RÉDACTION N° 162

COTE : NBR 064

TITRE : LIVRE VII
DIFFÉRENTIELLES ET VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES
CHAPITRE I (ÉTAT 3) : DIFFÉRENTIELLES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 104

NOMBRE DE FEUILLES : 104

LIVRE VII

DIFFÉRENTIELLES ET VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES.

CHAPITRE I (Etat 3)

DIFFÉRENTIELLES

Sommaire

LIVRE VII
DIFFÉRENTIELLES ET VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES
CHAPITRE I (Etat 3)
DIFFÉRENTIELLES.

§ 1. Différentielle première.

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies dans une partie d'un espace de Banach réel (resp. complexe) et prennent leurs valeurs dans un espace de Banach réel (resp. complexe) ; lorsque nous ne préciserons pas le corps des scalaires des espaces considérés, il sera sous-entendu que les résultats énoncés sont valables aussi bien pour les espaces de Banach réels que pour les espaces de Banach complexes. La norme d'un vecteur x dans un espace de Banach sera toujours désignée par $\|x\|$.

1. Fonctions tangentes.

DÉFINITION 1.- *Soient E et F deux espaces de Banach, f et g deux applications d'une partie ouverte A de E dans F . En un point $x_0 \in A$ on dit que f et g sont tangentes si $f(x)-g(x)=o(x-x_0)$ au voisinage de x_0*

On sait que cette définition ne fait intervenir que les *topologies* de E et de F , et non les *normes* qui servent à les définir (*Fonct.var. réelle*, chap.V, §1).

La relation "f et g sont tangentes au point x_0" est une *relation d'équivalence* dans l'ensemble des applications de A dans F , en raison de l'inégalité $\|f_1(x)-f_2(x)\| \leq \|f_1(x)-g(x)\| + \|f_2(x)-g(x)$.

Dans une même classe de fonctions tangentes, il y a *au plus une fonction linéaire affine* : en effet, si deux fonctions linéaires affines sont tangentes, leur différence est une fonction linéaire homogène $u(x-x_0)$ négligeable devant $\|x-x_0\|$. Or, cela n'est possible que si $u=0$, car si, pour tout $\epsilon>0$, il existe $r>0$ tel que la relation $\|z\| \leq r$ entraîne $\|u(z)\| \leq \epsilon\|z\|$, cette relation est encore valable (par homogénéité) pour tout $z \in E$, et par suite, comme ε est arbitraire, $u(z)=0$ pour tout $z \in E$.

2. Fonctions différentiables.

DÉFINITION 2.- Soient E et F deux espaces de Banach, A une partie ouverte de E, f une application continue de A dans F. On dit que f est différentiable au point $x_0 \in A$ lorsqu'il existe une application linéaire affine de E dans F tangente au point x_0 à la fonction f.

Si f est différentiable au point x_0, l'application linéaire affine de E dans F tangente à f en ce point est unique, d'après ce qu'on a vu ci-dessus ; elle s'écrit d'une seule manière $h \to f(x_0)+u(h)$, où u est une application linéaire homogène de E dans F, tangente au point x_0 à la fonction $x \to f(x)-f(x_0)$.

DÉFINITION 3.- Si f est différentiable en un point $x_0 \in A$, l'application linéaire homogène de E dans F, tangente à $f(x)-f(x_0)$ au point x_0, s'appelle dérivée (ou dérivée totale ou différentielle, ou différentielle totale) de f par rapport à x au point x_0 et se note $f'(x_0)$ ou $df(x_0)$; la valeur pour un vecteur $h \in E$ de cette application linéaire se note $f'(x_0)\cdot h$ (ou $f'(x_0)h$ si cette notation ne crée pas de confusion).

Lorsque F est le corps des scalaires, on écrit $\mathrm{df}(x_0)$ au lieu de $df(x_0)$.

La dérivée $f'(x_0)$ est donc caractérisée par la relation

$$f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot h=o(h) \quad (1)$$

PROPOSITION 1.- L'application linéaire homogène $h \to f'(x_0)\cdot h$ de E dans F est continue.

En effet, il résulte de (1) que cette fonction est continue au point $h=0$, donc dans E tout entier.

La dérivée $f'(x_0)$ est donc un élément de <u>l'espace</u> $\mathcal{L}(E,F)$ <u>des applications linéaires continues de</u> E <u>dans</u> F ; on sait (Top.gén., chap.X, § 2) que cet espace est muni d'une structure d'<u>espace de Banach</u>, la <u>norme</u> $\|u\|$ d'une application linéaire continue u de E dans F étant définie par la relation $\|u\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \|u(h)\|$; quand nous parlerons de la norme $\|f'(x_0)\|$ de la dérivée de f au point x_0, c'est toujours de la norme définie par la relation précédente qu'il s'agira.

Bien entendu, si on remplace les normes dans E et F par des normes équivalentes, la norme dans $\mathcal{L}(E,F)$ est remplacée par une norme équivalente.

Supposons que f soit différentiable au point x_0 ; pour qu'une fonction g définie et continue dans un voisinage de x_0 et telle que $g(x_0)=f(x_0)$ soit tangente à f au point x_0, il faut et il suffit évidemment qu'elle soit différentiable au point x_0 et qu'on ait $g'(x_0)=f'(x_0)$.

En particulier, si deux fonctions <u>coïncident</u> dans un voisinage d'un point x_0, et si l'une d'elles est différentiable en ce point, il en est de même de l'autre et les dérivées sont égales ; autrement dit, la notion de dérivée a un caractère <u>local</u>.

<u>Exemples</u>.- 1) Prenons pour E le corps des scalaires ($\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) ; toute application linéaire continue de E dans un espace normé F est alors de la forme $x \to a x$, où a est un vecteur appartenant à F ; en outre, si φ_a désigne cette application, on a $\|\varphi_a\| = \sup_{|x| \leq 1} \|a x\| = \|a\|$. L'application $a \to \varphi_a$ est donc dans ce cas une isométrie de l'espace de Banach F sur l'espace de Banach $\mathcal{L}(E,F)$, et on peut identifier ce dernier à F par cette isométrie ; pour tout scalaire $h \in E$, le produit $a.h$ est alors simplement le produit du vecteur $a \in F$ par le scalaire h pour la loi externe de l'espace vectoriel F. Cette identification étant supposée faite,

la relation (1) montre que, pour qu'une fonction f, définie et continue dans un voisinage d'un point x_0 du corps des scalaires, soit différentiable en ce point, il faut et il suffit qu'elle soit <u>dérivable</u> en ce point ; au sens défini dans <u>Fonct.var.réelle</u>, chap.I, § 1 ; en outre, la dérivée $f'(x_0)$ (au sens de la déf.3 ci-dessus) est identifiée au vecteur de F qui a été désigné par la même notation <u>loc.cit.</u>. Ceci justifie la notation et la terminologie générales introduites dans la déf.3.

2) Une application <u>constante</u> d'une partie ouverte A de E dans F est différentiable en tout point $x_0 \in A$, et sa dérivée est <u>nulle</u> en tous ces points.

3) Soit u une application <u>linéaire affine</u> continue de E dans F ; on peut écrire $u(x) = b + v(x)$, où v est une application linéaire homogène de E dans F et $b = u(0)$; on en déduit que, quels que soient x_0 et h dans E, on a $u(x_0+h) - u(x_0) = v(h)$, donc u est différentiable en tout point $x_0 \in E$, et on a $u'(x_0).h = v(h)$.

En particulier, soit e l'application identique de E sur lui-même. On a $e'(x_0).h = h$ pour tout $x_0 \in E$; en d'autres termes, $e'(x_0)$ est l'application identique de E sur lui-même.

Comme autre cas particulier, considérons l'application linéaire continue $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 + x_2$ de l'espace produit $E \times E$ dans E ; sa dérivée est l'application $(h_1, h_2) \rightarrow h_1 + h_2$.

4) Soient E_1, E_2, F trois espaces de Banach, et considérons une <u>application bilinéaire continue</u> de $E_1 \times E_2$ dans F, dont nous désignerons la valeur au point (x_1, x_2) par $[x_1 . x_2]$. On a
$[(x_1+h_1).(x_2+h_2)] - [x_1 . x_2] - [h_1 . x_2] - [x_1 . h_2] = [h_1 . h_2]$; comme $(x_1, x_2) \rightarrow [x_1 . x_2]$ est continue, il existe un nombre $a \geqslant 0$ tel que

$\|[x_1 . x_2]\| \leq a\|x_1\| . \|x_2\|$, donc $\|[h_1 . h_2]\| \leq a.(\sup(\|h_1\|, \|h_2\|))^2 = \underline{o}\,(\sup(\|h_1\|, \|h_2\|))$; on voit donc que l'application bilinéaire continue $(x_1, x_2) \rightarrow [x_1 . x_2]$ est différentiable en tout point (a_1, a_2) et admet comme dérivée en ce point l'application linéaire

$$(h_1, h_2) \rightarrow [h_1 . a_2] + [a_1 . h_2] .$$

En particulier, si E est un espace de Banach, $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ est une application bilinéaire continue de $\mathbb{R} \times E$ dans E , et elle a comme dérivée l'application

$$(\xi, h) \rightarrow \xi x + \lambda h .$$

De même, si E est une <u>algèbre normée complète</u> sur $\mathbb{R}$, l'application bilinéaire $(x, y) \rightarrow xy$ de $E \times E$ dans E est continue, donc a pour dérivée l'application linéaire $(h, k) \rightarrow hy + xk$.

5) Soit E une <u>algèbre normée complète</u> sur $\mathbb{R}$ ayant un élément unité noté 1 ; on sait alors (<u>Top.gén.</u>, chap.IX, §3,n°7) que l'ensemble des $x \in E$ qui sont inversibles est ouvert (et non vide), et que l'application $x \rightarrow x^{-1}$ de A dans E est continue. Montrons que cette application est <u>différentiable</u> en tout point $x_0 \in A$. En effet, on a $(x_0 + h)^{-1} - x_0^{-1} = x_0^{-1}((1 + hx_0^{-1})^{-1} - 1)$, et on sait (<u>loc.cit.</u>) que pour tout $y \in E$ assez petit, on a

$$\|(1+y)^{-1} - 1 + y\| \leq \|y\|^2/(1 - \|y\|) \quad ;$$

on a donc

$$\|(x_0 + h)^{-1} - x_0^{-1} + x_0^{-1} h x_0^{-1}\| \leq \|x_0^{-1}\|^3 . \|h\|^2/(1 - \|h\| . \|x_0^{-1}\|) = \underline{o}(\|h\|)$$

ce qui montre que la différentielle de $x \rightarrow x^{-1}$ au point x_0 est $h \rightarrow -x_0^{-1} h x_0^{-1}$.

Ce raisonnement s'applique en particulier lorsque $E = \mathcal{L}(F)$ est l'anneau des endomorphismes d'un espace de Banach F . Plus généralement, si E et F sont deux espaces de Banach isomorphes, et A l'ensemble des isomorphismes de E sur F , A est une partie <u>ouverte</u> de $\mathcal{L}(E,F)$, et l'application $u \to u^{-1}$ (où u^{-1} désigne l'isomorphisme réciproque de u) est une application continue de A dans $\mathcal{L}(E,F)$. En effet, si u_0 est un isomorphisme de E sur F , tout isomorphisme de E sur F peut s'écrire $u_0 \circ v$, où v est un automorphisme de E , et l'application $v \to u_0 \circ v$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{L}(E,F)$ (pour les structures d'espace vectoriel topologique), car cette application est continue, et sa réciproque $w \to u_0^{-1} \circ w$ l'est aussi ; notre assertion résulte donc du fait que $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre normée complète. Cela étant, le raisonnement fait ci-dessus montre encore que l'application $u \to u^{-1}$ est <u>différentiable</u> en tout point $u_0 \in A$, et a pour différentielle l'application linéaire $t \to -u_0^{-1} t u_0^{-1}$.

6) Soit $f = (f_1, \ldots, f_m)$ une application d'une partie ouverte A de E dans un espace de Banach F produit de m espaces de Banach F_k $(1 \leq k \leq m)$; supposons par exemple qu'on ait pris sur F la norme $\|y\| = \sum_{k=1}^{m} \|y_k\|$ pour $y = (y_k)$. Alors, pour que f soit différentiable en un point $x_0 \in A$, il faut et il suffit que chacune des m fonctions f_k le soit, et on a $f'(x_0) = (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0))$ (en identifiant $\mathcal{L}(E,F)$ avec le produit des espaces $\mathcal{L}(E,F_k)$) ; la démonstration résulte aussitôt des définitions.

<u>Remarques</u>.- 1) Toutes les définitions précédentes s'appliquent encore lorsque E et F sont des espaces normés complets sur un <u>corps valué complet commutatif</u> quelconque K . Il en est de même d'un certain nombre des propositions de ce paragraphe ; nous le signalerons au passage.

2) La notion de dérivée est essentiellement relative au corps des scalaires des espaces normés qui interviennent. Si E et F sont deux espaces de Banach sur le corps $\mathbf{C}$, ils sont aussi munis d'une structure d'espace de Banach sur le corps $\mathbf{R}$ (Esp.vect.top.,chap.II, §) ; une application f de E dans F qui est différentiable quand on considère E et F comme des espaces de Banach complexes, l'est à fortiori (et a même dérivée) quand on considère E et F comme des espaces de Banach réels ; mais la réciproque est inexacte, car f peut admettre une dérivée $h \to u(h)$ pour la structure réelle, telle que u ne soit pas linéaire pour la structure complexe (autrement dit, on peut avoir $u(\lambda h) = \lambda u(h)$ pour tout λ réel, mais $u(ih) \neq i\,u(h)$). Par exemple, l'application $z \to \bar{z}$ du corps $\mathbf{C}$ sur lui-même est différentiable pour la structure vectorielle réelle de $\mathbf{C}$, et sa dérivée est l'application $h \to \bar{h}$; mais cette application n'est pas linéaire pour la structure vectorielle complexe. Nous reviendrons plus tard sur cette question.

3) Dans la définition 1, on peut supposer que E est un espace normé (sur un corps valué commutatif K) et F un espace localement convexe sur K ; deux applications f, g d'une partie ouverte A de E dans F sont alors tangentes en un point $x_0 \in A$ si la fonction $(f(x)-g(x))/\|x-x_0\|$ tend vers 0 dans F lorsque x tend vers x_0 en restant $\neq x_0$. Nous laisserons au lecteur le soin d'étendre à ce cas les définitions et propositions concernant les fonctions différentiables.

Lorsqu'une fonction f, définie dans une partie ouverte A de E et prenant ses valeurs dans F, est différentiable en tout point de A, l'application $x \to f'(x)$ (notée aussi $x \to df(x)$) est appelée l'application dérivée de f, ou simplement (par abus de langage) la dérivée (ou la différentielle) de f dans A, et notée f' ou df.

C'est donc une application de A dans $\mathcal{L}(E,F)$.

De façon générale, une application de A dans $\mathcal{L}(E,F)$ est appelée <u>application différentielle</u> à valeurs dans $\mathcal{L}(E,F)$ (ou <u>forme différentielle</u> lorsque F est le corps des scalaires). Une application différentielle de A dans $\mathcal{L}(E,F)$ n'est pas nécessairement la différentielle d'une application de A dans F (cf. § 2).

Z

3. Différentielle d'une fonction composée.

THÉORÈME 1 (théorème des fonctions composées).- <u>Soient</u> E,F,G <u>trois espaces de Banach</u>, u <u>une application continue d'un voisinage</u> A <u>d'un point</u> $x_0 \in E$ <u>dans</u> F , v <u>une application continue d'un voisinage</u> B <u>du point</u> $y_0 = u(x_0)$ <u>de</u> F <u>dans</u> G . <u>Si</u> u <u>est différentiable au point</u> x_0 <u>et</u> v <u>différentiable au point</u> y_0 , <u>la fonction composée</u> $w = v\circ u$ (qui est définie et continue dans un voisinage de x_0) <u>est différentiable au point</u> x_0 , <u>et on a</u>

$$w'(x_0) = v'(u(x_0)) \circ u'(x_0) . \tag{2}$$

En d'autres termes, la dérivée de la fonction composée $w = v\circ u$ au point x_0 est la composée des dérivées de v et de u aux points $y_0 = u(x_0)$ et x_0 respectivement.

On a en effet par hypothèse

$$u(x_0+h) = u(x_0) + u'(x_0)\cdot h + \underline{o}_1(h)$$
$$v(y_0+k) = v(y_0) + v'(y_0)\cdot k + \underline{o}_2(k)$$

d'où

$$w(x_0+h) = v(u(x_0+h)) = v(u(x_0) + u'(x_0)\cdot h + \underline{o}_1(h)) =$$
$$= w(x_0) + v'(y_0)\cdot(u'(x_0)\cdot h) + v'(y_0)\cdot\underline{o}_1(h) + \underline{o}_2(u'(x_0)\cdot h + \underline{o}_1(h))$$

Mais comme $v'(y_0)\cdot k = \underline{O}_2(k)$ et $u'(x_0)\cdot h = \underline{O}_1(h)$ (en raison de la continuité des applications linéaires $u'(x_0)$ et $v'(y_0)$), on a finalement

$$w(x_0+h)=w(x_0)+(v'(y_0)\circ u'(x_0))\cdot h+o_3(h)$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque.- Au lieu de noter $\underline{V}\circ\underline{U}$ l'application composée d'une application $\underline{V}\in\mathcal{L}(F,G)$ et d'une application $\underline{U}\in\mathcal{L}(E,F)$, on l'écrira le plus souvent $\underline{VU}$ (ce qui est déjà la notation adoptée pour les produits de matrices, lorsque E,F et G sont de dimension finie). La formule (2) s'écrit alors

$$w'(x_0)=v'(u(x_0))\,u'(x_0)\,.$$

Avec cette notation, on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.- Si u est une application différentiable d'une partie ouverte $A\subset E$ dans F , v une application différentiable d'une partie ouverte $B\supset u(A)$ de F dans G , $w=v\circ u$ est une application différentiable de A dans G , et on a

$$d(v\circ u)=(v'\circ u)\,du \tag{3}$$

(le second membre est naturellement l'application $x\to v'(u(x))\,du(x)$, l'image de x par cette application ayant la signification indiquée ci-dessus).

Remarques.- 1) On écrit souvent aussi la formule (3) sous la forme

$$d(v(u))=v'(u)\,du\,.$$

2) L'écriture $\underline{VU}$ au lieu de $\underline{V}\circ\underline{U}$ pour le composé d'un élément de $\mathcal{L}(F,G)$ et d'un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ permet d'éviter des confusions dans des cas où (comme dans la formule (3)) on a à considèrer deux applications $x\to\underline{V}(x)$ et $x\to\underline{U}(x)$ d'un espace H dans $\mathcal{L}(F,G)$ et $\mathcal{L}(E,F)$ respectivement, et l'application $x\to\underline{V}(x)\underline{U}(x)$ de H dans $\mathcal{L}(E,G)$, qui n'est naturellement pas la composée des applications précédentes (ce qui en général n'a d'ailleurs pas de sens, puisque H n'est pas identique à $\mathcal{L}(E,F)$).

3) On aura soin de noter que la notation $v'(u(x_0))$ ou $dv(u(x_0))$ désigne la dérivée (ou différentielle) de l'application v au point $u(x_0)$, et <u>non</u> la dérivée au point x_0 de l'application composée $v \circ u$; cette dernière doit s'écrire $(v \circ u)'(x_0)$, ou $d(v \circ u)(x_0)$ si on ne veut pas désigner l'application composée $v \circ u$ par une nouvelle lettre ; mais il est préférable, pour éviter toute confusion, d'introduire une nouvelle lettre pour désigner la fonction $v \circ u$, comme nous l'avons fait dans l'énoncé du th.1 .

COROLLAIRE 2.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach</u>, u <u>et</u> v <u>deux applications continues d'un ensemble ouvert</u> $A \subset E$ dans F . <u>Si</u> u <u>et</u> v <u>sont différentiables dans</u> A , <u>il en est de même de</u> $u+v$ <u>et de</u> λu (quel que soit le scalaire λ) <u>et on a</u>

(4) $$d(u+v) = du + dv$$

(5) $$d(\lambda u) = \lambda\, du .$$

La formule (5) est conséquence immédiate de (3) appliquée au cas où v est l'application $y \to \lambda y$ de F dans lui-même. Pour démontrer (4), il suffit de considérer $u+v$ comme composée de l'application $(x_1, x_2) \to x_1+x_2$ de $F \times F$ dans F , et de l'application $x \to (u(x), v(x))$ de E dans $F \times F$, car cette dernière application a pour dérivée en un point x_0 l'application $h \to (u'(x_0).h, v'(x_0).h)$

COROLLAIRE 3.- <u>Soient</u> E,F,G,H <u>quatre espaces de Banach, et soit</u> $(x, y) \to [x.y]$ <u>une application bilinéaire continue de</u> $F \times G$ <u>dans</u> H . <u>Soient</u> u <u>et</u> v <u>deux applications continues et différentiables d'un ensemble ouvert</u> $A \subset E$ <u>dans</u> F <u>et</u> G <u>respectivement ; alors l'application</u> $[u.v]$ <u>de</u> A <u>dans</u> H <u>est différentiable et on a</u>

(6) $$d[u.v] = [(du).v] + [u.(dv)]$$

Il faut naturellement entendre dans cet énoncé que $[(du).v]$ est l'application de E dans $\mathcal{L}(E,H)$ qui, pour un x_0 quelconque dans E , a pour valeur $h \to [(u'(x_0).h).v(x_0)]$.

Pour démontrer la formule (6), il suffit d'appliquer le th.1 en considérant $[u.v]$ comme composée de l'application $(x_1, x_2) \rightarrow [x_1 . x_2]$ de $F \times G$ dans H et de l'application $x \rightarrow (u(x), v(x))$ de E dans $F \times G$.

PROPOSITION 2.- *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach*, A *une partie ouverte de* E, B *une partie ouverte de* A ; *soit* u *un homéomorphisme de* A *sur* B, *et soit* v *l'homéomorphisme réciproque. Si* u *est différentiable au point* $x_0 \in A$, *et si* $u'(x_0)$ *est un isomorphisme de* E *sur* F, *alors au point* $y_0 = u(x_0)$, v *est différentiable, et* $v'(y_0)$ *est l'isomorphisme de* F *sur* E, *réciproque de* $u'(x_0)$.

Posons en effet, pour tout h assez petit dans E, $u(x_0+h) = y_0 + k$; l'application $h \rightarrow u(x_0+h) - u(x_0)$ est un homéomorphisme d'un voisinage de 0 dans E sur un voisinage de 0 dans F, et $k \rightarrow v(y_0+k) - v(y_0)$ est l'homéomorphisme réciproque. On a par hypothèse $k = u'(x_0).h + \underline{o}_1(h)$; désignons par w l'application linéaire de F sur E réciproque de $u'(x_0)$; on a donc $w(k) = h + w(\underline{o}_1(h))$; comme $w(k) = \underline{O}_1(k)$, on peut supposer h assez petit pour que $\|w(\underline{o}_1(h))\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\|$, et on a alors $\|w(k)\| \geqslant \frac{1}{2}\|h\|$, et par suite $h = \underline{O}_2(k)$ lorsque k tend vers 0 ; on en déduit finalement $h = w(k) + \underline{o}_2(k)$, c'est-à-dire $v(y_0+k) - v(y_0) = w(k) + \underline{o}_2(k)$, ce qui démontre la proposition.

Remarque.- Les propositions de ce n° sont valables lorsque les espaces de Banach (réels ou complexes) qui y figurent sont remplacés par des espaces normés complets sur un corps commutatif valué complet quelconque. Lorsque E et F sont des espaces de Banach réels, nous préciserons plus loin (§ 3) la prop. 2, en montrant que moyennant une condition supplémentaire sur u', le fait que $u'(x_0)$ soit un isomorphisme de E sur F entraîne que u est un homéomorphisme d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0.

4. Fonctions continument différentiables.

THÉORÈME 2 (théorème des accroissements finis).- <u>Soient E et F deux espaces de Banach, f une application continue dans F d'un voisinage du segment joignant deux points x_0, x_0+h de E. Si f est différentiable en tout point de ce segment, on a</u>

$$\| f(x_0+h)-f(x_0)\| \leqslant \|h\| . \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|f'(x_0+th)\| . \tag{7}$$

Considérons en effet la fonction $g(t)=f(x_0+th)$ de la variable réelle t, définie dans l'intervalle $[0,1]$; elle est composée de f et de l'application $t \to x_0+th$ de $[0,1]$ sur le segment fermé d'extrémités x_0 et x_0+h ; d'après le th.1, g est dérivable en tout point de $[0,1]$, et on a $g'(t)=f'(x_0+th).h$. Appliquons à g le théorème des accroissements finis pour les fonctions d'une variable réelle (<u>Fonct.var.réelle</u>, chap.I, § 2) ; il vient

$$\|g(1)-g(0)\| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|g'(t)\|$$

ce qui entraîne la formule (7).

COROLLAIRE 1.- <u>Soit f une application continue d'un domaine A de E dans F. Si f a une dérivée nulle en tout point de A, f est constante dans A.</u>

En effet, soit x_0 un point de A et soit B l'ensemble des points $x \in A$ tels que $f(x)=f(x_0)$; il est clair que B est fermé par rapport à A. D'autre part, le th.2 montre que si $x \in B$, tout point d'une boule ouverte de centre x contenue dans A appartient encore à B, donc B est ouvert et fermé par rapport à A, et par suite identique à A, puisque A est connexe par hypothèse.

COROLLAIRE 2.- <u>Soit f une fonction à valeurs dans F, différentiable en tout point d'un ensemble ouvert A contenant le segment S joignant deux de ses points x_1, x_2 ; alors, pour tout point $x_0 \in A$, on a</u>

(8) $$\|f(x_2)-f(x_1)-f'(x_0).(x_2-x_1)\| \leqslant \|x_2-x_1\| \, . \sup_{x\in S}\|f'(x)-f'(x_0)\|$$

Il suffit en effet d'appliquer le th.2 à la fonction

$$x \longrightarrow (f)-f'(x_0).x$$

qui est différentiable dans A .

COROLLAIRE 3.- Soit (f_n) une suite d'applications différentiables d'un domaine $A \subset E$ dans F . On suppose que : 1° pour un point $x_0 \in A$ la suite $(f_n(x_0))$ est convergente ; 2° la suite (f'_n) converge uniformément dans toute boule contenue dans A , vers une application g de A dans $\mathcal{L}(E,F)$. Dans ces conditions, la suite (f_n) converge uniformément dans toute boule contenue dans A vers une fonction différentiable f , dont la dérivée totale est égale à g.

En effet, soit a un point de A , B une boule de centre a et de rayon r contenue dans A ; pour tout $x \in B$, on a

(8') $$\|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(a)-f_m(a))\| \leqslant \|x-a\| \, . \sup_{z\in B}\|f'_n(z)-f'_m(z)\| \leqslant$$
$$\leqslant r . \sup_{z\in B}\|f'_n(z)-f'_m(z)\|$$

En vertu de l'hypothèse, cela prouve que si la suite $(f_n(x))$ est convergente en un point de B , elle est uniformément convergente dans B . L'ensemble des points de A où la suite $(f_n(x))$ converge est donc à la fois ouvert et fermé, et comme il n'est pas vide, il est identique à A . Reste à montrer que g est la dérivée totale de la limite f de la suite (f_n). Faisant tendre m vers $+\infty$ dans la formule (8'), on voit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que l'on ait $\|g(a)-f'_n(a)\| \leqslant \varepsilon$, et

$$\|f(x)-f(a)-(f_n(x)-f_n(a))\| \leqslant \varepsilon \, \|x-a\|$$

pour tout $x \in B$. Mais il existe $r' > 0$ tel que, pour $\|x-a\| \leqslant r'$, on ait $\|f_n(x)-f_n(a)-f'_n(a).(x-a)\| \leqslant \varepsilon \, \|x-a\|$; on en déduit que, pour $\|x-a\| \leqslant r'$, on a aussi

$$\| (x)-f(a)-g(a)\cdot(x-a)\| \leqslant 3\varepsilon \|x-a\|$$

ce qui achève la démonstration.

DEFINITION 4.- Soit f une application continue d'une partie ouverte A d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F . On dit que f est continûment différentiable dans A si f est différentiable en tout point de A , et si l'application $x \to f'(x)$ de A dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E,F)$ est continue.

Cela signifie donc que pour tout $x_0 \in A$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que la relation $\|x - x_0\| \leqslant r$ (pour $x \in A$) entraîne $\|f'(x) - f'(x_0)\| \leqslant \varepsilon$, ou encore $\|f'(x)\cdot h - f'(x_0)\cdot h\| \leqslant \varepsilon \|h\|$ pour tout $h \in E$.

Le th.1 montre que si f est une application continûment différentiable d'une partie ouverte A de E dans F , et g une application continûment différentiable d'une partie ouverte $B \supset f(A)$ de F dans G , alors la fonction composée $g \circ f$ est continûment différentiable dans A .

PROPOSITION 3.- Soit f une application différentiable d'une partie ouverte A de E dans F . Pour que f soit continûment différentiable dans A , il faut et il suffit que, pour tout point $x_0 \in A$, on ait $f(y)-f(z)-f'(x_0)\cdot(y-z) = o(y-z)$ lorsque le point (y,z) tend vers (x_0, x_0) .

La condition est nécessaire d'après la formule (8) et la déf.4 . Montrons qu'elle est suffisante. Supposons en effet que, pour $\|y-x_0\| \leqslant r$, $\|z-x_0\| \leqslant r$, on ait $\|f(y)-f(z)-f'(x_0)\cdot(y-z)\| \leqslant \varepsilon \|y-z\|$; pour chaque y tel que $\|y-x_0\| \leqslant r$, il existe d'autre part un nombre $r'_y > 0$ tel que pour $\|z-y\| \leqslant r'_y$, on ait $\|f(y)-f(z)-f'(y)\cdot(y-z)\| \leqslant \varepsilon \|y-z\|$; on en déduit que pour tout h tel que

$\|h\| \leqslant \mathrm{Min}(r,r')$, on a $\|f'(x_0)\cdot h - f'(y)\cdot h\| \leqslant 2\varepsilon\|h\|$, ce qui entraîne $\|f'(y)-f'(x_0)\| \leqslant 2\varepsilon$; cette relation ayant lieu pour tout y tel que $\|y-x_0\| \leqslant r$, la proposition est démontrée.

Lorsque f est une fonction d'une variable scalaire, la prop.3 est un cas particulier de la prop.6 de <u>Fonct.var.réelle</u>, chap.I,§2.

5. <u>Différentielles partielles.</u>

Soient E,F,G trois espaces de Banach ; soit A une partie ouverte du produit $E\times F$, et soit f une application continue de A dans G . En un point $(x_0,y_0)\in A$, on dit que f est <u>différentiable par rapport à la première</u> (resp. <u>la seconde</u>) <u>variable</u> si l'application partielle $x\to f(x,y_0)$ (resp. $y\to f(x_0,y)$) est différentiable au point x_0 (resp. y_0) ; la différentielle de cette application partielle, qui est un élément de $\mathcal{L}(E,G)$ (resp. $\mathcal{L}(F,G)$) s'appelle <u>première</u> (resp. <u>seconde</u>) <u>différentielle partielle</u> (ou <u>dérivée partielle</u>) de f et se note $d_1f(x_0,y_0)$ (resp. $d_2f(x_0,y_0)$).

THÉORÈME 3.- <u>Soit</u> f <u>une application continue d'une partie ouverte</u> A <u>de</u> $E\times F$ <u>dans</u> G . <u>Pour que</u> f <u>soit continûment différentiable dans</u> A , <u>il faut et il suffit que</u> f <u>soit différentiable en tout point de</u> A <u>par rapport à chacune des deux variables, et que les deux applications</u> $(x,y)\to d_1f(x,y)$ <u>et</u> $(x,y)\to d_2f(x,y)$ <u>soient continues dans</u> A . <u>On a alors, en tout point</u> $(x,y)\in A$

$$df(x,y)\cdot(h,k)=d_1f(x,y)\cdot h+d_2f(x,y)\cdot k \quad . \tag{9}$$

Montrons d'abord que la condition est <u>nécessaire</u>. Pour tout point $(x_0,y_0)\in A$, l'application partielle $x\to f(x,y_0)$ est composée de f et de l'application linéaire affine $x\to(x,y_0)$ de E dans $E\times F$; donc l'application $x\to f(x,y_0)$ est différentiable au point x_0 et a

 18

pour différentielle en ce point $h \to df(x_0,y_0)\cdot(h,0)$ en vertu du th.1 ; en d'autres termes, c'est la composée de l'application $df(x_0,y_0) \in$ $\in \mathcal{L}(E\times F,G)$, et de l'application (indépendante de (x_0,y_0)) $h \to (h,0)$ de E dans $E\times F$; cette dernière application est un élément constant $\underline{I}_1$ de $\mathcal{L}(E,E\times F)$, et avec les conventions du n°3, on peut écrire $d_1 f(x,y) = df(x,y)\underline{I}_1$. Comme l'application bilinéaire $(\underline{V},\underline{U}) \to \underline{VU}$ de $\mathcal{L}(E\times F,G)\times\mathcal{L}(E,E\times F)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est continue, on voit que $(x,y) \to d_1 f(x,y)$ est continue. On raisonne de même pour l'application $y \to f(x_0,y)$, dont la différentielle est $k \to df(x_0,y_0)\cdot(0,k)$; on a donc $d_2 f(x,y) = df(x,y)\underline{I}_2$, en désignant par $\underline{I}_2$ l'application $k \to (0,k)$, élément constant de $\mathcal{L}(F,E\times F)$. Enfin, comme $(h,k)=(k,0)+(0,k)$, on a bien la formule (9) en tout point.

Montrons maintenant que la condition est <u>suffisante</u>. Pour h et k assez petits (dans E et F respectivement), écrivons

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=(f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0))+$$
$$+(f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)).$$

Comme la fonction partielle $x \to f(x,y_0)$ est différentiable, on a, pour (h,k) tendant vers $(0,0)$,

$$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-d_1 f(x_0,y_0)\cdot h=\underline{o}(h)=\underline{o}_1(h,k)$$

D'autre part (cor.2 du th.2)

$$\|f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-d_2 f(x_0+h,y_0)\cdot k\| \leq$$
$$\leq \|k\| \cdot \sup_{\|z\|\leq\|k\|} \|d_2 f(x_0+h,y_0+z)-d_2 f(x_0+h,y_0)\|$$

Comme l'application $(x,y) \to d_2 f(x,y)$ de $E\times F$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est par hypothèse continue, on a

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-d_2 f(x_0+h,y_0)\cdot k=\underline{o}_2(h,k)$$

Enfin, pour la même raison, on a

$$d_2 f(x_0+h, y_0) - d_2 f(x_0, y_0) = \underline{o}(1)$$

d'où $$d_2 f(x_0+h, y_0)\cdot k - d_2 f(x_0, y_0)\cdot k = \underline{o}_3(h, k)$$

ce qui donne finalement

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - d_1 f(x_0, y_0)\cdot h - d_2 f(x_0, y_0)\cdot k = \underline{o}_4(h, k)$$

et achève ainsi la démonstration du théorème, puisqu'on peut écrire

$$df(x, y) = d_1 f(x, y)\underline{I}_1 + d_2 f(x, y)\underline{I}_2$$

et que le second membre est continu par hypothèse dans A .

Soient maintenant E_i $(1 \leq i \leq n)$ et F n espaces de Banach, A une partie ouverte de $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ et f une application continue de A dans F . En un point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de A , on dira encore que f est différentiable par rapport à la k-ème variable si l'application partielle $x_k \to f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ est différentiable au point a_k , et nous noterons $d_k f(a_1, \ldots, a_n)$ sa différentielle (dite *différentielle* (ou *dérivée*) *partielle de f par rapport à la k-ème variable*). Le th.3 entraîne aussitôt, par récurrence sur n , le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.- *Pour que f soit continûment différentiable dans A , il faut et il suffit que f soit différentiable en tout point de A par rapport à chacune des n variables, et que les n applications $(x_1, \ldots, x_n) \to d_k f(x_1, \ldots, x_n)$ soient continues dans A. On a alors en tout point de A*

$$(10) \qquad df(x_1, \ldots, x_n)\cdot(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{k=1}^{n} d_k f(x_1, \ldots, x_n)\cdot h_k .$$

COROLLAIRE 2.- Soit f une fonction continûment différentiable dans une partie ouverte A de $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, et soit, pour chaque indice k , u_k une application continûment différentiable d'une partie ouverte B d'un espace de Banach H dans E_k , de sorte que $(u_1(z),\ldots,u_n(z)) \in A$ pour tout $z \in B$. Alors la fonction composée $f(u_1,\ldots,u_n)$ est continûment différentiable dans A , et on a

(11) $$df(u_1,u_2,\ldots,u_n) = \sum_{k=1}^{n} d_k f(u_1,u_2,\ldots,u_n)\,du_k$$

(avec la notation du n°3).

Le corollaire résulte en effet aussitôt du th. des fonctions composées et de la formule (10).

6. Dérivées partielles. Matrice jacobienne.

Considérons le cas particulier important où l'espace de Banach E est de dimension finie ; on peut alors l'identifier avec un espace $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). Soit A une partie ouverte de E , f une application continûment différentiable de A dans un espace de Banach F réel (resp. complexe); le th.3 montre que pour tout point $a=(a_i)$ de A , chacune des fonctions partielles $x \rightarrow f(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n)$ est différentiable au point $a_i \in \mathbb{R}$ (resp. $a_i \in \mathbb{C}$) ; la différentielle partielle correspondante est alors identifiée à la dérivée de cette fonction de variable réelle (n°2, exemple 1) élément de F que l'on note encore $D_i f(a_1,\ldots,a_n)$; en outre, les n fonctions $D_i f$ sont des applications continues de A dans F , et la différentielle de f au point a est l'application linéaire $(h_1,h_2,\ldots,h_n) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} D_i f(a_1,\ldots,a_n)h_i$ de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) dans F . Réciproquement, si les n dérivées partielles $D_i f$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ existent et sont continues dans A , f est continûment différentiable dans A .

 21

Si B est une partie ouverte d'un espace de Banach H , u_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ n fonctions <u>scalaires</u> continûment différentiables dans B , telles que $(u_1(z),\ldots,u_n(z)) \in A$ pour tout $z \in B$, on a

$$(12) \qquad df(u_1,u_2,\ldots,u_n) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(u_1,u_2,\ldots,u_n)du_k \quad .$$

Supposons maintenant que F soit aussi de dimension <u>finie</u>, F étant identifié à l'espace $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{C}^m$). Alors l'application f peut s'écrire $f=(f_1,f_2,\ldots,f_m)$, où $f_j = pr_j \circ f$ est une fonction scalaire définie dans A ; pour que f soit continûment différentiable dans A , il faut et il suffit que chacune des fonctions f_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ le soit. En vertu du th.3, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les mn dérivées $D_k f_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ existent et soient continues dans A . En d'autres termes, la matrice de l'application linéaire $df(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ par rapport aux bases canoniques de E et de F , est la matrice $(D_k f_j(a_1,\ldots,a_n))$ à m lignes et n colonnes ; on dit que cette matrice est la <u>matrice jacobienne</u> de la fonction $f=(f_j)$ au point $(a_1,\ldots,a_n)$. Lorsque $m=n$, le déterminant $\det(D_k f_j)$ de la matrice jacobienne de $(f_1,\ldots,f_m)$ s'appelle le <u>jacobien</u> ou <u>déterminant fonctionnel</u> de $(f_1,\ldots,f_m)$.

Le théorème des fonctions composées se traduit en termes de matrices jacobiennes, de la facon suivante : soient f_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ m applications dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) d'un ensemble ouvert $A \subset \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), continûment différentiables dans A ; soient g_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ p applications dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) d'un voisinage B dans $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{C}^m$) de l'image par $(f_1,\ldots,f_m)$ de l'ensemble A , les g_i étant continûment différentiables dans B ; désignons par u_i les p fonctions composées $x \longrightarrow g_i(f_1(x),\ldots,f_m(x))$ qui sont continûment différentiables dans A ; on a alors la relation entre matrices jacobiennes

$$(13) \qquad (D_k u_i) = (D_j g_i)(D_k f_j)$$

d'où en particulier, lorsque $m=n=p$, la relation entre jacobiens

(14) $$\det(D_k u_i) = \det(D_j g_i).\det(D_k f_j) .$$

7. Notations et abus de langage.

Soient E et F deux espaces de Banach, et A un ensemble ouvert dans E . Lorsqu'on considère une fonction explicitée définie dans A et à valeurs dans F , qui n'est pas elle-même désignée par un symbole spécial, mais dont la valeur pour un élément générique $x \in A$ est notée par un symbole explicité, on ne note pas non plus par un symbole spécial sa différentielle ; mais la valeur au point générique $x \in A$ de cette différentielle est désignée en mettant entre parenthèses le symbole qui désigne la valeur de la fonction, et en le faisant précéder de la lettre d (ou d si la fonction est scalaire) ; on peut d'ailleurs supprimer les parenthèses si aucune confusion n'en résulte. Par exemple, si E est une algèbre normée on désignera par $d(x^2)$ la différentielle de la fonction $x \to x^2$ au point générique x . Lorsque, dans cette écriture, on substitue à x la valeur en un point générique t d'une application (explicitée ou non) différentiable u d'une partie ouverte B d'un espace de Banach G dans E , la même convention d'écriture entraîne que ce qu'on obtient est la différentielle de la fonction composée au point t , et non la valeur de la différentielle de la première fonction au point $u(t)$; par exemple $d((u(t))^2)$ est la différentielle de $t \to (u(t))^2$, et non la valeur de $d(x^2)$ pour $x = u(t)$; cette dernière se notera par exemple $(d(x^2))_{x=u(t)}$. Cette convention diffère nécessairement de celle qui résulte de l'écriture antérieure pour les fonctions différentiables notées elles-mêmes par un symbole particulier, et où la différentielle portait sur la fonction désignée par la lettre (ou le symbole) suivant immédiatement d (n°3, Remarque 3 suivant le cor.1 du th.1) .

En particulier, quand on voudra substituer, dans une différentielle portant sur une fonction explicitée, une valeur explicitée à la variable générique x , il faudra utiliser le dernier type d'écriture indiqué ci-dessus, et écrire par exemple $(d(\sin x))_{x=1}$ et non $d(\sin 1)$, car en vertu de l'abus de notation qui consiste à confondre une fonction constante avec sa valeur (unique), le dernier symbole pourrait aussi signifier la différentielle (nulle) de la fonction constante $x \rightarrow \sin 1$.

En particulier, avec cette convention, pour un élément générique x d'un espace de Banach E , la notation dx signifie la valeur au point x de différentielle de l'application identique $x \rightarrow x$; cette différentielle n'est autre (en tout point $x \in E$) que l'application identique $h \rightarrow h$ de E elle-même ; dx est donc un élément de $\mathcal{L}(E)$ indépendant de x, savoir l'application identique e . Il remplacera donc l'application identique e et permettra d'écrire la différentielle d'une fonction en un point générique(différentielle qui est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, donc une application linéaire) sans être forcé d'introduire la variable $h \in E$ comme nous l'avons fait plus haut. Par exemple, dans une algèbre normée complète E , on a pour tout $x \in E$

(15) $$d(x^2)=(dx)x+x(dx)$$

et

(16) $$d(x^{-1})= -x^{-1}(dx)x^{-1}$$

en tout point inversible x ; dans ces formules, $a(dx)b$ est bien entendu l'application linéaire $h \rightarrow ahb$. Pour une application différentiable quelconque, au lieu d'écrire $df(x)=f'(x)$, on peut écrire $df(x)=f'(x)dx$, le produit $\underline{VU}$ signifiant ici $\underline{V}\circ\underline{U}$ pour $\underline{V} \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\underline{U} \in \mathcal{L}(E)$ (n°3, Remarque suivant le th.1). Cette dernière écriture "homogène" n'a pas intérêt en elle-même, mais elle apparaît comme un cas particulier de la formule donnant la différentielle d'une fonction composée, et inversement, cette dernière formule s'en déduit en substituant à x une application différentiable u à valeurs dans E .

La convention introduite au début de ce n° conduit de même à noter dx_1 la valeur au point (x_1, x_2) de la différentielle de la projection $(x_1, x_2) \rightarrow x_1$ du produit $E_1 \times E_2$ de deux espaces de Banach sur le premier facteur ; de même dx_2 désignera la différentielle de la seconde projection $(x_1, x_2) \rightarrow x_2$. Ce sont encore des éléments <u>fixes</u> de $\mathcal{L}(E_1 \times E_2, E_1)$ et de $\mathcal{L}(E_1 \times E_2, E_2)$ respectivement, savoir les projections pr_1 et pr_2 elles-mêmes. Cela permet par exemple d'écrire

(17) $$d(x_1 + x_2) = dx_1 + dx_2$$

(18) $$d[x_1 \cdot x_2] = [dx_1 \cdot x_2] + [x_1 \cdot dx_2]$$

pour la différentielle d'une application bilinéaire continue, et en particulier

(19) $$d(\lambda x) = (d\lambda)\, x + \lambda (dx)$$

dans tout espace de Banach E .

Si x et y sont deux variables génériques appartenant à un même espace E et intervenant dans un raisonnement, les différentielles dx et dy sont donc respectivement la première et la seconde projection de $E \times E$ sur E , et par suite sont distinctes ; on a par exemple, dans une algèbre normée complète E

(20) $$d(xy) = (dx)y + x(dy)$$

avec les mêmes conventions que pour (15) et (16) en ce qui concerne le sens à donner à $a(dx)b$ ou $a(dy)b$. Si par contre, dans un raisonnement, ne figure qu'une seule variable générique x appartenant à E , et qu'on remplace ensuite partout dans ce raisonnement x par une autre variable générique y appartenant à E , dx et dy

désignent toutes deux l'application identique de E sur lui-même dans le raisonnement considéré. La situation qui se présente ici est tout à fait analogue à celle qui résulte, en Algèbre, de l'introduction d'indéterminées pour noter les polynômes (Alg., chap. IV, § 1) ; dans tout raisonnement où ne figure qu'une indéterminée X , on peut remplacer partout X par Y , et dans les deux versions du raisonnement, f(X) et f(Y) désignent le même polynôme ; mais s'il figure deux indéterminées X, Y dans le même raisonnement, elles ne désignent nullement le même polynôme (à deux indéterminées).

Soit f une fonction différentiable définie dans une partie ouverte du produit $E_1 \times E_2$ de deux espaces de Banach. Au lieu de désigner par $d_1 f(x, y)$ et $d_2 f(x, y)$ les différentielles partielles de f en un point générique (x, y), on les écrit souvent aussi $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$, ou $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$, ou simplement f'_x, f'_y, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ par abus de langage ; la formule (9) s'écrira donc, avec les conventions faites ci-dessus concernant dx et dy

(21) $$df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy$$

ou simplement $df(x, y) = f'_x\,dx + f'_y\,dy$, et même parfois $df = f'_x\,dx + f'_y\,dy$. Mais il faut alors prendre garde de ne jamais substituer à x ou à y , dans les parenthèses des expressions $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$, des symboles contenant encore x ou y , faute de quoi on serait amené à écrire des symboles de sens tout à fait ambigu : par exemple (si $E_1 = E_2$), il est impossible de savoir si $f'_y(y, y)$ désigne la première différentielle partielle où on substitue y à x , ou la seconde différentielle partielle où on substitue y à x ; de même, l'expression $\frac{\partial f}{\partial x}(3x, y)$ peut aussi bien représenter la première différentielle partielle de la fonction $(x, y) \to f(3x, y)$, ou la première différentielle partielle de la fonction f , où on substitue $3x$ à x .

Lorsqu'on utilise les notations précédentes, on doit donc considérer x et y comme servant essentiellement à désigner la première et la seconde variable dans f, et ne jamais les utiliser à d'autres fins, mais avoir soin d'introduire d'autres lettres pour désigner d'autres variables génériques appartenant à E_1 ou E_2.

Exercices.- 1) Soit f la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par les conditions $f(x,y)=r^2\sin(1/r)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$, avec $r=\sqrt{x^2+y^2}$, et $f(0,0)=0$; montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas continûment différentiable au point $(0,0)$.

2) Soient E_1, E_2, F trois espaces de Banach, f une application continue d'une partie ouverte A de $E_1 \times E_2$ dans F. Pour qu'en un point $(a,b)\in A$ la fonction f soit différentiable, il faut et il suffit que : 1° les différentielles partielles $d_1f(a,b)$ et $d_2f(a,b)$ existent ; 2° on ait

$$f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)=\underline{o}(\|h\|+\|k\|).$$

En déduire que f est différentiable au point (a,b) si $d_1f(a,b)$ existe et si, dans un voisinage V de (a,b), $d_2f(a,y)$ existe et est fonction continue de (x,y) (à valeurs dans $\mathcal{L}(E_2,F)$).

3) Soit f la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par les conditions $f(x,y)=(xy/r)\sin(1/r)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$, avec $r=\sqrt{x^2+y^2}$, et $f(0,0)=0$. Montrer que $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$ sont définies pour tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, et que les quatre applications $x\to f'_x(x,y)$, $y\to f'_x(x,y)$, $x\to f'_y(x,y)$, $y\to f'_y(x,y)$ sont continues dans $\mathbb{R}$, mais que f n'est pas différentiable au point (0,0) (considérer la fonction composée $f(x,ax)$ pour un a fixe).

4) Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par les conditions suivantes : $f(x,y)=0$ pour $y\leqslant x^2$ ou $y\geqslant 3x^2$; $f(x,2x^2)=x$; enfin, pour chaque valeur de x, $y\to f(x,y)$ est linéaire dans chacun des intervalles

$\left[x^2, 2x^2\right]$ et $\left[2x^2, 3x^2\right]$. Montrer que, pour toute valeur des paramètres a, b $(a^2+b^2 \neq 0)$, $f(at, bt)$ a une dérivée nulle au point $t=0$, mais que f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

5) a) Soit f une application continue d'un voisinage A d'un point x_0 d'un espace normé E dans un espace normé F. On dit que f est <u>quasi-différentiable</u> au point x_0 s'il existe une application linéaire u de E dans F, ayant la propriété suivante : pour toute application continue g de $[0,1]$ dans E, telle que $g(0)=x_0$ et que $g'(0)$ existe, l'application $t \to f(g(t))$ admet une dérivée au point $t=0$, égale à $u(g'(0))$. L'application linéaire u est alors appelée une <u>quasi-différentielle</u> de f au point x_0. Montrer que si f est quasi-différentiable au point x_0, elle admet une seule quasi-différentielle en ce point. Etendre aux quasi-différentielles les th. 1 et 2.

b) Montrer que si f est quasi-différentiable au point x_0, sa quasi-différentielle u est une application linéaire <u>continue</u> de E dans F. (Raisonner par l'absurde, en supposant pour simplifier que $x_0=0$. Si u n'était pas bornée dans la boule $\|x\| \leqslant 1$, il existerait une suite (a_n) de vecteurs de E, de norme 1, et une suite décroissante (t_n) de nombres >0 tendant vers 0, tels que $\|t_n^{-1} f(t_n a_n)\| = \alpha_n$ tende vers $+\infty$; montrer qu'on peut supposer la suite (α_n) telle que $(\sqrt{\alpha_n} t_n)$ soit décroissante et tende vers 0 ; former alors une fonction g à valeurs dans E, continue et dérivable dans $[0,1]$, telle que $g(0)=g'(0)=0$, et que $g(\sqrt{\alpha_n} t_n) = t_n a_n$).

6) a) Montrer que si une application continue f d'un voisinage A d'un point $x_0 \in E$ dans F est différentiable au point x_0, elle est quasi-différentiable en ce point et sa quasi-différentielle est égale à sa différentielle.

b) Si E est de dimension <u>finie</u>, et si f est quasi-différentiable en un point $x_0 \in E$, est différentiable en ce point (raisonner par l'absurde : si (x_n) est une suite de points tendant vers x_0, telle que

$$\|f(x_n)-f(x_0)-u(x_n-x_0)\| \geq \alpha \|x_n-x_0\|$$

(u quasi-différentielle de f, α fixe et >0), extraire de la suite (x_n) une suite partielle telle que $z_n=(x_n-x_0)/\|x_n-x_0\|$ tende vers une limite, et que $(\|x_n-x_0\|)$ soit décroissante ; définir alors une application g de $[0,1]$ dans E telle que $g(0)=x_0$, que $g'(0)$ existe, mais que l'application $t \to f(g(t))$ n'ait pas une dérivée égale à $u(g'(0))$ au point $t=0$).

7) Soit K un espace compact, $E=\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions numériques continues dans K, la norme d'une fonction $x \in E$ étant $\|x\| = \sup_{t\in K} |x(t)|$.

a) Montrer que, pour que l'application numérique $x \to \|x\|$ soit quasi-différentiable en un point x_0, il faut et il suffit que la fonction $|x_0|$ atteigne son maximum en un seul point $t_0 \in K$: la quasi-différentielle de $x \to \|x\|$ au point x_0 est alors la fonction linéaire u telle que $u(z)=z(t_0)$ si $x_0(t_0)>0$, $u(z)=-z(t_0)$ si $x_0(t_0)<0$. (Pour voir que la condition est nécessaire, en supposant que $|x_0|$ atteigne son maximum en deux points distincts t_0, t_1, considérer une fonction continue $y \in E$, à valeurs comprises entre 0 et 1, égale à 1 en t_0, à 0 en t_1, et examiner ce que devient l'expression $(\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|)/\lambda$ lorsque λ tend vers 0 par valeurs positives, ou par valeurs négatives. Pour voir que la condition est suffisante, soit $\lambda \to z_\lambda$ une application continue de $[0,1]$ dans E, ayant une dérivée $\underline{a}$ pour $\lambda=0$; montrer d'abord, à l'aide de la compacité de K, que si t_λ est un point où la fonction $|x_0(t)+z_\lambda(t)|$ atteint son maximum, t_λ tend vers t_0 lorsque λ tend vers 0).

b) Montrer que, pour que l'application $x \to \|x\|$ soit différentiable en un point x_0, il faut et il suffit que $|x_0|$ atteigne son maximum en un seul point $t_0 \in K$, et que ce point soit <u>isolé</u> dans K.

8) Soit f une application continue d'un voisinage A d'un point x_0 d'un espace normé E dans un espace normé F. On suppose que f est <u>lipschitzienne</u> dans A, c'est-à-dire qu'il existe une constante k telle que $\|f(x_1)-f(x_2)\| \leqslant k\|x_1 - x_2\|$ pour tout couple de points de A. Montrer que s'il existe une application linéaire u de E dans F telle que, pour tout vecteur $a \neq 0$ de E, la limite de $\frac{1}{t}(f(x_0+at)-f(x_0))$ soit égale à $u(a)$ lorsque t tend vers 0, f est quasi-différentiable au point x_0.

9) Soit E un espace normé réel.

a) Pour qu'une fonction numérique convexe $p(x)$ définie dans E soit quasi-différentiable en un point $x_0 \in E$, montrer qu'il faut et il suffit qu'il existe une forme linéaire u définie dans E telle que, pour tout vecteur $a \neq 0$ dans E, la limite de $\frac{1}{t}(p(x_0+at)-p(x_0))$ soit égale à $u(a)$ lorsque t tend vers 0.

b) Déduire de a) que, pour que la norme $\|x\|$ de E soit quasi-différentiable en un point $x_0 \neq 0$, il faut et il suffit qu'au point x_0 il existe un seul hyperplan d'appui de la boule de centre 0 et de rayon $\|x_0\|$, passant par x_0.

10) Soit E un espace localement compact, μ une mesure positive sur E. Dans l'espace normé $L^p(E,\mu)$ $(p>1)$, dont les éléments sont identifiés aux fonctions de puissance p-ème intégrable dans E, montrer que la fonction $f(x) = \int |x|^p d\mu$ est différentiable en tout point, et qu'on a $f'(x).y = p\int |x|^{p-2}xy\, d\mu$ pour tout $y \in L^p$ (utiliser la formule des accroissements finis pour la fonction $|t|^p$ d'une variable réelle ;

distinguer deux cas suivant que $p \leq 2$ ou $p > 2$; dans le premier cas, utiliser l'inégalité $(a+b)^{p-1} \leq a^{p-1} + b^{p-1}$ pour $a > 0$ et $b > 0$; dans le second, majorer la différence $|a+b|^{p-1} - |a|^{p-1}$ à l'aide de la formule des accroissements finis, en utilisant l'inégalité de Hölder pour les exposants conjugués $q = p/2$ et $q' = p/(p-2)$).

11) On dit qu'une application f d'une partie ouverte A de E dans F est <u>uniformément différentiable</u> dans A si elle est différentiable dans A et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que les relations $\|h\| \leq r$, $x \in A$, $x + h \in A$ entraînent $\|f(x+h) - f(x) - f'(x).h\| \leq \leq \varepsilon \|h\|$.

a) Montrer que toute fonction uniformément différentiable est continûment différentiable.

b) Inversement, si E est de dimension finie, montrer que si f est continûment différentiable dans A, pour toute partie ouverte relativement compacte B de E telle que $\bar{B} \subset A$, f est uniformément différentiable dans B.

§ 2. Equations aux différentielles totales.

1. <u>Equation aux variations d'une équation différentielle.</u>

Soient E et F deux espaces normés complets sur $\mathbb{R}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, S (resp. T) une boule ouverte dans E (resp. F), de centre x_0 (resp. y_0). Soit $(t, x, y) \to f(t, x, y)$ une application <u>continûment différentiable</u> de $I \times S \times T$ dans E. En remplaçant I (resp. S, T) par un intervalle plus petit (resp. des boules plus petites), on peut supposer que les dérivées partielles $f'_x(t, x, y)$ (élément de $\mathcal{L}(E, E)$) et $f'_y(t, x, y)$ (élément de $\mathcal{L}(F, E)$) sont <u>bornées</u> en norme dans $I \times S \times T$ par des nombres a, b. Par suite (§ 1, th. 2 et 3), on a

$$\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \leq a \|x_1 - x_2\| + b \|y_1 - y_2\|$$

quels que soient $t \in I$, x_1, x_2 dans S, y_1, y_2 dans T. En particulier, pour tout $y \in T$, $(t,x) \to f(t,x,y)$ est <u>lipschitzienne</u> dans $I \times S$ pour la constante a. Il en résulte (<u>Fonct.var.réelle</u>, chap.IV, § 1, th.3) que pour tout point $t_0 \in I$, il existe un voisinage ouvert relativement compact J de de t_0 dans I tel que $\bar{J} \subset I$, et une boule ouverte $T' \subset T$ de centre y_0 tels que, pour <u>tout</u> $y \in T'$, il existe une intégrale et une seule $u(t,y)$ de l'équation différentielle

(1) $$\frac{dx}{dt} = f(t,x,y)$$

définie dans J, à valeurs dans S et telle que $u(t_0,y) = x_0$. En outre, l'application $(t,y) \to u(t,y)$ est <u>continue</u> dans $J \times T'$; de façon plus précise, il existe une constante c telle que, quels que soient $t \in J$, y_1 et y_2 dans T', on ait

(2) $$\| u(t,y_1) - u(t,y_2) \| \leqslant c \, \| y_1 - y_2 \|$$

(<u>loc.cit.</u>). Mais l'hypothèse sur f permet ici de démontrer le résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 1.- <u>La solution</u> $u(t,y)$ <u>de l'équation</u> (1) <u>telle que</u> $u(t_0,y) = x_0$ <u>est continûment différentiable dans</u> $J \times T'$; <u>en outre, la dérivée partielle</u> $u'_y(t,y)$ (élément de $\mathcal{L}(F,E)$) <u>est identique à l'intégrale de l'équation différentielle linéaire</u>

(3) $$\frac{dU}{dt} = f'_x(t,u(t,y),y) \circ \underline{U} + f'_y(t,u(t,y),y)$$

<u>satisfaisant à la condition initiale</u> $\underline{U}(t_0,y) = 0$.

Par définition, la dérivée partielle $u'_t(t,y)$ existe et est égale à $f(t,u(t,y),y)$; elle est donc continue dans $J \times T'$. D'autre part l'intégrale $\underline{U}(t,y)$ de (3) satisfaisant à $\underline{U}(t_0,y) = 0$ est une application continue de $J \times T'$ dans $\mathcal{L}(F,E)$, en raison de la continuité de f'_x, f'_y et de $u(t,y)$ (<u>Fonct.var.réelle</u>, chap.IV, § 1, th.3). Si nous montrons que $u'_y(t,y)$ existe et est égale à $\underline{U}(t,y)$, il résultera du th. des différentielles partielles (§ 1, th.3) que $u(t,y)$ est continûment différentiable.

Soit y un point quelconque de T' ; montrons d'abord que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout vecteur $h \in F$ tel que $\|h\| \leq r$ et tout point $t \in J$, on ait

$$(4) \quad \| f(t, u(t,y+h), y+h) - f(t, u(t,y), y) - f'_x(t, u(t,y), y) . (u(t,y+h)) - u(t,y)) - f'_y(t, u(t,y), y) . h \| \leq \varepsilon \|h\| .$$

En effet, en vertu de (2) et de la continuité de f'_x et f'_y, pour tout $s \in J$, il existe un voisinage $W(s)$ de s dans I et un nombre $\rho(s) > 0$ tels que la relation (4) ait lieu pour $\|h\| \leq \rho(s)$ et pour $t \in W(s)$ (§ 1, cor. 2 du th. 2) ; en recouvrant J par un nombre fini de voisinages $W(s_k)$ et en prenant pour r le plus petit des nombres $\rho(s_k)$, on répond donc à la question.

Par définition de $u(t,y)$, la relation (4) s'écrit aussi

$$(5) \quad u'_t(t,y+h) - u'_t(t,y) - f'_x(t, u(t,y), y) . (u(t,y+h) - u(t,y)) - f'_y(t, u(t,y), y) . h \| \leq \varepsilon \|h\| .$$

Posons alors $v(t,y,h) = u(t,y+h) - u(t,y) - \underline{U}(t,y) . h$; cette fonction admet, d'après (1) et (3), une dérivée par rapport à t, et les relations (3) et (5) prouvent qu'on a

$$(6) \quad \| v'_t(t,y,h) - f'_x(t, u(t,y), y) . v(t,y,h) \| \leq \varepsilon \|h\|$$

pour tout $h \in F$ tel que $\|h\| \leq r$ et tout $t \in J$; en d'autres termes, $v(t,y,h)$ est une intégrale approchée à $\varepsilon \|h\|$ près de l'équation différentielle linéaire homogène

$$(7) \quad \frac{dz}{dt} = f'_x(t, u(t,y), y) . z$$

Comme elle prend la valeur 0 pour $t = t_0$, et que $f'_x(t, u(t,y), y)$ est bornée dans $J \times T'$ par un nombre indépendant de h et de ε, on voit (Fonct. var. réelle, chap. IV, § 1, cor. de la prop. 5) qu'il existe un nombre c_0 indépendant de h et de ε et tel que l'on ait

$$\| v(t,y,h) \| \leq c_0 \varepsilon \|h\|$$

dès que $\|h\| \leqslant r$, pour tout $t \in J$. Comme ε est arbitraire, il résulte de la définition de la différentielle que $u'_y(t, y) = \underline{U}(t, y)$, ce qui termine la démonstration.

On dit que l'équation différentielle linéaire (3) est l'<u>équation aux variations</u> associée à l'équation différentielle (1).

Lorsque E et F sont de dimension finie, l'équation différentielle (1) est équivalente à un système

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Soient $u_i\ (t, y_1, \dots, y_m)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les composantes de $u(t, y)$; la dérivée partielle f'_x est alors identifiée à la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ à n lignes et n colonnes, la dérivée partielle f'_y à la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)$ à n lignes et m colonnes, et la dérivée partielle u'_y à la matrice $\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_k}\right)$ à n lignes et m colonnes. Si on pose $v_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial y_k}$, le th. 1 montre que (v_{ik}) est la solution du système de mn équations linéaires

$$\frac{dz_{ik}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} z_{jk} + \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant k \leqslant m)$$

prenant la valeur 0 pour $t = t_0$.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> $f(t, x)$ <u>une fonction continûment différentiable au voisinage d'un point</u> $(a, b) \in \mathbb{R} \times E$, <u>à valeurs dans</u> E . <u>Il existe un voisinage</u> J <u>de</u> a <u>et un voisinage</u> V <u>de</u> b <u>tels que pour tout point</u> $(t_0, x_0) \in J \times V$, <u>l'équation différentielle</u>

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (8)$$

<u>ait une intégrale et une seule</u> $u(t, t_0, x_0)$ <u>définie dans</u> J , <u>et telle que</u> $u(t_0, t_0, x_0) = x_0$. <u>En outre, l'application</u> $(t, t_0, x_0) \to u(t, t_0, x_0)$ <u>est continûment différentiable dans</u> $J \times J \times V$.

L'existence de J, V et $u(t,t_0,x_0)$ ayant les propriétés indiquées dans la première partie de l'énoncé, a été établie dans Fonct. var. réelle, chap. IV, § 1, th. 4. En outre, si on pose $t=t_0+s$, $u(t_0+s,t_0,x_0)=x_0+v(s,t_0,x_0)$, on voit que v est l'intégrale de l'équation $\frac{dz}{ds}=f(t_0+s,x_0+z)$ qui s'annule pour $s=0$; l'application du th. 1 achève de démontrer le corollaire.

2. Equations aux différentielles totales.

Soient E et F deux espaces normés complets sur $\mathbb{R}$, A (resp. B) une partie ouverte de E (resp. F), et soit $(x,y)\to \underline{U}(x,y)$ une application de $A\times B$ dans $\mathcal{L}(E,F)$. On dit qu'une application différentiable u de A dans B est une solution de l'équation aux différentielles totales

(9) $$y'=\underline{U}(x,y)$$

si, pour tout $x\in A$, on a identiquement

$$u'(x)=\underline{U}(x,u(x)).$$

Lorsque $E=\mathbb{R}$, la notion d'équation aux différentielles totales se réduit donc à celle d'équation différentielle (résolue en y'). Lorsque $E=\mathbb{R}^n$, une application linéaire continue $\underline{V}$ de E dans F est entièrement déterminée par la donnée de ses valeurs v_i aux n vecteurs e_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ de la base canonique ; une équation de la forme (9) est alors équivalente au "système de n équations aux dérivées partielles"

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=v_i(x_1,\ldots,x_n,y) \qquad (1\leqslant i\leqslant n).$$

DÉFINITION 1.- On dit qu'une équation aux différentielles totales (9) est complètement intégrable dans $A\times B$ si, pour tout point $(x_0,y_0)\in A\times B$, il existe un voisinage S de x_0 et un voisinage T de y_0 tels que, dans S, il existe une solution et une seule u de (9), à valeurs dans T, et telle que $u(x_0)=y_0$.

Nous allons nous borner au cas où, dans $A \times B$, la fonction $\underline{U}$ est continûment différentiable ; lorsque $E = \mathbb{R}$, on sait alors que l'équation (9) est complètement intégrable sous cette seule condition (puisque cela entraîne que $\underline{U}(x, y)$ est localement lipschitzienne). Mais nous allons voir que lorsque E a plus d'une dimension, l'équation (9) n'est complètement intégralbe que moyennant des conditions supplémentaires pour $\underline{U}$.

Nous aurons à considèrer dans ce qui suit les dérivées partielles $\underline{U}'_x(x, y)$ et $\underline{U}'_y(x, y)$ de $\underline{U}$; pour chaque $(x, y) \in A \times B$, ce sont des éléments de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$ et de $\mathcal{L}(F, \mathcal{L}(E,F))$ respectivement ; en outre, les applications $(x, y) \to \underline{U}'_x(x, y)$ et $(x, y) \to \underline{U}'_y(x, y)$ de $A \times B$ dans $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$ et dans $\mathcal{L}(F, \mathcal{L}(E,F))$ respectivement sont continues par hypothèse. Pour un point (x, y) de $A \times B$, nous écrirons dans ce qui suit $\underline{U}, \underline{U}'_x$ et $\underline{U}'_y$ au lieu de $\underline{U}(x, y)$, $\underline{U}'_x(x, y)$ et $\underline{U}'_y(x, y)$ si aucune confusion n'en résulte.

On sait que $\underline{U}'_x$, élément de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$, peut être identifié canoniquement à une application bilinéaire continue de $E \times E$ dans F, savoir l'application $(h_1, h_2) \to (\underline{U}'_x \cdot h_1) \cdot h_2$ (Top.gén., chap.X, §2, cor.2 de la prop.4) ; nous écrirons la valeur de cette application $\underline{U}'_x \cdot (h_1, h_2)$. On notera que l'application linéaire $h_1 \to (\underline{U}'_x \cdot h_1) \cdot h_2$ n'est autre que la dérivée, au point (x, y) de l'application $x \to \underline{U}(x, y) \cdot h_2$ de E dans F. De même $\underline{U}'_y$, élément de $\mathcal{L}(F, \mathcal{L}(E,F))$ peut être identifié à l'application bilinéaire continue $(k, h) \to (\underline{U}'_y \cdot k) \cdot h$ de $F \times E$ dans F ; l'application linéaire $k \to (\underline{U}'_y \cdot k) \cdot h$ n'est autre que la dérivée, au point (x, y), de l'application $y \to \underline{U}(x, y) \cdot h$ de F dans F ; on pose $\underline{U}'_y \cdot (k, h) = (\underline{U}'_y \cdot k) \cdot h$.

Avec ces notations, nous pouvons maintenant énoncer le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 2 (Frobenius).- <u>Pour qu'une équation</u> (9), <u>où</u> $\underline{U}$ <u>est continûment différentiable dans</u> $A \times B$, <u>soit complètement intégralbe dans cet ensemble, il faut et il suffit que, pour tout point</u> (x, y) <u>de</u> $A \times B$, <u>la fonction</u> $\underline{U}$ <u>vérifie la relation</u>

(10) $\underline{U}'_x \cdot (h_1, h_2) + \underline{U}'_y \cdot (\underline{U} \cdot h_1, h_2) = \underline{U}'_x \cdot (h_2, h_1) + \underline{U}'_y \cdot (\underline{U} \cdot h_2, h_1)$,

<u>quels que soient les vecteurs</u> h_1, h_2 <u>dans</u> E .

1° La condition est <u>nécessaire</u>. Soit (x_0, y_0) un point de $A \times B$, S une boule ouverte de centre x_0, et de rayon r , S' une boule ouverte de centre y_0 ; supposons qu'il existe une solution u de (9) telle que $u(x_0) = y_0$, définie dans S et à valeurs dans S'. Soit z un vecteur quelconque dans E , tel que $\| z \| < r$; l'application $t \to u(x_0 + tz) = v(t, z)$ à valeurs dans F , est définie dans un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant $I = [-1, +1]$; en outre, on a , dans J , $v'_t(t, z) = u'(x_0 + tz) \cdot z$; d'après l'hypothèse, $t \to v(t, z)$ est donc intégrale de l'équation différentielle

(11) $$\frac{dw}{dt} = \underline{U}(x_0 + tz, w) \cdot z$$

prenant la valeur y_0 pour $t=0$.

Comme u est différentiable, on a $v'_z(t, z) = t u'(x_0 + tz) = t\underline{U}(x_0 + tz, v(t, z))$. D'autre part, le second membre de (11) est une fonction continûment différentiable $g(t, w, z)$ de (t, w, z) ; le th. 1 montre que $v'_z(t, z)$ satisfait à l'équation différentielle linéaire

(12) $$\frac{dV}{dt} = g'_w(t, v(t, z), z) \circ \underline{V} + g'_z(t, v(t, z), z)$$

Les deux membres de (12) sont des éléments de $\mathcal{L}(E, F)$; nous allons écrire que leurs valeurs (vecteurs de F) pour un vecteur arbitraire h_1 de E , sont égales. On a $v'_z(t, z) \cdot h_1 = t\underline{U}(x_0 + tz, v(t, z)) \cdot h_1$; en vertu du th. des différentielles partielles et des remarques du début de ce n° , la dérivée de l'application $t \to t\underline{U}(x_0 + tz, v(t, z)) \cdot h_1$ est égale à

(13) $\underline{U}(x_0+tz, v(t,z)).h_1+t\underline{U}'_x(x_0+tz, v(t,z)).(z, h_1)+$

$$+t\underline{U}'_y(x_0+tz, v(t,z)).(\underline{U}(x_0+tz, v(t,z)).z, h_1).$$

D'autre part, si k est un vecteur quelconque de F, on a

$$g'_w(t,w,z).k = \underline{U}'_y(x_0+tz, w).(k, z)$$

et $$g'_z(t,w,z).h_1 = \underline{U}(x_0+tz, w).h_1+t\underline{U}'_x(x_0+tz, w).(h_1, z)$$

Par suite, la valeur du second membre de (12) pour h_1 est

(14) $\underline{U}(x_0+tz, v(t,z)).h_1+t\underline{U}'_x(x_0+tz, v(t,z)).(h_1, z)+$

$$+t\underline{U}'_y(x_0+tz, v(t,z)).(\underline{U}(x_0+tz, v(t,z)).h_1, z).$$

Si on identifie (13) et (14), on voit qu'on peut diviser par t, puis faire tendre t vers 0 dans l'identité obtenue ; or, $v(t,z)$ tend vers $u(x_0)=y_0$ lorsque t tend vers 0 ; à la limite, on obtient donc la relation (10) où on a remplacé h_2 par z ; cette dernière relation étant donc valable pour tout vecteur h_2 tel que $\|h_2\| \leqslant r$, et étant homogène en h_2, est valable quels que soient h_1 et h_2.

2° La condition est <u>suffisante</u>. Soit $T\times T'$ un voisinage de (x_0, y_0) tel que $\underline{U}$ soit borné dans $T\times T'$, soit $\|\underline{U}(x,y)\| \leqslant a$; la norme du second membre de (11) est alors $\leqslant a\|z\|$ lorsque (x_0+2z, w) appartient à $T\times T'$ on peut en outre supposer T et T' pris assez petits pour que, moyennant la même condition, le second membre de (11) soit lipschitzien (en w) pour $|t|<2$. Par suite (<u>Fonct.var.réelle</u>, chap.IV, § 1, th.1), il existe un nombre $r>0$ tel que pour $\|z\|<r$, il existe une intégrale et <u>une seule</u> $v(t,z)$ de l'équation (11), définie dans l'intervalle $]-2,+2[$ à valeurs dans T', et prenant la valeur y_0 pour $t=0$. S'il existe une solution u de (9) prenant la valeur y_0 au point x_0 et définie dans un voisinage assez petit de x_0, cette solution est donc <u>unique</u>, et on a nécessairement $u(x_0+z)=v(1,z)$ pour $\|z\|<r$.

Nous allons montrer effectivement que la fonction u définie par cette dernière égalité est bien intégrale de (9). Remarquons en premier lieu que, d'après le th.1, $v(t,z)$ est continûment différentiable pour $|t|<2$ et $\|z\|<r$, et que $v'_z(t,z)$ satisfait à l'équation différentielle linéaire (12). Remarquons maintenant qu'en vertu de la condition (10), supposée vérifiée <u>dans</u> $A\times B$ <u>tout entier</u>, la valeur du second membre de (12), pour un vecteur arbitraire h_1 de E, est égale à l'expression (13). Si on pose

$$s(t,z)=(v'_z(t,z)-t\underline{U}(x_0+tz,v(t,z))).h_1$$

on en conclut que s satisfait à l'équation différentielle <u>linéaire et homogène</u>

$$\frac{df}{dt}=\underline{U}'_y(x_0+tz,v(t,z)).(f,z)$$

et comme $s(0,z)=0$ (th.1), on a $s(t,z)=0$ pour $|t|<2$ et $\|z\|<r$. Comme il en est ainsi pour tout $h_1\in E$, on a $v'_z(t,z)=t\underline{U}(x_0+tz,v(t,z))$ dans les mêmes conditions ; faisant $t=1$ dans cette relation, on voit que u est bien une solution de (9) prenant la valeur y_0 au point x_0.

C.Q.F.D.

Lorsque $E=\mathbb{R}^n$, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ peut être identifié canoniquement à l'espace produit F^n, et (9) est équivalent à un système de n équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=f_i(x_1,\ldots x_n,y) \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

et la condition (10) est équivalente aux $n(n-1)/2$ conditions

$$(15)\qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\frac{\partial f_i}{\partial y}.f_j=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}+\frac{\partial f_j}{\partial y}.f_i$$

(où bien entendu $\partial f_i/\partial y$ est un élément de $\mathcal{L}(F)$).

En particulier, la donnée de n applications f_i d'une partie ouverte A de F dans F constitue ce qu'on appelle un <u>champ de systèmes de n vecteurs</u> défini dans A. On dit que ce champ est <u>complètement intégrable</u> si le système d'équations

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = f_i(y) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

est complètement intégrable, c'est-à-dire si on a les conditions

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} \cdot f_j = \frac{\partial f_j}{\partial y} \cdot f_i \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n).$$

2 bis. Systèmes de Pfaff complètement intégrables.

Soient E un espace de Banach, A une partie ouverte de E. On appelle forme différentielle dans A une application $x \to \omega(x)$ de A dans l'espace dual E' de E. Un exemple d'une telle forme est fourni par la dérivée $x \to f'(x)$ d'une fonction numérique différentiable dans A.

Considérons n formes différentielles continues ω_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dans A, et supposons qu'en chaque point $x \in A$ le système des n formes linéaires $\omega_i(x)$ soit un système libre dans E'.

Pour chaque point $x \in A$, les n équations $\langle h, \omega_i(x) \rangle = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ définissent un sous-espace vectoriel fermé M_x de E, de codimension n. On appelle système de Pfaff le système d'équations

(15 a) $$\langle dx, \omega_i(x) \rangle = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

et on dit qu'une application différentiable u d'une partie ouverte d'un espace de Banach F dans E est une solution du système de Pfaff (15 a) si on a les n relations $\langle u'(t).h, \omega_i(u(t)) \rangle = 0$ en tout point t de la partie de F considérée et tout $h \in F$.

Soit a un point de A, et considérons le sous-espace fermé $M = M_a$ de codimension n. Soit N un sous-espace vectoriel de E supplémentaire de M ; on sait que l'application $(y, z) \to y + z$ de $M \times N$ sur E est un isomorphisme. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de N telle que $\langle e_i, \omega_j(a) \rangle = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$; comme les fonctions $x \to \langle e_i, \omega_j(x) \rangle = a_{ij}(x)$ sont continues, il existe un voisinage V de a tel que dans V, le déterminant $\det(a_{ij}(x))$ ne soit pas nul ; posons

$\underline{A}(x)=(a_{ij}(x))$. Cherchons des solutions de (15 a) définies dans un voisinage W de 0 dans M , à valeurs dans V et de la forme $y \to a+y+u(y)$ où u est une application différentiable de W dans N . On doit donc avoir, pour tout $s \in M$ et tout $y \in W$

(15 b) $\langle s+u'(y).s, \omega_i(a+y+u(y))\rangle=0$ pour $1 \leq i \leq n$

ce qui s'écrit aussi

$$\underline{A}(a+y+u(y)).(u'(y).s)=\underline{B}(a+y+u(y)).s$$

où le second membre est l'application linéaire $s \to -\langle s, \omega_i(a+y+u(y))\rangle$ de M dans $\mathbb{R}^n$. Comme $\underline{A}$ est inversible, on voit qu'en posant $\underline{U}=\underline{A}^{-1}\underline{B}$, la relation (15 b) est encore équivalente à

(15 c) $$u'(y)=\underline{U}(a+y+u(y))$$

C'est donc une équation aux différentielles totales de la forme (9) ; nous dirons que le système de Pfaff (15 a) est <u>complètement intégrable</u> si l'équation (15 c) est complètement intégrable. Nous allons montrer (en supposant que les applications $x \to \omega_i(x)$ sont continûment différentiables) que la condition pour qu'il en soit ainsi ne dépend pas du point a ni du supplémentaire N choisi de M_a .

En effet le premier membre de (10) n'est autre que la valeur pour le vecteur $(h_1, \underline{U}.h_1)$ de la dérivée au point (x,y) de l'application $(x,y) \to \underline{U}(x,y).h_2$. Avec les notations ci-dessus, nous devons donc exprimer la dérivée de l'application $(y,z) \to \underline{U}(a+y+z).s_2$; or, d'après (15 b), cette application est définie par les relations

(15 d) $\langle s_2+\underline{U}(a+y+z).s_2, \omega_i(a+y+z)\rangle=0$ $(1 \leq i \leq n)$

En dérivant ces n relations, il vient

$$\langle(\underline{U}'(a+y+z).(s_1+t_1)).s_2, \omega_i(a+y+z)\rangle +$$
$$+\langle s_2+\underline{U}(a+y+z).s_2, \omega_i'(a+y+z).(s_1+t_1)\rangle=0$$

La condition (10) signifie que l'on a identiquement

$$(\underline{U}'(a+y+z).(s_1+\underline{U}(a+y+z).s_1)).s_2 =$$

$$= (\underline{U}'(a+y+z).(s_2+\underline{U}(a+y+z).s_2)).s_1$$

ce qui, en vertu du fait que $\underline{A}(x)$ est inversible, équivaut à

$$\langle s_2+\underline{U}(a+y+z).s_2, \omega_i'(a+y+z).(s_1+\underline{U}(a+y+z).s_1)\rangle =$$

$$= \langle s_1+\underline{U}(a+y+z).s_1, \omega_i'(a+y+z).(s_2+\underline{U}(a+y+z).s_2)\rangle$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Ces conditions peuvent s'énoncer de la façon suivante. Pour tout $x \in V$, les formes bilinéaires alternées

$$(h_1, h_2) \to \langle h_1, \omega_i'(x).h_2\rangle - \langle h_2, \omega_i'(x).h_1\rangle \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

doivent être nulles quand on y remplace h_1 et h_2 par deux vecteurs quelconques de E satisfaisant aux conditions

$$\langle h_1, \omega_i(x)\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle h_2, \omega_i(x)\rangle = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

(autrement dit, deux vecteurs quelconques de l'espace M_x).

3. Application : différentielles d'ordre supérieur.

Soient E et F deux espaces normés complets sur $\mathbb{R}$, et soit f une application continûment différentiable d'une partie ouverte A de E dans F. La dérivée (ou différentielle) f' est donc une application continue de A dans l'espace normé $\mathcal{L}(E,F)$.

DÉFINITION 2.- On dit qu'une application continûment différentiable f d'une partie ouverte A de E dans F, est deux fois différentiable en un point $x_0 \in A$ si l'application $x \to f'(x)$ de A dans $\mathcal{L}(E,F)$ est différentiable au point x_0 ; la dérivée de cette application au point x_0 s'appelle alors la dérivée seconde (ou différentielle seconde) de f au point x_0 et se note $f''(x_0)$ ou $d^2f(x_0)$.

La dérivée seconde $f''(x_0)$ est un élément de l'espace normé $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$, que l'on peut identifier canoniquement à une application bilinéaire continue de $E \times E$ dans F (cf. n°2) ; la valeur de cette application pour un élément $(h_1,h_2)\in E\times E$ se notera encore $f''(x_0)\cdot(h_1,h_2)=(f''(x_0)\cdot h_1)\cdot h_2$: l'application $h_1\to(f''(x_0)\cdot h_1)\cdot h_2$ n'est autre que la dérivée, au point x_0, de l'application $x\to f'(x)\cdot h_2$ de E dans F.

Lorsque f est deux fois différentiable en tout point de A, l'application $x\to f''(x)$ de A dans l'espace $\mathcal{L}_2(E;F)$ des applications bilinéaires continues de $E\times E$ dans F, s'appelle encore la dérivée seconde (ou différentielle seconde) de f dans A, et se note f'' ou d^2f. On dit que f est deux fois continûment différentiable dans A si f'' est continue dans A.

PROPOSITION 1.- Si une application f de A dans F est deux fois continûment différentiable, pour tout $x\in A$, l'application bilinéaire $f''(x)$ de $E\times E$ dans F est symétrique, autrement dit

$$f''(x)\cdot(h_1,h_2)=f''(x)\cdot(h_2,h_1)\ . \tag{16}$$

Inversement, soit g une application continûment différentiable de A dans $\mathcal{L}(E,F)$ telle que $g'(x)$ soit une application bilinéaire symétrique de $E\times E$ dans F pour tout $x\in E$. Alors, pour tout $x_0\in A$ il existe un voisinage ouvert connexe V de x_0 et une application continûment différentiable f de V dans F telle que $f'(x)=g(x)$ pour tout $x\in V$; en outre, si f_1 et f_2 sont deux fonctions définies dans V et ayant toutes deux pour dérivée g dans A, f_1-f_2 est constante dans V.

La dernière assertion résulte du cor.1 du th.2 du §1. Quant au reste de la proposition, c'est une simple application du th.2 au cas où, dans l'équation (9), le second membre ne dépend pas de y.

COROLLAIRE.- Soit A une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, f une application deux fois continûment différentiable de A dans F ; pour tout point $x\in A$ et tout couple d'indices i,j $(1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n)$, on a

$$D_iD_jf(x)=D_jD_if(x)\ . \tag{17}$$

En effet, si on pose $h_1=(y_i)$, $h_2=(z_i)$, la valeur, au point (h_1,h_2), de l'application bilinéaire $f''(x)$, est $\sum_{i,j} D_iD_j f(x).y_iz_j$, d'où le corollaire.

On dit que $D_iD_jf(x)$ est la <u>dérivée partielle seconde</u> d'indices i et j de f au point x ; on la note encore $D^2_{ij}f(x)$, ou $f''_{x_ix_j}(x)$, ou aussi $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ (avec les mêmes conventions qu'au §1, n°7 pour l'emploi des variables x_i dans ce cas).

La prop.1 montre qu'inversement, si g_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont n applications continûment différentiables de A dans F telles que $D_ig_j=D_jg_i$ pour $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant n$, pour tout $x_0\in A$ il existe un voisinage ouvert V de x_0 et une application continûment différentiable f de V dans F satisfaisant aux conditions $D_if=g_i$ pour $1\leqslant i\leqslant n$ dans V.

<u>Remarques</u>.- 1) On peut montrer que la relation (16) est encore satisfaite sans supposer que f'' soit continue dans A (exerc.1).

2) La condition (10) exprime que la dérivée de l'application $x \to \underline{U}(x, u(x))$ est une application bilinéaire symétrique pour tout $x\in A$ si u est une solution de (9).

PROPOSITION 2.- <u>Soit</u> A <u>une partie ouverte de</u> $\mathbb{R}^n$, f <u>une application de</u> A <u>dans</u> $\mathbb{R}$; <u>si les</u> n^2 <u>dérivées partielles secondes</u> D_iD_jf <u>existent et sont continues dans</u> A, f <u>est deux fois continûment différentiable dans</u> A (et on a en particulier les relations (17)).

En effet, pour tout indice i, les n fonctions D_jD_if $(1\leqslant j\leqslant n)$ sont les composantes de la dérivée totale de D_if (dérivée totale qui est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, identifié à F^n) ; on voit donc que D_if est continûment différentiable dans A (§1, cor.1 du th.3) ; mais cela signifie que la dérivée f' de f, dont les D_if sont les n composantes, est continûment différentiable, c'est-à-dire que f est deux fois continûment différentiable.

On définit maintenant par récurrence sur p une fonction p fois continûment différentiable dans une partie ouverte A d'un espace normé E , à valeurs dans un espace normé F : ce sera une fonction f (p-1)-fois continûment différentiable dans A , et dont la (p-1)-ème dérivée est continûment différentiable dans A ; sa dérivée est appelée la p-ème dérivée (ou p-ème différentielle) de f et notée $f^{(p)}$ ou $d^p f$. Par récurrence sur p , on voit que, pour tout $x \in A$, on peut identifier $f^{(p)}(x)$ à un élément de l'espace $\mathcal{L}_p(E;F)$ des applications p-linéaires continues de E dans F ; nous noterons $f^{(p)}(x).(h_1, h_2, \dots, h_p)$ la valeur de cette application pour un élément $(h_1, \dots, h_p)$ de E^p . On notera que l'application

$$h_1 \to f^{(p)}(x_0).(h_1, h_2, \dots h_p)$$

n'est autre que la différentielle, au point x_0 , de l'application

$$x \to f^{(p-1)}(x).(h_2, \dots, h_p) \quad .$$

La prop.1 se généralise comme suit :

PROPOSITION 3.- Si une application f de A dans F est p fois continûment différentiable, pour tout $x \in A$, l'application multilinéaire $f^{(p)}(x)$ de E^p dans F est symétrique.

La proposition étant vraie pour $p=2$, démontrons-la par récurrence sur p . Donnons à $h_3, \dots, h_p$ des valeurs fixes, et posons $g(x) = f^{(p-2)}(x).(h_3, \dots, h_p)$; d'après ce qui précède, l'application $(h_1, h_2) \to f^{(p)}(x).(h_1, h_2, h_3, \dots, h_p)$ est la dérivée seconde de $g(x)$; en vertu de la prop.1, on a donc

(18) $\quad f^{(p)}(x).(h_2, h_1, h_3, \dots, h_p) = f^{(p)}(x).(h_1, h_2, h_3, \dots, h_p)$.

D'autre part, si σ est une permutation quelconque des indices 2,3,...,p , il résulte de l'hypothèse de récurrence que $f^{(p-1)}(x).(h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(p)}) = f^{(p-1)}(x).(h_2, \dots, h_p)$; en prenant la différentielle des deux membres, on en tire que

(19) $f^{(p)}(x).(h_1, h_{\sigma(2)}, \ldots, h_{\sigma(p)}) = f^{(p)}(x).(h_1, h_2, \ldots, h_p)$

De (18) et (19), on déduit aussitôt que $f^{(p)}(x).(h_1, h_2, \ldots, h_p)$ ne change pas par une transposition échangeant l'indice 1 avec un quelconque des indices $\geqslant 2$; comme (19) montre en outre que $f^{(p)}(x).(h_1, \ldots, h_p)$ ne change pas non plus par une transposition sur les indices $\geqslant 2$, la proposition est démontrée.

Si une fonction f est telle qu'elle soit m fois continûment différentiable et que $f^{(m)}$ soit n fois continûment différentiable, alors f est m+n fois différentiable et on a $f^{(m+n)} = (f^{(m)})^{(n)}$; cela se démontre aussitôt par récurrence sur n, en appliquant la définition donnée ci-dessus.

Supposons maintenant que $E = \mathbb{R}^n$, et posons $h_i = (h_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n}$. Alors on voit aussitôt par récurrence sur p que la valeur, au point $(h_1, h_2, \ldots, h_p)$, de l'application multilinéaire symétrique $f^{(p)}(x)$ est $\sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)} D_{i_1} D_{i_2} \ldots D_{i_p} f(x).h_{1,i_1} h_{2,i_2} \ldots h_{p,i_p}$

la somme étant étendue aux n^p suites distinctes $(i_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de nombres de l'intervalle $[1, n]$. Les $D_{i_1} D_{i_2} \ldots D_{i_p}$ sont appelées les n^p <u>dérivées partielles p-èmes</u> de f ; deux de ces dérivées qui ne diffèrent que par une permutation des indices sont égales.

On démontre aisément par récurrence sur p la généralisation de la prop. 2 :

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> A <u>une partie ouverte de</u> $\mathbb{R}^n$, f <u>une application de</u> A <u>dans</u> F : <u>si les</u> n^p <u>dérivées partielles p-èmes de</u> f <u>existent et sont continues dans</u> A, f <u>est p-fois continûment différentiable dans</u> A.

On dit qu'une application d'une partie ouverte A d'un espace normé E dans un espace normé F est <u>indéfiniment différentiable</u> si elle est k fois continûment différentiable pour tout entier $k \geqslant 1$. Si $E = \mathbb{R}^n$, pour que

f soit indéfiniment différentiable, il faut et il suffit que les dérivées partielles de tout ordre de f existent dans A .

Exemples.- Considérons une application bilinéaire continue $(x, y) \to [x . y]$ de $E \times F$ dans G . Nous avons vu au § 1 n°2 que cette application est différentiable et a pour dérivée totale l'application

$$(h, k) \to [h . y] + [x . k]$$

au point (x, y). Si on désigne par f l'application bilinéaire considérée, l'application $(x, y) \to f'(x, y)$ est donc une application linéaire continue de $E \times F$ dans $\mathcal{L}(E \times F, G)$; on en déduit que f est deux fois différentiable et que sa dérivée seconde est l'application

$$((h_1, k_1), (h_2, k_2)) \to [h_1 . k_2] + [h_2 . k_1]$$

Cette application bilinéaire $f''(x, y)$ est donc indépendante de (x, y), d'où on déduit aussitôt que f est indéfiniment différentiable et que $f^{(p)}(x, y) = 0$ pour $p \geq 3$.

On montre de la même facon que si f est une application r-linéaire continue, elle est indéfiniment différentiable, et que $f^{(p)}$ est nulle pour $p > r$.

PROPOSITION 5.- <u>Soient</u> E,F,G <u>trois espaces normés</u>, A <u>une partie ouverte de</u> E , B <u>une partie ouverte de</u> F . <u>Soit</u> f <u>une application</u> p <u>fois continûment différentiable de</u> A <u>dans</u> B , g <u>une application</u> p <u>fois continûment différentiable de</u> B <u>dans</u> G . <u>Alors l'application composée</u> $h = g \circ f$ <u>est</u> p <u>fois continûment différentiable dans</u> A .

Démontrons la proposition par récurrence sur p . Pour p=1, la proposition résulte du th. des fonctions composées (§1,th.1) et du fait que l'application $(U, V) \to V \circ U$ de $\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est continue. Si maintenant on remarque que

$$h'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

et que la fonction bilinéaire $(U,V) \to V \circ U$ est indéfiniment différentiable, l'hypothèse de récurrence montre que si f' et g' sont $p-1$ fois continûment différentiables, il en est de même de h' ; mais cela signifie que si f et g sont p fois continûment différentiables, il en est de même de h.

Application.– Soit E une algèbre normée complète sur $\mathbb{R}$, ayant un élément unité, et soit A l'ensemble ouvert des éléments inversibles de E. Montrons que l'application $x \to x^{-1}$ est indéfiniment différentiable dans A. Nous avons déjà vu (§ 1, n°2) que cette application est différentiable et a pour différentielle l'application $h \to -x^{-1}hx^{-1}$ au point x. Si pour deux éléments u, v de E on désigne par $\varphi_2(u,v)$ l'application linéaire $h \to -uhv$ de E dans lui-même, on voit que la différentielle première de la fonction x^{-1} est l'élément $\varphi_2(x^{-1},x^{-1})$ de $\mathcal{L}(E)$; comme il est clair que l'application $(u,v) \to \varphi_2(u,v)$ est une application bilinéaire continue de $E\times E$ dans $\mathcal{L}(E)$, on voit par application de la prop. 5 que, si $x \to x^{-1}$ est p fois continûment différentiable, il en est de même de sa dérivée, et par suite $x \to x^{-1}$ est indéfiniment différentiable.

On voit de même que si E et F sont deux espaces de Banach isomorphes, et A l'ensemble des isomorphismes de E sur F, l'application $u \to u^{-1}$ de A dans $\mathcal{L}(F,E)$ est indéfiniment différentiable.

4. Opérateurs différentiels.

Soient A une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, F un espace normé complet et l'espace vectoriel des applications indéfiniment différentiables de A dans F. Les n dérivations partielles D_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{D}$, deux à deux permutables. Pour tout polynôme $u(X_1,\dots,X_n)$ à coefficients réels, on peut donc définir l'endomorphisme $u(D_1,\dots,D_n)$ de $\mathcal{D}$ obtenu en substituant D_k à X_k pour $1\leqslant k\leqslant n$

(*Alg.*, chap. IV, § 2, n°1) ; on sait (*loc. cit.*) que l'application $u \to u(D_1,\dots,D_n)$ est une *représentation* de l'algèbre des polynômes $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ dans l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{D}$. On peut ajouter ici que cette représentation est un *isomorphisme* : en effet, si on considère la fonction indéfiniment différentiable $f(x) = C.\exp(t_1x_1+\dots+t_nx_n)$ où les t_i sont n constantes réelles arbitraires, on a $u(D_1,\dots,D_n).f(x) = f(x).u(t_1,\dots,t_n)$, puisque cette relation est vraie pour chacun des monômes X_i ; notre assertion résulte donc de ce que $\mathbb{R}$ est un corps infini (*Alg.*, chap. IV, § 2, th. 3). Les endomorphismes $u(D_1,\dots,D_n)$ sont appelés *opérateurs différentiels*. L'*ordre* (total) d'un tel opérateur est par définition le *degré* (total) du polynôme u.

On peut en particulier exprimer la valeur $f^{(p)}(x).(z_1,\dots,z_p)$ de la différentielle p-ème de f sous forme de valeur d'un opérateur différentiel. Si on pose $z_i = (z_{ij})_{1 \leq j \leq n}$, on a en effet $f^{(p)}(x).(z_1,\dots,z_p) = (\prod_{i=1}^{p} (z_{i1}D_1+z_{i2}D_2+\dots+z_{in}D_n)).f(x)$, comme il résulte aussitôt par récurrence de la formule (10) du § 1.

Soit $u(D_1,\dots,D_n)$ un opérateur différentiel, et posons

(21) $\quad u(X_1+Y_1,\dots,X_n+Y_n) = \sum_k c_k v_k(X_1,\dots,X_n) w_k(Y_1,\dots,Y_n)$

où v_k (resp. w_k) est un monôme par rapport aux X_i (resp. Y_i) (décomposition bien déterminée, les monômes formant une base de l'algèbre des polynômes). On a alors la généralisation suivante de la formule de Leibniz : si $[x.y]$ est une fonction bilinéaire continue, définie dans un produit $F_1 \times F_2$ de deux espaces normés, et prenant ses valeurs dans un espace normé F, pour toute application indéfiniment différentiable f (resp. g) de A dans F_1 (resp. F_2), on a

$$(22) \qquad u(D_1,\ldots,D_n)\cdot[f\cdot g] = \sum_k c_k\big[(v_k(D_1,\ldots,D_n)\cdot f)\cdot(w_k(D_1,\ldots,D_n)\cdot g)\big]$$

En effet, on voit aussitôt par récurrence sur le degré de u qu'on a une formule de la forme (22), avec des coefficients c'_k qui sont indépendants des fonctions f et g considérées. Pour voir que ces coefficients sont les mêmes que dans (21), il suffit de prendre pour f et g des fonctions indéfiniment différentiables de forme particulière. Soit a (resp. b) un vecteur quelconque de F_1 (resp. F_2), et prenons

$$f(x) = a\exp(s_1x_1+\ldots+s_nx_n) \quad , \quad g(x) = b\exp(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)$$

d'où $[f(x)\cdot g(x)] = [a\cdot b]\,\exp((s_1+t_1)x_1+\ldots+(s_n+t_n)x_n)$

On a donc $u(D_1,\ldots,D_n)\cdot[f\cdot g] = [f\cdot g]\,u(s_1+t_1,\ldots,s_n+t_n)$

et de même $v_k(D_1,\ldots,D_n)\cdot f = f\cdot v_k(s_1,\ldots s_n)$

$$w_k(D_1,\ldots,D_n)\cdot g = g\cdot w_k(t_1,\ldots,t_n)$$

En supposant que $[x\cdot y]$ n'est pas identiquement nulle (sans quoi la formule (22) est triviale), on voit qu'on a, en prenant a et b tels que $[a\cdot b]\neq 0$

$$u(s_1+t_1,\ldots,s_n+t_n) = \sum_k c'_k v_k(s_1,\ldots,s_n)w_k(t_1,\ldots,t_n)$$

identiquement en s_i et t_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, ce qui prouve que $c'_k = c_k$ (<u>Alg.</u>, chap. IV, § 2, th. 3).

On définit aussi de façon évidente la notion d'opérateur différentiel pour les fonctions p fois continûment différentiables dans A ; un opérateur $u(D_1,\ldots,D_n)$ n'est alors défini que si le degré total de u est $\leqslant p$.

5. <u>La formule de Taylor.</u>

Etant donnée une fonction p fois continûment différentiable f définie dans une partie ouverte A d'un espace normé E, pour tout vecteur $h\in E$ et tout $x\in A$, nous poserons $f^{(p)}(x)\cdot h^p = f^{(p)}(x)\cdot(h,h,\ldots,h)$.

PROPOSITION 6.– Soit f une fonction p fois continûment différentiable dans A , à valeurs dans F . Pour tout $x \in A$, on a

$$f(x+h)=f(x)+\frac{1}{1!}f'(x).h+\frac{1}{2}f''(x).h^2+\dots+\frac{1}{p!}f^{(p)}(x).h^p+ \tag{23}$$
$$+o(\|h\|^p)$$

lorsque h tend vers 0 dans E (formule de Taylor).

En effet, considérons une boule de centre x et de rayon r contenue dans A . Pour $\|h\| < r$, la fonction de la variable réelle $g(t)=f(x+th)$ est p fois continûment dérivable dans l'intervalle $[0,1]$ et on a $g^{(k)}(t)=f^{(k)}(x+th).h^k$ pour $1\leqslant k\leqslant p$, comme on le voit aussitôt par récurrence sur k . Si M est la borne supérieure de $\|f^{(p)}(x+th)-f^{(p)}(x)\|$ pour $0\leqslant t\leqslant 1$ et $\|h\|\leqslant r$, la formule de Taylor appliquée à la fonction $g(t)$ (Fonct.var.réelle, chap.II, §1,n°6) montre que l'on a

$$\|g(1)-g(0)-\frac{1}{1!}g'(0)-\dots-\frac{1}{p!}g^{(p)}(0)\|\leqslant\frac{M}{p!}\|h\|^p$$

et comme M tend par hypothèse vers 0 avec r , cela prouve la formule (23).

Dans le cas particulier où $E=\mathbb{R}^n$, la formule de Taylor s'écrit

$$f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)=\sum_{k=0}^{p}(h_1D_1+\dots+h_nD_n)^k f(x)+o(\|h\|^p)$$

ou encore

$$f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)=\sum\frac{h_1^{k_1}h_2^{k_2}\dots h_n^{k_n}}{k_1!\,k_2!\dots k_n!}D_1^{k_1}D_2^{k_2}\dots D_n^{k_n}f(x)+o(\|h\|^p)$$

la somme étant étendue à tous les systèmes d'entiers $\geqslant 0$, $(k_1,\dots,k_n)$ tels que $k_1+k_2+\dots+k_n\leqslant p$. Il est parfois commode d'introduire les notations suivantes : pour tout élément $k=(k_1,\dots,k_n)$ de $\mathbb{N}^n$, on pose $D^k=D_1^{k_1}D_2^{k_2}\dots D_n^{k_n}$, $h^k=h_1^{k_1}h_2^{k_2}\dots h_n^{k_n}$, et $k!=k_1!k_2!\dots k_n!$; on a alors

$$f(x+h)=\sum\frac{1}{k!}h^k D^k f(x)+o(\|h\|^p)$$

la somme étant étendue à tous les éléments k tels que $\sum_{i=1}^{n}k_i\leqslant p$.

6. Application : prolongement d'une fonction différentiable.

PROPOSITION 7. - Soit f une fonction p fois continûment différentiable, définie dans un ensemble ouvert $A \subset \mathbb{R}^n$, rencontrant l'hyperplan coordonné d'équation $x_1=0$. On suppose que $f(x)=0$ dans $A \cap H$; il existe alors une fonction $g(x)$ p-1 fois continûment différentiable dans A et telle que $f(x)=x_1\, g(x)$.

Nous écrirons $f(x)=f(x_1, y)$, où $y=(x_2,\dots,x_n)$; d'après la formule de Taylor, on a

$$f(x_1, y)=x_1 D_1 f(0,y)+\frac{1}{2!}x_1^2 D_1^2 f(0,y)+\dots+\frac{1}{p!}x_1^p D_1^p f(0,y)+r(x)$$

où le coefficient de x_1^k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ est une fonction $(p-k)$ fois continûment différentiable dans $A \cap H$, et où pour tout point $x_0 \in A \cap H$, et tout $c>0$ il existe un voisinage V de x_0 tel que $\| r(x) \| \leqslant c\, |x_1|^p$ pour tout $x \in V$. La fonction $f(x)/x_1$ est évidemment p fois continûment différentiable dans le complémentaire B de $A \cap H$ par rapport à A ; en outre, elle se prolonge par continuité à A en prenant la valeur $D_1 f(0,y)$ dans $A \cap H$.

Soit D un opérateur différentiel monôme par rapport à $D_2,\dots,D_n$, de degré total r, et soit k un nombre tel que $r+k \leqslant p-1$; il suffira de prouver que $D_1^k D(f(x)/x_1)$ tend vers $\frac{1}{k+1} D_1^{k+1} D f(0,y)$ lorsque x tend (en restant dans B) vers un point x_0 de $A \cap H$ (Fonct. var. réelle, chap. I, § 2, prop. 6). La proposition serait évidente si on avait $r(x)=0$; en retranchant de $f(x)$ la fonction $f_1(x)=x_1 D_1 f(0,y)+\dots + \frac{1}{p!}x_1^p D_1^p f(0,y)$, on peut donc se borner au cas où $D_1^k f(0,y)=0$ dans $A \cap H$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$. On a alors, d'après la formule de Leibniz

$$D_1^k D(f(x)/x_1)=\frac{1}{x_1} D_1^k D f(x)-\frac{k}{x_1^2} D_1^{k-1} D f(x)+\binom{k}{2}\frac{2!}{x_1^3} D_1^{k-2} D f(x)-\dots+ (-1)^k \frac{k!}{x_1^{k+1}} D f(x).$$

~~Or, la formule de Taylor appliquée à la fonction (p-r-k+1) fois conti-~~

~~nûment différentiable~~ ...

Or, la formule de Taylor appliquée à la fonction $(p-r-k+h)$ fois continûment différentiable $D_1^{k-h}Df(x)$ montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_h de x_0 tel que $\| D_1^{k-h}Df(x) \| \leq \varepsilon |x_1|^{p-r-k+h}$; comme $p-k-r \geqslant 1$ par hypothèse, on voit que $D_1^k Df(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- Si f est indéfiniment différentiable et $f(x)=0$ dans $A \cap H$, il existe une fonction $g(x)$ indéfiniment différentiable dans A et telle que $f(x)=x_1 g(x)$.

On peut en effet appliquer la prop.7 pour une valeur quelconque de p.

On notera que si f est seulement p fois continûment différentiable, g n'est pas nécessairement p fois différentiable, comme le montre l'exemple où $A=\mathbb{R}$ et $f(x)=x^{4/3}$. On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 8.- Soit f une fonction numérique p fois continûment différentiable dans $A \subset \mathbb{R}^n$, et telle que $f(x)=0$ dans $A \cap H$; il existe alors une fonction p fois continûment différentiable g_1 telle que $(f(x))^{p+2}=x_1 g_1(x)$.

Remarquons que toute dérivée d'ordre s de f^{p+2}, pour $s \leqslant p$, est un polynôme par rapport à f et à ses dérivées d'ordre $\leqslant s$, dans lequel f^{p+2-s} est en facteur, comme on le voit aussitôt par récurrence sur s. Avec les notations de la prop.8, toute dérivée $D_1^k D(f^{p+2})$ est donc nulle pour $x_1=0$, quel que soit r tel que $r+k \leqslant p$. La proposition sera encore démontrée si on prouve que, pour $r+k \leqslant p$, $D_1^k D((f(x))^{p+2}/x_1)$ tend vers 0 en tout point de $A \cap H$. Or, en appliquant de la même manière la formule de Leibniz, cela résulte de ce que $\frac{1}{x_1^{h+1}} D_1^{k-h} D((f(x))^{p+2})$ est produit de $\frac{1}{x_1^{h+1}}(f(x))^{h+2}$ par un polynôme par rapport à f et à ses dérivées d'ordre $\leqslant p$; comme $f(x)/x_1$ tend vers une limite finie au point x_0, la proposition est démontrée.

7. Approximation des fonctions différentiables par des polynômes.

Le th. d'approximation de Stone-Weierstrass (Top.gén.,chap.X, § 5,th.3) peut être beaucoup précisé pour les fonctions numériques p fois continûment différentiables dans une partie ouverte d'un espace numérique $\mathbb{R}^n$:

PROPOSITION 9.- Soit f une fonction numérique indéfiniment différentiable (resp. p fois continûment différentiable) dans une partie ouverte $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors il existe une suite (g_m) de polynômes telle que, pour tout opérateur différentiel D (resp. tout opérateur différentiel d'ordre $\leq p$), Dg_m tende uniformément vers Df dans toute partie compacte de A .

Posons $K_m(x)=\exp(-m\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$; nous démontrerons d'abord les lemmes suivants :

Lemme 1.- Soit ψ une fonction bornée dans $\mathbb{R}^n$, nulle dans le complémentaire d'un ensemble ouvert relativement compact B , et continue dans B . Alors la suite des fonctions

$$\theta_m(x)=\alpha_m\int K_m(z)\psi(x+z)d\mu(z)$$

où μ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, et $1/\alpha_m=\int K_m(z)d\mu(z)$, converge uniformément vers ψ dans toute partie compacte de B .

On peut écrire

$$\theta_m(x)-\psi(x)=\alpha_m\int K_m(z)(\psi(x+z)-\psi(x))d\mu(z)$$

Soit H une partie compacte de B ; pour tout ε , il existe un nombre r inférieur à la distance de H à $\complement B$ et tel que pour tout $x\in H$ et tout z tel que $\|z\| < r$ (la norme étant la norme euclidienne), on ait $|\psi(x+z)-\psi(x)| \leq \varepsilon$. D'autre part, pour $\|z\| \geq r$, on a $|K_m(z)| \leq e^{-mr^2}$; si $M=\sup_{x\in B}|\psi(x)|$, on peut donc écrire

$$|\theta_m(x)-\psi(x)| \leq M\alpha_m\exp(-mr^2)+\varepsilon$$

pour tout $x\in H$. Or, on a, d'après le th. de Lebesgue-Fubini

$$1/\alpha_m = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mx^2}\,dx\right)^n = \left(\frac{\pi}{m}\right)^{\frac{n}{2}}$$

si on tient compte de la formule (22) de Fonct.var.réelle, chap.VII, §1. Comme pour tout r fixe, on a $e^{-mr^2} = o(m^{-\alpha})$ pour tout $\alpha > 0$, on voit que dès que m est assez grand, on a $M\alpha_m e^{-mr^2} \leqslant \alpha$, et par suite

$$\left| g_m(x) - \psi(x) \right| \leqslant 2\varepsilon$$

pour tout $x \in H$, ce qui démontre le lemme.

Lemme 2.- Soit f une fonction numérique indéfiniment différentiable (resp. p fois continûment différentiable) dans une partie ouverte $A \subset \mathbb{R}^n$. Pour toute partie compacte $H \subset A$ et tout voisinage ouvert relativement compact B de H contenu dans A, il existe une fonction g indéfiniment différentiable (resp. p fois continûment différentiable) dans $\mathbb{R}^n$, de support contenu dans B, et égale à f dans H.

Tout revient à montrer qu'il existe une fonction h indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^n$, égale à 1 dans H et dont le support est contenu dans B ; la fonction g, égale à hf dans A, à 0 dans $\complement A$, répondra à la question.

Pour tout nombre $a > 0$, soit $\varphi(t,a)$ la fonction égale à $\exp(-t^2/(t^2-a^2)^2)$ pour $|t| < a$, et à 0 pour $|t| \geqslant a$; on vérifie aisément que φ est indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}$, et son support est évidemment l'intervalle $[-a,+a]$. Soit $4r$ la distance de H à $\complement B$, et soit H_1 l'ensemble compact des points de B dont la distance à $\complement B$ est $\geqslant 3r$; pour tout $x \in H_1$, soit $\varphi_x(z) = \varphi(\|z-x\|, r)$; il est immédiat que φ_x est indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^n$, que son support est contenu dans la boule fermée de centre x et de rayon r, et que $\varphi_x(z) > 0$ pour $\|z-x\| \leqslant r/2$. Comme H_1 est compact, il existe un nombre fini de points $x_i \in H_1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ telles que les boules ouvertes de centre x_i et de rayon $r/2$ forment un recouvrement de H_1 ; si on pose $h_i(z) = \varphi_{x_i}(z)$ la fonction $\sum_{i=1}^{n} h_i$ est donc indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^n$, et >0 pour tout point de H_1. Soit I l'ensemble des indices i tels que la boule ouverte de centre x_i et de rayon r rencontre H ; la réunion de ces boules est un ensemble ouvert contenant H et contenu dans H_1. La fonction $\sum_{i\in I} h_i$ est indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^n$, et égale par construction à $\sum_{i=1}^{n} h_i$ dans H ; par suite, la fonction h égale à $\sum_{i\in I} h_i / \sum_{i=1}^{n} h_i$ dans $\mathring{H}_1$, à 0 dans $\complement \mathring{H}_1$, répond à la question.

Ces lemmes étant démontrés, montrons que pour tout ensemble compact $H\subset A$, tout entier k et tout $\varepsilon>0$, il existe un polynôme g tel que $|Df(x)-Dg(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x\in H$ et tout opérateur différentiel D d'ordre $\leqslant k$ (avec k quelconque, si f est indéfiniment différentiable, $k\leqslant p$ si f est p fois continûment différentiable). En premier lieu, il existe une fonction f_1 indéfiniment différentiable (resp. p fois continûment différentiable) de support compact, égale à f dans H (lemme 2). En remplaçant f par f_1, on peut donc supposer que f est à support compact S. Considérons alors (avec les notations du lemme 1) les fonctions

$$h_m(x)=\alpha_m\int K_m(z)f(x+z)d\mu(z)$$

Il résulte du th. de Lebesgue que, pour tout opérateur différentiel D, on a

$$Dh_m(x)=\alpha_m\int K_m(z)Df(x+z)d\mu(z) ,$$

et d'après le lemme 1, Dh_m converge uniformément vers Df dans toute partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Mais on a aussi

$$Dh_m(x)=\alpha_m\int K_m(z-x)Df(z)d\mu(z)$$

puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translation. Or, le développement de Taylor de $K_m(y)$ converge uniformément dans toute partie compacte de $\mathbb{R}^n$; on peut donc trouver un polynôme $P_m(y)$ tel que $\left|\alpha_m\int(K_m(z-x)-P_m(z-x))Df(z)d\mu(z)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ pour tout opérateur différentiel D d'ordre $\leqslant k$ et tout $x\in H$ puisque la fonction intégrée est nulle hors de l'ensemble compact $S+S$. Si m a été pris tel que $|Dh_m(x)-Df(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in H$ et tout opérateur D d'ordre $\leqslant k$, la fonction $g(x)=\alpha_m \int P_m(z-x)f(z)d\mu(z)$ qui est évidemment un polynôme, répond à la question.

Pour achever la démonstration, considérons une suite croissante (H_m) de parties compactes de A, dont A soit la réunion ; pour tout indice m, il existe un polynôme g_m tel que $|Df(x)-Dg_m(x)| \leqslant 1/m$ pour tout $x \in H_m$ et tout opérateur D d'ordre $\leqslant m$; il est clair que la suite (g_m) répond aux conditions de l'énoncé de la prop. 9.

Exercices.- 1) a) Soit f une application continûment différentiable d'une partie ouverte A d'un espace normé E dans un espace normé F. On suppose que f est deux fois différentiable au point $x_0 \in A$, et on pose $\Delta^2 f(x_0;h,k)=f(x_0+h+k)-f(x_0+h)-f(x_0+k)+f(x_0)$ (différence seconde de f). Montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r>0$ tel que les conditions $\|h\| \leqslant r$ et $\|k\| \leqslant r$ entraînent

$$\|\Delta^2 f(x_0;h,k)-f''(x_0).(h,k)\| \leqslant \varepsilon(\|h\|+\|k\|)^2$$

(utiliser la définition de la dérivée seconde de f, et appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $g(t)=f(x_0+th+k)-f(x_0+th)$ de la variable réelle t).

b) En déduire que $f''(x_0)$ est une fonction bilinéaire symétrique, et que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r>0$ tel que les conditions $\|h\| \leqslant r$, $\|k\| \leqslant r$ entraînent

$$\|\Delta^2 f(x_0;h,k)-f''(x_0).(h,k)\| \leqslant \varepsilon \|h\| . \|k\|$$

(utiliser la démonstration de a)).

2) a) Soit f une fonction continûment différentiable dans un voisinage ouvert V d'un point x_0 ; montrer que si f est deux fois différentiable dans V pour tout $x \in V$ et tout couple de vecteurs h, k assez petits, on a

$$\| \Delta^2 f(x;h,k) - f''(x_0)\cdot(h,k) \| \leqslant \|h\| \cdot \|k\| \cdot \sup_{z\in P} \| f''(z) - f''(x_0) \|$$

P désignant le parallélogramme formé des points $x+uh+vk$ pour $0\leqslant u\leqslant 1$, $0\leqslant v\leqslant 1$ (supposé contenu dans V).

b) En déduire que, pour que f'' soit continue au point x_0 , il faut et il suffit que

$$\lim \frac{\| f(y+z-x) - f(y) - f(z) + f(x) - f''(x_0)\cdot(y-x,\, z-x) \|}{\|y-x\| \cdot \|z-x\|} = 0$$

lorsque le point (x,y,z) tend vers (x_0, x_0, x_0) de sorte que les trois points x, y, z soient distincts (utiliser l'exerc.1).

3) Soit f une fonction continûment différentiable définie dans une partie ouverte A de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'au voisinage d'un point (a,b) de A , la dérivée $D_2(D_1 f)$ existe et est continue.

a) Montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, pour h et k assez petits, on a

$$\| \Delta^2 f(a,b;h,k) - D_2D_1 f(a,b)hk \| \leqslant \varepsilon\, |hk|$$

(considérer la fonction $g(x) = f(a+x, b+k) - f(a+x, b) - D_2D_1 f(a,b)xk$ et lui appliquer le th. des accroissements finis).

b) En déduire que $D_1(D_2 f)$ existe au voisinage du point (a,b) et est égale à $D_2(D_1 f)$ en tout point de ce voisinage.

c) Donner un exemple de fonction satisfaisant aux conditions précédentes et telle que $D_1(D_1 f)$ et $D_2(D_2 f)$ n'existent en aucun point (cf. <u>Fonct. var. réelle</u>, chap. I, § 1, exerc. 2 et 3).

4) Soit $f(x,y)$ la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0)=0$, $f(x,y) = xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$. Montrer que les dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$, mais que $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \neq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ au point (0,0).

5) Soit f une fonction n fois différentiable en un point x_0 d'un espace normé E . Démontrer que si on pose

$$\Delta^n f(x_0;h_1,h_2,\dots,h_n) = \Delta^{n-1} f(x_0+h_n;h_1,\dots,h_{n-1})$$
$$-\Delta^{n-1} f(x_0;h_1,\dots,h_{n-1})$$

(différence n-ème de f au point x_0), pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r>0$ tel que les n inégalités $\|h_i\| \leqslant r$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ entraînent

$$\|\Delta^n f(x_0;h_1,\dots,h_n) - f^{(n)}(x_0).(h_1,\dots,h_n)\| \leqslant \varepsilon\|h_1\|.\|h_2\|\dots\|h_n\|$$

(Soit $g_p(x) = f^{(n-p)}(x).(h_1,\dots,h_{n-p})$; démontrer par récurrence sur p que

$$\|\Delta^p g_p(x_0;h_{n-p+1},\dots,h_n) - f^{(n)}(x_0).(h_1,\dots,h_n)\| \leqslant \varepsilon\|h_1\|\dots\|h_n\|$$

pour $\|h_i\| \leqslant r$).

6) Soit f une fonction différentiable en tout point d'un ensemble ouvert $A\subset E$; on suppose que, pour tout $h\in E$, l'application $x\to f'(x).h$ est différentiable en un point $x_0\in A$, et on désigne par $k\to u_h(k)$ sa différentielle en ce point. Montrer que $u_h(k)=u_k(h)$ quels que soient h et k (se ramener au cas où E est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, et utiliser l'exerc.1 b)). En déduire que pour tout $k\in E$, $h\to u_h(k)$ est fonction linéaire continue de h. Si E est <u>complet</u>, conclure de là que l'application bilinéaire $(h,k)\longrightarrow u_h(k)$ est continue dans $E\times E$ (<u>Top.gén.</u>, chap.IX, § 5, exerc.22), et que f est continûment différentiable au point x_0 (montrer que l'application linéaire $(f'(x_0+k)-f'(x_0))/\|k\|$ reste bornée lorsque k tend vers 0, en utilisant le th. de <u>Esp.vect. top.</u>, chap.III, §).

7) Soit F l'espace de Banach des suites bornées $x=(x_n)$ de nombres réels, muni de la norme $\|x\| = \sup_n |x_n|$; soit E le sous-espace normé (non complet) de F formé des suites $x=(x_n)$ n'ayant qu'un nombre fini de termes $\neq 0$. On définit une application f de E dans E en se donnant, pour chaque n une application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f_n(0)=0$, et en posant, pour tout $x=(x_n)\in E$, $f(x)=(f_n(x_n))$.

a) Montrer que, pour que f soit différentiable au point 0, il faut et il suffit que les dérivées $f'_n(0)$ existent et forment un ensemble borné, et que $\frac{1}{x} f_n(x) - f'_n(0)$ tende uniformément (par rapport à n) vers 0 lorsque x tend vers 0 dans $\mathbb{R}$ en restant $\neq 0$.

b) Montrer que, pour que f soit continûment différentiable dans un voisinage de 0 dans E, il faut et il suffit que, dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, les fonctions f'_n constituent un ensemble uniformément borné et équicontinu (autrement dit un ensemble relativement compact pour la topologie de la convergence compacte).

c) Si f est différentiable dans un voisinage de 0 dans E, et si, pour tout n, $f''_n(0)$ existe, montrer que pour tout $h \in E$, l'application $x \to f'(x).h$ est différentiable au point $x = 0$; montrer que ces conditions peuvent être remplies sans que f soit continûment différentiable au voisinage de 0, et que, si $k \longrightarrow u_h(k)$ est la différentielle de $x \to f'(x).h$ au point 0, la fonction bilinéaire $(h, k) \longrightarrow u_h(k)$ n'est pas nécessairement continue dans $E \times E$.

d) Soit $\bar{E}$ le complété de E, adhérence de E dans F, formé des suites $x = (x_n)$ de nombres réels telles que $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$. On définit encore une application f de $\bar{E}$ dans $\bar{E}$ par la formule $f(x) = (f_n(x_n))$, où (f_n) est une suite d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \to \infty} f_n(x_n) = 0$ pour toute suite (x_n) tendant vers 0. Montrer que si on prend $f_n(x) = \frac{x}{n} - \frac{1}{n^2} \log(1+nx)$, la fonction f est telle que, pour tout $h \in E$, la fonction $x \to f'(x).h$ est différentiable au point 0, mais que f n'est pas deux fois différentiable en ce point.

8) Soit f une application d'une partie ouverte A d'un espace normé E dans un espace normé F, n fois continûment différentiable dans A. Par récurrence sur p $(1 \leqslant p \leqslant n)$, on définit la p-ème <u>différentielle complète</u> de f dans A, de la façon suivante : la première différentielle complète de f est l'application $(x, z) \longrightarrow f'(x).z$ de $A \times E$ dans F ;

la p-ème différentielle complète étant supposée définie comme une application $(n-p)$ fois continûment différentiable

$$(x\,;z^{(1)},z^{(2)},\dots,z^{(p)}) \to \bar{d}^p f(x\,;z^{(1)},z^{(2)},\dots,z^{(p)})$$

de $A\times E^p$ dans F, la $(p+1)$-ème différentielle complète de f est l'application

$$(x\,;z^{(1)},\dots z^{(p+1)}) \to d(\bar{d}^p f(x\,;z^{(1)},\dots,z^{(p)})).h$$

où $h=(z^{(1)},\dots,z^{(p+1)})\in E^{p+1}$.

a) Montrer que l'on a

$$\bar{d}^p f(x\,;z^{(1)},\dots,z^{(p)}) = \sum c_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k} f^{(k)}(x).(z^{(\alpha_1)},\dots,z^{(\alpha_k)})$$

où, pour chaque indice $k\leq p$, la suite $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$ parcourt l'ensemble des suites d'entiers croissantes telles que $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=p$, et où $c_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$ est un entier >0. En outre, ce coefficient est égal à 1 pour chacune des deux suites extrêmes $(1,1,\dots,1)$ et (p).

b) Soit g une application n fois continûment différentiable d'une partie ouverte de F, contenant $f(A)$, dans un espace normé G, et soit $u=g\circ f$. Montrer qu'on a $\bar{d}^n u(x\,;z^{(1)},\dots,z^{(n)}) =$

$$= \bar{d}^n g(f(x);\bar{d}^1 f(x\,;z^{(1)}),\bar{d}^2 f(x\,;z^{(1)},z^{(2)}),\dots,\bar{d}^n f(x\,;z^{(1)},\dots,z^{(n)}))$$

9) Soit ψ une fonction numérique intégrable dans $\mathbb{R}^n$ (pour la mesure de Lebesgue). Avec les notations de la prop. 9, montrer que θ_m tend en moyenne vers ψ lorsque m croît indéfiniment (utiliser le fait que la fonction $\psi(x+z)$ est arbitrairement voisine de $\psi(x)$ pour la topologie de la convergence en moyenne, lorsque z est assez petit ; cf. Intégr., chap. VIII, §).

3. Fonctions implicites.

1. La méthode des approximations successives.

THÉORÈME 1.- Soient E et F deux espaces de Banach, U (resp. V) une boule ouverte dans E (resp. F) de centre 0 et de rayon α (resp. β). Soit v une application continue de $U \times V$ dans F, telle que

$\|v(x, y_1) - v(x, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$ quels que soient $x \in U$, y_1 et y_2 dans V, k étant un nombre tel que $0 < k < 1$. Dans ces conditions, si on a $\|v(x, 0)\| < \beta(1-k)$ pour tout $x \in U$, il existe une fonction et une seule f, définie dans U, à valeurs dans V, et telle que l'on ait

$$(1) \qquad f(x) = v(x, f(x))$$

quel que soit $x \in U$; en outre f est continue dans U.

Soit x un point quelconque de U ; nous allons montrer qu'il existe une suite (y_n) de points de V telle que $y_0 = 0$ et $y_n = v(x, y_{n-1})$ pour tout $n \geqslant 1$. Il suffit de prouver que cette définition par récurrence est possible, c'est-à-dire que si y_p est défini pour $1 \leqslant p \leqslant n$, $v(x, y_n)$ appartient encore à V. Or, on a alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, $y_p - y_{p-1} = v(x, y_{p-1}) - v(x, y_{p-2})$, d'où $\|y_p - y_{p-1}\| \leqslant k . \|y_{p-1} - y_{p-2}\|$, et, par récurrence sur p, $\|y_p - y_{p-1}\| \leqslant k^{p-1} \|y_1\|$. On en conclut que

$$(2) \qquad \|y_p\| \leqslant (1+k+\ldots+k^{p-1})\|y_1\| \leqslant \|y_1\| / (1-k) < \beta$$

ce qui établit notre assertion. En outre, il est clair, par récurrence sur n, que l'on a $y_n = f_n(x)$, où f_n est continue dans U. Enfin, comme $\|f_n(x) - f_{n-1}(x)\| \leqslant k^{n-1}\beta$, la série de terme général $f_n - f_{n-1}$ converge normalement dans F ; comme F est complet, cette série converge dans F, et sa somme f est continue dans U ; en outre, en passant à la limite dans (2), il vient $\|f(x)\| \leqslant \|v(x, 0)\| / (1-k) < \beta$ pour tout $x \in U$, autrement dit f est une application de U dans V ; passant à la limite dans la relation $f_n(x) = v(x, f_{n-1}(x))$ pour tout $x \in U$, on voit que f satisfait à l'équation (1).

Reste à voir que si g est une application de U dans V telle que $g(x)=v(x,g(x))$, on a nécessairement $g=f$. Or, on déduit de cette relation et de (1) que

$$\|g(x)-f(x)\| = \|v(x,g(x))-v(x,f(x))\| \leqslant k.\|g(x)-f(x)\|$$

ce qui entraîne $g(x)-f(x)=0$, puisque $k<1$.

La conclusion du th.1 n'est plus valable si l'espace F n'est pas supposé complet (exerc.7).

COROLLAIRE 1 (théorème du point fixe).- Soit F un espace de Banach, V une boule ouverte dans F de centre y_0 et de rayon β. Soit v une application continue de V dans F, telle que $\|v(y_1)-v(y_2)\| \leqslant k.\|y_1-y_2\|$ pour tout couple de points de V, avec $0<k<1$. Dans ces conditions, si on a $\|v(y_0)-y_0\| \leqslant \beta(1-k)$, il existe un point et un seul $z \in V$ tel que $z=v(z)$.

Il suffit d'appliquer le th.1 à l'application $(x,y) \to v(y+y_0)-y_0$, qui ne dépend pas de x.

COROLLAIRE 2.- Soit F un espace de Banach, V une boule ouverte dans F, de centre 0 et de rayon β. Soit w une application de V dans F, telle que $\|w(y_1)-w(y_2)\| \leqslant k.\|y_1-y_2\|$ pour tout couple de points de V, avec $0<k<1$. Dans ces conditions, si on a $\|w(0)\| \leqslant \frac{1}{2}\beta(1-k)$, il existe un voisinage ouvert $W \subset V$ de 0 tel que la restriction à W de l'application $y \to g(y)=y+w(y)$ soit un homéomorphisme de W sur un voisinage ouvert de 0.

Appliquons le th.1 à la fonction $v(x,y)=x-w(y)$, et à la boule U de centre 0 et de rayon $\alpha=\beta(1-k)-\|w(0)\|$; la condition $\|v(x,0)\|<\beta(1-k)$ est alors vérifiée dans U, et il existe donc une fonction f continue dans U à valeurs dans V et telle que $f(x)=x-w(f(x))$, ou encore telle que $g(f(x))=x$ dans U. Pour voir que f est un homéomorphisme de U sur $f(U) \subset V$, il suffit de remarquer que g est une application biunivoque et continue de V sur $g(V)$, car la relation $g(y_1)=g(y_2)$ entraîne $\|y_1-y_2\| = \|w(y_2)-w(y_1)\| \leqslant k.\|y_1-y_2\|$, et par suite $y_1=y_2$; g est donc une application biunivoque et continue de $W=f(U)$ sur U , dont l'application réciproque f est continue, donc un homéomorphisme. En outre $W=\overset{-1}{g}(U)$ est ouvert dans F puisque U est ouvert dans F . Reste à voir que $0 \in W$, ou encore que $g(0) \in U$, ce qui signifie que $\|w(0)\| < \alpha$, condition équivalente à $\|w(0)\| < \frac{1}{2}\beta(1-k)$.

2. Application aux équations différentielles (en petits caractères).

Comme application du théorème du point fixe, nous allons montrer comment on peut retrouver le théorème de Cauchy sur l'existence des intégrales d'une équations différentielle

(3) $$x' = f(t,x)$$

où f est lipschitzienne dans $I \times H$ (I intervalle de $\mathbb{R}$, H ensemble ouvert dans un espace de Banach E) (Fonct.var.réelle, chap.IV, §1,th.1). On sait qu'une telle intégrale (définie dans un intervalle $J \subset I$ et prenant ses valeurs dans H) est une fonction continue u satisfaisant à la relation

(4) $$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

où $t_0 \in J$ et $x_0 \in H$. Les points $t_0 \in I$ et $x_0 \in H$ étant donnés arbitrairement, supposons que f soit lipschitzienne pour la constante h , et soit J_0 un intervalle compact contenant t_0, contenu dans I , et dont la longueur ℓ_0 satisfasse à l'inégalité $h\ell_0 < 1$; soit d'autre part S une boule ouverte de centre x_0 et de rayon r contenue dans H , et désignons par M la borne supérieure de $\|f(t,x)\|$ dans $J_0 \times S$. Soit F l'espace des applications continues de J_0 dans E , muni de la norme $\|u\| = \sup_{t \in J_0} \|u(t)\|$; on sait que F est complet (Top.gén, chap.X, §2, th.1) nous identifierons l'application constante égale à x_0 avec l'élément x_0, et nous désignerons par V la boule ouverte dans F , de centre x_0 et de rayon r ; il est clair que, pour toute fonction $u \in V$, l'application

$$t \longrightarrow x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

est définie dans J_0 (puisque $u(t) \in S$ pour tout $t \in J_0$) et continue dans cet intervalle ; autrement dit, c'est un élément de F , que nous désignerons par $g(u)$; une intégrale de (3) est donc un élément $u \in F$ satisfaisant à la relation $u = g(u)$. Montrons qu'on peut appliquer le cor.1 du th.1 pourvu que ℓ_0 soit assez petit ; en effet, on a, pour tout $t \in J_0$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))ds \right\| \leq h \int_{t_0}^{t} \| u(s) - v(s) \| ds \leq h\ell_0 \| u - v \|$$

autrement dit $\| g(u) - g(v) \| \leq h\ell_0 \| u - v \|$, et on a bien $k = h\ell_0 < 1$. Il faut en outre que $\| g(x_0) - x_0 \| \leq r(1-k)$, ce qui sera certainement vérifié si on a $M\ell_0 \leq r(1-k) = r(1-h\ell_0)$, c'est-à-dire $\ell_0 \leq r/(M+hr)$., on a donc bien démontré l'existence et l'unicité de l'intégrale de (3) prenant la valeur x_0 au point t_0 , dans un intervalle J_0 assez petit contenant t_0 .

3. Fonctions implicites.

THEOREME 2 (théorème des fonctions implicites).– Soient E,F,G trois espaces de Banach, et soit f une application continûment différentiable d'une partie ouverte A de $E \times F$ dans G . Soit (x_0, y_0) un point de A tel que l'on ait $f(x_0, y_0) = 0$ et que la dérivée partielle $f'_y(x_0, y_0)$ soit un isomorphisme de F sur G . Dans ces conditions, pour toute boule ouverte U assez petite de centre x_0 , il existe une application continue et une seule u de U dans F satisfaisant aux conditions $u(x_0) = y_0$, $(x, u(x)) \in A$ pour tout $x \in U$ et $f(x, u(x)) = 0$ pour tout $x \in U$. En outre, cette fonction est continûment différentiable dans U .

Désignons par T_0 l'isomorphisme $f'_y(x_0, y_0)$ de F sur G , par T_0^{-1} l'isomorphisme réciproque, et écrivons la relation $f(x, y) = 0$ sous la forme équivalente $y = y - T_0^{-1} \cdot f(x, y) = g(x, y)$. Montrons qu'on peut appliquer à cette équation le th.1 (dans lequel x et y doivent être remplacés par $x - x_0$ et $y - y_0$), dans un voisinage convenable de (x_0, y_0). En effet, par définition de $\underline{T}_0$, on a

$$g(x, y_1) - g(x, y_2) = \underline{T}_0^{-1} \cdot (f'_y(x_0, y_0) \cdot (y_1 - y_2) - (f(x, y_1) - f(x, y_2))).$$

Soit ε un nombre > 0 tel que $\varepsilon \| \underline{T}_0^{-1} \| \leqslant \frac{1}{2}$; comme f est continûment différentiable dans A, il existe une boule ouverte U (resp. V) de centre x_0 (resp. y_0) et de rayon α (resp. β) telle que, dans $U \times V$, on ait

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) - f'_y(x_0, y_0) \cdot (y_1 - y_2) \| \leqslant \varepsilon \| y_1 - y_2 \|$$

(§ 1, prop. 3) ; d'où on tire $\| g(x, y_1) - g(x, y_2) \| \leqslant \varepsilon \| \underline{T}_0^{-1} \| \cdot \| y_1 - y_2 \| \leqslant \frac{1}{2} \| y_1 - y_2 \|$ quels que soient x dans U, y_1, y_2 dans V. D'autre part on a $g(x, y_0) - y_0 = -\underline{T}_0^{-1} \cdot f(x, y_0)$; comme $f(x_0, y_0) = 0$ et que f est continue, on peut supposer α pris assez petit pour que $\| g(x, y_0) - y_0 \| \leqslant \frac{1}{2} \beta$ dans U. Le th.1 prouve alors l'existence et l'unicité d'une fonction u définie dans U, à valeurs dans V et telle que $f(x, u(x)) = 0$ pour tout $x \in U$; comme $f(x_0, y_0) = 0$, on a nécessairement $u(x_0) = y_0$; en outre, u est continue dans U.

Reste à prouver que u est continûment différentiable en tout point de U si α est assez petit. Posons $\underline{S}(x, y) = f'_x(x, y)$ et $\underline{T}(x, y) = f'_y(x, y)$. On sait que l'ensemble J des isomorphismes de F dans G est ouvert dans $\mathcal{L}(F, G)$ (§ 1, n°2) ; comme $\underline{T}$ est une application continue de A dans $\mathcal{L}(F, G)$ par hypothèse, et que $\underline{T}_0 = \underline{T}(x_0, y_0)$ est un isomorphisme de F sur G, il en sera de même de $\underline{T}(x, u(x))$ pour tout $x \in U$ si α a été pris assez petit. Cela étant, pour x et $x + h$ dans U, posons $k = u(x + h) - u(x)$; on a, par hypothèse $f(x + h, u(x) + k) = 0$. Comme k tend vers 0 avec h, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que, pour $\| h \| \leqslant r$, on ait

$$\| f(x+h, u(x)+k) - f(x, u(x)) - \underline{S}(x, u(x)).h - \underline{T}(x, u(x)).k \| \leqslant \varepsilon (\|h\| + \|k\|)$$

c'est-à-dire $\| \underline{S}(x, u(x)).h + \underline{T}(x, u(x)).k \| \leqslant \varepsilon (\|h\| + \|k\|)$

d'où on tire, puisque $\underline{T}(x, u(x))$ est inversible (et en écrivant $\underline{S}$ et $\underline{T}$ au lieu de $\underline{S}(x, u(x))$ et $\underline{T}(x, u(x))$)

(5) $$\| (\underline{T}^{-1} \circ \underline{S}).h + k \| \leqslant \varepsilon \| \underline{T}^{-1} \| (\|h\| + \|k\|) .$$

Supposons qu'on ait pris ε assez petit pour que $\varepsilon \| \underline{T}^{-1} \| \leqslant \frac{1}{2}$; on tire alors de (5) que $\|k\| \leqslant a.\|h\|$ avec $a = 2\| \underline{T}^{-1} \circ S \| + 1$, puis

$$\| k + (\underline{T}^{-1} \circ \underline{S}).h \| \leqslant \tfrac{1}{2}(a+1)\varepsilon \|h\|$$

dès que $\|h\| \leqslant r$; cela démontre bien que u est différentiable au point x et que sa dérivée en ce point est

(6) $$u'(x) = -\underline{T}^{-1}(x ; u(x)) \circ \underline{S}(x, u(x)) .$$

Enfin, comme l'application $\underline{T} \to \underline{T}^{-1}$ de J dans $\mathcal{L}(G,F)$ est continue (§ 1, n°2), ainsi que l'application $(\underline{V}, \underline{S}) \to \underline{V \circ S}$ de $\mathcal{L}(G,F) \times \mathcal{L}(E,G)$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, $x \to u'(x)$ est continue dans U d'après (6).

Remarques.- 1) La conclusion du th.2 n'est plus nécessairement valable si on suppose seulement que f est différentiable dans un voisinage de (x_0, y_0), mais non continûment différentiable. C'est ce que montre l'exemple suivant, où $E=F=\mathbf{R}$, et $f(x,y) = x - y - y^2 \cos \frac{\pi}{y}$ pour $y \neq 0$, $f(x,y) = x$ pour $y = 0$; f est différentiable en tout point et $f'_y(0,0) = 1$, $f(0,0) = 0$; mais il n'existe aucune fonction u continue au voisinage de 0 et telle que $f(x, u(x)) = 0$ identiquement. En effet, si on pose $g(y) = y + y^2 \cos \frac{\pi}{y}$, on vérifie aisément qu'il existe une suite décroissante (α_n) tendant vers 0 telle que g soit strictement croissante dans l'intervalle $[\alpha_{2n}, \alpha_{2n-1}]$ et décroissante dans $[\alpha_{2n+1}, \alpha_{2n}]$. Si pour une valeur de x assez voisine de 0 , $u(x)$ est dans l'intervalle $[\alpha_{2n}, \alpha_{2n-1}]$ par exemple, u est fonction réciproque de la fonction croissante g dans l'intervalle $[g(\alpha_{2n}), g(\alpha_{2n-1})]$; mais lorsque x tend vers $g(\alpha_{2n-1})$ par valeurs plus grandes, $u(x)$ ne peut tendre vers α_{2n-1}.

2) Lorsque $E = \mathbb{R}^m$, $F = G = \mathbb{R}^n$, le th.2 s'énonce de la façon suivante : si f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n fonctions numériques continûment différentiables dans le voisinage d'un point (a, b) de $E \times F$, si le jacobien $\det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j})$ n'est pas nul en ce point, et si $f_i(a, b) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, alors dans tout voisinage assez petit de a, il existe un système et un seul de n fonctions $g_i(x_1, \dots, x_m)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ continues et satisfaisant aux conditions $g_i(a_1, \dots, a_m) = b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et

$f_i(x_1, \dots, x_m, g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$;

ces fonctions sont continûment différentiables dans un voisinage de a. En outre, si $\underline{A}$ désigne la matrice jacobienne $(\frac{\partial f_i}{\partial x_k})$ à n lignes et m colonnes, où y_i est remplacé par $g_i(x_1, \dots, x_m)$, et $\underline{B}$ la matrice jacobienne $(\frac{\partial f_i}{\partial y_j})$ (carrée d'ordre n), où on fait la même substitution, la matrice jacobienne $(\frac{\partial g_i}{\partial x_k})$ (à m lignes et n colonnes) est égale à $\underline{B}^{-1}\underline{A}$.

COROLLAIRE.- <u>Les hypothèses du th.2 étant vérifiées, on suppose en outre que f soit p fois continûment différentiable dans un voisinage de (x_0, y_0) ; alors u est p fois continûment différentiable dans un voisinage de x_0.</u>

La proposition se démontre en prouvant par récurrence sur k que u est k fois continûment différentiable pour $1 \leqslant k \leqslant p$; en effet, la proposition résulte du th.2 pour $k=1$; d'autre part, on a $u'(x) = g(x, u(x))$, où $g = -(f'_y)^{-1} \circ f'_x$ est $p-1$ fois continûment différentiable ; d'après la prop.5 du §2, si u est $k-1$ fois continûment différentiable (pour $k \leqslant p$), u' est $k-1$ fois continûment différentiable, c'est-à-dire que u est k fois continûment différentiable.

Un cas particulier important du th.2 est le suivant :

PROPOSITION 1.- *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach, et soit* f *une application continûment différentiable d'un voisinage de* $x_0 \in E$ *dans* F . *Si* $f'(x_0)$ *est un isomorphisme (de structure d'espace vectoriel topologique) de* E *sur* F , *il existe un voisinage ouvert* U *de* x_0 *tel que la restriction de* f *à* U *soit un homéomorphisme de* U *sur un voisinage ouvert de* $f(x_0)=y_0$. *En outre, si* f *est* p *fois continûment différentiable dans* U , *l'application réciproque* g *de la restriction de* f *à* U *est* p *fois continûment différentiable dans* $f(U)$.

Appliquons le th.2 à la fonction $h(y,x)=y-f(x)$, définie dans $F\times E$ et à valeurs dans F ; les conditions de l'énoncé du th.2 sont satisfaites, puisque $h'_x(y_0,x_0)=-f'(x_0)$ est un isomorphisme de E sur F . Dans une boule ouverte assez petite V de centre y_0 , il existe donc une fonction continue g et une seule, telle que $f(g(y))=y$ et $g(y_0)=x_0$; en outre, si f est p fois continûment différentiable, il en est de même de h , donc de g . Comme, pour deux éléments y_1 , y_2 de V , la relation $g(y_1)=g(y_2)$ entraîne $f(g(y_1))=f(g(y_2))$, c'est-à-dire $y_1=y_2$, g est une application biunivoque de V sur $g(V)$, et comme $g(V)$ est arbitrairement petit avec V , f est continue dans $g(V)$, donc f est un homéomorphisme de $g(V)$ sur V ; enfin, comme $g(V)=\overset{-1}{f}(V)$, $g(V)$ est ouvert dans E , ce qui achève la démonstration.

On notera que si f est une application continûment différentiable d'une partie ouverte $A\subset E$ dans F , telle que pour tout $x\in A$, $f'(x)$ soit un isomorphisme de E sur F , f n'est pas nécessairement un homéomorphisme de A *tout entier* sur $f(A)$. Il se peut en effet que f ne soit pas biunivoque dans A . Considérons par exemple l'application $(x,y)\rightarrow(x^2-y^2,2xy)$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. En tout point du complémentaire A du point (0,0), le jacobien

$D(x^2-y^2,2xy)/D(x,y)=4(x^2+y^2)\neq 0$; mais la fonction considérée prend la même valeur aux points (x,y) et $(-x,-y)$.

4. Extension aux applications de rang constant.

Lorsque, dans la prop.1, E et F sont deux espaces de même dimension finie n , et f une application continûment différentiable d'une partie ouverte A de E dans F , nous avons vu que si $f'(x)$ est de rang (maximum) n en un point x_0 , $f'(x)$ est de même rang dans un voisinage de x_0 . En considérant les mineurs de la matrice de $f'(x)$ par rapport à deux bases quelconques de E et F , on voit de même que si p est le rang de $f'(x_0)$, il existe un voisinage de x_0 dans lequel le rang de $f'(x)$ est $\geqslant p$: mais il se peut qu'en tous les points $\neq x_0$ d'un voisinage de ce point, le rang de $f'(x)$ soit strictement supérieur à p, comme le montre l'exemple donné à la fin du n°3 . Nous allons établir une proposition analogue à la prop.1 dans le cas où le rang de $f'(x)$ est constant dans un voisinage de x_0 .

Supposons plus généralement que E et F soient deux espaces de Banach quelconques, A une partie ouverte de E , f une application continûment différentiable de A dans F telle que, pour tout $x \in A$ le rang de l'application linéaire $f'(x)$ de E dans F soit fini et égal à un même nombre p. Soit x_0 un point de A , et soit M le noyau de l'application linéaire $f'(x_0)$: c'est par hypothèse un sous-espace vectoriel fermé de E , de codimension p . Soit N un sous-espace de dimension p , supplémentaire de M dans E ; on sait que E est somme directe topologique de M et N ; pour tout $x \in E$, nous poserons $x = \underline{U}.x + \underline{V}.x$, où $\underline{U}.x \in M$ et $\underline{V}.x \in N$; $\underline{U}$ et $\underline{V}$ sont des endomorphismes continus de E (projections de E sur M et N). Soit P l'image de N (et aussi de E) par l'application linéaire $f'(x_0)$: c'est un sous-espace de F , de dimension p , puisque la restriction de $f'(x_0)$ à N est un isomorphisme. Il existe un sous-espace fermé Q de F supplémentaire de P , et F est somme directe topologique de P et Q .

pour tout $y \in F$, nous poserons $y = \underline{V}.y + \underline{T}.y$, où $\underline{V}.y \in P$ et $\underline{T}.y \in Q$; $\underline{V}$ et $\underline{T}$ sont des endomorphismes continus de F (projections de F sur P et Q). Cela étant, nous allons démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- Si on pose $g(x) = \underline{V}.f(x)$, il existe un voisinage ouvert $B \subset A$ de x_0 tel que :

1° l'application $x \to (g(x), \underline{U}.x)$ de B dans $G = P \times M$ est un homéomorphisme de B sur un voisinage ouvert du point $(g(x_0), \underline{U}.x_0)$, qui est continûment différentiable ainsi que l'homéomorphisme réciproque ;

2° l'application $y \to \underline{V}.y$ de $f(B)$ dans P est un homéomorphisme de $f(B)$ sur un voisinage ouvert $g(B)$ de $g(x_0)$ dans P, dont l'homéomorphisme réciproque θ est une application continûment différentiable de $g(B)$ dans F. En outre, l'application $(w, t) \to \theta(w) + t$ est un homéomorphisme de $g(B) \times Q$ sur un voisinage ouvert de $f(x_0)$ dans F, continûment différentiable ainsi que l'homéomorphisme réciproque.

1° Il est clair que l'application $x \to \varphi(x) = (g(x), \underline{U}.x)$ de A dans G est continûment différentiable ; en outre, comme $g'(x) = \underline{V} \circ f'(x)$, il résulte de la définition de P que l'on a $g'(x_0) = f'(x_0)$, et par suite l'application $\varphi'(x_0)$ est l'isomorphisme $h \to (f'(x_0).h, \underline{U}.h)$ de $E = M \times N$ sur $G = P \times M$. Appliquant à φ la prop. 1 ; on voit que φ est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert B de x_0 sur un voisinage ouvert C de $y_0 = \varphi(x_0)$ dans F ; on notera que $g(B)$, projection de C sur P, est un voisinage de $g(x_0)$ dans P. Nous désignerons par $(w, t) \to \psi(w, t)$ l'homéomorphisme de C sur B, réciproque de φ, qui est continûment différentiable. On a donc identiquement dans B, $x = \psi(g(x), \underline{U}.x)$.

2° On sait (th. 2) qu'on peut supposer B choisi assez petit pour que $\varphi'(x)$ soit un isomorphisme de E sur G pour tout $x \in B$; il en résulte que $g'(x)$ est un isomorphisme de N sur P pour tout $x \in B$. Or, on a $g'(x) = \underline{V} \circ f'(x)$, et par hypothèse, l'image P_x de E par $f'(x)$ est un sous-espace de dimension p pour tout $x \in A$. Il en résulte que la restriction à P_x de la projection $\underline{W}$ est un isomorphisme de P_x sur P, et en particulier que Q et P_x sont supplémentaires ; nous désignerons par $\underline{Z}(x)$ l'isomorphisme de P sur P_x, réciproque de $\underline{W}$, de sorte qu'on peut écrire $f'(x)=\underline{Z}(x)\circ g'(x)$.

Cela étant, considérons l'application $(w,t)\to\theta(w,t)=f(\psi(w,t))$ de C sur $f(B)$; ~~nous nous proposons de montrer que θ ne dépend pas de C sur f(B)~~ ; nous nous proposons de montrer que θ ne dépend pas de t dans C, autrement dit que $\partial\theta/\partial t$ est nulle dans C. Par hypothèse on a $f(x)=\theta(g(x),\underline{U}.x)$ pour tout $x\in B$; en différentiant cette relation, il vient

$$f'(x).h=\frac{\partial\theta}{\partial w}(g(x),\underline{U}.x).(g'(x).h)+\frac{\partial\theta}{\partial t}(g(x),\underline{U}.x).(\underline{U}.h)$$

d'où, en raison de ce qui précède, une relation de la forme

$$(7)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}(g(x),\underline{U}.x).(\underline{U}.h)=\underline{S}(x).(g'(x).h)$$

où on a posé $\underline{S}(x)=\underline{Z}(x)-\frac{\partial\theta}{\partial w}(g(x),\underline{U}.x)$, application linéaire de P dans F. Nous allons montrer que, pour tout $x\in B$, on a $\underline{S}(x)=0$. En effet, pour tout $h\in N$, on a $\underline{U}.h=0$ par définition, d'où, en vertu de (7), $\underline{S}(x).(g'(x).h)=0$. Mais comme $h\to g'(x).h$ est un isomorphisme de N sur P, et par suite $\underline{S}(x).w=0$ pour tout $w\in P$, on a bien $\underline{S}(x)=0$. Alors, la relation (7) montre que $\frac{\partial\theta}{\partial t}(g(x),\underline{U}.x)=0$, puisque $\underline{U}.h$ parcourt M lorsque h parcourt E ; cette relation ayant lieu pour tout $x\in B$, on voit que $\frac{\partial\theta}{\partial t}(w,t)=0$ dans C, puisque $\varphi(B)=C$.

Nous considérerons donc désormais θ comme une fonction de w seul ; θ est donc une application continûment différentiable de $g(B)$ dans F, et comme on a $f(x)=\theta(g(x))$, l'image de $g(B)$ par θ est $f(B)$. Comme inversement on a $g(x)=\underline{W}.f(x)$, on voit que θ est un homéomorphisme de $g(B)$ sur $f(B)$, dont l'homéomorphisme réciproque est la restriction de $\underline{W}$ à $f(B)$.

Considérons enfin l'application continûment différentiable $(w, t) \to \theta(w) + t$ de $g(B) \times Q$ dans F. Montrons d'abord que cette application est biunivoque : en effet, la relation $\theta(w_1) + t_1 = \theta(w_2) + t_2$ entraîne d'abord $\underline{V}.(\theta(w_1) + t_1) = \underline{V}(\theta(w_2) + t_2)$, c'est-à-dire $\underline{V}.\theta(w_1) = \underline{V}.\theta(w_2)$, ou encore $w_1 = w_2$; portant dans la relation initiale, il vient $t_1 = t_2$, ce qui démontre notre assertion. Pour tout point $w = g(x)$ de $g(B)$, on a vu ci-dessus que $\theta'(w) = \underline{Z}(x)$, isomorphisme de P sur P_x ; comme P_x est supplémentaire de Q, on voit que la dérivée totale de $(w, t) \to \theta(w) + t$, qui est l'application

$$(k_1, k_2) \to \theta'(w).k_1 + k_2$$

est un isomorphisme de $P \times Q$ sur F. Pour tout point (w, t) de $g(B) \times Q$, il existe donc un voisinage de ce point tel que la restriction de $(w, t) \to \theta(w) + t$ à ce voisinage soit un homéomorphisme de ce voisinage sur un voisinage ouvert de $\theta(w) + t$ dans F ; comme en outre l'application $(w, t) \to \theta(w) + t$ est biunivoque, c'est bien un homéomorphisme de $g(B) \times Q$ sur une partie ouverte de F, et l'homéomorphisme réciproque est continûment différentiable.

Remarques.- 1) On notera que la première partie de la proposition est valable sans supposer que le rang de $f'(x)$ est constant dans un voisinage de x_0.

2) Dans l'énoncé et la démonstration de la prop.2, on peut partout remplacer "continûment différentiable" par "p fois continûment différentiable", en vertu du cor. du th.2.

5. Fonctions dépendantes.

DÉFINITION 1.- Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n fonctions numériques définies dans une partie ouverte A d'un espace de Banach E. On dit que ces n fonctions sont dépendantes dans A lorsqu'il existe une fonction numérique g, définie et continûment différentiable dans un voisinage B de

$f(A) \subset R^n$ (où $f=(f_1,\ldots,f_n)$), *dont la dérivée totale n'est nulle dans aucune partie ouverte non vide de* B , *et telle que l'on ait pour tout* $x \in A$

(7) $$g(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x))=0 .$$

On dit que les n *fonctions* f_i *sont indépendantes dans* A *lorsqu'elles ne sont pas dépendantes dans* A .

Nous aurons à considérer le cas plus particulier où g est de la forme $g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=y_n-h(y_1,\ldots,y_{n-1})$, où h est continûment différentiable dans B ; comme $D_n g(y_1,\ldots,y_n)=1$ dans B , la dérivée totale de g n'est nulle en aucun point de B ; on a alors identiquement $f_n(x)=h(f_1(x),\ldots$ $\ldots,f_{n-1}(x))$ dans A ; nous dirons dans ce cas que, dans A , f_n *s'exprime en fonction* (*continûment différentiable*) *de* $f_1,\ldots,f_{n-1}$.

THEOREME 3.- *Soient* $f_1,\ldots,f_n$ *n fonctions numériques continûment différentiables dans une partie ouverte* A *d'un espace de Banach* E .

1° *Si les fonctions* $f_1,\ldots,f_n$ *sont dépendantes dans* A , *le rang de l'ensemble des formes linéaires* $f'_i(x)$ $(1 \leq i \leq n)$ *est* $< n$ *pour tout point* $x \in A$.

2° *Inversement, si en tout point* $x \in A$, *le rang de l'ensemble des formes linéaires* $f'_i(x)$ *est égal à un même nombre* $p < n$, *pour tout point* $a \in A$, *il existe un voisinage* $V \subset A$ *de* a *et* p *des fonctions* f_{i_k} $(1 \leq k \leq p)$ *tels que, dans* V , *les* $n-p$ *autres fonctions* f_i *s'expriment en fonction des* f_{i_k} $(1 \leq k \leq p)$.

1° En différentiant l'identité (7) il vient, en tout point $x \in A$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i g(f_1(x),\ldots,f_n(x)).f'_i(x)=0$$

d'où la proposition si l'un au moins des n nombres $D_i g(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ n'est pas nul. L'hypothèse sur g prouve donc que pour un ensemble de points de A dense par rapport à A , la n-forme $f'_1 \wedge f'_2 \wedge \ldots \wedge f'_n$ est nulle.

Or, l'application $x \to f_1'(x) \wedge f_2'(x) \wedge \dots \wedge f_n'(x)$ de A dans l'espace normé $\mathcal{L}_n(E)$ des formes n-linéaires continues sur E, est continue dans A ; elle est donc nulle en tout point de A, ce qui démontre la première partie du théorème.

2° Désignons par f l'application $x \to (f_1(x),\dots f_n(x))$ de E dans $\mathbb{R}^n$. L'hypothèse signifie que l'application linéaire $f'(x)$ est de rang constant $p<n$ dans un voisinage de x_0 ; on peut donc appliquer à f les résultats de la prop.2. Avec les notations de la démonstration de la prop.2, on peut supposer ici que Q est une variété coordonnée de $\mathbb{R}^n$, de dimension n-p ; alors, si e_{i_k} $(1\leq k\leq p)$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à Q, la prop.2 montre que l'on a $f(x)=\theta(f_{i_1}(x),\dots,f_{i_p}(x))$, où θ est continûment différentiable dans P (variété coordonnée supplémentaire de Q), pourvu que x reste dans un voisinage assez petit de x_0 ; cela achève de démontrer le théorème.

Remarque.- Lorsque E est de dimension finie, on peut montrer que si en tout point $x\in A$, le rang de l'ensemble des $f_i'(x)$ est $<n$ (mais non nécessairement constant dans A), dans toute partie ouverte de A dont l'adhérence est compacte et contenue dans A, les fonctions f_i sont dépendantes (cf. § 4, exerc. 2) ; mais il n'est plus exact qu'en tout point de A, il existe un voisinage de ce point dans lequel un certain nombre des f_i s'expriment en fonction continûment différentiable des autres : c'est ce que montre aussitôt l'exemple des deux fonctions $f_1(t)=t^2$, $f_2(t)=t^3$ au voisinage du point $t=0$.

Le cas le plus important est celui où $E=\mathbb{R}^m$: dire que le système des formes linéaires $f_i'(x)$ est de rang p signifie alors que la matrice jacobienne $(D_j f_i(x))$ est de rang p. En particulier, si $m=n$, et si le déterminant fonctionnel $\det(D_j f_i)$ est $\neq 0$ dans un ensemble dense par rapport à une partie ouverte A de $\mathbb{R}^n$, les fonctions f_i $(1\leq i\leq n)$ sont indépendantes dans A.

Lorsque $E = \mathbb{R}^m$, on déduit aussi de la prop.2 le résultat suivant :

PROPOSITION 3.- Soient $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions numériques continûment différentiables dans une partie ouverte A de $\mathbb{R}^m$. Si pour tout $x \in A$ le rang de la matrice jacobienne des f_k est égal à un même nombre $p < m$, l'ensemble $E \subset A$ définie par les n équations $f_k(x) = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ (ensemble qui peut être vide) possède la propriété suivante : pour tout point $a \in E$, il existe un voisinage B de a dans A tel que $B \cap E$ soit défini par p équations de la forme $x_{\alpha_k} = u_k(x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_{m-p}})$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$, où les α_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ sont les éléments d'une partie de p éléments de l'intervalle $[1, m]$, les β_j les éléments du complémentaire de cette partie, et les fonctions u_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ p fonctions continûment différentiables dans une partie ouverte de $\mathbb{R}^{m-p}$.

Considérons en effet l'application continûment différentiable $f = (f_1, \ldots, f_n)$ de A dans $\mathbb{R}^n$; appliquons la prop.2, en remplaçant E par $\mathbb{R}^n$, F par $\mathbb{R}^m$, x_0 par a, mais gardant les autres notations. Il existe donc un voisinage $B \subset A$ de a tel que pour x et x' dans B la relation $\underline{W}.f(x) = \underline{W}.f(x')$ entraîne $f(x) = f(x')$; par suite dans B la relation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = 0$. En vertu de la prop.2, il existe un homéomorphisme continûment différentiable $z \to \psi(0, z)$ d'un voisinage de $\underline{U}.a$ dans M, sur l'intersection $E \cap B$, dont l'homéomorphisme réciproque est la projection $x \to \underline{U}.x$ de $E \cap B$ sur M. D'où la prop.3 si on a eu soin de prendre pour N une variété coordonnée (comme on peut le faire en vertu du th. d'échange), et si les e_{α_k} sont les vecteurs de la base canonique engendrant N.

Exercices.- 1) Soient E et F deux espaces normés, et soit u un isomorphisme de E dans F .

a) Soit m la norme de l'isomorphisme réciproque de u . Soit w une application dans F d'une partie ouverte A de E , telle que $\|w(x_1)-w(x_2)\| \leq k.\|x_1-x_2\|$. Montrer que si $k<m$, l'application $x \to f(x)=u(x)+w(x)$ est un homéomorphisme de A sur $f(A)$.

b) Si w est une application linéaire continue de E dans F telle que $\|w\|<m$, montrer que f est un isomorphisme de E dans F . En outre, pour tout $y_0 \in u(E)$ tel que $\|y_0\|=1$, montrer qu'il existe $y \in f(E)$ tel que $\|y-y_0\| \leq \|w\|/m$; inversement, pour tout $y \in f(E)$ tel que $\|y\|=1$, montrer qu'il existe $y_0 \in u(E)$ tel que $\|y-y_0\| \leq \|w\|/(m-\|w\|)$.

2) Soient E et F deux espaces normés, et u un homomorphisme de E dans F tel que $\overset{-1}{u}(0)$ soit de dimension finie. Montrer que si la norme de l'application linéaire w de E dans F est assez petite, $u+w=f$ est un homomorphisme de E dans F , et que la dimension de $\overset{-1}{f}(0)$ est au plus égale à celle de $\overset{-1}{u}(0)$ (utiliser l'exerc.1 b) en considérant un sous-espace fermé H de E , supplémentaire de $\overset{-1}{u}(0)$).

3) Soient E et F deux espaces de Banach.

a) Soit u un homomorphisme de E sur F , S une boule ouverte de centre a et de rayon r dans E . Soit w une application continue de S dans F telle que $\|w(x_1)-w(x_2)\| \leq k\|x_1-x_2\|$. Montrer que si k et $\|w(a)\|$ sont assez petits, l'application $x \to f(x)=u(x)+w(x)$ est telle que l'image $f(S)$ contienne une boule de centre $u(a)$.

b) Soit m la norme de l'isomorphisme de F sur $E/\overset{-1}{u}(0)$ réciproque de l'isomorphisme associé à u . Montrer que si w est une application linéaire continue de E dans F, de norme $\|w\|<m$, $u+w=f$ est un homomorphisme de E sur F ; en outre, pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout

$x \in \overset{-1}{f}(0)$ tel que $\|x\|=1$, il existe $x_0 \in \overset{-1}{u}(0)$ tel que $\|x - x_0\| \leqslant \|w\|/(m-\varepsilon)$; de même, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x_0 \in \overset{-1}{u}(0)$ tel que $\|x_0\|=1$, il existe $x \in \overset{-1}{f}(0)$ tel que $\|x - x_0\| \leqslant \|w\|/(m-\|w\|-\varepsilon)$.

c) Déduire de b) que s'il existe dans E un sous-espace vectoriel fermé M supplémentaire topologique de $\overset{-1}{u}(0)$, M est aussi supplémentaire topologique de $\overset{-1}{f}(0)$.

4) Soient E et F deux espaces de Banach, u un homomorphisme de E dans F tel que $u(E)$ soit de codimension finie p . Montrer que si w est une application linéaire continue de E dans F , de norme assez petite, $f = u+w$ est un homomorphisme de E dans F , et que $f(E)$ a une codimension $\leqslant p$ (appliquer l'exerc.2 aux transposées de u et w).

5) Soient E un espace de Banach, F un espace normé et u un isomorphisme de E dans F . Montrer que s'il existe dans F un sous-espace M supplémentaire topologique de $u(E)$, et si l'application linéaire continue w de E dans F a une norme assez petite, en posant $f = u+w$, M est encore supplémentaire topologique de $f(E)$ (utiliser l'exerc.1 b), et le fait que $f(E)$ est fermé dans F).

6) Soient E et F deux espaces de Banach, u un homomorphisme de E dans F , tel que $\overset{-1}{u}(0)$ soit de dimension finie p , et que $u(E)$ ait une codimension finie q . Montrer que si l'application linéaire continue w de E dans F a une norme assez petite, $f = u+w$ est un homomorphisme de E dans F , que la dimension r de $\overset{-1}{f}(0)$ est finie et telle que $p-q \leqslant r \leqslant p$, et que la codimension de $f(E)$ est égale à $q-p+r$ (raisonner comme dans l'exerc. 2) , et utiliser l'exerc.5).

7) a) Soit P l'espace des restrictions à $[-1,+1]$ des polynômes à coefficients réels, muni de la norme $\|x\| = \sup_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$. Soit u l'isomorphisme identique de P sur lui-même ; soit d'autre part w l'application linéaire de P dans lui-même, qui à tout polynôme x fait correspondre le polynôme $t \to tx(t)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit ,

l'application $u+\varepsilon w$ est un isomorphisme de P dans lui-même, mais que l'image de P par cet isomorphisme est distincte de P (cf. exerc. 6).

b) Soit P_0 l'espace des restrictions à $[0,1]$ des polynômes à coefficients réels, muni de la norme $\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$. Pour tout polynôme $x \in P$, on désigne par $u(x)$ le polynôme $\frac{1}{2}(x(t^2)+x(-t^2))$. Montrer que u est un homomorphisme de P sur P_0. Soit d'autre part $w(x)$ la restriction de x à l'intervalle $[0,1]$. Montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, $u+\varepsilon w$ n'est pas un homomorphisme de P dans P_0 (remarquer que ce serait alors un isomorphisme, et prouver que cela est impossible en considérant le prolongement par continuité de u et w à l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions numériques continues dans $[-1,+1]$) (cf. exerc. 4).

8) Soit f une application continûment différentiable d'une partie ouverte A d'un espace normé E dans un espace normé F. Montrer que si en un point $a \in A$, la dérivée $f'(a)$ est un isomorphisme de E <u>dans</u> F, il existe un voisinage $B \subset A$ de a tel que f soit un homéomorphisme de B <u>sur</u> $f(B)$ (exerc. 1a)).

9) Soit f une application continûment différentiable d'une partie ouverte A d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F. Montrer que si en un point $a \in A$, la dérivée $f'(a)$ est une application linéaire de E <u>sur</u> F, il existe un voisinage ouvert $B \subset A$ de a tel que $f(B)$ soit un voisinage ouvert de $f(a)$ dans F (exerc. 3).

10) Soit $B(u,v)$ une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$. Soit f une application continûment différentiable d'une partie ouverte <u>convexe</u> A de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $x \in A$ la forme quadratique $B(h, f'(x).h)$ soit strictement positive. Montrer que f est un homéomorphisme de A sur un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$, et que l'homéomorphisme réciproque est continûment différentiable (considérer, pour tout couple de points a, b de A, la fonction $g(t)=B(b-a, f(a+t(b-a)))$ définie dans l'intervalle $[0,1]$).

11) Soit f une application continue d'un voisinage A d'un point x_0 d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F , que f soit différentiable au point x_0 (mais non nécessairement au voisinage de x_0), et que $f'(x_0)$ soit une application linéaire continue de E <u>sur</u> F . Montrer qu'il existe un voisinage $U \subset A$ de x_0 tel que $f(x) \neq f(x_0)$ pour tout $x \in U$ tel que $x \neq x_0$.

12) Soit $f = (f_1, f_2)$ l'application continue de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même définie de la façon suivante : $f_1(x,y) = x$; $f_2(x,y) = y - x^2$ pour $y \geqslant x^2$, $f_2(x,y) = (y^2 - x^2 y)/x^2$ pour $0 \leqslant y \leqslant x^2$, et $f_2(x,-y) = -f_2(x,y)$. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$, et qu'au point $(0,0)$ sa différentielle est l'application identique de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même ; mais dans tout voisinage de $(0,0)$, il existe des couples de points distincts (x, y) tels que $f(x) = f(y)$.

13) Soit $f = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une application continue dans $\mathbb{R}^n$ d'un voisinage ouvert V d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$; on suppose qu'en tout point de V f soit différentiable et que $f'(x)$ soit inversible (mais on ne suppose pas f' continue dans V). Montrer que $f(V)$ est un voisinage de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}^n$ (*). (Raisonner par l'absurde ; soit B une boule fermée de centre x_0 , contenue dans V , S sa frontière, telle que $f(S)$ ne contienne pas $f(x_0)$ (exerc. 11) ; considérer un point $y \in \mathbb{R}^n$ non contenu dans $f(B)$ et dont la distance à $f(x_0)$ soit plus petite que sa distance à $f(S)$; si $z \in f(B)$ est un point de $f(B)$ pour lequel la distance de y à z soit égale à la distance de y à $f(B)$, montrer que si x est tel que $f(x) = z$, il n'est pas possible que $f'(x)$ soit inversible).

(*) Dans la partie de ce Traité consacrée à la Topologie algèbrique, nous verrons que sous la <u>seule</u> condition que f soit différentiable au point x_0 et que $f'(x_0)$ soit inversible, $f(V)$ est un voisinage de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}^n$. En outre, si dans V le jacobien $\det(D_i f_j)$ ne change pas de signe, f est un homéomorphisme d'un voisinage $U \subset V$ de x_0 sur un voisinage $f(U)$ de $f(x_0)$.

§ 4. Changement de variables dans les intégrales multiples.

1. La formule du changement de variables.

Soient A une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^n$, et soit θ un *homéomorphisme* de A sur une partie ouverte A' de $\mathbb{R}^n$. Si μ désigne la restriction à A de la mesure de Lebesgue, l'*image* $\nu=\theta(\mu)$ de la mesure μ par l'application θ est définie et est une mesure sur A' (*Intégr.*, chap. VI) telle que, pour toute fonction numérique f définie dans A' et intégrable pour ν, $f\circ\theta$ soit intégrable pour μ et que l'on ait $\int (f\circ\theta)d\mu = \int f\, d\nu$; réciproquement, on sait (loc. cit.) que si $f\circ\theta$ est intégrable pour μ, f est intégrable pour ν et on a la formule précédente. Nous nous proposons de montrer que, sous certaines conditions, la mesure ν est une *mesure de base* μ', où μ' désigne la restriction à A' de la mesure de Lebesgue. De façon précise, nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 1.- *Soit* $\theta(\theta_1,\dots,\theta_n)$ *un homéomorphisme continûment différentiable d'une partie ouverte* A *de* $\mathbb{R}^n$ *sur une partie ouverte* A' *de* $\mathbb{R}^n$ *; soit* $\Delta(x)$ *le déterminant fonctionnel* $\det(D_i\theta_j(x))$ *de* θ. *Si* $\Delta(x)$ *n'est nul en aucun point de* A, *pour toute fonction* f *définie dans* A' *et intégrable par rapport à* μ', *la fonction* $f(\theta(x))|\Delta(x)|$ *est intégrable dans* A *par rapport à* μ, *et on a*

$$\int_{A'} f(x')d\mu'(x') = \int_A f(\theta(x))\,|\Delta(x)|\,d\mu(x) \tag{1}$$

(*formule du changement de variables*).

Avant d'entreprendre la démonstration du théorème, remarquons qu'il signifie bien que ν est une mesure de base μ', et de façon précise que l'on a $d\nu(x')=\dfrac{1}{|\Delta(\theta'(x'))|}d\mu'(x')$ où θ' est l'homéomorphisme réciproque de θ.

Nous démontrerons le th. 1 en plusieurs étapes.

1° Remarquons d'abord que si, pour tout ensemble ouvert relativement compact B tel que $\overline{B}\subset A$, on a

$$\int_{\theta(B)} f(x')d\mu'(x') = \int_B f(\theta(x))\,|\Delta(x)|\,d\mu(x) \tag{2}$$

alors la formule (1) est vraie aussi. En effet, A est réunion d'une suite croissante (B_n) d'ensembles ouverts relativement compacts tels que $\overline{B}_n \subset A$, par exemple en prenant pour B_n l'intersection de la boule de centre 0 et de rayon n , et de l'ensemble ouvert des points de A dont la distance à $\complement A$ est $> 1/n$. Remplaçant B par B_n dans (2), on obtient la formule (1) par une application facile du th. de Lebesgue.

2° Soit B un ensemble ouvert relativement compact tel que $\overline{B} \subset A$, et soit $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ un recouvrement fini de $\overline{B}$ formé d'ensembles ouverts contenus dans A . Si, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, on a

$$(3) \qquad \int_{\theta(C_i)} f(x')d\mu'(x') = \int_{C_i} f(\theta(x))\,|\Delta(x)|\,d\mu(x)$$

alors on a aussi la formule (2).

En effet, il existe une famille $(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ de fonctions numériques $\geqslant 0$, définies et continues dans $\mathbb{R}^n$, telles que $\sum_{i=1}^{m} g_i(x)=1$ en tout point de $\theta(\overline{B})$ et que $g_i(x)=0$ en tout point de $\complement\,\theta(C_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ (<u>Top. gén.</u>, chap. IX, §4, cor. de la prop. 4). On a

$$\int_{\theta(B)} f(x')d\mu'(x') = \sum_{i=1}^{m} \int_{\theta(C_i)} f(x')\varphi_{\theta(B)}(x')g_i(x')d\mu'(x')$$

Si on remarque que $\varphi_{\theta(B)} \circ \theta = \varphi_B$, les relations (3) entraînent donc

$$\int_{\theta(B)} f(x')d\mu'(x') = \sum_{i=1}^{m} \int_{C_i} f(\theta(x))\varphi_B(x)g_i(\theta(x))\,|\Delta(x)|\,d\mu(x) =$$
$$= \int_B f(\theta(x))\Big(\sum_{i=1}^{m} g_i(\theta(x))\Big)\,|\Delta(x)|\,d\mu(x)$$

c'est-à-dire la formule (2), si on tient compte du fait que $\sum_{i=1}^{m} g_i(\theta(x))=1$ dans B par définition.

3° Le th. 1 est vrai dans le cas particulier où θ est une "permutation de coordonnées", c'est-à-dire une transformation linéaire qui permute les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$; cela résulte aussitôt du th. de Lebesgue-Fubini (interversion de l'ordre des intégrations ; cf. <u>Intégr.</u>, chap. VI).

4^o Démontrons maintenant le th. 1 dans le cas particulier où θ est un homéomorphisme de la forme suivante

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow (\theta_1(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \ .$$

On a alors $\Delta(x) = \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}$, et par hypothèse cette dérivée ne s'annule pas dans A. En vertu de 1^o et 2^o, on peut se borner au cas où A est un <u>pavé</u> $I \times Q$, où I est un intervalle borné $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, et Q un pavé borné dans $\mathbb{R}^{n-1}$; on peut supposer en outre que f est continue dans $\bar{A}$ (<u>Intégr.</u>, chap. V). La dérivée $\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}$ ne s'annulant pas dans A, garde un signe constant dans cet ensemble (th. de Borzano) ; supposons par exemple que $\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} < 0$ dans A. D'après le th. de Lebesgue-Fubini, on a

$$\int_{\theta(A)} f(x')d\mu'(x') = \int_Q dx_2 \ldots dx_n \int_{\theta_1(b, x_2, \ldots, x_n)}^{\theta_1(a, x_2, \ldots, x_n)} f(x_1', x_2, \ldots, x_n)dx_1'$$

puisque l'hypothèse $\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} < 0$ entraîne que

$$\theta_1(b, x_2, \ldots, x_n) < \theta_1(a, x_2, \ldots, x_n) \ .$$

Mais en vertu de la formule de changement de variables dans les intégrales simples (<u>Fonct. var. réelle</u>, chap. II, § 1, formule (1?)) on a

$$\int_{\theta_1(b, x_2, \ldots, x_n)}^{\theta_1(a, x_2, \ldots, x_n)} f(x_1', x_2, \ldots, x_n)dx_1' = \int_b^a f(\theta_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} dx_1$$

et par suite, en vertu du th. de Lebesgue-Fubini

$$\int_{\theta(A)} f(x')d\mu'(x') = -\int_A f(\theta(x)) \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} d\mu(x)$$

Comme dans le cas envisagé on a $|\Delta(x)| = -\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}$, la formule (1) est alors démontrée. On raisonne de la même façon si $\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} > 0$ dans A.

5^o Abordons enfin le cas général. Le raisonnement du 4^o démontre le théorème pour n=1 ; nous allons le démontrer par récurrence sur n. Il suffit, comme on l'a vu, de démontrer la formule (2). Pour tout $x \in B$, il existe un indice j tel que $D_j\theta_1(x) \neq 0$, en vertu de l'hypothèse $\Delta(x) \neq 0$; puisque θ est continûment différentiable, il existe un voisinage V_x de x dans A tel que $D_j\theta_1(y) \neq 0$ pour tout $y \in V_x$; en outre, on peut supposer V_x pris assez petit pour que l'application

(4) $\quad (y_1,\dots,y_n) \to (y_1,\dots,y_{j-1},\theta_1(y_1,\dots,y_n),y_{j+1},\dots,y_n)$

soit un homéomorphisme continûment différentiable de V_x sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ (§ 3, prop. 1). En tenant compte de 2°, on voit donc qu'on est ramené à démontrer la formule (1) lorsque A est un pavé borné de $\mathbb{R}^n$ tel que pour un indice j convenable, l'application (4) soit un homéomorphisme de A sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$; en remplaçant au besoin θ par $\pi^{-1}\circ\theta\circ\pi$, où π est une "permutation de coordonnées", on peut en outre supposer (en vertu de 3°) que $j=1$. On peut donc écrire $\theta = \psi_2\circ\psi_1$, où ψ_1 est l'homéomorphisme

$$(x_1,\dots,x_n) \to (\theta_1(x_1,\dots,x_n),x_2,\dots,x_n)$$

et ψ_2 un homéomorphisme de $\psi_1(A)$ sur $\theta(A)$, qui est nécessairement continûment différentiable, puisqu'il en est ainsi de ψ_1^{-1} (§ 3, prop. 1) Si on tient compte du fait que le jacobien de θ est égal au produit des jacobiens de ψ_1 et ψ_2, et de ce qui a été démontré au 4°, on vient que tout se ramène à démontrer le théorème pour l'homéomorphisme ψ_2 de $\psi_1(A)$ sur $\theta(A)$. Autrement dit (en changeant de notations), on est ramené à démontrer le th. 1 dans le cas particulier où $\theta_1(x_1,\dots,x_n)=x_1$; on a alors

$$(5) \qquad \Delta(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\theta_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\theta_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

En outre, d'après 1° et 2°, on peut se borner au cas où A est un pavé borné $I\times Q$, où $I=]a,b[$. L'hypothèse que θ est un homéomorphisme entraîne que pour tout $x_1\in I$, l'application

$$(x_2,\dots,x_n) \to (\theta_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,\theta_n(x_1,x_2,\dots,x_n))$$

est un homéomorphisme continûment différentiable ω_{x_1} de la coupe $A(x_1)$ de A suivant x_1, sur la coupe $A'(x_1)$ de A' suivant x_1 ; en outre, le jacobien de ω_{x_1} étant égal à $\Delta(x)$ d'après (5), ne s'annule pas dans $A(x_1)$. L'hypothèse de récurrence prouve donc que, pour tout $x_1\in I$, on a

(6) $\int_{A'(x_1)} f(x_1,x'_2,\dots,x'_n)dx'_2\dots dx'_n = \int_{A(x_1)} f(\theta(x))\,|\Delta(x)|\,dx_2\dots dx_n$.

Mais en vertu du th. de Lebesgue-Fubini, on a

$$\int_{A'} f(x_1,x'_2,\dots,x'_n)dx_1dx'_2\dots dx'_n = \int_a^b dx_1 \int_{A'(x_1)} f(x_1,\dots,x'_n)dx'_2\dots dx'_n$$

et $\displaystyle\int_A f(\theta(x))\,|\Delta(x)|\,dx_1dx_2\dots dx_n = \int_a^b dx_1 \int_{A(x_1)} f(\theta(x))\,|\Delta(x)|\,dx_2\dots dx_n$

La formule (1) est donc une conséquence immédiate de (6), ce qui achève la démonstration du th. 1 .

Nous montrerons un peu plus loin (th.3) que la formule (1) est encore valable sous la seule hypothèse que θ est un homéomorphisme continûment différentiable de A sur A'.

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> $a_1, a_2, \dots, a_n$ <u>n vecteurs linéairement indépendants dans</u> $\mathbb{R}^n$. <u>La mesure de Lebesgue du parallélotope</u> P <u>formé des vecteurs</u> $x = \sum_{i=1}^n t_i a_i$ <u>tels que</u> $0 \leq t_i \leq 1$ $(1 \leq i \leq n)$ <u>est égale à la valeur absolue</u> $|[a_1, a_2, \dots, a_n]|$ <u>du déterminant des</u> a_i <u>par rapport à la base canonique de</u> $\mathbb{R}^n$.

Il suffit en effet d'appliquer la formule (1) à l'application linéaire $(t_1,\dots,t_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^n t_i a_i$ de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même et à la fonction caractéristique de P .

2. <u>Le théorème des accroissements finis volumétriques pour les applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$</u> .

Soit f une fonction numérique monotone et dérivable dans un intervalle compact I ; si $|f'(x)| \leq M$ dans I , le théorème des accroissements finis montre que la <u>mesure</u> (de Lebesgue) de f(I) est au plus égale au produit de M par la mesure de I . Nous nous proposons de généraliser ce résultat aux applications continûment différentiables d'une partie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$; dans tout ce qui suit, μ désignera la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 2.- <u>Soit</u> θ <u>une application continûment différentiable d'une partie ouverte</u> A <u>de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^n$, <u>et soit</u> $\Delta(x)$ <u>le jacobien de</u> θ <u>au point</u> x . <u>Pour toute partie mesurable</u> $B \subset A$, <u>on a</u>

(7) $\qquad \mu^*(\theta(B)) \leqslant \int_B^* |\Delta(x)| d\mu(x)$.

Toute partie mesurable $B \subset A$ étant réunion d'une suite croissante (B_n) de parties mesurables et relativement compactes dans A , on voit aussitôt que le th.2 sera démontré si nous établissons l'inégalité (7) lorsque B est une partie mesurable relativement compacte de A ; les intégrales supérieures dans (7) sont alors finies et peuvent être remplacées par des intégrales.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

<u>Lemme 1.- Soit</u> K <u>une partie compacte de</u> A <u>telle que</u> $\Delta(x)=0$ <u>en tout point</u> $x \in K$. <u>Il existe un nombre</u> $c>0$ <u>et, pour tout</u> $\varepsilon>0$ <u>assez petit, un nombre</u> $\delta_0(\varepsilon)>0$, <u>ayant la propriété suivante</u> : <u>pour tout point</u> $x \in K$ <u>et tout cube</u> C <u>de centre</u> x <u>et de côté</u> $2\delta \leqslant \delta_0$ <u>on a</u>

(8) $\qquad \mu(\theta(C)) \leqslant c\varepsilon\mu(C)$.

Soit U un voisinage compact de K , et soit d la distance >0 de K à $\complement U$. La dérivée $\theta'(x)$ étant uniformément continue dans U , soit $\delta_1(\varepsilon)$ tel que la relation $|y-x| \leqslant \delta_1$ entraîne $\|\theta'(y)-\theta'(x)\| \leqslant \varepsilon$ dans U (la norme $\|x\|$ étant la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$). Pour tout couple de points x, y tels que $x \in K$, $y \in U$, $y-x=\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, avec $|\xi_i| \leqslant \delta \leqslant \inf\left(\frac{\delta_1}{\sqrt{n}}, \frac{d}{\sqrt{n}}\right)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a donc, d'après le th. des accroissements finis (§ 1, formule (8))

(9) $\qquad \left\|\theta(y)-\theta(x)-\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i\right\| \leqslant \varepsilon\delta\sqrt{n}$

où on a posé $a_i = \frac{\partial\theta}{\partial x_i}(x)$. Par hypothèse, les n vecteurs a_i forment un système lié ; désignons par P le sous-espace de dimension $p<n$ qu'ils engendrent, par $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une base orthonormale de P , par Q le sous-espace de dimension $n-p$ totalement orthogonal à P , par $(c_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-p}$ une base orthonormale de Q . Soit M la borne supérieure dans K des nombres $\|\theta'(x)\|$; on a donc $\|a_i\| \leqslant M$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et on peut par suite écrire $\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i = \sum_{j=1}^{p} \eta_j b_j$, avec $|\eta_j| \leqslant \delta n M$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$. En outre, si on pose

$$\theta(y)-\theta(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i + \sum_{j=1}^{p} \zeta_j b_j + \sum_{k=1}^{n-p} \rho_k c_k$$

on a, d'après (9), $|\zeta_j| \leq \varepsilon\delta\sqrt{n}$ pour $1 \leq j \leq p$ et $|\rho_k| \leq \varepsilon\delta\sqrt{n}$ pour $1 \leq k \leq n-p$; nous supposerons que $\varepsilon < M\sqrt{n}$, d'où $\varepsilon\delta\sqrt{n} < \delta n M$, et que $\varepsilon < 1$. Si C désigne le cube de centre x et de côté 2δ, $\theta(C)$ est donc contenu dans le parallélotope de centre $\theta(x)$, construit sur les p vecteurs $2\delta n M b_j$ $(1 \leq j \leq p)$ et les $n-p$ vecteurs $\varepsilon\delta\sqrt{n}\, c_k$ $(1 \leq k \leq n-p)$. Le cor. du th. 1 montre donc que l'on a

$$\mu(\theta(C)) \leq (4\delta n M)^p (2\varepsilon\delta\sqrt{n})^{n-p}$$

Comme $\mu(C)=(2\delta)^n$, et que $p \leq n-1$, on déduit de cette inégalité que l'on a $\mu(\theta(C)) \leq (4nM)^n \varepsilon\delta^n = c\varepsilon\mu(C)$, avec $c=(2nM)^n$; le lemme est donc démontré.

Cela étant, l'ensemble K des points de B où $\Delta(x)=0$ est un ensemble compact. Pour tout $\varepsilon>0$ assez petit, soit U un voisinage ouvert relativement compact de K tel que $\mu(U) \leq \mu(K)+\varepsilon$, et soit d la distance >0 de K à $\complement U$; gardant les notations du lemme 1, soit δ tel que $2\delta\sqrt{n} < d$ et $2\delta \leq \delta_0(\varepsilon)$. L'espace $\mathcal{R}^n$ est réunion des cubes fermés de centre $\sum_{i=1}^{n} k_i \delta e_i$ et de côté δ (k_i entiers rationnels arbitraires) dont deux quelconques n'ont aucun point intérieur commun. Soit V la réunion de ceux de ces cubes C_h $(1 \leq h \leq m)$ qui rencontrent K ; on a en vertu des hypothèses $K \subset V \subset U$, et $\mu(V)=\sum_{h=1}^{m} \mu(C_h)$. Par suite $\theta(K) \subset \theta(V) \subset \bigcup_{h=1}^{m} \theta(C_h)$; d'autre part, chaque cube C_h est par hypothèse contenu dans un cube C'_h de côté 2δ ayant pour centre un point de K ; d'après (8) on a $\mu(\theta(C_h)) \leq \mu(\theta(C'_h)) \leq c\varepsilon\mu(C'_h)=2^n c\varepsilon\mu(C_h)$; d'où

$$(10) \quad \mu(\theta(V)) \leq \sum_{h=1}^{m} \mu(\theta(C_h)) \leq 2^n c\varepsilon \sum_{i=1}^{m} \mu(C_h) = \\ = 2^n c\varepsilon\mu(V) \leq 2^n c\varepsilon\mu(U) \leq 2^n c\varepsilon(\mu(K)+\varepsilon) .$$

Comme un point frontière de V est point frontière de l'un des C_h, il ne peut appartenir à K, autrement dit $K \subset \mathring{V}$. Pour tout point x

de l'ensemble compact $B \cap \complement \mathring{V}$, on a $\Delta(x) \neq 0$ par hypothèse ; il existe donc un voisinage ouvert W_x de x, ne rencontrant pas K, tel que la restriction de θ à ce voisinage soit un hoémomorphisme continûment différentiable sur un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ (§ 3, prop. 1). En vertu de l'axiome de Borel-Lebesgue, il existe un recouvrement de $B \cap \complement \mathring{V}$ formé d'un nombre fini de tels voisinages W_k $(1 \leqslant k \leqslant q)$; on en déduit qu'il existe une <u>partition</u> de $B \cap \complement V$ en un nombre fini d'ensembles mesurables G_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ tels que chacun des G_j soit contenu dans un des W_k (il suffit de considérer ceux des ensembles non vides de la forme $B \cap (\complement V) \cap \bigcap_{k=1}^{q} Z_k$, où Z_k est égal à W_k ou à $\complement W_k$ pour chaque indice k). En vertu du th. 1, on a

$$\mu(\theta(G_j)) = \int_{G_j} |\Delta(x)| \, d\mu(x)$$

et par suite

$$\mu(\theta(B \cap \complement V)) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \mu(\theta(G_j)) = \int_{B \cap \complement V} |\Delta(x)| d\mu(x) \leqslant \int_B |\Delta(x)| d\mu(x)$$

Tenant compte de (10), il vient

$$\mu(\theta(B)) \leqslant \int_B |\Delta(x)| \, d\mu(x) + 2^n c\varepsilon(\mu(K)+\varepsilon)$$

et comme ε est arbitrairement petit, on a bien l'inégalité (7).

Parmi les conséquences immédiates de ce théorème, notons les suivantes:

PROPOSITION 1.- <u>Soit</u> θ <u>une application continûment différentiable d'une partie ouverte</u> A <u>de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^n$. <u>L'image par</u> θ <u>de toute partie</u> $B \subset A$ <u>de mesure nulle est de mesure nulle</u>.

Cela résulte aussitôt de (7) et du fait que A est un espace localement compact dénombrable à l'infini.

COROLLAIRE.- <u>L'image par</u> θ <u>d'une partie fermée</u> $B \subset A$ <u>de mesure nulle est un ensemble maigre, réunion dénombrable d'ensembles compacts de mesure nulle</u>.

Il suffit de remarquer que B est réunion dénombrable d'ensembles compacts de mesure nulle.

PROPOSITION 2.- *Soit θ une application continûment différentiable d'une partie ouverte A de $\mathcal{R}^n$ dans $\mathcal{R}^n$, et soit $\Delta(x)$ le jacobien de θ au point x. L'image par θ de l'ensemble B des points $x \in A$ tels que $\Delta(x)=0$ est un ensemble maigre, réunion dénombrable d'ensembles compacts de mesure nulle.*

En effet, A est réunion d'une suite croissante d'ensembles compacts K_n ; comme B est fermé, $B \cap K_n$ est compact, et il résulte aussitôt de (7) que $\theta(B \cap K_n)$ est un ensemble compact de mesure nulle, donc rare.

PROPOSITION 3.- *Soit θ une application continûment différentiable d'une partie ouverte A de $\mathcal{R}^n$ dans $\mathcal{R}^n$. L'image par θ de toute partie maigre $B \subset A$ est une partie maigre de $\mathcal{R}^n$.*

Il suffit de démontrer que, si B est une partie *rare* de A, et H une partie compacte de A, $\theta(B \cap H)$ est rare dans $\mathcal{R}^n$. On peut évidemment se borner au cas où $B \subset H$ est compact. Soit K l'ensemble compact des points de H où $\Delta(x)=0$; d'après la prop.2, $\theta(B \cap K)$ est rare dans $\mathcal{R}^n$. Soit (U_n) une suite décroissante de voisinages ouverts de K, dont l'intersection est K. L'ensemble compact $B \cap \complement U_n$ peut être recouvert par un nombre fini de voisinages V_k ouverts (dans $\mathcal{R}^n$) de points de $B \cap \complement U_n$, tels que la restriction à V_k de θ soit un homéomorphisme de V_k sur une partie ouverte de $\mathcal{R}^n$ (§ 3, prop.1). Comme $B \cap (\complement U_n) \cap V_k$ est rare, il en est de même de son image par θ, donc $\theta(B \cap \complement U_n)$ est réunion d'un nombre fini d'ensembles rares, et par suite est rare. Il en résulte que l'ensemble $\theta(B)$, réunion dénombrable d'ensembles rares, est maigre ; mais en outre, il est fermé, donc il est rare, car si W est un ensemble ouvert non vide quelconque de $\mathcal{R}^n$, un point de W ne peut être adhérent à $\theta(B)$ sans lui appartenir, ce qui montre que $\theta(B)$ ne peut être dense par rapport à W sans contenir W ; mais en vertu du th. de Baire (*Top.gén.*, chap.IX, § 5, th.1) un ensemble maigre dans $\mathcal{R}^n$ ne peut contenir d'ensemble ouvert.

On voit donc que W contient un ensemble ouvert non vide ne rencontrant pas $\theta(B)$ ce qui signifie que $\theta(B)$ est rare.

Le th.2 permet de renforcer l'énoncé du th.1 de façon suivante :

THÉORÈME 3.- Soit θ un homéomorphisme continûment différentiable d'une partie ouverte A de $\mathbb{R}^n$ sur une partie ouverte A' de $\mathbb{R}^n$, et soit $\Delta(x)$ le jacobien de θ au point $x \in A$. Pour toute fonction f définie dans A' et intégrable par rapport à μ', la fonction $f(\theta(x))|\Delta(x)|$ est intégrable dans A par rapport à μ, et on a la formule (1).

Soit F l'ensemble fermé (dans A) des points de A où $\Delta(x)=0$, et soit B le complémentaire de F dans A. Comme on peut appliquer à B la formule (1), on voit que le th.3 sera démontré si nous prouvons que $\theta(F)$ est de mesure nulle ; or, c'est ce qui résulte aussitôt de la prop.2.

Comme l'ensemble $\theta(F)$ est maigre en vertu de la prop.2, il ne peut contenir d'ensemble ouvert en raison du th. de Baire. Comme θ est un homéomorphisme, on voit que F est nécessairement un ensemble rare. Mais il faut remarquer que F n'est pas nécessairement de mesure nulle. Considérons par exemple dans l'intervalle $I =]0,1[$ un ensemble compact rare F de mesure >0, et soit $g(t)$ une fonction numérique continue dans I, nulle dans F et >0 en tout point n'appartenant pas à F. La fonction $f(x)=\int_0^x g(t)dt$ est strictement croissante dans I (Fonct.var.réelle, chap.I, §2, cor. de la prop.2), donc f est un homéomorphisme continûment différentiable de I sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, dont la dérivée est nulle dans l'ensemble F de mesure >0.

PROPOSITION 4.- Soit θ une application continûment différentiable d'une partie ouverte A de $\mathbb{R}^n$ dans un espace $\mathbb{R}^m$ tel que $m > n$. Alors $\theta(A)$ est maigre dans $\mathbb{R}^m$, et de mesure nulle.

En effet, considérons l'application $(x, z) \to \theta(x)$ de l'ensemble ouvert $A \times \mathbb{R}^{m-n}$ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$; cette application est continûment différentiable et de jacobien nul dans $A \times \mathbb{R}^{m-n}$; comme l'image de $A \times \mathbb{R}^{m-n}$ par cette application est $\theta(A)$, la proposition résulte immédiatement de la prop.2 .

COROLLAIRE.- Soient f_i m fonctions numériques continûment différentiables dans une partie ouverte A de $\mathbb{R}^n$, et telles que le rang de la matrice jacobienne des f_i soit un nombre constant r dans A . Soit E la partie de A définie par les m équations $f_i(x)=0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Pour tout nombre $p > n-r$, la projection orthogonale de E sur un sous-espace vectoriel M de E de dimension p , est maigre dans M et de mesure p-dimensionnelle nulle

On peut supposer que M est la variété coordonnée engendrée par les éléments e_k de la base canonique d'indice $k \leqslant p$. D'autre part, il suffit de démontrer que pour toute partie compacte K de A , la projection sur M de $E \cap K$ est un ensemble rare de mesure nulle. Par hypothèse, on peut recouvrir $E \cap K$ par un nombre fini de voisinages V_j tels que $E \cap K \cap V_j$ soit défini par r équations de la forme $x_{\alpha_k} = g_k(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_{n-r}})$, où les α_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ sont les éléments d'une partie de r éléments de l'intervalle $[1,n]$, et les β_j les n-r éléments du complémentaire de cette partie (§ 3, prop.3) ; les fonctions g_k étant continûment différentiables dans une partie ouverte B_j de $\mathbb{R}^{n-r}$. On voit donc que la projection de $E \cap K \cap V_j$ sur $M = \mathbb{R}^p$ est image de B_j par une application continûment différentiable, d'où le corollaire, en vertu de l'hypothèse $p > n-r$.

Exercices.- 1) Soient A une partie ouverte de $\mathbb{R}^m$, θ une application différentiable de A dans $\mathbb{R}^n$. Soit B une partie compacte de A telle qu'en tout point $x \in B$, le rang de $\theta'(x)$ soit $< n$.

a) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in B$, montrer qu'il existe une suite (C_k) de cubes de centre x , contenus dans A et dont le côté tend vers 0 avec $1/k$, tels que l'on ait $\mu'(\theta(C_k)) \leqslant \varepsilon\mu(C_k)$,

μ désignant la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^m$ et μ' la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

b) Pour tout $x \in B$, soit $\mathcal{C}(x)$ l'ensemble des cubes C_k définis dans a). Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ indépendante de ε, une suite (x_p) de points de B, et, pour chaque p, un cube $C'_p \in \mathcal{C}(x_p)$ tels que les C'_p forment un recouvrement de B, et que l'on ait $\sum_p \mu(C'_p) \leqslant c\,\mu(B)$. (Soit U un voisinage ouvert de B tel que $\mu(U \cap \complement B) \leqslant \mu(B)$; pour chaque $x \in B$, soit $C(x)$ un des cubes C_k définis dans a) et contenus dans U, et soit $\gamma(x)$ le côté de $C(x)$; pour tout entier $r > 0$, soit B_r l'ensemble des $x \in B$ tels que $2^{-r-1} < \gamma(x) \leqslant 2^{-r}$. Former un recouvrement de B composé d'une suite de cubes fermés, deux à deux sans point intérieur commun, tel que pour chacun de ces cubes K_p, si s est le plus petit indice pour lequel $B_s \cap K_p$ n'est pas vide, le côté de K_p soit 2^{-s-2} ; prendre alors $x_p \in B_s \cap K_p$, et montrer que la suite de ces points répond à la question).

c) Déduire de a) et de b) que $\theta(B)$ est un ensemble négligeable dans $\mathbb{R}^n$.

d) Montrer que si le rang de $\theta'(x)$ est $< n$ en tous les points de A, l'ensemble $\theta(A)$ est maigre dans $\mathbb{R}^n$.

2) a) Soit H un ensemble fermé rare dans $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une fonction indéfiniment différentiable g définie dans $\mathbb{R}^n$, telle que $g(x)=0$ dans H et $g(x) > 0$ en tout point de $\complement H$. (Considérer $\complement H$ comme réunion d'une famille dénombrable de boules fermées B_n, de centres x_n. Soit f une fonction numérique définie dans $\mathbb{R}$, indéfiniment différentiable et telle que $f(t)=0$ pour $|t| \geqslant 1$, $f(t) > 0$ pour $|t| < 1$; montrer qu'en désignant par r_n le rayon de B_n et en supposant $r_n < 1/2$, la fonction $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^n f(\|x - x_n\|/r_n)$ répond à la question).

b) Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ n fonctions numériques différentiable dans une partie ouverte A de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si, pour tout $x \in A$, le rang de la jacobienne des f_k est $< n$, pour tout point $a \in A$, il existe un voisinage V de a tel que les f_k soient dépendantes dans V (utiliser a) et l'exerc. 1d)).

3) Généraliser le th.2 au cas où θ est seulement supposée différentiable dans A, et où $\Delta(x)$ est borné dans toute partie compacte de A (utiliser l'exerc.9 du § 2). Dans les mêmes hypothèses, généraliser le th.3 (en supposant que soit un homéomorphisme de A sur une partie ouvert de $\mathbb{R}^n$).

APPENDICE

Fonctions implicites au voisinage d'un point singulier.

1. Branches de fonctions implicites en un point singulier.

Dans le théorème des fonctions implicites (§ 3, th.2) est intervenue l'hypothèse que $f'_y(x_0, y_0)$ était un isomorphisme de F sur G ; l'abandon de cette hypothèse entraîne que les conclusions du théorème cessent d'être valables, tant en ce qui concerne l'existence que l'unicité (cf. §4, exerc.2). Nous allons étudier de façon détaillée un cas particulier assez fréquent dans les applications ; E,F,G sont alors identiques à $\mathbb{R}$, et par suite f est une fonction numérique ; l'hypothèse du th. des fonctions implicites s'écrit ici $f'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Nous supposerons pour simplifier que $(x_0,y_0)=(0,0)$, et nous nous bornerons à étudier les fonctions numériques continues u telles que $u(0)=0$ et $f(x,u(x))=0$ identiquement et que u garde un signe constant lorsque x tend vers 0 à droite (resp. à gauche). Par un changement de signe éventuel, on peut se borner au cas où $u(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$; cela entraîne que les fonctions de (x,y) que nous considérerons peuvent n'être supposées définies que dans un un voisinage de (0,0) par rapport au "premier quadrant" P défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

Le type de "singularité" que nous nous bornerons à étudier est celui où, au voisinage de (0,0) dans P , la fonction f est de la forme

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x) y^{\beta_i}(1+\varphi_i(x,y)) \tag{1}$$

où les β_i sont des nombres $\geqslant 0$ <u>tous distincts</u> , les g_i des fonctions continues (donc <u>bornées</u>) au voisinage de x=0 dans $[0,+\infty[$, les φ_i des fonctions continues dans un voisinage de (0,0) dans P , et <u>tendant vers</u> 0 lorsque (x,y) tend vers (0,0) dans P (comme nous allons le voir, la présence de ces fonctions ne modifie pratiquement pas la situation en ce qui concerne l'étude de $f(x,y)=0$ au voisinage de (0,0)).

Nous allons en premier lieu démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1 .- <u>Supposons que</u> $f(0,0)=0$ <u>et que les fonctions</u> g_i <u>soient égales à des fonctions</u> (H) <u>au voisinage de</u> 0 (<u>pour</u> $x \geqslant 0$) (<u>Fonct.var. réelle</u>, chap.V, App?,n°4). <u>Il existe alors un nombre fini de fonctions</u> (H), $v_1, v_2, \ldots, v$ <u>telles que toute fonction u définie, continue et</u> $\geqslant 0$ <u>dans un voisinage de</u> 0 (par rapport à $\mathbb{R}_+$), <u>telle que</u> $f(x,u(x))=0$ <u>pour</u> $x \geqslant 0$ <u>assez voisin de</u> 0 , <u>et</u> $u(0)=0$, <u>soit équivalente à l'une des fonctions</u> v_k <u>lorsque</u> x <u>tend vers</u> 0 .

Nous commencerons par montrer qu'on peut se limiter à considérer des fonctions (1) satisfaisant à certaines conditions supplémentaires. En premier lieu, on peut supposer $a_i \neq 0$ pour tout indice i , et par suite $g_i(x) > 0$ pour $x > 0$ au voisinage de 0 et pour tout i . On peut en outre supposer les indices permutés de sorte que la suite (β_i) soit <u>strictement décroissante</u> ; alors y^{β_n} est en facteur dans $f(x,y)$, et en supprimant ce facteur (qui ne peut donner que la solution triviale $y=0$ si $\beta_n > 0$) on peut supposer que $\beta_n=0$. On peut d'autre part se limiter au cas où, pour $i<j$ (et par suite $\beta_j < \beta_i$), on a $g_j = \underline{o}(g_i)$. Dans le cas contraire, on aurait $g_i = \underline{O}(g_j)$ (<u>Fonct.var.réelle</u>, chap.V,App.), et on pourrait écrire

$$a_i g_i(x) y^{\beta_i}(1+\varphi_i(x,y)) + a_j g_j(x) y^{\beta_j}(1+\varphi_j(x,y)) = a_j g_j(x) y^{\beta_j}(1+\psi_j(x,y))$$

où $\psi_j(x,y)=\varphi_j(x,y)+(a_i g_i(x)/a_j g_j(x))y^{\beta_i-\beta_j}(1+\varphi_i(x,y))$

tend encore vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ dans P . Enfin, on peut supposer que g_1 tend vers une limite >0 lorsque x tend vers 0 , sans quoi on diviserait f par g_1, en remarquant que le quotient de deux fonctions (H) est encore une fonction (H) et tenant compte de ce que $g_i=\underline{o}(g_1)$ pour $i>1$; le même raisonnement montre même qu'on peut supposer que $g_1=1$. Quand ces conditions sont remplies, nous dirons que $f(x,y)$ est mise sous <u>forme normale</u>.

Cela étant, nous allons démontrer le théorème par récurrence sur $n\geqslant 2$. Pour $n=2$, l'équation $f(x,y)=0$ s'écrit, en vertu des hypothèses faites, $a_1 y^{\beta_1}(1+\varphi_1(x,y))+a_2 g_2(x)(1+\varphi_2(x,y))=0$, avec $g_2=\underline{o}(1)$; s'il existe une solution continue $y=u(x)$, tendant vers 0 avec x , et $\geqslant 0$ pour $x\geqslant 0$, on a nécessairement $a_1 a_2 \leqslant 0$, et $(u(x))^{\beta_1} \sim -(a_2/a_1)g_2(x)$, ce qui établit dans ce cas le théorème.

Considérons ensuite les fonctions $(g_i(x))^{1/(\beta_1-\beta_i)}$, qui sont des fonctions (H) tendant vers 0 avec x pour $i>1$. Il existe un indice $m>1$ tel que $(g_i(x))^{1/\beta_1-\beta_i}=\underline{O}(g_m(x))^{1/\beta_1-\beta_m}$; désignons par H l'ensemble (non vide) des indices $h>1$ tels que $(g_h(x))^{1/\beta_1-\beta_h}/(g_m(x))^{1/\beta_1-\beta_m}$ tend vers une limite (finie) >0 lorsque x tend vers 0, par J le complémentaire de H dans l'ensemble des indices $i>1$, c'est-à-dire l'ensemble des j tels que $g_j^{1/\beta_1-\beta_j}=\underline{o}(g_m^{1/\beta_1-\beta_m})$. Posons $y=z(g_m(x))^{1/\beta_1-\beta_m}$ pour $x>0$, et remarquons que $g_h(g_m^{\beta_h/\beta_1-\beta_m}) \sim c_h g_m^{\beta_1/(\beta_1-\beta_m)}$ avec une constante $c_h>0$, lorsque $h\in H$ et que x tend vers 0 par valeurs >0 . La relation $f(x,y)=0$ s'écrit alors pour $x>0$, après division par $g_m^{\beta_1/(\beta_1-\beta_m)}$,

$$(2)\quad b_1 z^{\beta_1}(1+\varphi_1(x,y)) + \sum_{h\in H} b_h z^{\beta_h}(1+\psi_h(x,y)) =$$
$$= -\sum_{j\in J} b_j z^{\beta_j} g_j(x)(g_m(x))^{(\beta_j-\beta_1)/(\beta_1-\beta_m)}.(1+\varphi_j(x,y))$$

où les b_i sont des nombres réels $\neq 0$, et les $\psi_h(x,y)$ tendent vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. Cela étant, si y est remplacé par une fonction continue $u(x)$ telle que $f(x,u(x))=0$,et $u(0)=0$ nous allons voir que $z(x)=u(x)(g_m(x))^{-1/(\beta_1-\beta_m)}$ <u>tend vers une limite finie</u> lorsque x tend vers 0 .

Prouvons en premier lieu que $z(x)$ <u>tend vers une limite</u>, c'est-à-dire que les fonctions $u(x)$ et $(g_m(x))^{1/\beta_1-\beta_m}$ sont <u>comparables</u> (<u>Fonct.var. réelle</u>, chap.V, § 1,n°2) ; pour cela, il suffit de prouver que, pour tout nombre $t \geqslant 0$ sauf au plus un nombre fini (*), la fonction $u-t(g_m)^{1/\beta_1-\beta_m}$ garde un signe constant lorsque x tend vers 0 (par valeurs >0) (<u>Fonct.var.réelle</u>, chap.V, § 1,prop.9). Or, dans le cas contraire, il résulte du th. de Bolzano qu'il existerait une suite (x_n) de nombres >0, tendant vers 0 , et telle que l'on ait $u(x_n)=t(g_m(x_n))^{1/\beta_1-\beta_m}$ pour tout n , c'est-à-dire $f(x_n,t(g_m(x_n))^{1/\beta_1-\beta_m})=0$ pour tout n . Autrement dit, l'équation (2) serait vérifiée quand on y remplace z par t et x par chacun des x_n (y étant remplacé par $t(g_m(x_n))^{1/\beta_1-\beta_m}$). Or, on peut écrire

$$(g_j(x)(g_m(x))^{\frac{\beta_j-\beta_1}{\beta_1-\beta_m}})^{\frac{1}{\beta_1-\beta_j}} = (g_j(x))^{1/\beta_1-\beta_j}/(g_m(x))^{1/\beta_1-\beta_m})$$

et par définition de J le second membre de cette relation tend vers 0 avec x , pour tout indice $j\in J$. Faisant tendre n vers $+\infty$, on déduirait donc de ce qui précède qu'à la limite on aurait

$$(3)\qquad \varphi(t) = b_1 t^{\beta_1} + \sum_{h\in H} b_h t^{\beta_h} = 0$$

et l'équation (3) admettrait donc une <u>infinité</u> de racines positives.

Or, il est facile de voir par récurrence sur n que (3) n'a qu'un nombre fini de racines positives ; en effet, si β_p est le plus petit des exposants β_h, en divisant par t^{β_p}, l'équation (3) donne pour les racines $t\neq 0$, une équation de même forme mais où le terme de plus petit exposant est une constante $\neq 0$, cas auquel on peut donc se ramener sans restreindre la généralité. L'équation $\varphi'(t)=0$ est alors de même forme que (3), mais a au plus $n-1$ termes, donc $\varphi'(t)$ change de signe un nombre fini r de fois ; le th. de Rolle montre alors que $\varphi(t)$ a au plus $r+1$ racines distinctes positives, ce qui achève de démontrer notre assertion.

Prouvons en second lieu que la limite de $z(x)$ lorsque x tend vers 0, est nécessairement finie. Dans le cas contraire, en divisant (2) par z^{β_1}, on déduirait de (2) en faisant tendre x vers 0, que $b_1=0$, contrairement à l'hypothèse.

Il est clair alors que la limite t de $z(x)$ vérifie l'équation (3), donc ne peut avoir qu'un nombre <u>fini</u> de valeurs. Supposons d'abord que $t>0$; on a alors $u(x)\sim t(g_m(x))^{1/\beta_1-\beta_m}$. Si au contraire $t=0$, la relation (2) entre x et z peut encore s'écrire, au voisinage de (0,0)

$$(4)\qquad f_1(x,z)=b_p z^{\beta_p}(1+\theta_p(x,z))+\sum_{j\in J} b_j z^{\beta_j}\gamma_j(x)(1+\theta_j(x,z))=0$$

où les γ_j sont des fonctions (H) tendant vers 0 avec x, et où les $\theta_k(x,z)$ tendent vers 0. Or, comme H n'est pas vide, cette équation, mise sous forme normale, a <u>au plus</u> $n-1$ <u>termes</u>. L'hypothèse de récurrence prouve donc que pour toute fonction $u(x)$ telle que $z(x)$ tende vers 0, on a nécessairement pour un indice k, $z(x)\sim w_k(x)$, où les w_k $(1\leq k\leq q)$ sont des fonctions (H) en nombre fini ; on en déduit que l'on a nécessairement alors $u(x)\sim w_k(x)(g_m(x))^{1/\beta_1-\beta_m}$ pour un indice k, et cela achève de démontrer le th.1.

Nous dirons qu'une fonction u continue et $\geqslant 0$ dans un voisinage de 0 (dans $\mathbb{R}_+$) et telle que $f(x,u(x))=0$ dans ce voisinage est une <u>branche</u> de fonction définie par la relation $f(x,y)=0$ au voisinage de (0,0).

Le th.1 montre que s'il existe de telles branches, chacune d'elles a une <u>partie principale</u> bien déterminée qui est l'une des fonctions v_k $(1 \leqslant k \leqslant \rho)$.

Il reste à voir si, pour chacune des v_k, il existe effectivement une branche de fonction u définie par $f(x,y)=0$, telle que $u \sim v_k$ au voisinage de 0, et dans l'affirmative, quel est le nombre de ces branches. Supposons d'abord que la forme (1) de $f(x,y)$ soit normale, et considérons une branche u telle que (avec les notations de la démonstration du th.1) $z(x)$ tende vers une <u>racine simple</u> $t_o \neq 0$ de (3). Supposons en outre que les dérivées $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$ soient définies et continues dans un voisinage de $(0,0)$ Alors, en posant $\varphi(t)=(t-t_o)\omega(t)$ l'équation (2) peut s'écrire

(5) $$z-t_o = \Phi(x,z)/\omega(z)$$

où, en vertu des hypothèses, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ est définie et continue dans un voisinage de $(0,t_o)$, $\Phi(0,t_o)=0$ et $\omega(t_o)\neq 0$; on a en outre, en raison des hypothèses faites, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0$ au point $(0,t_o)$. Le th. des fonctions implicites est alors applicable au voisinage de $(0,t_o)$ à l'équation (5), et prouve l'existence d'<u>une et une seule</u> solution continue $z(x)$ telle que $z(0)=t_o$. Il existe donc dans ce cas <u>une branche et une seule</u> u telle que $u \sim v_k$.

Si la forme (1) n'est pas normale, nous avons vu comment on peut se ramener à une forme normale dans la démonstration du th.1 ; si on suppose ici que les $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$ sont continues au voisinage de $(0,0)$, il n'en est peut-être plus de même de $\frac{\partial \psi_j}{\partial y}$ (notations de la démonstration du th.1), car on peut avoir $\beta_i-\beta_j<1$; mais si on pose $y=Y^\gamma$, où γ est un nombre >0 suffisamment grand, l'équation en Y, mise sous forme normale, satisfera aux hypothèses faites ci-dessus sur les $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$; en outre, si t_o est racine simple de (3), $t_o^{1/\gamma}$ sera racine simple de l'équation analogue correspondant à $f(x,Y^\gamma)=0$; l'hypothèse que la forme (1) est normale est donc superflue pour assurer l'existence et l'unicité de la branche $u \sim v_k$

correspondant à une racine simple $t_0 > 0$ de l'équation (3).

Lorsque $t_0 > 0$ est racine multiple de (3), il existe un entier q tel que $\varphi(t)=(t-t_0)^q\theta(t)$ avec $\theta(t_0)\neq 0$. Il suffit en effet de prouver qu'il existe un entier $s>0$ tel que $\varphi^{(s)}(t_0)\neq 0$. Or, en posant $\varphi(t)=t^{\beta p}\psi(t)$, on a $\varphi'(t_0)=t_0^{\beta p}\psi'(t_0)$, et si $\varphi'(t_0)=0$, on a aussi $\psi'(t_0)=0$; comme ψ' a un terme de moins que φ, il suffit de raisonner par récurrence sur le nombre de termes de φ pour prouver notre assertion. Par rapport à la variable $z-t_0$ (et à x) l'équation (2) est alors encore de la forme (1), et on est ramené au problème initial pour cette nouvelle équation. Il n'est pas évident a priori qu'en procédant de la sorte on finisse toujours par arriver à un cas où toutes les racines $\neq 0$ de l'équation (3) soient simples ; nous verrons toutefois plus tard que l'on peut affirmer dans certains cas particuliers qu'il en est bien ainsi (<u>Fonct.anal.</u>, chap.   ).

<u>Remarque</u>.- Lorsque les exposants β_i sont des <u>entiers</u> $\geqslant 0$, la restriction relative au signe de y est inutile dans tous les raisonnements qui précèdent, pourvu que les fonctions φ_i soient définies pour $x \geqslant 0$ et voisin de 0, et pour y de signe quelconque et voisin de 0.

2. <u>Application : étude asymptotique des intégrales des équations différentielles du premier ordre</u>.

Considérons une équation différentielle scalaire du premier ordre

(6) $$y'=P(x,y)/Q(x,y)$$

où P et Q sont des <u>polynômes en</u> y, dont les coefficients sont des <u>fonctions</u> (H) définies dans un voisinage de $+\infty$; on suppose que Q n'est pas identiquement nul. Nous nous proposons d'étudier au voisinage de $+\infty$ une intégrale $u(x)$ de (6), en supposant qu'une telle intégrale existe dans un tel voisinage (ce qui n'est pas nécessairement le cas, comme le montre l'exemple $y'=1+y^2$).

THÉORÈME 2.- Il existe une suite de fonctions (H), $g_1, g_2, \ldots, g_m$, et une suite finie $(k_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ de m entiers, telles que toute intégrale $u(x)$ de (6) définie dans un voisinage de $+\infty$ vérifie l'une des relations $u^{k_i} u' \sim \lambda g_i$, $u^{k_i} \sim \lambda g_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. ($\lambda$ constante)

Nous démontrerons plusieurs lemmes préliminaires.

Lemme 1.- Soit $W(x,y)$ un polynôme de degré n en y dont les coefficients sont des fonctions (H) définies au voisinage de $+\infty$. Si, pour tout x assez grand, l'équation $W(x,y)=0$ admet des racines réelles, il existe un nombre fini $m \leqslant n$ de fonctions $u_k(x)$ indéfiniment dérivables dans un voisinage J_1 de $+\infty$, telles que pour tout $x \in J_1$, l'ensemble des $u_k(x)$ soit identique à l'ensemble des racines réelles de $W(x,y)=0$. En outre, lorsque x tend vers $+\infty$, chacune des fonctions u_k est équivalente à une fonction (H).

Raisonnons par récurrence sur le degré n de W, le lemme étant évident pour n=1 ; on peut d'ailleurs supposer que W est un polynôme unitaire par rapport à y. Soit $\mathfrak{K}_0$ le corps de Hardy engendré par les coefficients de W (ou plutôt leurs classes mod. R_∞, R_∞ désignant la relation d'équivalence "il existe x_1 tel que $f(x)=g(x)$ pour tout $x \geqslant x_1$" ; cf. *Fonct. var. réelle*, chap. V, § 1) ; en vertu de l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que W est irréductible sur $\mathfrak{K}_0$. Soient ξ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les racines de $W(x,y)=0$ (pour un x quelconque dans un intervalle J où les coefficients de W sont définies et continues) ; $\Delta(x) = \prod_{i<j} (\xi_i - \xi_j)^2$ est un polynôme symétrique des ξ_i, donc un polynôme par rapport aux coefficients de W, et par suite une fonction (H) ; en outre, cette fonction n'est pas identiquement nulle dans J puisque W est irréductible; il y a donc un voisinage $J_0 \subset J$ de $+\infty$ dans lequel $\Delta(x) \neq 0$, et par suite, toutes les racines de $W(x,y)=0$ sont simples. Soit m le plus grand

nombre de ces racines qui puissent être réelles pour un $x \in J_0$; par hypothèse, on a $1 \leqslant m \leqslant n$. Soit $x_0 \in J_0$ tel que $W(x_0,y)=0$ ait m racines réelles b_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$. Désignons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des intervalles L (non réduits à un point) d'origine x_0, tels que, dans L, il existe m fonctions continues v_k telles que $W(x,v_k(x))=0$ dans L , $v_k(x_0)=b_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ et que, pour tout $x \in L$, les m nombres $v_k(x)$ soient distincts. Comme par hypothèse on a $W'_y(x_0,b_k) \neq 0$, le th. des fonctions implicites prouve que $\mathfrak{M}$ n'est pas vide. Soient L,L' deux intervalles appartenant à $\mathfrak{M}$ et tels que $L \subset L'$; si (v_k) et (w_k) sont les familles de fonctions continues correspondant à L et L', w_k est un <u>prolongement</u> de v_k . En effet, soit t_0 la borne supérieure de l'ensemble des t L tels que $v_k(x)=w_k(x)$ pour $x_0 \leqslant x \leqslant t$ et $1 \leqslant k \leqslant m$; comme $v_k(t_0)=w_k(t_0)$ par continuité, t_0 est nécessairement l'extrémité de L en vertu du th. des fonctions implicites, d'où notre assertion. La <u>réunion</u> J_1 des intervalles de $\mathfrak{M}$ est donc le plus grand des intervalles de $\mathfrak{M}$; nous allons montrer que son extrémité $t_1=+\infty$.

Pour cela, supposons le contraire, et prouvons d'abord que chacune des fonctions $v_k(x)$ tend vers une limite lorsque $x < t_1$ tend vers t_1 . Sinon, il résulte du th. de Bolzano que l'adhérence de $v_k(x)$ au point t_1 contiendrait un intervalle $[\alpha,\beta]$ non réduit à un point ; par continuité, on aurait donc $W(t_1,\lambda)=0$ pour tout $\lambda \in [\alpha,\beta]$, ce qui est absurde. D'autre part, la limite c_k de $v_k(x)$ est nécessairement finie, sans quoi, en divisant $W(x,v_k(x))$ par $(v_k(x))^n$, le quotient tendrait vers 1 au point t_1, ce qui est absurde. Enfin, si on avait $c_h=c_k$ pour $h \neq k$, c_h serait racine multiple de $W(t_1,y)=0$, car en vertu du th. de Rolle, on a $W'_y(x,\rho)=0$ pour un nombre ρ de l'intervalle d'extrémités $v_h(x),v_k(x)$ et en faisant tendre x vers t_1, il vient $W'_y(t_1,c_h)=0$ si $c_h=c_k$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Mais alors, le th. des fonctions implicites prouve qu'il existe un intervalle strictement plus grand que $[x_0, t_1]$ et appartenant à $\mathfrak{M}$, ce qui est absurde.

Soient donc u_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ les fonctions continues ainsi définies dans $J_1 = [x_0, +\infty[$. Montrons que chacun des u_k tend vers une limite (finie ou infinie) lorsque x tend vers $+\infty$. Dans le cas contraire il existerait deux valeurs d'adhérence distinctes de $u(x)$ au point $+\infty$, donc, en vertu du th. de Bolzano, il existerait deux nombres $\gamma < \delta$ tels que, pour tout μ satisfaisant à $\gamma < \mu < \delta$, l'équation $u_k(x) = \mu$ admette une infinité de racines tendant vers $+\infty$; par suite, on aurait $W(x,\mu)=0$ pour une infinité de valeurs de x tendant vers $+\infty$; mais l'hypothèse entraîne que l'on a $W(x,\mu) \sim p(\mu)h(x)$, où p est un polynôme en μ et h une fonction (H) non nulle, lorsque μ est distinct d'une racine de $p(\mu)=0$; sauf pour un nombre fini de valeurs de μ , $W(x,\mu)$ garde donc un signe constant au voisinage de $+\infty$, ce qui contredit l'hypothèse que $u_k(x)$ n'a pas de limite.

Cela étant, la dernière partie du lemme est évidente si la limite de $u_k(x)$ est finie et $\neq 0$; si $\lim\limits_{x \to +\infty} u_k(x) = 0$, en posant $x = 1/x'$, l'équation $W(1/x', y) = 0$ est du type étudié au n°1, et le lemme résulte alors du th.1 . On raisonne de même lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} u_k(x) = +\infty$, en posant $x_1 = 1/x$, $y_1 = 1/y$ pour se ramener au cas traité au n°1 . Le lemme est ainsi complètement démontré.

<u>Lemme 2.- Les hypothèses étant celles du lemme 1, soit</u> $R(x,y)$ <u>une fraction rationnelle par rapport à</u> y , <u>dont le numérateur et le dénominateur ont pour coefficients des fonctions</u> (H) <u>définies au voisinage de</u> $+\infty$. <u>Alors, pour chacune des fonctions</u> $u_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ <u>on a</u> $R(x, u_k(x)) = 0$, <u>ou</u> $1/R(x, u_k(x)) = 0$ <u>au voisinage de</u> $+\infty$, <u>ou enfin</u> $R(x, u_k(x))$ <u>est équivalente à une fonction</u> (H).

Désignons par $\mathfrak{K}_1$ le corps de Hardy engendré par les classes mod. R_∞ des coefficients de V et du numérateur et dénominateur de R. La classe mod.R_∞ de u_k est un élément algèbrique sur $\mathfrak{K}_1$, donc il en est de même des classes du numérateur et du dénominateur de $R(x,u_k(x))$. Si ces classes ne sont pas nulles, le numérateur (resp. dénominateur) de $R(x,u_k(x))$ est une fonction continue non identiquement nulle vérifient une relation de la forme $T(x,z)=0$, où T est un polynôme en z à coefficients fonctions (H) de x ; la conclusion résulte donc du lemme 1.

Lemme 3.- *Les hypothèses étant celles du th.2, soit* $V(x,y)$ *un polynôme en* y *dont les coefficients sont des fonctions (H) au voisinage de* $+\infty$. *Si une intégrale* $u(x)$ *de* (6) *définie au voisinage de* $+\infty$ *est telle que* $V(x,u(x))=0$ *pour une infinité de valeurs de* x *tendant vers* $+\infty$, *on a* $V(x,u(x))=0$ *pour tout* x *assez grand*.

Soient v_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ les m "branches" de $V(x,y)=0$ au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire les m fonctions indéfiniment différentiables distinctes satisfaisant $V(x,v_k(x))=0$ dans ce voisinage (lemme 1). L'hypothèse entraîne qu'on a nécessairement $v_k(x_n)=u(x_n)$ pour un des indices k, et pour une suite (x_n) non bornée de valeurs de x. Montrons d'abord que l'ensemble A des x_n est discret ou est tout un intervalle $[x_0,+\infty[$. En effet comme u et v_k sont analytiques (cf. chap. II), on ne peut avoir $u(x_n)=v_k(x_n)$ pour une suite (x_n) tendant vers un point a fini, que si $u(x)=v_k(x)$ dans tout un voisinage de a ; et dans ce dernier cas, le principe du prolongement analytique prouve que $u(x)=v_k(x)$ dans tout un voisinage de $+\infty$. Nous pouvons donc supposer que l'ensemble A est discret, ou encore que la suite (x_n) est strictement croissante et tend vers $+\infty$. Comme $Q(x,u(x))$ n'est pas nul au voisinage de $+\infty$, on a aussi $Q(x_n,v_k(x_n))\neq 0$; la fonction $Q(x,v_k(x))$ n'est donc pas identiquement nulle au voisinage de $+\infty$, et il résulte alors du lemme 2 qu'elle garde un signe constant dans un voisinage de $+\infty$. La fonction $v_k'(x)-\dfrac{P(x,v_k(x))}{Q(x,v_k(x))}$ est donc définie dans un voisinage de $+\infty$; elle est d'ailleurs égale à $-\dfrac{V_x'(x,v_k(x)}{V_y'(x,v_k(x))}-\dfrac{P(x,v_k(x))}{Q(x,v_k(x))}$ (V pouvant être supposé irréductible). Donc (lemme 2), ou bien cette fonction est nulle dans un voisinage de $+\infty$, ou bien elle est équivalente à une fonction (H), et garde alors un signe constant. Dans le premier cas, v_k est une intégrale de (6), et comme elle est égale à u aux points x_n, on a nécessairement $V(x,u(x))=0$ pour tout x assez grand. Dans le second cas, on voit que tous les nombres $v_k'(x_n)-u'(x_n)$ seraient $\neq 0$ et de <u>même signe</u>. Or, cela est absurde, car pour $x_n < x < x_{n+1}$, $v_k(x)-u(x)$ ne change pas de signe ; par exemple si elle est >0 dans cet intervalle, on a nécessairement $v_k'(x_n)-u'(x_n)\geqslant 0$ et $v_k'(x_{n+1})-u'(x_{n+1})\leqslant 0$, ce qui contredit le résultat précédent, et démontre le lemme.

Nous pouvons maintenant démontrer le th.2. Posons $P(x,y) = =\sum_k \varphi_k(x)y^k$ et $Q(x,y)=\sum_k \psi_k(x)y^k$. Le rapport de deux termes quelconques de $Q(x,y)y'-P(x,y)$ est de la forme $f(x)y^m$, ou $h(x)y^my'$, où m est un entier rationnel, f ou h une fonction (H) ; lorsqu'on y remplace y par u(x), en tenant compte de (6), on voit que ces rapports sont de la forme $R(x,u(x))$, où $R(x,y)$ est un polynôme ou une fraction rationnelle en y (de dénominateur $Q(x,y)$) à coefficients fonctions (H) au voisinage de $+\infty$. Montrons que $R(x,u(x))$ est nécessairement <u>monotone</u> au voisinage de $+\infty$; en effet, en tenant compte de (6), $\dfrac{d}{dx}(R(x,u(x))=S(x,u(x))$, où $S(x,y)$ est encore une fraction rationnelle en y à coefficients fonctions (H), dont le dénominateur est une puissance de $Q(x,y)$. En vertu du lemme 3, on voit que l'on a, ou bien $S(x,u(x))=0$ dans tout un voisinage de $+\infty$, ou bien $S(x,u(x))\neq 0$ dans un voisinage de $+\infty$, et de toutes façons $S(x,u(x))$ garde un signe constant, ce qui établit notre assertion. Il en résulte que lorsque x tend vers $+\infty$, $R(x,u(x))$ tend vers une limite (finie ou infinie). Deux termes quelconques de $Qy'-P$, quand on y remplace y par $u(x)$, sont donc comparables ; par suite il en existe un, soit $\theta(x)$, tel que tous les autres soient de la forme $O(\theta)$. Montrons qu'il existe au moins un second terme $\theta_1 \neq \theta$ tel que θ_1/θ tende vers une limite $\neq 0$. Dans le cas contraire, en divisant par $\theta(x)$ l'équation $Q(x,u(x))u'(x)-P(x,u(x))=0$, il viendrait la relation $1=0$ lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui est absurde.

On voit donc qu'il existe un entier m tel que $(u(x))^m$, ou $(u(x))^m u'(x)$ soit équivalent au produit d'une constante et d'une fonction (H) appartenant à un ensemble fini (quotient de deux des fonctions φ_k, ψ_k).

Remarques.- 1) On peut démontrer que toute primitive d'une fonction (H) est équivalente à une fonction (H) (Fonct. var. réelle, chap. V, § 3, n° 5 et App., exerc. 4 et 5). On déduit donc du th. 2 que, dans tous les cas, $\log|u(x)|$ est équivalente à une fonction (H).

2) On peut donner des exemples d'équations du second ordre de la forme $y''=R(x,y,y')$, où R est une fonction rationnelle de x,y,y', et telle qu'il existe au voisinage de $+\infty$ une intégrale de cette équation non dominée par une exponentielle itérée.