RÉDACTION N° 159

COTE : NBR 061

TITRE : ESPACES POLONISABLES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 12

NOMBRE DE FEUILLES : 12

ESPACES POLONISABLES.

1. Espaces de type dénombrable.

PROPOSITION 1.- *Dans un espace topologique métrisable* E *, les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe un ensemble dénombrable partout dense dans* E .

b) *La topologie de* E *admet une base dénombrable.*

Il est immédiat que b) entraîne a), car si (U_n) est une base dénombrable de la topologie de E , et a_n un point de U_n , l'ensemble des a_n est partout dense, puisque tout ensemble ouvert non vide dans E contient un des ensembles U_n . Montrons inversement que b) entraîne a). Soit (a_n) une suite partout dense de points de E , et soit d une distance compatible avec la topologie de E ; si $B_m(a_n)$ est la boule ouverte de centre a_n et de rayon $1/m$, les $B_m(a_n)$ forment une base de la topologie de E . En effet, pour toute boule ouverte B de centre x_o et de rayon r , il existe un entier m tel que $2\,m < r$, et un entier n tel que $d(x_o,a_n) < 1/m$; la boule $B_m(a_n)$ est alors un voisinage de x_o contenu dans B .

DÉFINITION 1.- *On dit qu'un espace métrisable* E *est de type dénombrable si sa topologie admet une base dénombrable.*

Il est clair que tout sous-espace d'un espace métrisable de type dénombrable est de type dénombrable. Tout produit E d'une famille *dénombrable* (F_n) d'espaces métrisables de type dénombrable est métrisable et de type dénombrable. En effet, la seconde assertion résulte aussitôt de la définition d'une base de la topologie d'un espace produit (chap.I, §8) ; d'autre part, si d_n est une distance définissant la topologie de F_n , les fonctions f_n définies sur $E\times E$ par les conditions $f_n(x,y)=d_n(x_n,y_n)$ pour $x=(x_m)$ et $y=(y_m)$, sont des écarts sur E définissant la structure uniforme produit de celles des F_n , ce qui montre que cette structure est métrisable (chap.IX, § 2, cor. du th.1).

Enfin, si un espace quotient E/R d'un espace métrisable de type dénombrable E est métrisable, il est de type dénombrable, car l'image par l'application canonique d'un ensemble dénombrable partout dense dans E est partout dense dans E/R (prop.1).

PROPOSITION 2.- Soit I l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$; tout espace métrisable de type dénombrable E est homéomorphe à un sous-espace du cube $I^{\mathbb{N}}$.

En effet, soit d une distance compatible avec la topologie de E et telle que $d(x,y) \leqslant 1$ pour tout couple de points de E. Soit d'autre part (a_n) une suite partout dense de points de E. Pour tout $x \in E$, soit $\varphi(x)$ le point $(d(x,a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de $I^{\mathbb{N}}$; montrons que φ est un homéomorphisme de E sur $\varphi(E)$. En effet, φ est continue puisque chacune des fonctions $x \to d(x,a_n)$ l'est. D'autre part, soit B une boule de centre x_0 et de rayon r dans E, et soit n un entier tel que $d(x_0,a_n) < r/3$. L'image par φ de l'ensemble W des points $x \in E$ tels que $|d(x_0,a_n)-d(x,a_n)| < r/3$ est un voisinage de $\varphi(x_0)$ dans $\varphi(E)$. Mais pour tout $x \in W$, on a $d(x,a_n) \leqslant d(x_0,a_n)+r/3 < 2r/3$, d'où $d(x,x_0) \leqslant d(x_0,a_n)+d(x,a_n) < r$, ce qui montre que $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(W)) = W \subset B$ et par suite que φ est un homéomorphisme.

COROLLAIRE.- Tout espace métrisable et de type dénombrable a une puissance au plus égale à la puissance du continu.

En effet, la puissance de $I^{\mathbb{N}}$ est égale à celle de $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et comme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}$, $I^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $2^{\mathbb{N}}$.

2. Espaces polonisables.

DÉFINITION 2.- On dit qu'un espace topologique E est polonisable s'il est métrisable et de type dénombrable, et s'il existe une distance compatible avec la topologie de E et pour laquelle E soit complet.

Le complété d'un espace métrique de type dénombrable est polonisable.

D'après ce qu'on a vu au n°1, il est clair que tout <u>produit dénombrable</u> d'espaces polonisables est polonisable. Tout espace E <u>somme</u> d'une famille dénombrable (F_n) d'espaces polonisables est polonisable ; en effet, pour chaque n , si d_n est une distance sur F_n pour laquelle F_n est complet, et telle que $d_n(x,y) \leqslant 1$ dans $F_n \times F_n$, on définit sur E une distance d compatible avec la topologie de E en posant $d(x,y)=2$ si x et y n'appartiennent pas à un même F_n , et $d(x,y)=d_n(x,y)$ si x et y sont tous deux dans F_n ; si (x_m) est une suite de Cauchy dans E , tous les points de cette suite appartiennent donc à un même F_n à partir d'un certain rang, ce qui prouve que E est complet pour d ; enfin il existe évidemment un ensemble dénombrable partout dense dans E , ce qui établit notre assertion.

PROPOSITION 3.- <u>Tout espace compact E admettant une base dénombrable est polonisable.</u>

Comme l'unique structure uniforme de E est une structure d'espace complet, tout revient à prouver que cette structure est métrisable. Or, si (U_n) est une base dénombrable de la topologie de E , tout voisinage V de la diagonale Δ de $E \times E$ contient une réunion W d'un nombre fini d'ensembles de la forme $U_n \times U_n$, qui est un voisinage de Δ . L'ensemble de ces ensembles W étant dénombrable, il existe donc un système fondamental dénombrable d'entourages de la structure uniforme de E , ce qui démontre la proposition (chap. IX, § 2, th. 1).

THÉORÈME 1.- <u>Pour qu'un sous-espace P d'un espace polonisable E soit polonisable, il faut et il suffit que P soit intersection dénombrable d'ensembles ouverts de E .</u>

1°- La condition est <u>nécessaire</u>. Soit en effet d une distance sur P compatible avec la topologie de P et pour laquelle P soit complet ; pour tout $x \in P$, soit $\omega(x)$ la borne inférieure des diamètres (relatifs à la distance d) des ensembles $U \cap P$, lorsque U parcourt le filtre des voisinages de x dans E . Soit G_n l'ensemble des $x \in \overline{P}$ tels que $\omega(x) < 1/n$; dire que $x \in G_n$ signifie donc qu'il existe un voisinage V de x dans E tel que pour tout couple de points y,z de $V \cap P$, on ait $d(y,z) < 1/n$; d'où résulte aussitôt que G_n est ouvert relativement à $\overline{P}$, et que $P \subset G_n$. Montrons que $P = \bigcap_n G_n$; en effet, si x appartient à tous les G_n , la trace sur P du filtre des voisinages de x est un filtre de Cauchy sur P (pour la distance d) en vertu de ce qui précède, et ce filtre converge vers un point de P par hypothèse, point qui est nécessairement identique à x . Cela étant, $\overline{P}$ est intersection dénombrable d'ensembles ouverts de E , et G_n est trace sur $\overline{P}$ d'un ensemble ouvert de E , donc est aussi intersection dénombrable d'ensembles ouverts de E ; il en est par suite de même de P .

2^o– La condition est <u>suffisante</u> . Supposons que P soit intersection d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts G_n de E ; munissons E d'une distance d pour laquelle E soit complet. Soit F_n le complémentaire de G_n dans E ; on a $d(x,F_n) \neq 0$ pour tout $x \in P$, puisque F_n est fermé et ne contient pas x . Munissons alors P de la structure uniforme $\mathcal{U}$ définie par la famille <u>dénombrable</u> d'écarts formée de d et des écarts $d_n(x,y) = \left| \frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)} \right|$. Cette structure uniforme est métrisable (chap. IX, § 2, cor. du th. 1). La topologie $\mathcal{C}$ déduite de $\mathcal{U}$ est identique à la topologie $\mathcal{C}'$ induite sur P par celle de E : en effet, les d_n et d sont continues dans P (pour la topologie $\mathcal{C}'$), donc $\mathcal{C}$ est moins fine que $\mathcal{C}'$; et d'autre part, la structure uniforme $\mathcal{U}$ étant plus fine que la structure uniforme $\mathcal{U}'$ induite par celle de E , $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}'$, donc identique à cette dernière. Enfin, P est <u>complet</u> pour la structure uniforme $\mathcal{U}$. En effet, une suite de Cauchy (x_m) pour $\mathcal{U}$ est une suite de Cauchy pour $\mathcal{U}'$, donc converge vers un point $x \in E$; pour un n donné, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier m_0 tel que, pour $p \geqslant m_0$ et pour tout $q \geqslant p$, on ait $d_n(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$; cela entraîne en particulier que $d(x_q, F_n)$ est bornée inférieurement par un nombre $\alpha > 0$ lorsque q tend vers $+\infty$; il en résulte que $d(x, F_n) \geqslant \alpha$, autrement dit $x \in G_n$. Le point x appartient donc à P, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- Soit I l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$; tout espace polonisable est homéomorphe à un sous-espace de $I^{\mathbb{N}}$, intersection dénombrable d'ensembles ouverts de $I^{\mathbb{N}}$.

C'est une conséquence immédiate de la prop.2 et du th.1, puisque $I^{\mathbb{N}}$ est polonisable.

COROLLAIRE 2.- Tout espace localement compact E métrisable et dénombrable à l'infini est polonisable.

Soit E' l'espace compact obtenu en adjoignant à E un point à l'infini ω ; en vertu du th.1, tout revient à prouver que E' est métrisable, et d'après la prop.3, il suffit de montrer que E' admet une base dénombrable. Or, on sait que E est réunion d'une suite croissante (U_n) d'ensembles ouverts relativement compacts tels que $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ (chap.I, §10, 2è éd., prop.). Comme $\overline{U}_n$ est compact et métrisable, la topologie de U_n admet une base dénombrable (V_{mn}) formée d'ensembles ouverts dans E. Soit d'autre part W_n le complémentaire de $\overline{U}_n$ dans E' ; montrons que les ensembles W_n et V_{mn} forment une base de la topologie de E'. Soit en effet G un ensemble ouvert quelconque de E'. Si $\omega \notin G$, G est réunion des ensembles $G \cap U_n$, dont chacun est réunion d'une sous-famille de (V_{mn}) ; si au contraire $\omega \in G$, il existe un entier n tel que $W_n \subset G$; G est alors réunion de W_n et de $G \cap U_{n+1}$, réunion d'une sous-famille de $(V_{m,n+1})$. La proposition est donc démontrée.

On observera que ce raisonnement montre en outre que tout espace localement compact dont la topologie admet une base dénombrable est polonisable ; en effet, il est clair qu'un tel espace E est dénombrable à l'infini, et que tout sous-espace compact de E admet une base dénombrable, et nous ne nous sommes servis que de ces deux propriétés.

3. Sections des espaces compacts métrisables.

THÉORÈME 2 (Federer-Morse).- *Soient E et F des espaces compacts métrisables, et f une application continue de E dans F ; il existe dans E un ensemble S , intersection dénombrable d'ensembles ouverts, tel que la restriction de f à S soit une application biunivoque de S sur $f(E)$* ("section" pour la relation d'équivalence $f(x) = f(y)$).

On peut évidemment se borner au cas où $f(E)=F$. Pour tout $y\in F$, nous poserons $E_0(y) = \overset{-1}{f}(y)$; les $E_0(y)$ constituent une partition de E formée d'ensembles fermés, et l'ensemble S cherché doit rencontrer chacun des ensembles $E_0(y)$ en un point et un seul.

Soit d une distance sur E compatible avec la topologie de E . Définissons par récurrence une suite d'entiers (n_p) et, pour chaque p , une suite finie d'ensembles fermés $B(m_1,m_2,\dots,m_p)$, où $1\leq m_k\leq n_k$ pour $1\leq k\leq p$, ayant les propriétés suivantes : 1° chacun des ensembles $B(m_1,m_2,\dots,m_p)$ a un diamètre $\leq 1/2^p$; 2° les n_1 ensembles $B(m)$ $(1\leq m\leq n_1)$ forment un recouvrement de E , et pour tout $p\geq 1$, les n_{p+1} ensembles $B(m_1,m_2,\dots,m_p,m_{p+1})$ $(1\leq m_{p+1}\leq n_{p+1})$ forment un recouvrement de $B(m_1,m_2,\dots,m_p)$. L'existence de ces ensembles découle aussitôt de la compacité de E : il existe un recouvrement fini de chacun des $B(m_1,\dots,m_p)$ par des ensembles fermés $C(m_1,\dots,m_p,q)$ (où $1\leq q\leq r(m_1,\dots m_p)$) de diamètre $\leq 1/2^{p+1}$. On prendra pour n_{p+1} le plus grand des entiers

$r(m_1,\dots,m_p)$, et on posera $B(m_1,\dots,m_p,m_{p+1}) = C(m_1,\dots,m_p,m_{p+1})$ pour $m_{p+1} \leqslant r(m_1,\dots,m_p)$ et $B(m_1,\dots,m_p,m_{p+1}) = C(m_1,\dots,m_p,r(m_1,\dots,m_p))$ pour $m_{p+1} > r(m_1,\dots,m_p)$.

Ceci posé, pour chaque p , nous dirons que les ensembles $B(m_1,\dots,m_p)$ sont d'<u>ordre</u> p , et nous les ordonnerons <u>lexicographiquement</u> (autrement dit, $B(m_1,\dots,m_p)$ est <u>antérieur</u> à $B(q_1,\dots,q_p)$ si, pour le premier indice i tel que $m_i \neq q_i$, on a $m_i < q_i$).

Pour chaque $y \in F$, soit $E_1(y)$ l'intersection de $E_0(y)$ et du <u>premier</u> ensemble de la forme $B(m)$ qui rencontre $E_0(y)$; soit E_1 la réunion de tous les $E_1(y)$. Montrons que E_1 est intersection dénombrable d'ensembles ouverts de E . En effet, la relation $x \in E_1$ équivaut à la suivante : "soit B(m) le premier des ensembles de la forme B(q) qui contient x ; alors, pour $q < m$, l'image de B(q) par f ne contient pas f(x)" . Pour une valeur <u>fixe</u> de m , les points $x \in E$ qui possèdent cette dernière propriété sont les points de B(m) qui appartiennent à l'image réciproque D(m) par f du complémentaire de la réunion des f(B(q)) pour $q < m$; mais comme f(B(q)) est compact, D(m) est ouvert ; par suite, $B(m) \cap D(m)$, intersection d'un ensemble fermé et d'un ensemble ouvert, est intersection dénombrable d'ensembles ouverts. Il en est de même de E_1, qui est réunion des ensembles $B(m) \cap D(m)$ en nombre <u>fini</u>.

Soit de même, pour $p > 1$ et pour chaque $y \in F$, $E_p(y)$ l'intersection de E(y) et du premier ensemble de la forme $B(m_1,\dots,m_p)$ qui rencontre $E_0(y)$ et soit E_p la réunion des $E_p(y)$; on montre comme ci-dessus que E_p est intersection dénombrable d'ensembles ouverts.

Nous allons voir que l'intersection S des ensembles E_p possède les propriétés énoncées. Tout d'abord, il est clair que l'on a

$S = \bigcap_{p=1}^{\infty} E_p = \bigcup_{y \in F} \left(\bigcap_{p=1}^{\infty} E_p(y) \right)$; donc tout revient à prouver que, pour chaque $y \in F$, l'intersection des $E_p(y)$ est réduite à <u>un point</u> ; mais comme ces ensembles sont compacts et que leur diamètre tend vers 0 , il suffit de prouver qu'ils forment une suite <u>décroissante</u>. Or, soit $B(m_1,\ldots,m_p)$ le premier ensemble d'ordre p qui rencontre $E_o(y)$, et soit $B(q_1,q_2,\ldots,q_p,q_{p+1})$ le premier ensemble d'ordre $p+1$ qui rencontre $E_o(y)$; comme $B(q_1,\ldots,q_p,q_{p+1})$ est contenu dans $B(q_1,\ldots,q_p)$, ce dernier est postérieur à $B(m_1,\ldots,m_p)$. Mais d'autre part $B(m_1,\ldots,m_p)$ est réunion des $B(m_1,\ldots,m_p,m_{p+1})$ pour $1 \leqslant m_{p+1} \leqslant n_{p+1}$, donc un de ces ensembles rencontre $E_o(y)$, et par suite $B(m_1,\ldots,m_p,m_{p+1})$ est postérieur à $B(q_1,\ldots,q_p,q_{p+1})$ pour une valeur de m_{p+1} , ce qui implique que $B(m_1,\ldots,m_p)$ est postérieur à $B(q_1,\ldots,q_p)$. On a donc $m_i=q_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$, ce qui prouve que $E_{p+1}(y) \subset E_p(y)$, et achève la démonstration.

La conclusion du th.2 ne subsiste plus si on suppose seulement F métrisable.

4. <u>Espaces de fonctions numériques continues sur les espaces compacts métrisables</u>.

Nous désignerons par $\mathcal{C}(E)$ l'espace normé complet des fonctions numériques définies et continues dans un espace compact E .

THÉORÈME 3.- <u>Pour que l'espace $\mathcal{C}(E)$ soit polonisable, il faut et il suffit que l'espace compact E soit métrisable</u>.

1° La condition est <u>suffisante</u>. En effet, si E est métrisable, il est de type dénombrab le ; soit (a_n) une suite partout dense dans E ; soit d une distance compatible avec la topologie de E , et considérons les fonctions numériques continues dans E , $f_n(x)=d(x,a_n)$. L'ensemble des f_n sépare les points de E , comme le montre la démonstration de la

Il résulte donc du th. de Weierstrass-Stone (chap.X, § 5,th.3) que les polynômes par rapport aux f_n sont partout denses dans $\mathcal{C}(E)$. Il en est évidemment de même des polynômes par rapport aux f_n, à coefficients rationnels ; comme cet ensemble de polynômes est dénombrable, notre assertion est démontrée.

2° La condition est nécessaire. Soit B la boule fermée de $\mathcal{C}(E)$, formée des fonctions continues u telles que $\|u\| \leq 1$. Pour tout $x \in E$ considérons l'application $u \to u(x)$ de B dans $\mathbf{R}$, que nous noterons $\tilde{x}$; c'est une fonction numérique continue dans B. Montrons que l'application $x \to \tilde{x}$ est continue dans E, quand on munit $\mathcal{C}(B)$ de la topologie de la convergence simple ; cela signifie en effet que, pour un nombre fini de fonctions $u_i \in B$ $(1 \leq i \leq n)$ pour un nombre $\varepsilon > 0$ et un point quelconque $x_0 \in E$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $|u_i(x)-u_i(x_0)| \leq \varepsilon$ pour $x \in V$ et $1 \leq i \leq n$. D'autre part, l'application $x \to \tilde{x}$ est biunivoque, car on sait que si x et y sont distincts dans E, il existe une fonction v continue dans E, à valeurs dans $[0,1]$, égale à 0 au point x et à 1 au point y (chap.IX, § 1,th.2). L'image $\tilde{E}$ de E par l'application $x \to \tilde{x}$ est donc un sous-espace compact de $\mathcal{C}(B)$ (pour la topologie de la convergence simple), homéomorphe à E. En outre, $\tilde{E}$ est une partie équicontinue de $\mathcal{C}(B)$: en effet, la relation $\|u-v\| \leq \varepsilon$ dans B entraîne $|u(x)-v(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire $|\tilde{x}(u)-\tilde{x}(v)| \leq \varepsilon$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{E}$. Cela étant, par hypothèse B est de type dénombrable, donc il existe dans B une suite partout dense (u_n). Sur $\tilde{E}$, la structure uniforme de la convergence simple dans B est donc identique à la structure uniforme de la convergence simple dans l'ensemble D des u_n (chap.X, § 3,prop.3) ; mais cette dernière est métrisable, puisqu'elle est définie par la famille dénombrable des écarts $|\tilde{x}(u_n)-\tilde{y}(u_n)|$ (chap.IX, § 2,cor. du th.1) ; le th.3 est ainsi complètement démontré.

COROLLAIRE 1.- <u>Soit E un espace localement compact métrisable et dénombrable à l'infini. L'espace $\mathcal{K}(E)$ des fonctions numériques u continues dans E et nulles dans le complémentaire d'un ensemble compact (dépendant de u), muni de la topologie de la convergence uniforme, est un espace métrisable de type dénombrable.</u>

En effet, soit E' l'espace compact obtenu en adjoignant à E un point à l'infini ω ; on sait que E' est métrisable (cor.2 du th.1). Or, toute fonction de $\mathcal{K}(E)$ se prolonge évidemment par continuité au point ω ; on peut donc considèrer $\mathcal{K}(E)$ comme un sous-espace de $\mathcal{C}(E')$, d'où le corollaire.

On notera que si E n'est pas compact, l'espace normé $\mathcal{C}^{\infty}(E)$ de toutes les fonctions numériques continues et bornées dans E n'est pas de type dénombrable.

COROLLAIRE 2.- <u>Soit E un espace compact métrisable. Tout espace quotient séparé $F=E/R$ de E est un espace compact métrisable.</u>

Soit φ l'application canonique de E sur F . A toute fonction $f \in \mathcal{C}(F)$, faisons correspondre la fonction $\tilde{f} = f\circ\varphi \in \mathcal{C}(E)$; il est immédiat que l'application $f \to \tilde{f}$ est une isomètrie de $\mathcal{C}(F)$ dans $\mathcal{C}(E)$. En vertu du th.3 , $\mathcal{C}(E)$ est polonisable, donc il en est de même de $\mathcal{C}(F)$ qui est isomorphe à un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(E)$; mais le th.3 montre alors que F est métrisable.

5. Fonctions semi-continues sur les espaces polonisables.

PROPOSITION 4.- <u>Soit E un espace polonisable. Toute fonction numérique f , semi-continue inférieurement dans E , est l'enveloppe supérieure d'une suite de fonctions numériques continues.</u>

En effet, soit (U_n) une base de la topologie de E . Pour tout couple d'ensembles (U_m, U_n) tels que $\overline{U}_m \subset U_n$ soit a_n la borne inférieure de $f(x)$ dans U_n ; et soit g_{mn} la fonction continue numérique, égale à a_n dans $\overline{U}_m$, à $-\infty$ dans $\complement U_n$, et $\leqslant a_n$ dans U_n (chap. IX, § 4, axiome (O_V)). Montrons que f est l'enveloppe supérieure de la famille des g_{mn} . En effet, pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, soit V un voisinage de x tel que $f(y) \geqslant f(x) - \varepsilon$ pour tout $y \in V$. Il existe deux indices m,n tels que $x \in \overline{U}_m \subset U_n \subset V$; on a donc $a_n \geqslant f(x) - \varepsilon$, d'où $f(x) - \varepsilon \leqslant g_{mn}(x) \leqslant f(x)$, ce qui démontre la proposition.

Si on pose $h_n = \sup_{p \leqslant n, q \leqslant n} g_{mn}$, on voit que f est enveloppe supérieure de la suite <u>croissante</u> des fonctions continues h_n . D'ailleurs, si $f \geqslant 0$, f est aussi enveloppe supérieure de la suite croissante des fonctions continues $h_n^+ \geqslant 0$.
