset U'_{\iota_1}$ ; si $K_m$ est le complémentaire dans N de la réunion des $H_q$ d'indice $<m$ , et $r_m$ le plus petit entier de $K_m$ , $\iota_m$ est l'un des indices $\iota$ tels que $W_{r_m}\subset U'_\iota$ , et $H_m$ est l'ensemble de tous les entiers n tels que $n\in K_m$ et $W_n\subset U'_{\iota_m}$ . On posera alors $h_\iota=\sum_{n\in H_m} g'_n$ si $\iota=\iota_m$ , et $h_\iota=0$ si $\iota$ n'est pas l'un des $\iota_m$ ; il est clair que le support de $h_\iota$ est contenu dans $\overline{U'_\iota}$ , donc dans $U_\iota$ , et que les $h_\iota$ forment une partition de l'unité de classe $C^\infty$ .

COROLLAIRE .- Si A et B sont deux ensembles fermés sans point commun dans V , il existe une application f de V dans $[0,1]$ , de classe $C^\infty$ , telle que $f(x)=0$ dans A et $f(x)=1$ dans B .

En effet , il existe une partition de l'unité (f,g) de classe $C^\infty$ subordonnée au recouvrement fini $(\complement A,\complement B)$ de V ; la fonction f répond alors à la question.

Le corollaire précédent généralise aux fonctions de classe $C^\infty$ ~~sur les produ~~

$v\circ\theta$ dans $W$, à 0 dans $\complement W$, est donc de classe $C^\infty$, et son support $\theta^{-1}(Q)$ est un voisinage de $x$ contenu dans $W$, ce qui prouve notre assertion.

Il y a donc un recouvrement de type fini $(W_n)$ formé d'ensembles de $\mathfrak{B}$ et plus fin que $(U_\iota)_{\iota\in I}$. Soit $w_n$ une fonction $\geq 0$ de classe $C^\infty$ et dont le support es[t] $W_n$ : la famille $(w_n)$ étant localement finie, la somme $f=\sum_{n} w_n$ est définie en tout point de $V$ et est une fonction de classe $C^\infty$ qui est $>0$ pour tout $x\in V$. Les fonctions $g_n=w_n/f$ sont donc de classe $C^\infty$ et forment une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(W_n)$.

Soit maintenant $(U'_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini ayant même ensemble d'indices que $(U_\iota)$ et tel que $U'_\iota\subset U_\iota$ pour tout $\iota\in I$ ; il existe d'après ce qui précède un ~~xxxxxx~~ recouvrement de type fini $(W_n)$ plus fin que $(U'_\iota)$, et une partition de l'unité $(g_n)$ de classe $C^\infty$ subordonnée à $(W_n)$. Définissons par récurrence une partition $(H_m)$ de $N$ et une suite d'indices distincts $\iota_m$ de $I$ de la façon suivante : $\iota_1$ est l'un des indices $\iota\in I$ tels que $W_1\subset U'_\iota$, et $H_1$ est l'ensemble de tous les entiers $n$ tels que $W_n\subset U'_{\iota_1}$ ; si $K_m$ est le complémentaire dans $N$ de la réunion des $H_p$ d'indice $<m$, et $r_m$ le plus petit entier de $K_m$, $\iota_m$ est l'un des indices $\iota$ tels que $W_{r_m}\subset U'_\iota$, et $H_m$ est l'ensemble de tous les entiers $n$ tels que $n\in K_m$ et $W_n\subset U'_{\iota_m}$. On posera alors $h_\iota=\sum_{n\in H_m} g_n$ si $\iota=\iota_m$, et $h_\iota=0$ si $\iota$ n'est pas l'un des $\iota_m$ ; il est clair que le support de $h_\iota$ est contenu dans $U'_\iota$, donc dans $U_\iota$, et que les $h_\iota$ forment une partition de l'unité de classe $C^\infty$.

Prop 3 : $\exists$ partition de l'unité avec majoration des dérivées

En lemme

COROLLAIRE. - *Si $A$ et $B$ sont deux ensembles fermés sans point commun dans $V$, il existe une application $f$ de $V$ dans $[0,1]$, de classe $C^\infty$, telle que $f(x)=0$ dans $A$ et $f(x)=1$ dans $B$.*

En effet, il existe une partition de l'unité $(f,g)$ de classe $C^\infty$ subordonnée au recouvrement fini $(\complement A, \complement B)$ de $V$ ; la fonction $f$ répond à la question.

Le corollaire précédent généralise aux fonctions de classe [illegible] un des théorèmes d'Urysohn sur le prolongement des fonctions continues dans un espace normal (Top.gén., chap. IX, § 4, th. 1). Le reste de ce paragraphe sera consacré à l'extension aux fonctions de classe $C^\infty$ du théorème général d'Urysohn (loc.cit., th. 2).

2. Recouvrements et partitions de l'unité associés à une partie fermée de $R^n$.

Nous établirons dans ce n° deux résultats préliminaires aux théorèmes de prolongement.

PROPOSITION 2. - Soient $F$ une partie fermée de $R^n$, $U$ son complémentaire. Etant donnés trois nombres $h, k, \eta$ de $]0,1[$, il existe un dénombrable recouvrement $(B_i)$ de $U$ formé de boules ouvertes, tel que, si $a_i$ est le centre et $r_i$ le rayon de $B_i$, on ait les propriétés suivantes :

1° Si $B'_i$ est la boule de centre $a_i$ et de rayon $kr_i$, $(B'_i)$ est encore un recouvrement de $U$.

2° Pour tout indice $i$, on a $r_i = hd(a_i, F)$.

3° Il existe un entier $N(h,k,\eta)$ tel que, pour tout $x \in U$, la boule fermée de centre $x$ et de rayon $\eta d(x,F)$ rencontre au plus $N$ boules fermées $\bar{B}_i$.

Soit $\varepsilon$ un nombre $>0$. Pour tout nombre $\alpha > 0$, désignons par $F_\alpha$ l'ensemble des points $x$ de $U$ tels que $d(x,F) = \alpha$. Soit $T_\alpha$ une partie maximale (nécessairement dénombrable) de $F_\alpha$ formée de points dont la distance mutuelle soit $\geq \varepsilon\alpha$ (l'existence d'un tel ensemble s'établit par le th. de Zorn) ; alors tout point de $F_\alpha$ est contenu dans au moins une boule ouverte de centre un point de $T_\alpha$ et de rayon $\varepsilon\alpha$. Nous allons donner à $\alpha$ les valeurs $(1+\varepsilon)^m$ ($m$ entier rationnel arbitraire) : soit $(a_i)$ la suite des points de la réunion des $T_\alpha$, rangés dans un ordre quelconque : nous allons montrer que les boules $B_i$ de centre $a_i$ et de rayon $r_i = hd(a_i, F)$ répondent à la question si on a pris $\varepsilon < hk/2$.

Montrons d'abord que $(B'_i)$ est un recouvrement de $U$. Soit $x$ un point de $U$, et soit $\delta = d(x,F)$. Il existe un entier $m$ tel que $(1+\varepsilon)^m \leq \delta \leq (1+\varepsilon)^{m+1}$ ; soit $\alpha =$

$(1+\varepsilon)^m$ ; alors $d(x,F_\alpha)\leq\delta-\alpha\leq\varepsilon\alpha$ (car il existe $y\in F$ tel que $d(x,y)=\delta$ par compacité , et le point z du segment d'extrémités x,y tel que $d(x,y)=\delta-\alpha$ appartient à $F_\alpha$) . On a par suite $d(x,T_\alpha)\leq 2\varepsilon\alpha$ ; si $a_i$ est un point de $T_\alpha$ tel que $d(x,a_i)\leq 2\varepsilon\alpha$ , la boule $B_i'$ contient x puisque son rayon est $hk\alpha\geq 2\varepsilon\alpha$ .

Etablissons maintenant la propriété 3° de l'énoncé . Avec les botations précédentes , soit $\lambda$ un indice tel que $\bar{B}_\lambda$ rencontre la boule fermée de centre x et de rayon $\eta d(x,F)=\eta\delta$. On a donc $d(x,a_\lambda)\leq\eta\delta+hd(a_\lambda,F)$ , et comme $\delta=d(x,F)\leq \leq d(x,a_\lambda)+d(a_\lambda,F)\leq\eta\delta+(1+h)d(a_\lambda,F)$ , on a $\delta\leq\frac{1+h}{1-\eta}d(a_\lambda,F)$ . D'autre part , on a $\delta=d(x,F)\geq d(a_\lambda,F)-d(x,a_\lambda)\geq(1-h)d(a_\lambda,F)-\eta\delta$ , d'où $\delta\geq\frac{1-h}{1+\eta}d(a_\lambda,F)$ . On en conclut que $d(x,a_\lambda)\leq(\eta+\frac{(1+\eta)h}{1-h})\delta=C\delta$ . Soit $\mu$ un autre indice tel que $\bar{B}_\mu$ rencontre la boule fermée de centre x et de rayon $\eta\delta$ . Si $d(a_\lambda,F)=d(a_\mu,F)$ , on a , par définition des $T_\alpha$, $d(a_\lambda,a_\mu)\geq\varepsilon d(a_\lambda,F)\geq\varepsilon\frac{1-\eta}{1+h}\delta=c\delta$ ; si on a par exemple $d(a_\mu,F)>d(a_\lambda,F)$ , on a $d(a_\lambda,a_\mu)\geq d(a_\mu,F)-d(a_\lambda,F)\geq\varepsilon d(a_\lambda,F)\geq c\delta$ . Le nombre des indices $\lambda$ tels que $\bar{B}_\lambda$ rencontre la boule fermée de centre x et de rayon $\eta\delta$ est donc au plus égal au plus grand nombre de points N d'une boule fermée de rayon C , dont les distances mutuelles sont $\geq c$ .

CQFD

Rappelons que pour tout élément $p=(p_1,p_2,\dots,p_n)$ de $N^n$ , on pose $p!=p_1!p_2!\dots p_n!$ $|p|=\sum_{k=1}^{n}p_k$ , $D^p=D_1^{p_1}D_2^{p_2}\dots D_n^{p_n}$ (où $D_k$ est l'opérateur de dérivation $\partial/\partial x_k$) ; si $q=(q_1,\dots,q_n)$ est un second élément de $N^n$ , la relation $p\leq q$ signifie $p_i\leq q_i$ pour $1\leq i\leq n$ , et si $p\leq q$ , on pose $\binom{q}{p}=\binom{q_1}{p_1}\dots\binom{q_n}{p_n}$ ; enfin , pour $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ on pose $x^p=x_1^{p_1}\dots x_n^{p_n}$ (tout cela doit être naturelmement imprimé en gras) .

PROPOSITION 3 .- Soit F une partie fermée de $R^n$ , et soit $(B_i)$ un recouvrement de $U=\complement F$ par des boules ouvertes satisfaisant aux conditions de la prop.2 . Il existe alors une partition de l'unité $(u_i)$ de classe $C^\infty$ , subordonnée à $(B_i)$ , et , pour chaque $p\in N^n$ , une constante $C_p$ , telles que l'on ait

passage du partiel au local
c'est du R n
au topologique

Whitney est qq. chose de local - Pour aller
au global ça va tout seul (et c'est purement formaliste)

(1) $$|D^p u_i(x)| \leq C_p/(d(x,F))^{|p|}$$

pour tout $x \in R^n$, tout indice $i$ et tout $p \in N^n$.

Soit $v$ une fonction $\geq 0$, de classe $C^\infty$ dans $R^n$, et de support égal à la boule unité (par exemple $v(x)=\exp(-1/(1-\|x\|^2)^2)$ pour $\|x\| \leq 1$ ($\|x\|$ étant la norme euclidienne). Posons $k'=(1+k)/2$ et $v_i(x)=v((x-a_i)/k'r_i)$, fonction de classe $C^\infty$ dont le support est la boule fermée $B''_i$ de centre $a_i$ et de rayon $k'r_i$. Comme le recouvrement $(B_i)$ est localement fini, la fonction $w=\sum_i v_i$ est partout définie et de classe $C^\infty$ ; en outre, comme $(B'_i)$ et a fortiori $(B''_i)$ est un recouvrement de $U$ on a $w(x)>0$ pour tout $x \in U$ ; les fonctions $u_i=v_i/w$ sont donc définies et de classe $C^\infty$ dans $U$, et forment évidemment une partition de l'unité subordonnée à $(B_i)$. Reste à démontrer les inégalités (1).

Soit $x$ un point quelconque de $U$, et posons $\delta=d(x,F)$. Pour tout indice $i$ tel que $v_i(x)>0$, on a $\delta \leq (1+h)r_i$ ; si $c_p$ est le maximum de $|D^p v(x)|$, on a $|D^p v_i(x)| \leq c_p/(k'r_i)^{|p|} \leq c'_p/\delta^{|p|}$. Comme $w(x)$, dans un voisinage de $x$, est somme d'au plus $N$ fonctions $v_i$ non nulles, on a $|D^p w(x)| \leq Nc'_p/\delta^{|p|}$. D'autre part, il existe un indice $j$ tel que $x \in B'_j$ ; si on pose $\gamma=\mathrm{Min}_{\|z\| \leq k/k'} |v(z)|>0$, on a donc $v_j(x) \geq \gamma$, et a fortiori $w(x) \geq \gamma$. Remarquons maintenant que $D^p u_i$ est quotient par une puissance $w^s$ (où $s$ ne dépend que de $p$) d'un polynôme (à coefficients ne dépendant que de $p$) par rapport à $v_i$, $w$ et leurs dérivées, le poids total de chaque monôme (somme des ordres des dérivées qui y figurent, multipliés par l'exposant de ces dérivées dans le monôme) étant $|p|$. L'inégalité (1) résulte aussitôt de ces remarques.

## 3. Les théorèmes de prolongement.

La notion de fonction m fois différentiable définie aux chap. I et III suppose la fonction définie sur une variété. Nous allons d'abord modifier cette définition de façon qu'elle s'applique à une fonction définie seulement sur une partie fermée quelconque d'une variété .

DÉFINITION 1 .- Soit F une partie fermée de $R^n$ . On dit qu'une application f de F dans un espace localement convexe séparé X est indéfiniment (resp. m fois continûment) différentiable s'il existe une famille $(f_p)$ d'applications de F dans X , où p varie dans $N^n$ (resp. $|p| \leq m$) telle que $f_0 = f$ , et satisfaisant aux conditions suivantes : si , pour tout entier s (resp. tout entier $s \leq m$) , on pose pour $x \in F$ et $z \in F$ , et pour tout p tel que $|p| \leq s$ ,

(2) $$f_p(x) = \sum_{|p+q| \leq s} f_{p+q}(z) . (x-z)^q / q! + R_{p,s}(x,z)$$

alors , pour tout $x_0 \in F$ , tout voisinage U de 0 dans X et tout couple (p,s) tel que $|p| \leq s$ , il existe $\rho > 0$ tel que les conditions $x \in F$ , $z \in F$ , $\|x-x_0\| \leq \rho$, $\|z-x_0\| \leq \rho$ entraînent

(3) $$R_{p,s}(x,z) \in U . \|x-z\|^{s-|p|} .$$

Il est immédiat que ces conditions impliquent que les $f_p$ sont continues dans F . Lorsque $F = R^n$ , elles sont évidemment vérifiées par une fonction indéfiniment (resp. m fois continûment) différentiable au sens donné à ce terme au chap.I ; d'ailleurs la réciproque est vraie , car dans ce cas il résulte aussitôt de la formule (2) , appliquée à $s = |p| + 1$ , que l'on a $f_{p+q} = D^q f_p$ .

Si $X = R^m$ , il est clair que pour tout isomorphisme $\psi$ de $R^m$ (pour la structure de variété indéfiniment différentiable) , $\psi \circ f$ est indéfiniment (resp. m fois continûment) différentiable dans F en même temps que f . On peut donc étendre la déf.1 au cas où f prend ses valeurs dans une variété W : f est alors indéfiniment (resp. m fois continûment) différentiable dans F si , pour tout $x_0 \in F$ et toute carte $\psi$ d'un voisinage de $f(x_0)$ dans W , $\psi \circ f$ est indéfiniment (resp. m fois continûment) différentiable dans un voisinage de $x_0$ par rapport à F . De même , pour tout isomorphisme $\varphi$ de $R^n$ sur lui-même , $f \circ \varphi$ est indéfiniment (resp. m fois continûment) différentiable dans $\varphi^{-1}(F)$ si et seulement si f l'est dans F . Cela permet de poser la définition suivante :

C'est une caract. des foncteurs induites par celles de l'espace ambiant

DÉFINITION 2 .- Soient $V$ une variété de dimension $n$ , $F$ une partie fermée de $V$ . On dit qu'une application $f$ de $F$ dans un espace localement convexe séparé $X$ , ou dans une variété $W$ , est indéfiniment (resp. $m$ fois continûment) différentiable dans $F$ si , pour tout $x_0 \in F$ , il existe une carte $\theta$ d'un voisinage ouverts $N$ de $x_0$ sur $R^n$ telle que $f\circ\theta^{-1}$ soit indéfiniment (resp. $m$ fois continûment) différentiable dans $\theta(N\cap F)$ .

THÉORÈME 1 (Whitney) .- Soient $V$ une variété de dimension $n$ , $F$ une partie fermée de $V$ , $f$ une application $m$ fois continûment différentiable de $F$ dans un espace localement convexe séparé $X$ . Il existe alors un prolongement $\bar{f}$ de $f$ à $V$ qui est $m$ fois continûment différentiable dans $V$ , et indéfiniment différentiable dans $U=\complement F$ .

1° Nous démontrerons d'abord le théorème pour $V=R^n$ . Nous n'utiliserons ici les formules (2) que pour $s=m$ , et poserons $R_{p,m}=R_p$ . Pour $z\in F$ et $x\in R^n$ , posons

(4) $$g(x,z)=\sum_{|q|\leq m} f_q(z)(x-z)^q/q!$$

("polynôme de Taylor" de $f$ ; dans tout ce qui suit , $g$ est considérée comme fonction de $x$) . On a , pour tout $p\in N^n$ et pour $z'\in F$

$$D^p g(x,z')=\sum_{|q|\leq m,\, q\geq p} f_q(z')(x-z')^{q-p}/(q-p)!=$$
$$=\sum_{|q|\leq m,\, q\geq p,\, |q+r|\leq m} f_{q+r}(z)((z'-z)^r/r!)((x-z')^{q-p}/(q-p)!)+$$
$$+\sum_{|q|\leq r,\, q\geq p} R_q(z',z)(x-z')^{q-p}/(q-p)! \ .$$

Mais la formule du multinôme donne

$$\sum_{q+r=s,\, q\geq p} ((z'-z)^r/r!)((x-z')^{q-p}/(q-p)!)=(x-z)^{s-p}/(s-p)!$$

d'où la formule

(5) $$D^p g(x,z')=D^p g(x,z)+\sum_{|p+q|\leq m} R_{p+q}(z',z)(x-z')^q/q! \ .$$

Définissons alors le prolongement $\bar{f}$ de la façon suivante : avec les notations des prop.2 et 3 , on posera

$$(6)\qquad \begin{cases} \bar{f}(x)=f(x) & \text{pour } x\in F \\ \bar{f}(x)=\sum_i u_i(x)g(x,b_i) & \text{pour } x\in U=\complement F \end{cases}$$

en désignant par $b_i$ un point de $F$ tel que $d(a_i,b_i)=d(a_i,F)$ , où $a_i$ est le centre de $B_i$ . Comme la famille $(u_i)$ est localement finie , la somme de la seconde formule (6) a toujours un sens , et $\bar{f}(x)$ est de classe $C^\infty$ dans $U$ ; en outre la première formule (6) montre que dans l'intérieur $\mathring{F}$ de $F$ , $\bar{f}$ est de classe $C^m$ et que l'on a $D^p\bar{f}=f_p$ pour $|p|\leqslant m$ . Nous nous proposons maintenant de montrer que si $a$ est un point frontière de $F$ , $D^p\bar{f}(x)$ <u>tend vers</u> $f_p(a)$ <u>lorsque $x$ tend vers $a$ en restant dans</u> $U$ , pour $|p|\leqslant m$ . Remarquons pour cela que $D^pg(x,x_0)$ tend vers $D^pg(a,a)=f_p(a)$ lorsque $x\in U$ tend vers $a$ et que $x_0\in F$ tend vers $a$ ; nous sommes donc ramenés à prouver que $D^p\bar{f}(x)-D^pg(x,x_0)$ <u>tend vers</u> 0 lorsque $x\in U$ tend vers $a$ et que $x_0$ est une "projection" de $x$ sur $F$ (point tel que $d(x,x_0)=d(x,F)$) . Or , d'après la formule de Leibniz , on peut écrire

$$D^p\bar{f}(x)-D^pg(x,x_0)=\sum_i\sum_{q\leqslant p}\binom{p}{q}D^qu_i(x).(D^{p-q}g(x,b_i)-D^{p-q}g(x,x_0)) .$$

Soit $d(x,F)=\delta=d(x,x_0)$ ; pour tout indice $i$ tel que $u_i(x)\neq 0$ , $x$ appartient à $B_i$ ; or , tout point de $B_i$ a une distance $\geqslant(1-h)d(a_i,F)=(1-h)d(a_i,b_i)$ de $F$ ; on a donc $d(a_i,b_i)\leqslant\delta/(1-h)$ , donc $d(a_i,x)\leqslant h\delta/(1-h)$ et finalement $d(b_i,x_0)\leqslant 2\delta/(1-h)$ Tenant compte de (3) et de (5) , on voit que pour tout voisinage convexe cerclé $W$ de 0 dans $X$ , il existe $\rho>0$ tel que , pour $\delta<\rho$, on ait

$$D^{p-q}g(x,b_i)-D^{p-q}g(x,x_0)\in W.c\delta^{m-|p|+|q|}$$

$c$ étant indépendant de $W,\delta$ et $p$ (pour $|p|\leqslant m$) . Comme d'autre part , on a $|D^qu_i(x)|\leqslant C_q.\delta^{-|q|}$ d'après (1) , on voit qu'il existe une constante $C$ indépendante de $W$ et $\delta$ telle que , pour $\delta<\rho$, on ait $D^p\bar{f}(x)-D^pg(x,x_0)\in C.W$ , ce qui démontre notre assertion (on a naturellement utilisé le fait que $x$ n'appartient qu'à $N$ boules $B_i$ au plus) .

Prouvons maintenant que $\bar{f}$ (qui est continue d'après le résultat précédent appliqué à p=0) est m fois continûment différentiable dans $R^n$ ; il suffit de voir que pour $|p|\leq m$ , $D^p\bar{f}(a)$ existe et est égal à $f_p(a)$ pour tout point frontière a de F . Par récurrence sur $|p|$ , on se ramène au cas où $|p|=1$ ; supposons par exemple que $p=(1,0,\ldots,0)$ , et soit D la droite parallèle au vecteur $e_1$ de la base canonique $(e_i)$ de $R^n$ , passant par le point a . Il résulte de la déf.1 que si la dérivée partielle (par rapport à $x_1$) de la restriction de f à $D\cap F$ existe au point a, elle est égale à $f_p(a)$ ; il suffit donc de considérer le cas où a n'est pas intérieur à $D\cap F$ (par rapport à D) . Soit W un voisinage arbitraire convexe, fermé et cerclé de 0 dans X ; il existe $\varepsilon$ tel que , pour $|h|\leq\varepsilon$ on ait $\bar{f}(a+he_1)-\bar{f}(a)-h.f_p(a)\in hW$ si $a+he_1\in F$, et $\frac{\partial\bar{f}}{\partial x_1}(a+he_1)-f_p(a)\in W$ si $a+he_1\in U$ ; de cette dernière relation et du th. des accroissements finis , on déduit que $\bar{f}(a+he_1)-\bar{f}(a+h'e_1)-(h-h')f_p(a)\in(h-h')W$ , si $a+he_1$ et $a+h'e_1$ sont dans un même intervalle contigu à $D\cap F$, et si $|h|\leq\varepsilon$ , $|h'|\leq\varepsilon$ ; faisant tendre h' vers l'origine de cet intervalle contigu , et tenant compte de l'inégalité antérieure , on voit qu'on a $\bar{f}(a+he_1)-\bar{f}(a)-h.f_p(a)\in h.W$ quel que soit h tel que $|h|\leq\varepsilon$ , ce qui achève de démontrer le théorème lorsque $V=R^n$ .

2° Démontrons maintenant le théorème pour une variété V quelconque . Soit $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de V tel que pour chaque $\iota\in I$ il existe une carte $\varphi_\iota$ de $U_\iota$ sur $R^n$ ; soit d'autre part $(W_\iota)$ un recouvrement ouvert de V tel que les $\bar{W}_\iota$ soient compacts et $\bar{W}_\iota\subset U_\iota$ pour tout indice $\iota$ ; $\varphi_\iota(F\cap\bar{W}_\iota)$ est un ensemble compact dans $R^n$ , et la fonction $f\circ\varphi_\iota^{-1}$ est m fois continûment différentiable dans $\varphi_\iota(F\cap\bar{W}_\iota)$ ; il existe donc une application m fois continûment différentiable $g_\iota$ de $R^n$ dans X qui prolonge $f\circ\varphi_\iota^{-1}$ ; la fonction $g_\iota\circ\varphi_\iota$ est alors une application m fois continûment différentiable de $U_\iota$ dans X, qui est égale à f aux points de $F\cap\bar{W}_\iota$ . Soit maintenant $(h_\iota)$ une partition de l'unité de classe $C^\infty$ subordonnée au recouvrement $(W_\iota)$ (prop.1) ; la fonction

$h_i \circ (g_i \circ \varphi_i)$ est définie dans $U_i$ et de classe $C^m$, et est nulle dans $U_i - \overline{W}_i$ ; on peut la prolonger en une fonction de classe $C^m$ définie dans V tout entière en lui donnant la valeur 0 dans $\complement U_i$. Alors la fonction $\overline{f} = \sum_i h_i \circ (g_i \circ \varphi_i)$ est définie en tout point, puisque pour tout $x \in V$, la somme du second membre ne comporte jamais qu'un nombre fini de termes non nuls dans un voisinage de x ; cette fonction est de classe $C^m$ et égale à f dans F.

CQFD

THÉORÈME 2 (Whitney) .- Soient V <u>une variété de dimension n</u>, F <u>une partie fermée de V</u>, f <u>une application indéfiniment différentiable de F dans un espace normé X</u>. <u>Il existe alors un prolongement $\overline{f}$ de f à V qui est indéfiniment différentiable dans V</u>.

1° Nous commencerons par démontrer le théorème lorsque $V = R^n$ et que F est <u>compact</u>. Pour tout entier $m \geqslant 0$, nous définirons $g_m$ par la formule (4) (où on écrit donc $g_m$ au lieu de $g$) ; on a alors la formule (5), où g est remplacé par $g_m$ et $R_{p+q}$ par $R_{p+q,m}$. Nous poserons $\overline{f}(x) = f(x)$ dans F, et

(7) $$\overline{f}(x) = \sum_i u_i(x) g_{m_i}(x, b_i) \qquad \text{pour } x \in U ,$$

les $b_i$ ayant la même signification que dans la formule (6), et les $m_i$ étant des entiers que nous allons définir.

Considérons un entier $m \geqslant 0$ ; pour $\ell \leqslant m$ et $|p| \leqslant \ell$, on peut écrire

$$D^p g_m(x,z) - D^p g_\ell(x,z) = \sum_{\ell+1 \leqslant |q| \leqslant m,\, q \geqslant p} f_q(z)(x-z)^{q-p}/(q-p)!$$

Les fonctions $f_q$ étant continues dans F, l'image de F par chacune de ces fonctions est une partie compacte de X. D'autre part, dans le second membre de (7) on a toujours $|q-p| \geqslant \ell+1-|p|$ ; on en conclut que, pour m <u>donné</u>, il existe un nombre $\rho_m > 0$ tel que les relations $z \in F$, $x \in R^n$, $\|x-z\| \leqslant \rho_m$, $\ell \leqslant m$ et $|p| \leqslant \ell$ entraînent $\|D^p g_m(x,z) - D^p g_\ell(x,z)\| \leqslant \|x-z\|^{\ell-|p|}$. Nous désignerons par $S_m$ le voisinage de F formé des x tels que $d(x,F) < \frac{1}{2}\rho_m$, et nous définirons pour chaque indice i , le nombre $m_i$ comme étant le plus grand des nombres m tels que $a_i \in S_m$ (on peut toujours supposer que la suite $(\rho_m)$ tend vers 0).

Montrons maintenant , comme dans le th.1 , que pour tout $p \in N^n$ , $D^p\bar{f}(x)$ tend vers $f_p(a)$ lorsque x tend vers a en restant dans U , a étant un point frontière de F . Posons $\ell = |p|+1$ ; dès que $\delta = d(x,F)$ est assez petit , il résulte des définitions précédentes que , pour tout indice i tel que $x \in B_i$ (rappelons qu'il y en a au plus N) , on a $m_i > \ell$ . Désignant par $x_0$ une projection de x sur F , on peut écrire

$$D^p\bar{f}(x) - D^p g_\ell(x,x_0) = \sum_i \sum_{q \leq p} \binom{p}{q} D^q u_i(x) . (D^{p-q} g_{m_i}(x,b_i) - D^{p-q} g_\ell(x,b_i) + $$
$$+ D^{p-q} g_\ell(x,b_i) - D^{p-q} g_\ell(x,x_0)) .$$

Or on a $d(a_i,b_i) < \frac{1}{2}\rho_{m_i}$ , d'où $\|x-b_i\| \leq \rho_{m_i}$ pour tous les indices i tels que $x \in B_i$ , ce qui entraîne , en vertu de ce qui précède ,

$$\|D^{p-q} g_{m_i}(x,b_i) - D^{p-q} g_\ell(x,b_i)\| \leq \|x-b_i\|^{\ell - |p| + |q|}$$

pour ces indices ; on notera d'ailleurs qu'on a $\|x-b_i\| \leq \frac{1+\ell}{1-k}\delta$ . D'autre part , on montre ~~xxx~~ comme dans le th.1 que , pour tout $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre $\rho$ assez petit pour que la relation $\delta < \rho$ entraîne

$$\|D^{p-q} g_\ell(x,b_i) - D^{p-q} g_\ell(x,x_0)\| \leq c.\delta^{\ell - |p| + |q|}$$

où c est indépendant de $\varepsilon$ et de $\delta$ . Tenant compte de (1) et du fait que x appartient au plus à N boules $B_i$ , on voit finalement qu'il existe une constante C indépendante de $\varepsilon$ , telle que pour $\delta$ assez petit , on ait

$$\|D^p\bar{f}(x) - D^p g(x,x_0)\| \leq C.\delta$$

ce qui prouve notre assertion . On montre alors , comme dans le th.1 , que $D^p\bar{f}(a)$ existe en tout point de F et est égal à $f_p(a)$ .

2° Pour démontrer le théorème pour une variété V quelconque , il suffit de répéter le raisonnement fait dans la deuxième partie de la démonstration du th.1 : on remarquera en effet qu'on n'y utilise que le prolongement à $R^n$ d'une fonction indéfiniment différentiable dans une partie compacte de $R^n$ .

Samuel

163

Non : c'est un dualité relèvement. Ce n'est pas dit clairement dans l'énoncé - (peut dire "prolongé") - Préciser.

ça marche pour tout fibré à fibre vectorielle (et même Banachique) (on le fait indépendamment sur chaque carte, et on recolle par une partition de l'unité)

TSVP



## 4 . Prolongement des champs de tenseurs .

On sait que les théorèmes de prolongement ne sont plus valables en général lorsqu'il s'agit de fonctions prenant leurs valeurs dans un espace topologique quelconque , et même dans une variété quelconque (par exemple dans une sphère $S_n$) . On a toutefois le résultat partiel suivant :

PROPOSITION 4 .- Soit W une sous-variété fermée de dimension m d'une variété V de dimension n , et soit X un champ de tenseurs d'espèce (p,q) et de classe $C^k$ défini dans W . Il existe alors un champ de tenseurs d'espèce (p,q) et de classe $C^k$ défini dans V et qui prolonge X .

Pour tout $x \in V$ , soit $\mathfrak{V}_x$ l'ensemble des voisinages ouverts de x dans V qui possèdent les propriétés suivantes : si $x \notin W$ , les voisinages de $\mathfrak{V}_x$ ne rencontrent pas W ; si $x \in W$ , pour tout voisinage $U \in \mathfrak{V}_x$ , il existe une carte $\varphi$ de U sur $R^n$ telle que $\varphi(U \cap W)$ soit une variété coordonnée de $R^n$ , de dimension m. Il est clair que la réunion $\mathfrak{V}$ de tous les $\mathfrak{V}_x$ est une base de la topologie de V ; il existe donc (n°1, lemme) deux recouvrements localement finis $(U_j)$, $(S_j)$ de V formés d'ensembles appartenant à $\mathfrak{V}$ , ayant même ensemble d'indices et tels que $\bar{S}_j$ soit compact et $\bar{S}_j \subset U_j$ pour tout j ; soit $(u_j)$ une partition de l'unité de classe $C^\infty$ subordonnée au recouvrement $(S_j)$ . Soit j un indice tel que $U_j$ rencontre W ; il existe donc par définition une carte $\varphi_j$ de $U_j$ sur $R^n$ , telle que $\varphi_j(W \cap U_j)$ soit égal à une variété coordonnée de dimension m , que nous identifierons avec $R^m$ ; l'espace $T^p_q(R^n)$ des tenseurs d'espèce (p,q) sur $R^n$ contient l'espace $T^p_q(R^m)$ des tenseurs de même espèce sur $R^m$ . L'extension $\bar{\varphi}_j$ de la carte $\varphi_j$ à la variété des tenseurs d'espèce (p,q) sur $U_j$ applique cette variété sur $T^p_q(R^n) \times R^n$ , et l'image par $\bar{\varphi}_j$ de la variété des tenseurs d'espèce (p,q) sur $U_j \cap W$ est $T^p_q(R^m) \times R^m$ . Considérons alors sur $R^m$ le champ de tenseurs d'espèce (p,q) et de classe $C^k$ , $y \to \bar{\varphi}_j(\underline{X}(\bar{\varphi}_j^{-1}(y)))$ , et désignons par $g_j(y)$ la projection de $\bar{\varphi}_j(\underline{X}(\bar{\varphi}_j^{-1}(y)))$ sur $T^p_q(R^m)$ ; $g_j$ est donc une application de classe $C^k$ de $R^m$

Il y a deux pas | Faut un lien W

1) agrandir les fibres (qui sont à moitié des sous-variétés, à moitié des quotients) → Pour ceux-ci (Bibé quotient) on utilise le fait qu'on a un fibré sur $\mathbb{R}$ Deux pas dans le cas mixte

2) Prouver de ci contre (à droite p. 29)

avec un lien W c'est trivial et indep. de Whitney. Mettre avant Whitney.

## 4 . Prolongement des champs de tenseurs .

On sait que les théorèmes de prolongement ne sont plus valables en général lorsqu'il s'agit de fonctions prenant leurs valeurs dans un espace topologique quelconque , et même dans une variété quelconque (par exemple dans une sphère $S_n$) . On a toutefois le résultat partiel suivant :

PROPOSITION 4 .- Soit W une sous-variété fermée de dimension m d'une variété V de dimension n , et soit X un champ de tenseurs d'espèce (p,q) et de classe $C^k$ défini dans W . Il existe alors un champ de tenseurs d'espèce (p,q) et de classe $C^k$ défini dans V et qui prolonge X .

Pour tout $x\in V$ , soit $\mathfrak{U}_x$ l'ensemble des voisinages ouverts de x dans V qui possèdent les propriétés suivantes : si $x\notin W$ , les voisinages de $\mathfrak{U}_x$ ne rencontrent pas W ; si $x\in W$ , pour tout voisinage $U\in\mathfrak{U}_x$ , il existe une carte $\varphi$ de U sur $R^n$ telle que $\varphi(U\cap W)$ soit une variété coordonnée de $R^n$ , de dimension m. Il est clair que la réunion $\mathfrak{U}$ de tous les $\mathfrak{U}_x$ est une base de la topologie de V : il existe donc (n°1,lemme) deux recouvrements localement finis $(U_i)$,$(S_i)$ de V formés d'ensembles appartenant à $\mathfrak{U}$ , ayant même ensemble d'indices et tels que $\bar{S}_i$ soit compact et $\bar{S}_i\subset U_i$ pour tout i ; soit $(u_i)$ une partition de l'unité de classe $C^\infty$ subordonnée au recouvrement $(S_i)$ . Soit i un indice tel que $U_i$ rencontre W ; il existe donc par définition une carte $\varphi_i$ de $U_i$ sur $R^n$ , telle que $\varphi_i(W\cap U_i)$ soit égal à une variété coordonnée de dimension m , que nous identifierons avec $R^m$ : l'espace $T^p_q(R^n)$ des tenseurs d'espèce (p,q) sur $R^n$ contient l'espace $T^p_q(R^m)$ des tenseurs de même espèce sur $R^m$ . L'extension $\bar{\varphi}_i$ de la carte $\varphi_i$ à la variété des tenseurs d'espèce (p,q) sur $U_i$ applique cette variété sur $T^p_q(R^n)\times R^n$ , et l'image par $\bar{\varphi}_i$ de la variété des tenseurs d'espèce (p,q) sur $U_i\cap W$ est $T^p_q(R^m)\times R^m$ . Considérons alors sur $R^m$ le champ de tenseurs d'espèce (p,q) et de classe $C^k$ , $v\to\bar{\varphi}_i(X(\varphi_i^{-1}(v)))$ , et désignons par $g_i(v)$ la projection de $\bar{\varphi}_i(X(\varphi_i^{-1}(v)))$ sur $T^p_q(R^m)$ ; $g_i$ est donc une application de classe $C^k$ de $R^m$

dans $T_q^p(R^m)$. Désignons d'autre part par $\pi$ la projection de $R^n$ sur $R^m$ ; l'application $z \to (g_j(\pi(z)), z)$ est évidemment un champ de tenseurs $\underline{X}_j$ d'espèce (p,q) et de classe $C^k$ sur $R^n$, qui prolonge le champ ~~xx~~ $y \to \bar{\varphi}_j(\underline{X}(\bar{\varphi}_j^{-1}(y))) = (g_j(y), y)$ défini sur $R^m$. Soit $\underline{Y}_j$ le champ de tenseurs $\bar{\varphi}_j^{-1} \circ \underline{X}_j \circ \varphi_j$ défini dans $U_j$ ; désignons par $\underline{Z}_j$ le champ de tenseurs défini dans V tout entier, égal à $u_j(x)\underline{Y}_j(x)$ pour tout $x \in U_j$, à 0 pour tout $x \notin U_j$ ; il est immédiat que $\underline{Z}_j$ est un champ de tenseurs de classe $C^k$ sur V. Si au contraire l'indice j est tel que $U_j$ ne rencontre pas W, nous prendrons pour $\underline{Z}_j(x)$ le tenseur nul pour tout $x \in V$. La somme $\underline{Z} = \sum_j \underline{E}_j$ est alors définie pour tout $x \in V$, et est un champ de tenseurs d'espèce (p,q) et de classe $C^k$ prolongeant $\underline{X}$.

## § 3. La théorème d'immersion.

c'est dénombrable à l'∞

### 1. Le théorème d'immersion.

THÉORÈME 1 .- Pour toute variété V de dimension n, il existe une application propre $\theta$ de V dans $R^{2n+1}$, telle que $\theta$ soit un isomorphisme de V sur une sous-variété fermée $\theta(V)$ de $R^{2n+1}$.

Nous commencerons par établir un lemme relatif aux sous-variétés d'un espace $R^m$.

Lemme .- Soit W une sous-variété de $R^m$, de dimension n, et soit A une partie compacte de W. Si $m \geq 2n+1$, l'ensemble $\Omega$ des applications linéaires g de $R^m$ sur $R^{2n+1}$, telles que la restriction de g à W soit de rang n en tout point de A, et que la restriction de g à A soit biunivoque, est un ensemble ouvert partout dense dans l'espace $\mathcal{L}(R^m, R^{2n+1})$.

Montrons d'abord que le complémentaire $\Phi$ de $\Omega$ dans $\mathcal{L}(R^m, R^{2n+1})$ est fermé. Dire que la restriction de g à W n'est pas de rang n en un point $x \in A$ signifie qu'au point x il existe un vecteur tangent $L \neq 0$ à W ~~xxxxxxx~~ (vecteur qu'on peut identifier à un vecteur de $R^m$), tel que $g(L) = 0$. Soit alors $(g_k)$ une suite de points de $\Phi$ tendant vers une application linéaire $g_0$ de $R^m$ dans $R^{2n+1}$ ; ~~en supposant~~ pour chaque k, il existe, soit un point $x_k \in A$ tel que la restricti

Il y a là des lemmes sur des images de compacts.

~~directions~~

Variété des | couples de 2 pts ≠ + directions tangentes | y'a 2 morceaux

→ ça se fait par une question de mesure

Son image dans l'espace projectif des directions de droites (image d'une réunion de variétés par appli. diff. dans une autre variété) ne le recouvre pas

Ça permet de descendre d'une dimension.

on de $g_k$ à $W$ ne soit pas de rang $n$ au point $x_k$ , soit deux points $x'_k, x''_k$ de $A$ tels que $x'_k \neq x''_k$ et $g_k(x'_k)=g_k(x''_k)$ . Supposons d'abord qu'il existe une infinité de points $x_k$ ayant la première propriété ; alors , en extrayant une suite partielle , on peut supposer que la suite $(x_k)$ tend vers une limite $a \in A$ . Soit $U$ un voisinage de $a$ dans $W$ tel qu'il existe une carte $\varphi$ de $U$ sur $R^n$ ; $\varphi^{-1}=u$ est alors une application de classe $C^\infty$ de $R^n$ dans $R^m$ , qui est de rang $n$ en chaque point de $R^n$ ; on peut en outre supposer que $u(0)=a$ ; la suite des $y_k=\varphi(x_k)$ tend alors vers $0$ . Par hypothèse , pour chaque indice $k$ , il existe un vecteur $z_k \neq 0$ dans $R^n$ tel que l'on ait $g_k(u'(y_k).z_k)=0$ ; comme $g_k$ est linéaire , on peut évidemment supposer que $\|z_k\|=1$ , et (par extraction de suite) que la suite $(z_k)$ tende vers un vecteur $z_0 \neq 0$ de $R^n$ ; par passage à la limite , on a donc $g_0(u'(0).z_0)=0$ , ce qui prouve que la restriction de $g_0$ à $W$ est de rang $< n$ au point $a$ , autrement dit que $g_0 \in \Phi$ .

Si au contraire il existe une infinité de couples $(x'_k, x''_k)$ de points distincts de $A$ tels que $g_k(x'_k)=g_k(x''_k)$ , on peut encore supposer , par extraction de suites, que la suite $(x'_k)$ tend vers $a \in A$ et la suite $(x''_k)$ vers $b \in A$ . Si $a \neq b$ , on obtient par passage à la limite , $g_0(a)=g_0(b)$ , et par suite $g_0 \in \Phi$ . Si au contraire $b=a$, on a , avec les notations introduites ci-dessus , et en posant $y'_k=\varphi(x'_k)$ , $y''_k=\varphi(x''_k)$ $g_k(u(y'_k)-u(y''_k))=0$ ; or on peut écrire , en vertu du th. des accroissements finis

$$u(y'_k)-u(y''_k)=u'(0).(y'_k-y''_k)+\underline{o}(y'_k-y''_k) .$$

Tenant compte de ce que $g_k$ est linéaire , et divisant par $\|y'_k-y''_k\|$ , il vient , en posant $z_k=(y'_k-y''_k)/\|y'_k-y''_k\|$ , $\lim_{k\to\infty} g_k(u'(0).z_k)=0$ . Or , on peut supposer , par extraction de suite , que $(z_k)$ tende vers une limite $z_0 \neq 0$ , et on a donc encore à la limite $g_0(u'(0).z_0)=0$ . On a donc prouvé que dans tous les cas , on a $g_0 \in \Phi$ , c'est-à-dire que $\Phi$ est <u>fermé</u> .

Montrons maintenant que $\Phi$ est un ensemble <u>maigre</u> , ce qui achèvera la démonstra tion du lemme (un ensemble fermé maigre étant rare dans un $R^k$) . Couvrons A par un nombre fini d'ensembles ouverts $U_\alpha$ $(1 \leq \alpha \leq r)$ tels que , pour tout $\alpha$ , il existe une carte $\varphi_\alpha$ de $U_\alpha$ sur $E^n$ ; nous poserons $\bar{\varphi}_\alpha^{1} = u_\alpha$ , $u_\alpha$ étant donc une application de classe $C^\infty$ de $R^n$ dans $R^m$ , qui est de rang n en chaque point de $R^n$. Identifions une application linéaire $g$ de $R^m$ dans $R^{2n+1}$ à sa matrice $(s_{ij})$ $(1 \leq i \leq 2n+1$ , $1 \leq j \leq m)$ par rapport aux bases canoniques , et soit $u_\alpha = (u_{\alpha j})_{1 \leq j \leq m}$ ; si $x \in A$ est tel que $x \in U_\alpha$ , dire que la restriction de $g = (s_{ij})$ à W est de rang $< n$ au point x signifie , en posant $y = \varphi_\alpha(x)$ , que l'on a

$$(1) \qquad P_{\alpha i}(g,y,z) = \sum_{j=1}^{m} s_{ij}(u'_j(y).z) = 0 \qquad (1 \leq i \leq 2n+1)$$

pour un vecteur $z \neq 0$ de $R^n$ . Montrons que l'ensemble $\Phi_\alpha$ des g vérifiant le système (1) pour un vecteur $y \in R^n$ et un vecteur $z \neq 0$ de $R^n$ au moins , est <u>maigre</u> dans $\mathcal{L}(R^m, R^{2n+1})$ . Il suffit pour cela de prouver que le rang de la matrice jacobienne des 2n+1 fonctions $P_{\alpha i}$ $(1 \leq i \leq 2n+1)$ des $d = m(2n+1)+2n$ variables $s_{ij}, y_k, z_k$ ($y_k$ $z_k$ coordonnées respectives de y et z) est $\geq 2n$ pour $y \in R^n$ et $z \neq 0$ dans $R^b$ (chap. I, § 4, cor. de la prop.4) . Or , un au moins des nombres $b_j = u'_j(y).z$ n'est pas nul ; comme on a $\partial P_{\alpha i}/\partial s_{kj} = 0$ si $k \neq i$ et $= b_j$ si $k = i$ , on voit que le mineur de la matrice jacobienne des $P_{\alpha i}$ formé des 2n+1 colonnes correspondant aux dérivées par rapport aux $s_{kj}$ $(1 \leq k \leq 2n+1)$ n'est pas nul , d'où notre assertion .

En second lieu , dire que la restriction de g à A n'est pas biunivoque signifie , pour deux points distincts $x' \in U_\alpha$, $x'' \in U_\beta$ ($\alpha$ et $\beta$ distincts ou non) , on a $g(x'-x'')=0$ ; posant $y' = \varphi_\alpha(x')$ , $y'' = \varphi_\beta(x'')$ , on a donc

$$(2) \qquad Q_{\alpha\beta i}(g,y',y'') = \sum_{j=1}^{m} s_{ij}(u_{\alpha j}(y') - u_{\beta j}(y'')) = 0 \qquad (1 \leq i \leq 2n+1) .$$

Montrons que l'ensemble $\Phi_{\alpha\beta}$ des g vérifiant le système (2) pour deux vecteurs $y', y''$ de $R^n$ tels que $u_\alpha(y') \neq u_\beta(y'')$ est <u>maigre</u> dans $\mathcal{L}(R^m, R^{2n+1})$ ; l'ensemble des couples $(y', y'')$ précédents étant ouvert dans $R^{2n}$ , il suffit encore de montrer que la matrice jacobienne des 2n+1 fonctions $Q_{\alpha\beta i}$ $(1 \leq i \leq 2n+1)$ est de rang 2n+1 pour chacun de ces couples ~~XXX~~ $(y', y'')$ ; or , un au moins des nombres

$c_j=u_{\alpha j}(y')-u_{\beta j}(y'')$ est alors $\neq 0$ , et on en conclut comme ci-dessus que le mineu formé des colonnes correspondant aux dérivées par rapport aux $s_{kj}$ $(1\leq k\leq 2n+1)$ es alors $\neq 0$ .

Comme l'ensemble $\Phi$ est évidemment contenu dans la réunion des ensembles $\Phi_\alpha$ et $\Phi_{\alpha\beta}$ , il est maigre , ce qui achève de démontrer le lemme .

Soit maintenant $(U_k)$ un recouvrement ouvert localement fini de V formé d'ensembles relativement compacts et tels que , pour tout entier $k>0$ , il existe une carte $f_k=(f_{1k},\dots,f_{nk})$ de $U_k$ sur le cube de $R^n$ défini par $|z_j-1|<\frac{1}{2}$ pour $1\leq j\leq n$ (cube ne contenant donc que des points dont toutes les coordonnées sont $>0$) . Pour tout indice k , soit $W_k$ un ensemble ouvert relativement compact tel que $\overline{W}_k\subset U_k$ et que les $W_k$ forment encore un recouvrement ouvert de V , et soit $g_k$ un fonction de classe $C^\infty$ , définie dans V , à valeurs dans $[0,1]$ , égale à 1 dans $W_k$ , à 0 dans le complémentaire de $U'_k$ , où $U'_k$ est un voisinage de $\overline{W}_k$ , relativement compact et tel que $\overline{U}'_k\subset U_k$ . Nous poserons $u_0=\sum_{k=1}^{\infty}kg_k$ ; c'est une fonction de classe $C^\infty$ définie dans V , et qui est une application propre de V dans R . Nous désignerons d'autre part par $(u_i)_{i\geq 1}$ la famille des fonctions ($g_k$ et) $g_kf_{jk}$ $(k\geq 1$ $1\leq j\leq n)$ de classe $C^\infty$ dans V , rangées dans un ordre quelconque ; à tout point $x\in V$ , nous ferons alors correspondre le point $u(x)$ de coordonnées $u_i(x)$ $(i\geq 0)$ dans l'espace vectoriel $E=R^{(N)}$ <u>somme directe topologique</u> (<u>Esp.vect.top.</u>, chap.II d'une suite de facteurs identiques à R (les $u_i(x)$ sont en effet presque tous nuls pour tout $x\in V$ , puisque les $U_k$ forment un recouvrement ouvert localement fini) . L'application u est <u>biunivoque</u> ; en effet , si $g_k(x)f_{jk}(x)=g_k(x')f_{jk}(x'$ pour tout couple d'indices $(j,k)$ , ~~on voit d'abord que pour tout indice k tel~~ ~~que~~ ainsi que $g_k(x)=g_k(x')$ pour tout indice k , on voit que pour tout indice k tel que $g_k(x)\neq 0$ , on a aussi $g_k(x')\neq 0$ , donc x et x' sont dans $U_k$ , et les relations $f_{jk}(x)=f_{jk}(x')$ pour $1\leq j\leq n$ entraînent alors par hypothèse que $x=x'$ . En outre , si on désigne par $A_k$ (resp. $B_k$) la réunion des $U_h$ (resp. $\overline{W}_h$) pour $h \leq k$ , l'image $u(A_k) \supset u(B_k)$ est contenue dans un sous-espace $R^{m(k)}$ de dimension finie de $E$ , que nous désignerons par $E_k$ ; on peut évidemment supposer $m(k) \geq 2n+1$ pour tout $k$ ; il est immédiat que la restriction de $u$ à $A_k$ est une application de classe $C^\infty$ de $A_k$ dans $E_k$ , partout de rang $n$ , et que $u(A_k)$ est une sous-variété de $E_k$ isomorphe à $A_k$. Considerons maintenant l'espace vectoriel topologique $F$ des applications linéaires continues de $E$ dans $R^{2n+1}$ , muni de la ropologie de la convergence simple ; il est isomorphe à l'éspace produit $E'^{2n+1}$ , où $E'$ est le dual faible de $E$ , puisque toute application linéaire $v \in F$ s'écrit $v=(v_1,\dots,v_{2n+1})$ , où les $v_j$ sont des formes linéaires continues dans $E$ . Pour tout indice $k$ , $F$ peut être identifié canoniquement au produit $F_k \times F_k^o$ de l'espace $F_k$ des applications linéaires continues de $E_k$ dans $R^{2n+1}$ , et de l'espace $F_k^o$ des applications linéaires continues de $E$ dans $R^{2n+1}$ , nulles dans $E_k$ ; la projection de $F$ sur $F_k$ fait correspondre à toute application $v \in F$ sa restriction $v'_k$ à $E_k$ . Soit d'autre part $F_+$ la partie de $F$ formée des $v=(v_1,\dots,v_{2n+1})$ telles que les formes linéaires $v_j$ soient toutes positives dans le cône $C$ des éléments de $E$ dont toutes les coordonnées sont $\geq 0$ ; $F_+$ est isomorphe à $E'^{2n+1}_+$ , où $E'_+$ est la partie du dual $E'$ formée des formes linéaires positives dans $C$ , sous-espace isomorphe à l'espace produit $(R_+)^N$ (Esp.vect.top., chap.IV) . Soit alors $\Omega_k$ l'ensemble des $v \in F_+$ tels que $v'_k$ soit une application linéaire sur $R^{2n+1}$ , dont la restriction à $u(A_k)$ soit de rang $n$ en tout point de $u(B_k)$ , et biunivoque dans $u(B_k)$ ; il résulte aussitôt du lemme que $\Omega_k$ est un ensemble ouvert partout dense dans $F_+$ . Mais comme $F_+$ est un espace de Baire comme produit d'une famille dénombrable d'espaces homéomorphes à $R$ , l'intersection $\Theta$ des $\Omega_k$ est un ensemble partout dense dans $F_+$ ; il existe en particulier un élément $w=(w_1,\dots,w_{2n+1})$ de $\Theta$ tel que la restriction de $w_1$ au facteur d'indice 0 de $E$ ne soit pas nulle . Nous allons montrer que $\theta = w \circ u$ répond à la question. En efautre applic : existence de champs de vecteurs fet , pour tout $x \in V$ , $\theta$ est , dans un voisinage $U_h$ contenant $x$ , une application de classe $C^\infty$ de $U_h$ dans $R^{2n+1}$ , de rang $n$ au point $x$ ; d'autre part , deux points distincts $x, y$ de $V$ appartiennent à un même ensemble $B_k$ , donc $\theta(x) \neq \theta(y)$ ; pour voir que $\theta(V)$ est une sous-variété <u>fermée</u> de $R^{2n+1}$ , il suffit de prouver que $\theta$ est <u>propre</u> . Or , pour tout $x \in B_k$ , on a $u_0(x) \geqslant k$ , et comme $u(V)$ est contenu dans le cône $C$ des points à coordonnées $\geqslant 0$ de $E$ , il résulte du choix de $w$ que $w_1(u(x)) \geqslant w_1(u_0(x)) \geqslant \lambda k$ , $\lambda$ étant une constante $> 0$ indépendante de $k$ ; a fortiori $\|\theta(x)\| \geqslant \lambda k$ , ce qui prouve que $\theta$ est propre , et achève la démonstration .

<u>2 . Applications : I . Existence d'épidermes</u> .

PROPOSITION 1 .- <u>Soit $W$ une sous-variété de dimension $n$ dans un espace $R^m$ . Pour tout point $a \in W$ , il existe un nombre $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante : pour tout point $b$ de l'intersection $B \cap W$ de $W$ et d'une boule ouverte $B$ de centre $a$ et de rayon $\leqslant \varepsilon$ , la projection orthogonale de $B \cap W$ sur l'espace tangent $L_b$ en $b$ à $W$ est une ~~application biunivoque~~ de $B \cap W$ sur une partie ouverte et convexe de $L_b$</u> .

même un isomorphisme (difficile)

Par un déplacement , on peut toujours supposer que $a$ est l'origine de $R^m$ , que l'espace tangent à $W$ au point $0$ est une variété coordonnée identifiée à $R^n$ , et qu'il existe un voisinage compact $A$ de $0$ dans $W$ défini par les relations $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \alpha^2$ , $x_{n+j} = f_j(x_1, \dots, x_n)$ $(1 \leqslant j \leqslant m-n)$ , où les $f_j$ sont des fonctions de classe $C^\infty$ définies dans une boule de centre $0$ et de rayon $> \alpha$ dans $R^n$ , nulles ainsi que leurs dérivées du premier ordre au point $0$ . En un point $b$ de $A$ , l'espace tangent $L_b$ est défini par les $n$ vecteurs $u_i = e_i + \sum_{j=1}^{m-n} c_{ij} e_{n+j}$ , où $c_{ij}$ est la valeur pour $(b_1, \dots, b_n)$ des $\partial f_j / \partial x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n$ , $1 \leqslant j \leqslant m-n)$ . En vertu de l'hypothèse , les $c_{ij}$ tendent vers $0$ avec $b$ ; si $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ est la base orthonormale de $R^m$ obtenue par orthonormalisation de la base formée de $u_1, \dots, u_n, e_{n+1}, \dots, e_m$ , on peut écrire

$v_i=e_i+\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_{ij}e_j$ , où les $\lambda_{ij}$ sont des fonctions de classe $C^\infty$ de $b_1,\dots,b_n$ , tendant vers 0 avec les $b_i$ . Pour tout point $x\in A$ , soit $x-b=\sum\limits_{i=1}^{m}y_iv_i$ ; pour $1\leq i\leq n$ , on a

(3) $\quad y_i=x_i-b_i+\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(x_j-b_j)+\sum\limits_{k=1}^{m-n}\lambda_{i,n+k}(f_k(x_1,\dots,x_n)-f_k(b_1,\dots,b_n))$

et pour $1\leq i\leq m-n$

(4) $\quad y_{n+i}=f_i(x_1,\dots,x_n)-f_i(b_1,\dots,b_n)+\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{n+i,j}(x_j-b_j)+$
$\qquad +\sum\limits_{k=1}^{m-n}\lambda_{n+i,n+k}(f_k(x_1,\dots,x_n)-f_k(b_1,\dots,b_n))$ ;

Le th. des fonctions implicites (chap.I, § 3) montre qu'il existe un nombre $\beta>0$ tel que pour $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2<\beta^2$ et $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2<\beta^2$ , les équations (3) admettent une seule solution $x_i=g_i(y_1,\dots,y_n,b_1,\dots,b_n)$ $(1\leq i\leq n)$ de classe $C^\infty$ , se réduisant à 0 pour $(y_i)=(b_i)=0$ ; en outre , pour $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2<\gamma^2$ ($\gamma$ nombre fixe convenable) , l'application $(y_i)\to(g_i(y_1,\dots,y_n,b_1,\dots,b_n))$ est un homéomorphisme de la boule $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2<\beta^2$ sur un voisinage de 0 dans $R^n$ contenant une boule de centre 0 et de rayon $\delta$ indépendant de b . Remplaçant les $x_i$ d'indice $\leq n$ par les $g_i(y_1,\dots,y_n,b_1,\dots,b_n)$ dans (4) , on voit donc qu'on a le résultat suivant : le voisinage K de 0 dans A , formé des points $x\in A$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2<\delta^2$ a pour image , par projection orthogonale sur $L_b$ , un ensemble ouvert $H_b$ contenant b et contenu dans la boule $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2<\beta^2$ de centre b ; en outre , K est identique à l'ensemble des $(y_i)_{1\leq i\leq m}$ tels que $(y_i)_{1\leq i\leq n}\in H_b$ et

(5) $$y_{n+i}=F_i(y_1,\dots,y_n,b_1,\dots,b_n) \qquad (1\leq i\leq m-n)$$

les fonctions $F_i$ étant définies et de classe $C^\infty$ pour $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2<\beta^2$ et $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2<\beta^2$ , nulles pour $y_1=y_2=\dots=y_n=0$ ainsi que leurs dérivées du premier ordre $\partial F_i/\partial y_j$ . Nous désignerons par M le maximum des valeurs absolues des dérivées partielles du second ordre $\partial^2F_i/\partial y_j\partial y_k$ lorsque $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2<\beta^2$ et $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\leq\gamma^2$ .

Cela étant , il faut prouver que , si $\varepsilon<\frac{\delta}{2}$ est pris assez petit , l'ensemble des points de $R^n$ défini par la relation

$$G(y)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_i)^2+\sum_{i=1}^{m-n}(F_i(y,b)-F_i(a,b))^2<\varepsilon^2$$

est convexe , lorsque $a=(a_i)$ est tel que $G(0)<\varepsilon^2$ . Pour cela , il suffit de prouver que , pour $\varepsilon$ assez petit , $G(y)$ est une fonction convexe pour $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq 4\varepsilon^2$. Cela signifie que , dans cette boule , la forme quadratique $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j} t_i t_j$ est positive ; or , elle s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + \sum_{i,j} \sum_{k=1}^{m-n} \Big( (F_k(y,b)-F_k(a,b)) \frac{\partial^2 F_k}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_k}{\partial y_i}\frac{\partial F_k}{\partial y_j} \Big) t_i t_j \quad .$$

Dès que $\varepsilon$ est assez petit , les $F_k(y,b)-F_k(a,b)$ sont arbitrairement petits , et il en est de même des dérivées $\frac{\partial F_k}{\partial y_i}$ (et cela uniformément par rapport aux $b_i$ pour $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq \gamma^2$) ; comme les $\partial^2 F_k / \partial y_j \partial y_k$ sont uniformément bornées par $M$ , on en tire aussitôt la conclusion .

THÉORÈME 2 .- Soit V une variété de dimension n . Il existe un recouvrement localement fini $(A_i)$ de V tel que toute intersection non vide d'un nombre fini d'ensembles $A_i$ soit homéomorphe à $R^n$ → différentiablement

En effet , en vertu du th.1 , on peut supposer que V est une sous-variété fermée de $R^m$ . En vertu de la prop.1 , il existe un recouvrement localement fini de V par des boules ouvertes $(B_i)$ dans $R^m$ telles que pour tout point x de $B_i \cap V$, la projection orthogonale sur l'espace tangent $L_x$ à V au point x de l'intersection $A_i = B_i \cap V$ soit un ensemble convexe ouvert homéomorphe à $A_i$ . Alors , pour tout $x \in V$ appartenant à l'intersection d'un nombre fini d'ensembles $A_{i_k}$ $(1 \leq k \leq r)$ la projection sur $L_x$ de l'intersection des $A_{i_k}$ est homéomorphe à cette intersection et est intersection d'ensembles ouverts convexes , donc est elle-même un ensemble ouvert convexe de dimension n , ce qui démontre le théorème .

3 . Applications : II . Un théorème de prolongement .

PROPOSITION 2 .- Soit W une sous-variété fermée de $R^m$ , de dimension n . Il existe alors un voisinage U de W dans $R^m$ et une application $\pi$ de classe $C^\infty$ de U sur W qui possède la propriété suivante : pour tout $x \in U$ , $\pi(x)$ est le seul point de W tel que la distance de x à ce point soit égale à $d(x,W)$ .

est convexe, lorsque $a=(a_i)$ est tel que $G(0) < \varepsilon^2$. Pour cela, il suffit de prouver que, pour $\varepsilon$ assez petit, $G(y)$ est une fonction convexe pour $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 < \varepsilon^2$. Cela signifie que, dans cette boule, la forme quadratique $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j} t_i t_j$ est positive ; or, elle s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + \sum_{i,j} \sum_{k=1}^{m-n} \left( (F_k(y,b) - F_k(a,b)) \frac{\partial^2 F_k}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_k}{\partial y_i} \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \right) t_i t_j .$$

Dès que $\varepsilon$ est assez petit, les $F_k(y,b) - F_k(a,b)$ sont arbitrairement petits, et il en est de même des dérivées $\frac{\partial F_k}{\partial y_i}$ (et cela uniformément par rapport aux $b$, pour $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq \gamma^2$) ; comme les $\partial^2 F_k / \partial y_j \partial y_k$ sont uniformément bornées par $M$, on en tire aussitôt la conclusion.

THÉORÈME 2. — Soit $V$ une variété de dimension $n$. Il existe [illegible] localement fini $(A_i)$ de $V$ tel que toute intersection [illegible] d'ensembles $A_i$ soit homéomorphe à $R^n$.

Ça a l'air de marcher dans l'algébrique réel.

En effet, en vertu du [illegible] 1, on peut supposer que $V$ est [illegible] fermée de $R^m$. En vertu de [illegible] 1, il existe [illegible] de $V$ par des boules ouvertes $(B_i)$ dans $R^m$ telles que [illegible] la projection orthogonale sur l'espace tangent $L_x$ à $V$ [illegible] tion $A_i = B_i \cap V$ soit un ensemble convexe ouvert homéomorphe [illegible] tout $x \in V$ appartenant à l'intersection d'un [illegible] la projection sur $L_x$ de l'intersection [illegible] tion et est intersection d'ensembles convexes ouverts [illegible] ensemble ouvert convexe de dimension $n$ ; ce qui démontre le [illegible]

Car | $V \subset W$
y a une rétraction différentiable d'un voisinage de $V$ sur $V$

application à $V \times V$ et diagonale :
2 applic. voisines (= graphes voisins) sont homotopes

Demander à Serre qui fournira 99 énoncés

3. Applications : II. Un théorème de prolongement.

PROPOSITION 2. — Soit $W$ une sous-variété fermée de $R^m$. Il [illegible] te alors un voisinage $U$ de $W$ dans $R^m$ et une application [illegible] sur $W$ qui possède la propriété suivante : pour tout $x \in U$, [illegible] est le seul point de $W$ tel que la distance de $x$ à ce point soit [illegible]

Pour tout point $x \in R^m$ , il existe au moins un point $y \in W$ tel que $d(x,y)=d(x,W)$ ("projection" de x sur W) : en effet , l'intersection de W et de la boule fermée B de centre x et de rayon $d(x,W)+1$ est un ensemble compact non vide , et par suite contient un point y dont la distance à x est égale à $d(x,B \cap W)$ , et a fortiori à $d(x,W)$ . En outre , en chacun de ces points , l'espace tangent $L_y$ à W est orthogonal à $y-x$ ; en effet , la fonction $u(y)=\|x-y\|^2=\sum_{i=1}^{m}(y_i-x_i)^2$ est de classe $C^\infty$ sur W et admet au point y un minimum , d'où $du=0$ en ce point , c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)dy_i=0$ : or , pour tout vecteur tangent L au point y à W , les nombres $\langle L,dy_i\rangle$ sont les composantes du vecteur L sur la base canonique de $R^m$ , et la relation $\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)\langle L,dy_i\rangle=0$ montre donc que L est orthogonal à $y-x$ .

Soit maintenant a un point quelconque de W ; par déplacement , nous supposerons que $a=0$ , et que l'espace tangent à W au point a est identique à la variété coordonnée $R^n$ ; il existe un voisinage compact A de a dans W défini par les relations $\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \leq \alpha^2$ et $x_{n+j}=f_j(x_1,\ldots,x_n)$ $(1 \leq j \leq m-n)$ , où les $f_j$ sont des fonctions de classe $C^\infty$ définies dans une boule de centre 0 et de rayon $>\alpha$ de $R^n$ , nulles ainsi que leurs dérivées premières au point 0 . Pour tout point $x=(x_1,\ldots,x_n,f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_{m-n}(x_1,\ldots,x_n))$ de A , l'espace tangent à W au point x est défini par les m-n équations linéaires non homogènes

$$z_{n+j}-x_{n+j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(z_i-x_i) \qquad (1 \leq j \leq m-n)$$

et par suite , les m-n vecteurs $u_j(x)=e_{n+j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}e_i$ $(1 \leq j \leq m-n)$ forment une base du sous-espace vectoriel totalement orthogonal à $L_x$ . Nous allons définir de la façon suivante une application $\varphi_0$ de $B \times R^{m-n}$ (où B est la boule $\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \leq \alpha^2$ , projection de A sur $R^n$) dans $R^n$ : pour tout $z=(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de B et tout point $t=(t_j)$ $(1 \leq j \leq m-n)$ de $R^{m-n}$ , nous poserons $\varphi_0(z,t)=x+\sum_{j=1}^{m-n}t_j u_j(x)$ , où x est le point de coordonnées $x_1,\ldots,x_n,f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_{m-n}(x_1,\ldots,x_n)$ . Il est clair que $\varphi_0$ est de classe $C^\infty$ ; sa matrice jacobienne au point $a=0$ se réduit à la matrice unité, comme on le voit aussitôt . En vertu du th. des fonctions implicites (chap.I), il existe donc une boule ouverte $B_1$ de centre 0 contenue dans B et une boule M de centre 0 dans $R^{m-n}$ , telles que $\varphi_0$ soit un homéomorphisme de $B_1 \times M$ sur un voisinage N de 0 dans $R^m$ .

Pour tout $y \in N$ , le point $x \in A$ tel que $x+\sum_{j=1}^{m-n} t_j u_j(x)=y$ est tel , par construction , que y-x soit orthogonal à $L_x$ ; nous désignerons ce point par $\pi_0(y)$ , et nous allons montrer qu'il existe une boule P de centre 0 , contenue dans N et telle que , pour tout $y \in P$ , $\pi_0(y)$ soit le *seul* point de W tel que $d(y,\pi_0(y))$ soit égal à $d(y,W)$ . Raisonnons par l'absurde , et supposons qu'il existe une suite $(y_\nu)$ de points de N tendant vers 0 , et une suite $(x_\nu)$ de points de W tels que $d(y_\nu,x_\nu)=d(y_\nu,W)$ et $x_\nu \neq \pi_0(y_\nu)$ ; comme $d(y_\nu,x_\nu) \leq d(y_\nu,\pi_0(y_\nu))$ , $d(y_\nu,x_\nu)$ tend vers 0 , et par suite $x_\nu$ tend vers 0 . Nous avons remarqué ci-dessus que le vecteur $y_\nu-x_\nu$ est orthogonal à $L_{x_\nu}$ ; on peut donc écrire $y_\nu=x_\nu+\sum_{j=1}^{m-n} t_{j\nu}u_j(x_\nu)$ , et comme $x_\nu \neq \pi_0(y_\nu)$ , le point $(t_{1\nu},t_{2\nu},\dots,t_{m-n,\nu})$ *n'appartient pas à la boule* M . Si on pose $a_\nu^2=\sum_{j=1}^{m-n} t_{j\nu}^2$ , la suite des nombres $(a_\nu^{-1})$ est donc bornée . On a $\sum_{j=1}^{m-n}(a_\nu^{-1}t_{j\nu}) =1$ ; extrayant au besoin de $(y_\nu)$ une suite partielle , on peut donc supposer que chacune des suites $(a_\nu^{-1}t_{j\nu})$ a une limite $t'_j$ ; on a $\sum_{j=1}^{m-n} t'^2_j=1$ . D'autre part, on a $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^{-1}(y_\nu-x_\nu)=0$ , ce qui à la limite donne la relation $\sum_{j=1}^{m-n} t'_j e_{n+j}=0$ , ce qui est absurde puisque les $t'_j$ ne sont pas tous nuls .

Nous avons donc démontré le résultat suivant : pour tout point $a \in W$ , il existe un voisinage ouvert U(a) de a dans $R^m$ et une application $\pi_a$ de classe $C^\infty$ de U(a) dans W tels que , pour tout $x \in U(a)$ , $\pi_a(x)$ soit le seul point de W dont la distance à x soit égale à d(x,W) . Il résulte aussitôt de cette définition que si U(a) et U(b) se rencontrent , $\pi_a$ et $\pi_b$ sont égales dans $U(a)\cap U(b)$ . Par suite , il existe une fonction et une seule $\pi$ définie dans la réunion U de tous les ensembles U(a) et prolongeant toutes les fonctions $\pi_a$ ; il est clair que cette fonction répond aux conditions de l'énoncé .

La prop.2 montre en particulier que , dans un espace $R^m$ , toute sous-va-

Fait dans les petits bouts de topologie (cap. III) riété fermée est un rétracté de voisinage (Top.géom., chap. , § ). Ce résultat va nous permettre de démontrer un théorème de prolongement pour des fonctions prenant leurs valeurs dans une variété quelconque, et non plus seulement dans un espace vectoriel.

THÉORÈME 3 .- Soit $\varphi$ une application continue d'une variété V dans une variété W, et soit F un ensemble fermé dans V tel que la restriction de $\varphi$ à F soit k fois continûment différentiable (k entier $\geq 0$ ou $+\infty$ ; cf. § 2, n°3). Soit S un voisinage quelconque du graphe de $\varphi$ dans la variété $V\times W$. Il existe alors une application $\psi$, k fois continûment différentiable, de V dans W, qui coïncide avec $\varphi$ sur F et est telle que $(x,\psi(x))\in S$ pour tout $x\in V$.

D'une façon imagée, si on connaît déjà une application continue de V dans W qui est de classe $C^k$ dans F, on peut trouver une application de classe $C^k$ de V dans W, qui coïncide avec l'application donnée dans F et en est arbitrairement voisine aux autres points de V. Les difficultés qui se présentent dans le prolongement des fonctions à valeurs dans une variété quelconque W sont donc essentiellement relatives au prolongement des fonctions continues.

1° Considérons d'abord le cas où $W=R^m$ ; en vertu du th.1, on peut supposer que V est une sous-variété fermée de $R^{2n+1}$, et le th. d'Urysohn permet alors de prolonger $\varphi$ à $R^{2n+1}$ tout entier. On peut par suite se borner alors au cas où $V=R^n$. Pour tout point $x\in R^n$, il existe des voisinages ouverts relativement compacts arbitrairement petits T de x tels que $\overline{T}\times\overline{U}\subset S$ pour un voisinage relativement compact U de $\varphi(x)$ dans $R^m$. Il existe donc une famille localement finie $(T_i)$ de ces voisinages formant un recouvrement de $R^n$ (§ 2, n°1, lemme). Soit r(x) la distance (dans $R^{m+n}$) du point $(x,\varphi(x))$ au complémentaire de S ; on a $r(x)>0$ pour tout $x\in R^n$, donc, comme $T_i$ est relativement compact, chacun des nombres $a_i=\inf_{x\in T_i} r(x)$ est $>0$. Soit $(h_i)$ une partition de l'unité de classe $C^\infty$, subordonnée au recouvrement $(T_i)$ ; pour chaque indice i, il existe une fonction $g_i$ définie dans $R^n$, à valeurs dans $R^m$, de classe $C^\infty$ et telle que $\|\varphi(x)-g_i(x)\|\leq 2^{-i-2}a_i$ dans $T_i$ (chap.I, § 2, prop.9). Si on pose $f(x)=\sum_i h_i(x)g_i(x)$, f est une application de $R^n$ dans $R^m$, de classe $C^\infty$, et pour

$= \sum_i h_i(x)g_i(x)$ , $f$ est une application de classe $C^\infty$ de $R^n$ dans $R^m$ , et pour tout $x \in R^n$ , on a $\|f(x)-\varphi(x)\| = \|\sum_i h_i(x)(\varphi(x)-g_i(x))\| \leq \sum_i 2^{-i-2}a_i h_i(x)$ ; si $h_i(x) \neq 0$ , on a $r(x) \geq a_i$ , d'où $\|f(x)-\varphi(x)\| \leq r(x)/4$ pour tout $x \in R^n$ . Considérons alors la fonction $f-\varphi$ ; sa restriction à $F$ est par hypothèse de classe $C^k$ ; donc (§ 2, th.1 et 2) , elle peut se prolonger en une application $u$ de $R^n$ dans $R^m$ , de classe $C^k$ . En outre , on vient de voir que l'on a $\|u(x)\| \leq r(x)/4$ pour tout $x \in F$ ; la fonction $r(x)$ étant continue, l'ensemble $N$ des $x \in R^m$ tels que $\|u(x)\| < r(x)/2$ est un voisinage ouvert de $F$ ; il existe par suite une fonction $v(x)$ , de classe $C^\infty$ , à valeurs dans $[0,1]$ , égale à 1 dans $F$ et à 0 dans $\complement N$ (§ 2, cor. de la prop.1) . Cela étant , montrons que la fonction $\psi = f+vu$ répond à la question ; elle est en effet de classe $C^k$ dans $R^n$ , égale à $\varphi$ dans $F$ ; enfin , pour tout $x \in R^n$ , on a $\|v(x)u(x)\| \leq r(x)/2$ , d'où $\|\psi(x)-\varphi(x)\| \leq r(x)$ et par suite $(x,\psi(x)) \in S$ .

2° Passons au cas général où $V$ est une variété quelconque de dimension $n$ , $W$ une variété quelconque de dimension $m$ . En vertu du th.1 , on peut supposer que $W$ est une sous-variété fermée de $R^{2m+1}$ . Soit alors $U$ un voisinage de $W$ dans $R^{2m+1}$ , dans lequel existe une application $\pi$ de $U$ dans $W$ ayant les propriétés énoncées dans la prop.2 ; soit $S'$ l'ensemble des points $(x,y) \in V \times U$ tels que $(x,\pi(y)) \in S$ ; comme $\pi$ est continue et coïncide avec l'application identique dans $W$ , $S'$ est un voisinage du graphe de $\varphi$ dans $V \times R^{2m+1}$ . En vertu de la première partie , il existe donc une application $\psi_1$ de classe $C^k$ de $V$ dans $R^{2m+1}$, qui coïncide avec $\varphi$ dans $F$ , et est telle que $(x,\psi_1(x)) \in S'$ pour tout $x \in V$ ; l'application $\psi = \pi \circ \psi_1$ possède alors toutes les propriétés requises .

## § 4 . Intégration des formes différentielles .

### 1 . Variétés orientées .

Rappelons (Alg.,chap.IX) que , sur un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ sur $R$,

Et les n-vecteurs?
On ne les oriente pas?
un peu [illegible]

Y'a un filtré là dessous
à arranger -

on dit que deux n-covecteurs $z, z'$ non nuls ont même orientation si on a $z' = \lambda z$ avec $\lambda > 0$ ; la relation "$z$ et $z'$ ont même orientation" est une relation d'équivalence dans l'espace $\overset{n}{\Lambda} E^*$ des n-covecteurs (espace de dimension 1) privé de 0 , et il existe deux classes d'équivalence pour cette relation , qu'on appelle orientations de E ; au lieu de dire que $z'$ a même orientation que $z$ , on dit aussi que $z'$ est un n-covecteur $> 0$ (ou direct) par rapport à $z$ (ou à l'orientation de $z$) ; si $z'$ a une orientation différente de celle de $z$ , on dit que $z'$ est $< 0$ (ou rétrograde) par rapport à $z$ (ou à l'orientation de $z$) . Dans l'espace $R^n$ , l'orientation à laquelle appartient le n-covecteur $e'_1 \wedge e'_2 \wedge \ldots \wedge e'_n$ ($(e'_i)$ base duale de la base canonique) est dite orientation directe . Sauf mention expresse du contraire , c'est de cette orientation qu'il s'agira quand nous parlerons de $R^n$ comme d'un espace vectoriel orienté .

DÉFINITION 1 .- Soit V une variété de dimension n . Pour tout $x \in V$ , soit $o(x)$ une orientation de l'espace vectoriel tangent $L_x$ au point x . On dit que l'application $x \to o(x)$ est une orientation sur V si elle satisfait à la condition suivante : pour tout $x \in V$ et toute forme différentielle $\omega$ de degré n , continue dans V et telle que $\omega(x) \in o(x)$ (autrement dit , que $\omega(x) > 0$ par rapport à $o(x)$) il existe un voisinage N de x dans V tel que , pour tout $y \in N$ , on ait $\omega(y) \in o(y)$. On dit qu'une variété V est orientable s'il existe au moins une orientation sur V.

On remarquera que si la condition de l'énoncé est vérifiée pour une forme $\omega$ telle que $\omega(x) > 0$ pour $o(x)$ , elle l'est pour toute autre forme $\omega_1$ vérifiant la même condition , car on peut alors écrire dans un voisinage de x , $\omega_1(y) = g(y)\omega(y)$ , où g est continue et $> 0$ au point x .

Si V est une variété orientable , la donnée sur V de sa structure de variété et d'une orientation $x \to o(x)$ définit une nouvelle structure sur V , qu'on appelle structure de variété orientée ; V , muni de cette structure , est appelée variété orientée . Si $x \to o(x)$ est une orientation sur une variété orientable $V_0$

Bamule

(167)





et si, pour tout $x \in V_0$, $o'(x)$ est l'orientation de $L_x$ distincte de $o(x)$, il est clair que $x \to o'(x)$ est encore une oriéntation sur $V_0$, dite opposée de $x \to o(x)$ ; si $V$ désigne la variété orientée obtenue en munissant $V_0$ de l'orientation $x \to o(x)$, on désigne par $-V$ la variété orientée obtenue en munissant $V_0$ de $x \to o'(x)$ ; on dit encore que $V$ est la variété opposée à $-V$.

PROPOSITION 1 .- Pour qu'une variété $V$ de dimension $n$ soit orientable, il faut et il suffit qu'il existe sur $V$ une forme différentielle ~~continue~~ $\omega$ de degré $n$, telle que $\omega(x) \neq 0$ pour tout $x \in V$.

c'est même indéf. diff.

La condition est suffisante. En effet, pour tout $x \in V$, soit $o(x)$ l'orientation de $L_x$ pour laquelle $\omega(x) > 0$ ; montrons que $x \to o(x)$ est une orientation sur $V$. En effet, pour tout $x \in V$, la forme $\omega$ vérifie le critère de la déf.1, et nous avons remarqué que cela entraîne que toute forme $\omega_1$ de degré $n$, continue dans $V$ et telle que $\omega_1(x) > 0$ pour $o(x)$ satisfait au même critère.

La condition est nécessaire. Soit en effet $x \to o(x)$ une orientation de $V$ ; par définition, pour tout $x \in V$, il existe une forme différentielle $\omega_x$ de degré $n$ continue dans $V$, et un voisinage $U(x)$ de $x$ tel que, pour tout $y \in U(x)$, on ait $\omega_x(y) > 0$ pour $o(y)$. Soit $(U_j)$ un recouvrement ouvert localement fini plus fin que le recouvrement formé des $U(x)$, et soit $(h_j)$ une partition de l'unité de classe $C^\infty$ subordonnée au recouvrement $(U_j)$. Pour tout indice $j$, soit $x_j$ tel que $U_j \subset U(x_j)$, et posons $\omega_j = \omega_{x_j}$ ; on a donc $\omega_j(y) > 0$ pour $o(y)$ pour tout $y \in U_j$. Si on pose $\omega = \sum_j h_j \omega_j$, il est clair que $\omega(x) > 0$ pour $o(x)$ pour tout $x \in V$ (la somme de covecteurs $> 0$ étant $> 0$).

le garder seul

COROLLAIRE 1 .- Sur une variété orientée $V$ de dimension ~~$n$~~, il existe une forme différentielle $\omega$ de degré $n$ et de classe $C^\infty$ telle que $\omega(x)$ soit $> 0$ pour tout $x \in V$.

Il suffit de remarquer que, dans la seconde partie de la démonstration de la

!!

Faut
- la notion générale d'orientation (avec $G \subset R^*$)
- les systèmes locaux
- les faisceaux (en somme)

sans ça on n'y pige rien

Couleur

prop.1 , on peut supposer que les $\omega_x$ soient de classe $C^{\infty}$ .

COROLLAIRE 2 .- Sur une variété orientable connexe , il n'existe que deux orientations distinctes .

ceci est une question de connexion pure (ensemble des pts où [illegible])

En effet , soient $\omega$ et $\omega_1$ deux formes différentielles continues de degré n , partout $\neq 0$ dans V . Il est clair alors qu'il existe une fonction u continue dans V et telle que $\omega_1 = u\omega$ ; comme V est connexe et que $u(x)\neq 0$ en tout point de V , il résulte du th. de Bolzano que u garde un signe constant dans V , d'où le corollaire .

Etant donnée une variété V orientée par une orientation $x \to o(x)$ , l'espace vectoriel orienté obtenu en munissant l'espace tangent $L_x$ au point x de l'orientation o(x) est appelé l'espace tangent orienté à V en ce point .

Soient V et V' deux variétés orientées de même dimension n , et soit $\varphi$ une application de classe $C^1$ de V dans V' . Soit x un point de V tel que $\varphi$ soit de rang n au point x ; $d_x\varphi$ est alors un isomorphisme de l'espace tangent en x à V sur l'espace tangent en $y=\varphi(x)$ à V' . Nous dirons que $\varphi$ préserve l'orientation au point x si $d_x\varphi$ est un isomorphisme de l'espace tangent orienté au point x à V sur l'espace tangent orienté au point $\varphi(x)$ à V'. Soient $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ des coordonnées locales sur V dans un voisinage de x , $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ des coordonnées locales sur V' dans un voisinage de $y=\varphi(x)$ . Dans un voisinage de x , l'application $\varphi$ peut s'écrire $(x_i)\to(g_i(x_1,\dots,x_n))$ , où les $g_i$ sont de classe $C^1$ ; supposons que les formes différentielles $dx_1\wedge dx_2\wedge\dots\wedge dx_n$ et $dy_1\wedge dy_2\wedge\dots\wedge dy_n$ soient positives aux points x et y respectivement : alors , pour que $\varphi$ préserve l'orientation au point x , il faut et il suffit que le jacobien des $g_i$ par rapport aux $x_i$ soit $>0$ au point x ; il en résulte aussitôt que $\varphi$ préserve alors l'orientation en tout point assez voisin de x .

Conformément aux définitions générales , si V et V' sont deux variétés orientées ~~xx~~ , $V_0$ et $V'_0$ les variétés non orientées sous-jacentes , un isomorphisme

c'est bien compliqué
simplifier



$\varphi$ de V sur V' est un isomorphisme de $V_0$ sur $V'_0$ qui préserve l'orientation en tout point de V . On notera que si V est connexe , il suffit pour cela que $\varphi$ préserve l'orientation en un point de V ; en effet , il existe évidemment une variété orientée V" admettant $V'_0$ comme variété sous-jacente et telle que $\varphi$ soit un isomorphisme de V sur V" (il suffit de transporter par $\varphi$ l'orientation de V); notre assertion résulte alors du fait qu'il n'y a que deux orientations sur $V'_0$ (cor.2 de la prop.1) .

Il est clair que la donnée d'une orientation sur une variété (orientable) V définit une orientation (dite orientation induite) sur toute sous-variété ouverte de V .

Il faudra ~~naturellement~~ faire ~~éventuellement~~ le raccord avec la notion de variété orientable (non différentiable) si on l'a définie en Top.géom.

non

2 . Mesures n-dimensionnelles sur une variété de dimension n .

DÉFINITION 2 .- Sur une variété V de dimension n , on appelle mesure n-dimensionnelle toute mesure positive $\mu$ ayant la propriété suivante : pour tout $x \in V$ et toute carte $\varphi$ d'un voisinage ouvert U de x sur $R^n$ , l'image par $\varphi$ de la mesure induite sur U par $\mu$ est équivalente à la mesure de Lebesgue sur $R^n$ .

Sur toute variété V de dimension n , il existe une mesure n-dimensionnelle . Soit en effet $(U_i)$ un recouvrement ouvert localement fini de V tel que , pour chaque indice i , il existe une carte $\varphi_i$ de $U_i$ sur une partie ouverte relativement compacte de $R^n$ ; soit $\mu_i$ la mesure image de la mesure de Lebesgue par $\varphi_i^{-1}$ . La famille $(\mu_i)$ est sommable pour la topologie vague : en effet , pour toute fonction numérique continue f définie dans V et à support compact , on a $\int f\, d\mu_i = \int (f\circ\varphi_i^{-1})dv$ , en désignant par v la mesure de Lebesgue sur $R^n$ . Comme le support de f ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles $U_i$ , la somme $\sum_i \int fd\mu_i$ est finie , d'où notre assertion . La mesure $\mu = \sum_i \mu_i$ est alors une mesure n-dimensionnelle sur V ; en effet , si K est une partie compacte de V , pour qu'une partie A de K soit intégrable pour $\mu$ , il faut et il suffit qu'elle le soit pour chacune des $\mu_i$ , et on a $\mu(A)=\sum_i \mu_i(A)$ (K ne rencontrant qu'un nombre fini des $U_i$) ; il en résulte aussitôt que la relation $\mu(A)=0$ équivaut à $\mu_i(A)=0$ pour tout indice i , d'où aussitôt notre assertion .

Il résulte de la déf. 2 que sur une variété V , toutes les mesures n-dimensionnelles sont équivalentes : les notions de fonction mesurable (resp. localement intégrable , négligeable) sont donc les mêmes (puisque V est dénombrable à l'infini) pour toutes ces mesures , et nous les emploierons désormais sans nous référer à une mesure n-dimensionnelle particulière sur V . On notera que toute sous-variété différentiable de V , de dimension $<n$ , est négligeable (à démontrer)

### 3 . Intégrale d'une forme différentielle de degré n sur une variété orientée .

Supposons maintenant que V soit une variété orientée de dimension n : il existe alors une forme différentielle $\omega_0$ de degré n et de classe $C^\infty$ , telle que $\omega_0(x)>0$ pour tout $x\in V$ . Nous allons définir une mesure n-dimensionnelle sur V à l'aide de la forme différentielle $\omega_0$ . Il nous suffira pour cela , pour chaque ensemble ouvert connexe U dans V , pour lequel il existe une carte $\varphi$ de U sur une partie ouverte de $R^n$ , de définir une mesure sur U à l'aide de $\omega_0$ et de $\varphi$ , et de montrer ensuite que si $U_1$ et $U_2$ sont deux parties ouvertes de cette nature dans V , $\mu_1$ et $\mu_2$ les mesures définies à partir de $\omega_0$ et des cartes $\varphi_1$ et $\varphi_2$ , les restrictions de $\mu_1$ et $\mu_2$ à $U_1\cap U_2$ sont identiques (Intégr., chap. III, § 3, prop. 1) . Or , on peut par hypothèse écrire $\omega_0\circ\overset{-1}{\varphi}(z)=f(z_1,\dots,z_n)dz_1\wedge dz_2\wedge\dots\wedge dz_n$ pour tout $z\in\varphi(U)$ , et f garde un signe constant dans $\varphi(U)$ ; on a $f(z)>0$ (resp. $<0$) suivant que $\varphi$ préserve ou non l'orientation . Par définition, la mesure $\mu$ définie sur U est l'image par $\overset{-1}{\varphi}$ de la mesure $\varepsilon f.dv$ , v étant la mesure de Lebesgue sur $R^n$ , et $\varepsilon$ étant égal à +1 (resp. −1) suivant que $\varphi$ préserve ou non l'orientation . Prouvons maintenant (avec les notations précédentes) que $\mu_1$ et $\mu_2$ ont même restriction à $U_1\cap U_2$ . En effet , soit g une fonc-

Définir aussi $\omega$ comme <u>mesure</u>

La justification (indépendance) <u>avant</u> la définition.

tion numérique continue $g$ à support compact contenu dans $U_1 \cap U_2$ , et montrons que $\mu_1(g)=\mu_2'(g)$ . Par définition , on a

$$\mu_1(g)=\varepsilon_1\int_{\varphi_1(U_1\cap U_2)} g(\overset{-1}{\varphi_1}(z))f_1(z)dv$$
$$\mu_2(g)=\varepsilon_2\int_{\varphi_2(U_1\cap U_2)} g(\overset{-1}{\varphi_2}(z))f_2(z)dv$$

si $\omega_0\circ\overset{-1}{\varphi_1}(z)=f_1(z)dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$ , $\omega_0\circ\overset{-1}{\varphi_2}(z)=f_2(z)dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$ . Or , il existe par hypothèse un isomorphisme $\theta$ de classe $C^\infty$ de $\varphi_1(U_1\cap U_2)$ sur $\varphi_2(U_1\cap U_2)$ tel que, dans $\varphi_1(U_1\cap U_2)$ , on ait $\overset{-1}{\varphi_1}=\overset{-1}{\varphi_2}\circ\theta$ ; en outre , $\theta$ préserve l'orientation ou non suivant que $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ ou $\varepsilon_1=-\varepsilon_2$ . Si $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ , on a donc

$$f_1(z)=f_2(\theta(z))D(\theta_1,\ldots,\theta_n)/D(z_1,\ldots,z_n)$$

pour tout $z\in\varphi_1(U_1\cap U_2)$ ; d'autre part , la formule du changement de variables dans les intégrales multiples (chap.I.§ 4) montre que

$$\int_{\varphi_2(U_1\cap U_2)} g(\overset{-1}{\varphi_2}(z))f_2(z)dv=\int_{\varphi_1(U_1\cap U_2)} g(\overset{-1}{\varphi_2}(\theta(z)))f_2(\theta(z))\left|\frac{D(\theta_1,\ldots,\theta_n)}{D(z_1,\ldots,z_n)}\right| dv$$

Comme $D(\theta_1,\ldots,\theta_n)/D(z_1,\ldots,z_n)>0$ si $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ , et $<0$ dans le cas contraire , on a bien $\mu_1(g)=\mu_2(g)$ .

La mesure $\mu_{\omega_0}$ ainsi définie est évidemment une mesure n-dimensionnalle positive; en outre , si $\omega_1$ est une seconde forme différentielle $>0$ de degré n et de classe $C^\infty$ sur V , on a $\omega_1=h.\omega_0$ . où h est une fonction $>0$ en tout point de V et de classe $C^\infty$ ; on en déduit aussitôt que $\mu_{\omega_1}=h.\mu_{\omega_0}$ .

DÉFINITION 3 .- <u>Soient</u> V <u>une variété orientée de dimension</u> n , $\omega_0$ <u>une forme différentielle de degré n et de classe</u> $C^\infty$ <u>sur</u> V , <u>telle que</u> $\omega_0(x)>0$ <u>pour tout x de</u> V . <u>On dit qu'une forme différentielle</u> $\omega=f.\omega_0$ <u>de degré n sur</u> V <u>est intégrable si f est intégrable pour la mesure</u> $\mu_{\omega_0}$ <u>associée à</u> $\omega_0$ ; <u>on appelle intégrale de</u> $\omega$ <u>sur</u> V <u>et on note</u> $\int\omega$ <u>ou</u> $\int_V\omega$ <u>le nombre</u> $\int f.d\mu_{\omega_0}$ .

Si $\omega_1$ est une seconde forme différentielle $>0$ de degré n sur V XXXX et de classe $C^\infty$ sur V , on a $\omega_1=h.\omega_0$ . où $h(x)>0$ pour tout $x\in V$ , h étant de classe $C^\infty$ ; alors $\omega=fh^{-1}\omega_1$ ; XXXX pour que f soit intégrable pour $\mu_{\omega_0}$ , il faut et il suffit que $(fh^{-1})$XX soit intégrable pour $\mu_{\omega_1}$ et on a $\int(fh^{-1})d\mu_{\omega_1}=\int f\, d\mu_{\omega_0}$

(Intégr., chap. V), ce qui montre que la définition de $\int\omega$ est indépendante de la forme $\omega_0 > 0$ choisie. Il est clair que les formes $\omega$ de degré n intégrables sur V forment un [redacted] espace vectoriel sur R et que $\omega \to \int \omega$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel, positive pour les formes $\omega$ telles que $\omega(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in V$.

On dira que $\omega = f.\omega_0$ est mesurable (resp. localement intégrable, négligeable) si f est mesurable (resp. localement intégrable, négligeable) pour $\mu_{\omega_0}$ ; ces notions ne dépendent pas non plus de la forme $\omega_0 > 0$. Si $\omega$ est localement intégrable, $g.\omega$ est intégrable pour toute fonction mesurable bornée et à support compact. Etant donnée une partie mesurable A de V, on dit que $\omega$ est intégrable sur A si $\varphi_A.\omega$ est intégrable ; le nombre $\int \varphi_A.\omega$ s'appelle intégrale de $\omega$ sur A et se note $\int_A \omega$ ; pour toute forme mesurable $\omega$ et tout ensemble négligeable N, $\omega$ est intégrable sur N et on a $\int_N \omega = 0$. Si $\omega$ est localement intégrable, elle est intégrable sur toute partie mesurable et relativement compacte de V.

Soit $\omega$ une forme localement intégrable, $(U_i)$ un recouvrement ouvert localement fini de V par des ensembles relativement compacts, $(h_i)$ une partition continue de l'unité subordonnée à $(U_i)$ ; pour que $\omega$ soit intégrable, il faut et il suffit que la série de terme général $\int h_i.\omega$ soit absolument convergente, et sa somme est alors $\int \omega$. Si les $U_i$ sont tels qu'il existe une carte $\varphi_i$ de $U_i$ sur une partie ouverte de $R^n$, on aura par définition $\int h_i.\omega = \int_{\varphi_i(U_i)} f_i(z)dv$, si $(h_i.\omega)\circ\overset{-1}{\varphi_i}(z) = f_i(z)dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ ; d'où le calcul de $\int \omega$.

Soit $V_0$ une variété orientable, V une variété orientée ~~ordonnée~~ obtenue en munissant $V_0$ d'une orientation, $-V$ la variété [redacted] orientée opposée à V. Il résulte aussitôt des définitions que si $\omega$ est une forme différentielle de degré n intégrable sur V, elle est intégrable sur $-V$ ; et on a $\int_{-V} \omega = -\int_V \omega$.

4. Bord d'un ensemble ouvert sur une variété.

DÉFINITION 4. - Soient V une variété orientée de dimension n, et U un ensemble

 71

demi espace



ouvert dans V . On dit qu'un point frontière x de U est régulier (par rapport à U) s'il existe une carte $f=(f_1,\ldots,f_n)$ d'un voisinage ouvert M de x dans V sur une partie ouverte de $R^n$ , conservant l'orientation et telle que $U\cap M$ soit l'ensemble des $y\in M$ tels que $f_n(y)>f_n(x)$ . L'ensemble W des points réguliers de la frontière de U est appelée la partie lisse de la frontière de U . Un point non régulier de la frontière de U est dit singulier .

Il résulte aussitôt de cette définition que la partie lisse W de la frontière de U est une sous-variété de V (en général non connexe) de dimension n-1 ; en outre , W est ouvert par rapport à la frontière de U . Nous allons définir sur W une orientation . Pour cela , si a est un point de W , f une carte d'un voisinage M de a dans V avant la propriété énoncée dans la déf.4 , la forme $\omega=df_1\wedge df_2\wedge\ldots\wedge df_{n-1}$ sur $W\cap M$ est alors $\neq 0$ au point a ; on définit une orientation o(a) de l'espace tangent à W au point a par la condition que le covecteur $\omega(a)$ ait le signe de $(-1)^n$ . Il faut évidemment montrer que o(a) ne dépend pas de la carte f satisfaisant aux conditions de la déf.4 . Soit en effet $g=(g_1,\ldots,g_n)$ une seconde carte satisfaisant à ces conditions , et définie dans un voisinage ouvert N de a dans V . Soit P un voisinage ouvert de a contenu dans $M\cap N$, et dont l'image f(P) soit un cube ouvert dans $R^n$ , voisinage d'un point $b=f(a)=(b_1,\ldots,b_n)$ . Il existe des fonctions $F_i(z_1,\ldots,z_n)$ de classe $C^\infty$ sur $R^n$ $(1\leq i\leq n)$ telles que , dans P , on ait $g_i(x)=F_i(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ ; posons $D(z)=\dfrac{\mathcal{D}(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{\mathcal{D}(z_1,z_2,\ldots,z_n)}$ $D_1(z)=\dfrac{\mathcal{D}(F_1,F_2,\ldots,F_{n-1})}{\mathcal{D}(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1})}$ . Sur P , on a $dg_1\wedge dg_2\wedge\ldots\wedge dg_n=D(f(x))df_1\wedge df_2\wedge\ldots\wedge df_n$ ; on a donc $D(f(a))>0$ puisque par hypothèse f et g préservent l'orientation ;d'autre part , la restriction de $dg_1\wedge dg_2\wedge\ldots\wedge dg_{n-1}$ à $W\cap P$ coïncide avec celle de $D_1(f(x))df_1\wedge df_2\wedge\ldots\wedge df_{n-1}$ . Tout revient donc à prouver que $D_1(f(a))>0$ . Or , les fonctions $f_n$ et $g_n$ sont constantes dans $W\cap P$ , d'où $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial F_n}{\partial z_i}df_i(x)=0$ pour tout $x\in W\cap P$ , et comme les formes différentielles $df_i$ $(1\leq i\leq n-1)$ sont linéairement indépendantes , on a nécessairement $\frac{\partial F_n}{\partial z_i}(b_1,\ldots,b_n)=0$ pour $1\leq i\leq n-1$ . D'autre part , pour t réel assez voisin de $b_n$ , soit $u_t$ le point de P tel que $f_i(u_t)=b_i$ pour $1\leq i\leq n-1$ , $f_n(u_t)=t$ ; l'hypothèse entraîne que si $t-b_n>0$ , on a $u_t\in U$ , et par suite $g_n(u_t)>g_n(a)$ , c'est-à-dire

$$F_n(b_1,\dots,b_{n-1},t)>F_n(b_1,\dots,b_{n-1},b_n) .$$

On en conclut que $\frac{\partial F_n}{\partial z_n}(b_1,\dots,b_n)\geq 0$ . Des remarques précédentes , il suit qu'on a alors $D(b_1,\dots,b_n)=D_1(b_1,\dots,b_n)\frac{\partial F_n}{\partial z_n}(b_1,\dots,b_n)>0$ , d'où on déduit que $D_1(b_1,\dots,b_n)>0$ .

Avec les mêmes notations , il est clair que la forme $(-1)^n\omega(x)$ appartient à $o(x)$ pour tout $x\in M\cap W$ , et par suite $x\to o(x)$ est bien une <u>orientation</u> sur W . La variété W ainsi orientée est appelée le <u>bord</u> pièce de U , et se désigne par bU .

<u>5 . La formule de Stokes</u> .

c'est un lemme

PROPOSITION 2 .- <u>Soit $\zeta$ une forme différentielle de degré</u> n-1 <u>et de classe</u> $C^1$ <u>sur une variété orientée</u> V <u>de dimension n . Si $\zeta$ a un support compact , on a</u> $\int d\zeta=0$ .

Soit $(U_i)$ un recouvrement ouvert localement fini de V , tel qu'il existe pour chaque indice i une carte $\varphi_i$ de $U_i$ sur un ensemble ouvert relativement compact de $R^n$ , et soit $(h_i)$ une partition de l'unité de classe $C^\infty$ subordonnée au recouvrement $(U_i)$ . Comme $h_i.\zeta$ est nulle sauf pour un nombre fini d'indices , on a $d\zeta=d(\sum_i h_i.\zeta)=\sum_i d(h_i.\zeta)$ . Si on pose $\zeta_i=(h_i.\zeta)\circ\varphi_i^{-1}$ , $\zeta_i$ est une forme de classe $C^1$ et de degré n-1 à support compact dans $R^n$ , et on a $d\zeta_i=(d(h_i.\zeta))\circ\varphi_i^{-1}$ , d'où $\int_{R^n}d\zeta_i=\int_V d(h_i.\zeta)$ . Il suffit par suite de démontrer la prop.2 lorsque $V=R^n$ .

On peut alors écrire $\zeta=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}g_i.dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n$ , les fonctions $g_i$ étant de classe $C^1$ dans $R^n$ , et on a alors $d\zeta=(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_i})dx_1\wedge dx_2\wedge\dots\wedge dx_n$ . En outre , chacune des fonctions $g_i$ a par hypothèse un support compact , et il existe donc un cube $-a\leq z_i\leq a$ $(1\leq i\leq n)$ tel que les $g_i$ soient toutes nulles à l'extérieur d'un cube concentrique de coté a . On a par définition $\int d\zeta=$

73

La démonstration de la prop. 2 est contenue dans les calculs faits dans le th. !

Essayez de ne faire qu'un seul calcul.

Pas de lemme

Le théorème, la prop. 2 comme corollaire.

$=\int\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)dv$ . Mais d'après le th. de Lebesgue-Fubini , on peut écrire

$$\int_{R^n}\frac{\partial g_i}{\partial z_i}dv=\int\cdots\int_{R^{n-1}}dz_1\cdots dz_{i-1}dz_{i+1}\cdots dz_n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial g_i}{\partial z_i}dz_i$$

et comme $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial g_i}{\partial z_i}dz_i=\int_{-a}^{a}\frac{\partial g_i}{\partial z_i}dz_i=g_i(z_1,\ldots,z_{i-1},a,z_{i+1},\ldots,z_n)-g_i(z_1,\ldots,z_{i-1},-a,z_{i+1},\ldots,z_n)=0$

en vertu de l'hypothèse , on a $\int d\xi=0$ .

La conclusion de la prop.2 n'est plus exacte si le support de $\xi$ n'est pas compact : si f est une fonction continue et intégrable dans R , on n'a pas nécessairement $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=0$ .

THÉORÈME 1 .- Soient V une variété orientée de dimension n , U un ensemble ouvert dans V , $\xi$ une forme différentielle de degré n-1 et de classe $C^1$ dans V . Si l'intersection de $\overline{U}$ et du support de $\xi$ est compacte et ne contient aucun point singulier de la frontière de U , on a

$$(1)\qquad \int_U d\xi=\int_{bU}\xi .$$

(formule de Stokes) .

Par hypothèse , on peut recouvrir un voisinage compact T de l'intersection de $\overline{U}$ et du support de $\xi$ par un nombre fini d'ensembles ouverts relativement compact $M_j$ ayant les propriétés suivantes : ou bien $\overline{M}_j$ est contenu dans U , ou bien $M_j$ contient un point régulier $a_j$ de la frontière de U , et il y a une carte $f_j=(f_{1j},\ldots,f_{nj})$ de $M_j$ sur le cube C : $-1\leq z_i\leq 1$ $(1\leq i\leq n)$ préservant l'orientation et telle que $U\cap M_j$ soit l'ensemble des $x\in M_j$ tels que $f_{nj}(x)>0$ . Soit $(h_j)$ une partition de l'unité de classe $C^\infty$ subordonnée au recouvrement formé des $M_j$ et de $\complement T$ . On peut écrire $\int_U d\xi=\sum_j\int_U d(h_j.\xi)$ ; d'autre part , la restriction de $\xi$ à bU est la somme des restrictions des formes $h_j.\xi$ . Tout revient donc à démontrer la formule (1) quand le support de $\xi$ est contenu dans l'un des $M_j$ , que nous désignerons par M . Si $M\subset U$ , on a $\int_U d\xi=\int_V d\xi=0$ en vertu de la prop.2 . Si M contient un point a (noté $a_j$ ci-dessus) de bU , nous écrirons $f=(f_1,\ldots,f_n)$ la carte correspondante (notée $f_j$ ci-dessus) , et nous pouvons supposer que

$f_i(a)=0$ pour $1\leq i\leq n$ . On peut écrire

$$\xi\circ f^{-1}=\sum_{i=1}^{n} g_i \cdot dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n$$

où les $g_i$ sont des fonctions de classe $C^1$ dans $R^n$ , dont le support est contenu dans C ; on a donc

$$d(\xi\circ f^{-1})=\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\Big)dx_1\wedge dx_2\wedge\dots\wedge dx_n$$

d'où , puisque f préserve l'orientation

(2) $$\int_U d\xi=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_P \frac{\partial g_i}{\partial x_i}\,dv_n$$

($dv_n$ mesure de Lebesgue sur $R^n$ , P étant le pavé intersection de C et du demi-espace $x_n>0$) . D'autre part , la restriction $\bar{f}$ de f à $(bU)\cap M$ est une carte de cet ensemble sur l'intersection C' de C et de l'hyperplan $x_n=0$ (que nous identifierons à $R^{n-1}$) ; en vertu de la définition de l'orientation de bU (n°4) , l'image par $\bar{f}$ d'une forme $>0$ de degré n-1 sur bU a le signe de $(-1)^n$ sur $R^{n-1}$ . Si $\bar{\xi}$ est la restriction de $\xi$ à bU , on a

$$\bar{\xi}\circ\bar{f}^{-1}=g_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)dx_1\wedge dx_2\wedge\dots\wedge dx_{n-1}$$

et par suite

(3) $$\int_{bU}\xi=(-1)^n\int_{C'} g_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)dv_{n-1}$$

($dv_{n-1}$ mesure de Lebesgue sur $R^{n-1}$). Pour établir la formule (1) , il suffit donc de démontrer les formules

(4) $$\int_P \frac{\partial g_i}{\partial x_i}\,dv_n=0 \qquad \text{pour } 1\leq i\leq n-1$$

(5) $$\int_P \frac{\partial g_n}{\partial x_n}\,dv_n=-\int_{C'} g_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)dv_{n-1} .$$

Or , en vertu du th. de Lebesgue-Fubini , pour $1\leq i\leq n-1$

$$\int_P \frac{\partial g_i}{\partial x_i}\,dv_n=\int_0^{\delta} dy\int_{C'}\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_{n-1},y)dv_{n-1}$$

Mais la forme différentielle $\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_{n-1},y)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{n-1}$ est , au signe près , le cobord de la forme différentielle de degré n-2

$$g_i(x_1,\dots,x_{n-1},y)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_{n-1}$$

dont le support est contenu dans une partie compacte de C'. En vertu de la prop. 2 , on a $\int_{C'}\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_{n-1},y)dv_{n-1}=0$ , d'où la formule (4) .

Expliquer ça par un recours à l'introduction des cercles lisses :

$$\int_V d\omega + \lim_n \int_V du_n \wedge \omega = 0$$

V est diff. négl. si c'est compact (!!)

(prendre $u_n = 0$)

mettre "négligeable" dans la déf.

En somme, on s'approche de la fonction caract.

Le th. de Lebesgue-Fubini montre d'autre part que

$$\int_P \frac{\partial g_n}{\partial x_n} dv_n = \int_{C'} dv_{n-1} \int_0^1 \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x_1,\dots,x_{n-1},y)\,dy = -\int_{C'} g_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)\,dv_{n-1}$$

puisque $g_n(x_1,\dots,x_{n-1},1)=0$ par hvpothèse . La formule (5) est donc démontrée , et par suite aussi le th.1 .

Nous allons maintenant montrer qu'on peut étendre le th.1 à des cas plus généraux .

pourquoi $\omega_0$ ?

Soit $\omega_0$ une forme différentielle $\geq 0$ de degré n et de classe $C^\infty$ sur V ; pour toute forme différentielle de degré n $\omega = g.\omega_0$ intégrable sur V, nous désignerons par $\|\omega\|$ la norme de la mesure $g.\mu_{\omega_0}$ ; on voit aussitôt que cette définition est indépendante de la forme $\omega_0 > 0$ choisie . Cela étant , nous dirons qu'une partie compacte E de V est <u>différentiellement négligeable</u> s'il existe une suite $(u_k)$ de fonctions de classe $C^1$ sur V , possédant les propriétés suivantes :

a) <u>chaque fonction</u> $u_k$ <u>prend ses valeurs dans</u> $[0,1]$ , <u>et est égale à 0 dans un voisinage de</u> E ; <u>en outre , pour tout voisinage</u> M <u>de</u> E , <u>il existe</u> $k_0$ <u>tel que pour</u> $k \geq k_0$ , $u_k$ <u>soit égale à 1 dans</u> $\complement M$ ;

b) <u>pour toute forme différentielle continue</u> $\xi$ <u>de degré n-1 sur</u> V , <u>on a</u> $\lim_{k\to\infty} \|(du_k)\wedge\xi\| = 0$ (relation qui a un sens , car $(du_k)\wedge\xi$ a un support compact d'après a) dès que k est assez grand) .

Une suite $(u_k)$ ayant les propriétés précédentes sera dite <u>suite d'approche</u> de l'ensemble différentiellement négligeable E .

THÉORÈME 2 .- <u>Soient</u> V <u>une variété orientée de dimension</u> n , U <u>un ensemble ouvert dans</u> V . <u>Soit</u> $\xi$ <u>une forme différentielle de degré n-1 et de classe</u> $C^1$ <u>dans</u> V , <u>satisfaisant aux conditions suivantes</u> :

a) <u>l'intersection du support de</u> $\xi$ <u>et de</u> $\bar{U}$ <u>est compacte , et l'intersection du support de</u> $\xi$ <u>et de la partie non lisse de la frontière de</u> U <u>est différentiellement négligeable</u> ;

~~à la partie lisse~~ du

b) <u>la restriction de</u> $\xi$ <u>au bord</u> bU <u>de</u> U <u>est intégrable</u> .

lisse

Le th. de Lebesgue-Fubini montre d'autre part que

[illegible]

puisque [illegible] la formule (1) est donc démontrée, et par suite aussi le th.

Nous allons maintenant [illegible]

[illegible]

Pb : une partie d'un diff. négl. est elle diff. négl. ?
(ça utilise le fait qu'un diff. négl. est de volume nul)
On espère que c'est vrai
la démonstration naturelle a l'air de marcher.

Pb pour la réunion dénombrable (essayer
d'arranger la prop. 3)

[illegible]

Définition 2. — Soient [illegible] U un ensemble ouvert dans V. Soit $\xi$ une forme différentielle de degré $n-1$ et de classe $C^1$ dans V, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) L'intersection du support de $\xi$ et de U est compacte ; et l'intersection du support de $\xi$ et de la partie non lisse de la frontière de U est différentiellement négligeable ;

b) La restriction de $\xi$ au bord $\partial U$ de U est intégrable

On a alors la formule (1).

Soit en effet $(u_k)$ une suite d'approche pour E ; pour chaque indice k, l'intersection de $\bar{U}$ et du support de $u_k \xi$ ne contient par hypothèse aucun point singulier de la frontière de U, et par suite on a, en vertu du th. 1

$$\int_U d(u_k \cdot \xi) = \int_{bU} u_k \cdot \xi \quad .$$

Or $d(u_k \xi) = (du_k) \wedge \xi + u_k \cdot d\xi$. Comme $\lim\limits_{k\to\infty} \|(du_k)\wedge\xi\| = 0$ par hypothèse, on a $\left|\int_U (du_k)\wedge\xi\right| = \left|\int \varphi_U \cdot ((du_k)\wedge\xi)\right| \leqslant \|(du_k)\wedge\xi\|$, et par suite $\lim\limits_{k\to\infty} \int_U (du_k)\wedge\xi = 0$.
D'autre part $d\xi$ est intégrable sur U et les fonctions $u_k$ sont bornées dans leur ensemble ; comme $u_k$ tend vers 1 en tout point de U, il résulte du th. de Lebesgue que $\lim\limits_{k\to\infty} \int_U u_k \cdot d\xi = \int_U d\xi$. Enfin, $u_k(x)$ tend aussi vers 1 en tout point de bU : comme la restriction de $\xi$ à bU est intégrable par hypothèse, on a encore, en vertu du th. de Lebesgue, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{bU} u_k \xi = \int_{bU} \xi$, ce qui démontre le théorème.

6. Propriétés des ensembles différentiellement négligeables.

Le th. 2 n'est utile que si on possède des critères d'application commode permettant de reconnaître qu'un ensemble est différentiellement négligeable ; nous allons établir de tels critères.

PROPOSITION 3. – Si E et E' sont deux ensembles compacts différentiellement négligeables, $E \cup E'$ est différentiellement négligeable.

Soient $(u'_k)$ et $(u''_k)$ des suites d'approche pour E et E' ; il suffit de prouver que les $u_k = u'_k u''_k$ forment une suite d'approche pour $E \cup E'$. Il est clair que toute fonction $u_k$ est nulle dans un voisinage de $E \cup E'$ ; d'autre part, si, pour un voisinage M de $E \cup E'$, on a $u'_k = 1$ dans $\complement M$ pour $k \geqslant k_1$ et $u''_k = 1$ dans $\complement M$ pour $k \geqslant k_2$, on aura $u_k = 1$ dans $\complement M$ pour $k \geqslant \max(k_1, k_2)$. Enfin, si $\xi$ est une forme différentielle continue de degré n-1 sur V, on a

$$(du_k)\wedge\xi = u'_k \cdot (du''_k)\wedge\xi + u''_k \cdot (du'_k)\wedge\xi$$

et comme $|u'_k| \leqslant 1$ et $|u''_k| \leqslant 1$, on a $\|(du_k)\wedge\xi\| \leqslant \|(du'_k)\wedge\xi\| + \|(du''_k)\wedge\xi\|$, d'où

$\lim_{k\to\infty} \| (du_k) \wedge \zeta \| = 0$ .

Par transport de structure , il est clair que si $\varphi$ est un isomorphisme de V su une variété orientée V' , pour que E soit différentiablement négligeable dans V il faut et il suffit que $\varphi(E)$ soit différentiellement négligeable dans V' . En vertu de cette remarque et de la prop.3 , il suffit (en recouvrant E par un nombre fini d'ensembles ouverts admettant une carte sur une partie relativement compacte de $R^n$) d'obtenir des conditions pour qu'une partie compacte de $R^n$ soit différentiellement négligeable . Une telle condition est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 4 .- <u>Soit</u> E <u>une partie compacte de</u> $R^n$ <u>et</u> , <u>pour tout</u> $\rho>0$, <u>soit</u> $B_\rho(E)$ <u>l'ensemble des points de</u> $R^n$ <u>dont la distance à</u> E <u>soit</u> $\leq\rho$. <u>Si on a</u> $\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho} v(B_\rho(E))=0$ (v mesure de Lebesgue dans $R^n$) , E <u>est différentiellement négligeable</u> .

( c'est la dimension de Hausdorff )

En effet , soit $(u_i)$ une partition de l'unité satisfaisant aux conditions de la prop.3 du § 2 . Pour tout nombre $\rho>0$ , soit $f_\rho$ la somme des $u_i$ dont les supports ne rencontrent pas $B_\rho(E)$ ; avec les notations de la prop.2 du § 2 , le support de $u_i$ ne peut rencontrer $B_\rho(E)$ que si $d(a_i,E)\leq\rho/(1-h)$ , et pour un tel indice i , on a donc $u_i(x)=0$ pour $d(x,E)>\frac{1+h}{1-h}\rho$ ; cette dernière condition entraîne donc $f_\rho(x)=1$ . D'autre part (toujours avec les mêmes notations) , on a $\left|\frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}\right|\leq NC_1/\rho$ en vertu de la prop.3 du § 2 pour $1\leq i\leq n$ , et en tout point de $B_\rho(E)$ ; en outre , ces dérivées partielles sont nulles hors de $B_\rho(E)$ . Soit alors $\zeta=\sum_{i=1}^{n} g_i dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n$ une forme différentielle continue de degré n-1 dans $R^n$ ; pour toute fonction continue h à support compact et telle que $|h|\leq 1$ , on a $\left|\int h.(df_\rho)\wedge\zeta\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int g_i\frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} h\, dv\right| \leq naNC_1\left(\frac{1}{\rho}v(B_\rho(E))\right)$ , si a est une borne supérieure des $|g_i|$ dans $B_1(E)$ . La condition de l'énoncé de la prop. 4 entraîne donc que $(f_{1/k})$ est une suite d'approche pour E .

COROLLAIRE .- <u>Dans une variété</u> V <u>de dimension</u> n , <u>toute partie compacte</u> E <u>d'une</u>

sous-variété $W$ de $V$ de dimension $\leqslant n-2$ est différentiellement négligeable .

Au moyen de la prop.3 et d'un recouvrement de $E$ par un nombre fini d'ensembles ouverts $U_i$ pour lesquels il existe des cartes sur $R^n$ transformant $W \cap U_i$ en variétés linéaires affines de dimension $\leqslant n-2$ , on peut se borner au cas où $V=R^n$, $W=R^{n-2}$ . Avec les notations de la prop.4 , si $E$ est contenu dans un cube de $R^{n-2}$ de coté $a$ , $B_\rho(E)$ est contenu dans le produit d'un disque fermé de rayon $\rho$ dans $R^2$ et du cube de même centre et de coté $2a$ dès que $\rho < a$ , donc on a $v(B_\rho(E)) \leqslant b.\rho^2$ ($b$ constante indépendante de $\rho$ ) dès que $\rho$ est assez petit , et le critère de la prop.4 s'applique .

2 On notera que la seconde condition de l'énoncé du th.2 n'est pas une conséquence de la première .

Exemple : prendre dans le plan un domaine $U$ limité par deux branches de spirale ayant $O$ comme point asymptote et de longueur infinie . Le seul point singulier de la frontière de $U$ est l'origine , mais la forme $\zeta=dx$ n'est pas intégrable sur le bord de $U$ , et la formule (1) n'a donc pas de sens .

La seconde condition du th.2 sera certainement vérifiée si la frontière de $U$ est contenue dans la réunion d'un nombre fini de sous-variétés $W_i$ ($1 \leqslant i \leqslant m$) de dimension $n-1$ ; en effet , $W_i \cap (bU)$ est alors un ensemble dont l'intersection avec le support de $\zeta$ est relativement compact dans $W_i$ , et comme $\zeta$ est de classe $C^1$ , elle est intégrable dans cet ensemble , donc dans $bU$ , qui est par hypothèse réunion des $W_i \cap (bU)$ . On voit donc que les conditions d'application du th.2 seront remplies si les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :

1° l'intersection de $\bar{U}$ et du support de $\zeta$ est compacte , et la frontière de $U$ est contenue dans la réunion d'un nombre fini de sous-variétés $W_i$ de $V$ de dimension $n-1$ ;

2° la partie non lisse de la frontière de $U$ est contenue dans la réunion d'un

<u>nombre fini de sous-variétés de dimension</u> $\leqslant n-2$ .

Par exemple , ces hypothèses sont vérifiées lorsque , dans $R^n$ , la frontière de U est contenue dans la réunion d'un nombre fini d'<u>hyperplans</u> $H_i$ (c'est-à-dire (<u>Top.géom.</u>, chap. , § ) quand U est un <u>polyèdre</u>). En effet , il est facile de voir alors que tout point de $\bar{U}$ qui appartient à un seul des $H_i$ est régulier ; donc la partie non lisse de la frontière de U est contenue dans la réunion des intersections $H_i \cap H_j$ $(i \neq j)$ , qui sont de dimension n-2.//

---

Faire aussi Stokes pour
les simplexes (et cubes) différentiables
(prolonger un peu par Whitney)

Essayer d'aller plus loin : intégrer sur des gens pas
de dimension maximum...

Aussi : sorite d'intégration sur un produit
sur un fibré

avec orientation du bord sur un produit

"Est ce que tu me laisses t'enculer ?" (Schw. à H.C)