RÉDACTION N° 156

COTE : NBR 058

TITRE : LIVRE V - ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES
CHAPITRE III (ÉTAT 6)
ESPACES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 57

NOMBRE DE FEUILLES : 57

NBR 058 156 2

Archives
Mathématiques
Déc. 1951

LIVRE V

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE III (Etat 6)

ESPACES D'APPLICATIONS LINÉAIRES.

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels topologiques considérés sont des espaces localement convexes réels ou complexes (ch.II, §§ 2 et 6) ; lorsque le corps des scalaires n'est pas explicitement mentionné dans un énoncé, il doit être entendu que ce dernier est valable aussi bien pour les espaces localement convexes complexes.

§ 1. Ensembles bornés dans les espaces localement convexes.

1. Définition des ensembles bornés.

DÉFINITION 1.- On dit qu'une partie A d'un espace localement convexe E est bornée si elle est absorbée par tout voisinage de 0 dans E (autrement dit (chap.I, § 1, n°2) si, pour tout voisinage V de 0 dans E , il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda A \subset V$) .

Il suffit évidemment que A soit absorbée par tout voisinage appartenant à un système fondamental de voisinages de 0 .

Si la topologie de E est définie par un ensemble Γ de semi-normes, pour qu'une partie A de E soit bornée, il faut et il suffit que toute semi-norme $p \in \Gamma$ soit bornée dans A : cela résulte immédiatement de la définition des voisinages de 0 dans E (chap.II, § 5).

Exemples.- 1) Dans un espace normé E , pour qu'une partie A soit bornée, il faut et il suffit que la norme $\|x\|$ soit bornée dans A , ou encore que A soit contenu dans une boule de centre 0 ; en d'autres termes, A doit être borné pour la structure d'espace métrique de E (Top. gén., chap. IX, § 2, n°2), ce qui justifie la terminologie introduite

Dans ce cas, il existe un système fondamental de voisinages de 0 dans E formé d'ensembles bornés. On peut montrer que réciproquement, si dans un espace localement convexe séparé E , il existe un voisinage borné de 0 , la topologie de E peut être définie par une norme (exerc.2).

2) Dans tout espace localement convexe E , un voisinage quelconque de 0 est absorbant (chap.I, §1,n°3), ce qui signifie que tout ensemble réduit à un point est borné.

3) Dans un espace localement convexe séparé E , un ensemble borné A ne peut contenir de sous-espace vectoriel non réduit à l'origine ; en effet, pour tout $x \neq 0$ il existe un voisinage V de 0 tel que $x \notin V$; si λ est tel que $A \subset \lambda V$, on voit que $\lambda x \notin A$.

Il est clair que si A est une partie bornée de E , λA est bornée pour tout scalaire λ , et toute partie de A est bornée. Si M est un sous-espace vectoriel de E , pour qu'une partie de M soit bornée dans l'espace M , il faut et il suffit qu'elle soit bornée dans E .

DÉFINITION 2.- On dit qu'un ensemble $\mathfrak{B}$ de parties bornées d'un espace localement convexe est un système fondamental de parties bornées si, pour toute partie bornée A de E , il existe une partie bornée $B \in \mathfrak{B}$ contenant A .

Par exemple, dans un espace normé E , les boules de centre 0 et de rayon n (entier naturel quelconque) forment un système fondamental de parties bornées.

PROPOSITION 1.- La réunion de deux ensembles bornés est un ensemble borné.

En effet, soient A et B deux ensembles bornés ; pour tout voisinage convexe V de 0, il existe deux nombres $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tels que $A \subset \alpha V$ et $B \subset \beta V$; si $\gamma = \mathrm{Max}(\alpha, \beta)$, il est clair que $A \cup B \subset \gamma V$, d'où la proposition

Si l'espace E est séparé et non réduit à 0, il ne peut être borné ; cette remarque et la prop.1 montrent que, dans E , les complémentaires des parties bornées forment alors un filtre, qui est d'ailleurs invariant par toute homothétie de rapport $\neq 0$.

PROPOSITION 2.- L'enveloppe fermée convexe et équilibrée d'une partie bornée est bornée.

En effet, si B est une partie bornée, V un voisinage convexe, équilibré et fermé de 0 , il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda B \subset V$; a fortiori, si C est l'enveloppe fermée convexe et équilibrée de B, on a $\lambda C \subset V$. Comme les voisinages convexes, équilibrés et fermés de 0 forment un système fondamental de voisinages, la proposition est démontrée.

COROLLAIRE.- Dans un espace localement convexe, les ensembles bornés convexes, équilibrés et fermés forment un système fondamental de parties bornées.

PROPOSITION 3.- Dans un espace localement convexe séparé E , toute partie précompacte est bornée.

En effet, soit A un ensemble précompact dans E , et V un voisinage convexe de 0 . Il existe donc un nombre fini de points a_i de A tels que les voisinages $a_i + \frac{1}{2} V$ forment un recouvrement de A .

L'ensemble B des points a_i est fini, donc borné (prop.1) ; il existe par suite un scalaire λ tel que $0 < \lambda < 1$ et que $\lambda B \subset \frac{1}{2} V$; par suite $\lambda A \subset \lambda B + \frac{1}{2} \lambda V \subset \frac{1}{2} V + \frac{1}{2} V = V$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE.- Dans un espace localement convexe séparé, l'ensemble des points d'une suite de Cauchy est borné.

On sait en effet que cet ensemble est précompact (Top.gén., chap.II, 2è éd., § 4, n°2) .

PROPOSITION 4.- Pour qu'une partie A d'un espace localement convexe E soit bornée, il faut et il suffit que, pour toute suite (x_n) de points de E, et toute suite (λ_n) de scalaires tendant vers 0, la suite $(\lambda_n x_n)$ tende vers 0.

La condition est nécessaire. En effet, soit V un voisinage équilibré quelconque de 0 dans E. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha x_n \in V$ pour tout n ; d'autre part, il existe n_0 tel que $|\lambda_n| < \alpha$ pour $n \geqslant n_0$; pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc $\lambda_n x_n = (\lambda_n \alpha^{-1})(\alpha x_n) \in V$, puisque $|\lambda_n \alpha^{-1}| \leqslant 1$.

La condition est suffisante. En effet, si A est une partie non bornée de E, il existe un voisinage U de 0 qui n'absorbe pas A ; cela entraîne que, pour tout entier $n > 0$, il existe $x_n \in A$ tel que $x_n \notin nU$. Mais cette dernière relation s'écrit $\frac{1}{n} x_n \notin U$, et montre que la suite $(\frac{1}{n} x_n)$ ne tend pas vers 0.

2. Image d'ensembles bornés par une application multilinéaire continue.

PROPOSITION 5.- Soient E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et F des espaces localement convexes, et f une application multilinéaire continue de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F. Soit B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ une partie bornée de E_i, et soit $B = \prod_{i=1}^{n} B_i$; l'image $f(B)$ est bornée dans F.

En effet, soit W un voisinage de 0 dans F. Par hypothèse, il existe pour chaque indice i un voisinage V_i de 0 dans E_i, tel que $f(\prod_{i=1}^{n} V_i) \subset W$, et un $\lambda_i > 0$ tel que $\lambda_i B_i \subset V_i$. On en déduit aussitôt que, pour $x_i \in B_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on a

$$f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$$

autrement dit $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n f(B) \subset W$, d'où la proposition.

COROLLAIRE 1.- Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ deux topologies localement convexes compatibles avec la structure d'un espace vectoriel E . Si $\mathcal{C}_2$ est plus fine que $\mathcal{C}_1$, tout ensemble borné pour $\mathcal{C}_2$ est borné pour $\mathcal{C}_1$.

Si on désigne par E_1, E_2 les espaces vectoriels topologiques obtenus en munissant E de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ respectivement, il suffit d'appliquer la prop.5 à l'application identique de E_2 dans E_1.

De façon imagée, on peut dire que plus une topologie (compatible avec une structure d'espace vectoriel) est fine, moins il y a d'ensembles bornés.

On notera qu'il peut se faire que $\mathcal{C}_2$ soit strictement plus fine que $\mathcal{C}_1$, mais que les ensembles bornés soient les mêmes pour $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (exerc.8).

COROLLAIRE 2.- Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe E . Dans l'espace quotient E/M , l'image canonique de toute partie bornée de E est bornée.

Il peut par contre y avoir des parties bornées de E/M qui ne soient pas contenues dans l'image canonique d'une partie bornée de E ; autrement dit, les images canoniques des parties bornées de E ne forment pas nécessairement un système fondamental de parties bornées de E/M (chap.IV, § , exerc.).

3. Ensembles bornés dans un espace produit.

PROPOSITION 6.- Soit $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ le produit d'une famille (E_ι) d'espaces localement convexes. Pour qu'un ensemble $B \subset E$ soit borné, il faut et il suffit que, pour tout $\iota \in I$, $pr_\iota B$ soit borné dans E_ι .

La condition est nécessaire d'après la prop.5, pr_ι étant une application linéaire continue de E dans E_ι , la condition est suffisante, car alors, si (x_n) est une suite de points de B , (λ_n) une suite de

de scalaires tendant vers 0, chacune des suites $(\lambda_n \mathrm{pr}_i x_n)$ tend vers 0, donc la suite $(\lambda_n x_n)$ tend vers 0 , et le critère de la prop.4 prouve que B est borné.

COROLLAIRE.- Dans un espace localement convexe E , si A et B sont des ensembles bornés, A+B est borné.

En effet, $A \times B$ est borné dans $E \times E$, et A+B est l'image de $A \times B$ par l'application linéaire continue $(x,y) \to x+y$ de $E \times E$ dans E .

4. Ensembles bornés dans une limite inductive d'espaces localement convexes

PROPOSITION 7.- Soit E un espace localement convexe, limite inductive d'une suite croissante (E_n) de sous-espaces vectoriels fermés de E (chap.II, § 2). Pour qu'un ensemble $B \subset E$ soit borné, il faut et il suffit qu'il soit contenu dans un des sous-espaces E_n et borné dans ce sous-espace.

Tout revient (en vertu de la prop.4) à prouver que si une suite (x_m) de points de E n'est contenue dans aucun des sous-espaces E_n , elle ne peut être bornée. Pour tout indice n , il existe une infinité d'indices m tels que $x_m \notin E_n$; en effet, dans le cas contraire, comme chaque x_m est contenu dans un des E_p , il existerait un indice $q \geqslant n$ tel que la suite (x_m) soit contenue dans E_q . On peut alors définir par récurrence deux suites strictement croissantes $(m_k),(n_k)$ telles que $x_{m_k} \notin E_{n_k}$ et $x_{m_k} \in E_{n_{k+1}}$. Cela étant, on a aussi $\frac{1}{k} x_{m_k} \notin E_{n_k}$; il existe donc (chap.II, § 2,lemme 1) une suite croissante (V_k) d'ensembles convexes telle que V_k soit un voisinage de 0 dans E_{n_k} , que $V_{k+1} \cap E_{n_k} = V_k$, et que $\frac{1}{k} x_{m_k} \notin V_{k+1}$ pour tout indice k . La réunion V des V_k est alors un voisinage de 0 dans E , et on a $\frac{1}{k} x_{m_k} \notin V$ pour tout indice k ; cela prouve que la suite $(\frac{1}{k} x_{m_k})$ ne converge pas vers 0, et par suite que la suite (x_m) n'est pas bornée (prop.4).

NBR058

La conclusion de la prop.7 n'est plus nécessairement exacte pour une limite inductive d'un ensemble filtrant non dénombrable de sous-espaces fermés (cf. Intégr., chap.III, § 1, exerc.3).

5. Espaces quasi-complets.

DEFINITION 3.- On dit qu'un espace localement convexe E est quasi-complet s'il est séparé et si toute partie bornée et fermée de E est un sous-espace complet de E (pour la structure uniforme induite par celle de E).

Il est clair que tout espace complet est quasi-complet ; nous verrons au chap.IV des exemples d'espaces quasi-complets mais non complets. Un espace localement convexe métrisable quasi-complet E est complet : en effet, toute suite de Cauchy dans E est contenue dans une partie bornée et fermée de E (cor. de la prop.3), donc converge par hypothèse. Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace quasi-complet est évidemment quasi-complet. De même, il résulte aussitôt de la prop.7 que si E est limite inductive d'une suite croissante de sous-espaces fermés E_n, qui sont quasi-complets, E est quasi-complet. Enfin, on a la propriété suivante :

PROPOSITION 8.- Tout produit d'espaces localement convexes quasi-complets est quasi-complet.

En effet, soit $E = \prod_\iota E_\iota$ un produit d'espaces quasi-complets, et soit B une partie bornée et fermée de E. Pour chaque indice ι, $pr_\iota B = A_\iota$ est borné dans E_ι, donc $\overline{A}_\iota$, qui est borné et fermé dans E_ι, est complet. Or B est fermé et contenu dans l'espace complet $\prod_\iota \overline{A}_\iota$, donc il est complet.

On notera qu'un espace quotient d'un espace quasi-complet par un sous-espace vectoriel fermé n'est pas nécessairement quasi-complet (chap.IV, § , exerc.).

PROPOSITION 9.- Soient E un espace localement convexe, M un sous-espace vectoriel de E tel que tout point de E soit adhérent à une partie bornée de M . Alors toute application linéaire continue f de M dans un espace localement convexe quasi-complet F se prolonge d'une seule manière en une application linéaire continue $\overline{f}$ de E dans F .

En effet, l'hypothèse entraîne que M est partout dense dans E , donc f se prolonge d'une seule manière en une application continue $\overline{f}$ de E dans le complété $\hat{F}$ de F . Mais tout $x \in E$ étant adhérent à une partie bornée B de M , $\overline{f}(x)$ est adhérent dans $\hat{F}$ à f(B). Or, f(B) est borné dans F , donc son adhérence dans F est un sous-espace complet de F , et par suite est identique à son adhérence dans $\hat{F}$, ce qui prouve que $\overline{f}(x) \in F$.

Exercices.- 1) Soit E un espace vectoriel topologique à gauche sur un corps topologique non discret K . On dit qu'une partie B de E est bornée si pour tout voisinage V de 0 dans E , il existe $\lambda \neq 0$ dans K tel que $\lambda B \subset V$. Montrer qu'il existe alors un voisinage U de 0 dans K tel que $U.B \subset V$. Montrer que l'adhérence d'un ensemble borné est bornée. Etendre aux ensembles bornés dans E les prop.1, 3,5 et 6 la notion d'espace quasi-complet et ses propriétés, ainsi que la prop.4 lorsque K est un corps topologique métrisable. Si K est un corps valué (non discret), montrer que l'enveloppe équilibrée d'un ensemble borné dans E est un ensemble borné. Plus généralement, montrer que si A est une partie bornée dans K (considéré comme espace vectoriel à gauche sur lui-même) et B une partie bornée dans E , A.B est borné dans E .

2) Soit E un espace vectoriel topologique sur un corps topologique métrisable et non discret K . Montrer que s'il existe dans E un voisinage borné de 0 , la topologie séparée associée à la topologie

de E est métrisable. Si $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$ la borne supérieure des topologies localement convexes moins fines que la topologie de E (chap.II, § 3, exerc.) peut être définie par une seule semi-norme. Montrer que la topologie d'un produit infini d'espaces localement convexes (non réduits à 0) ne peut être définie par une seule semi-norme.

3) Soit E un espace vectoriel topologique sur un corps topologique métrisable non discret K. Montrer que si E est un espace de Baire et s'il existe un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés dans E, il existe un voisinage borné de 0 dans E.

3 bis) Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques indéfiniment différentiables dans l'intervalle $I=[0,1]$. Pour tout entier $n>0$, on pose $p_n(f)=\sup_{0\leqslant k\leqslant n}\left(\sup_{x\in I}\left|f^{(k)}(x)\right|\right)$ (avec $f^{(0)}(x)=f(x)$) ; montrer que les p_n sont des normes sur $\mathcal{E}$, mais que la topologie définie par la suite des normes p_n ne peut être définie par une seule norme (montrer que le critère de l'exerc.2 n'est pas vérifié).

4) Soit E un espace vectoriel topologique métrisable sur un corps valué non discret K. Montrer que, si (B_n) est une suite quelconque d'ensembles bornés dans E, il existe une suite (λ_n) de scalaires telle que la réunion des ensembles $\lambda_n B_n$ soit bornée (utiliser le fait qu'il existe un système fondamental dénombrable de voisinages de 0).

5) Soit E un espace localement convexe séparé, limite inductive d'une suite strictement croissante (E_n) de sous-espaces vectoriels fermés.

a) Montrer que E n'est pas métrisable (utiliser la prop.7 et l'ex.4).

b) Montrer que, pour qu'il existe dans E un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés, il faut et il suffit que chacun des E_n admette un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés.

NBR 058

6) Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille infinie d'espaces vectoriels topologiques séparés, non réduits à 0, sur un corps topologique non discret K. Soit E l'espace vectoriel somme directe des E_ι, et $\mathscr{C}_0$ la topologie sur E définie dans l'exerc.7 du chap.I, § 1.

Pour qu'une partie B de E soit bornée (pour $\mathscr{C}_0$) il faut et il suffit que B soit contenue dans un sous-espace produit $\prod_{\iota \in H} E_\iota$ de E, où H est une partie <u>finie</u> de I, et que ses projections sur chacun des E_ι ($\iota \in H$) soient bornées.

En déduire que si chacun des E_ι est un espace quasi-complet, E est quasi-complet.

7) Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'espace localement convexes séparés, et soit E l'espace somme directe topologique de la famille (E_ι) (chap.II, § 2, n°3). Pour qu'une partie B de E soit bornée, il faut et il suffit que B soit contenue dans un sous-espace produit $\prod_{\iota \in H} E_\iota$ de E, où H est une partie finie de H, et que ses projections sur chacun des E_ι ($\iota \in H$) soient bornées (utiliser l'exerc.6).

En déduire que si chacun des E_ι est un espace quasi-complet, E est quasi-complet.

8) Soit I un ensemble non dénombrable. Sur l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^{(I)}$ sur $\mathbf{R}$, on considère d'une part la topologie localement convexe la plus fine $\mathscr{C}$ (chap.II, § 2), d'autre part la topologie $\mathscr{C}_0$ définie au chap.I, § 1, exerc.7. On sait que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_0$ sont distinctes (cf.chap.II, § 2, exerc.). Montrer que dans E, les ensembles bornés sont les mêmes pour les topologies $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_0$ (utiliser les exer.6et 7)

9) Soit E un espace vectoriel métrisable sur le corps $\mathbf{R}$, et soit d une distance invariante par translation et compatible avec la topologie de E ; on pose $|x| = d(0,x)$ (chap.I, § 3, n°1). Montrer que, pour

pour tout entier n , on a $\frac{1}{n}|x| \leqslant \left|\frac{x}{n}\right|$. En déduire que, si B est une partie bornée de E , $\sup_{x \in B}|x|$ est fini (autrement dit, B est bornée par la distance d). (Raisonner par l'absurde, en remarquant que dans le cas contraire, il existerait une suite (x_n) de points de B telle que $|x_n| \geqslant n|x_{n-1}|$) . Donner un exemple de partie non bornée dans E , mais bornée pour la distance d (cf. exerc.2) .

§ 2. Espaces bornologiques.

1. Définition d'un espace bornologique.

Il résulte de la définition des parties bornées dans un espace localement convexe E (§ 1,déf.1), qu'un voisinage quelconque de 0 dans E absorbe toutes les parties bornées. Mais en général un ensemble convexe absorbant les parties bornées de E n'est pas nécessairement un voisinage de 0 (cf. § 1,exerc.7) .

DEFINITION 1.- On dit qu'un espace localement convexe E est bornologique si toute partie convexe de E qui absorbe toutes les parties bornées de E est un voisinage de 0 dans E .

Remarques.- 1) Pour vérifier qu'un espace localement convexe E est bornologique, il suffit de montrer que tout ensemble convexe équilibré qui absorbe toutes les parties bornées de E est un voisinage de 0 dans E . Supposons en effet cette condition vérifiée, et soit A un ensemble convexe absorbant toutes les parties bornées de E ; si E est un espace réel, pour toute partie bornée B de E , il existe $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ tels que $\lambda_1 B \subset A$ et $-\lambda_2 B \subset A$; en posant $\lambda = \mathrm{Min}(\lambda_1, \lambda_2)$, on voit que $\lambda B \subset A \cap (-A)$, et comme $A \cap (-A)$ est équilibré, c'est un voisinage de 0 , donc il en est de même de A. Si E est un espace réel, on montre de même que l'intersection U des quatre ensembles A,-A,iA et -iA absorbe tous les ensembles bornés ;

il en est de même de l'intersection V de tous les ensembles $e^{i\theta}A$ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), qui contient $\frac{1}{2}U$. Comme V est équilibré, c'est un voisinage de 0 dans E, et A est donc aussi un voisinage de 0.

2) La remarque 1) prouve que l'hypothèse que E est bornologique est équivalente à la suivante : toute semi-norme sur E qui est bornée dans toute partie bornée de E, est continue.

3) Pour qu'une partie convexe et équilibrée A de E absorbe toute partie bornée de E, il suffit que A absorbe l'ensemble des points de toute suite tendant vers 0 dans E. En effet, supposons que A n'absorbe pas un ensemble borné B dans E ; pour tout entier n, il existe alors un $x_n \in B$ tel que $x_n \notin n^2 A$. Alors on a $x_n/n \notin nA$; la suite (x_n/n) tend vers 0, et A n'absorbe pas les points de cette suite.

4) On peut donc dire que la topologie d'un espace bornologique est entièrement déterminée par la donnée des ensembles bornés, ou la donnée des suites tendant vers 0 pour cette topologie.

PROPOSITION 1.- Tout espace localement convexe métrisable est bornologique

En effet, soit A une partie convexe de E absorbant tous les ensembles bornés, et soit (V_n) un système fondamental décroissant de voisinages de 0 convexes et équilibrés dans E. Les ensembles V_n/n forment encore un système fondamental de voisinages de 0 dans E ; si A n'était pas un voisinage de 0, il existerait une suite (x_n) de points de E telle que $x_n \in V_n/n$ et $x_n \notin A$; comme $nx_n \in V_n$, la suite (nx_n) tend vers 0, mais comme $nx_n \notin nA$, l'ensemble des nx_n n'est pas absorbé par A, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On notera que cette démonstration prouve, plus généralement, qu'un espace localement convexe, non nécessairement séparé, mais possédant un système fondamental dénombrable de voisinages de 0, est bornologique.

NBR058

2. Propriétés des espaces bornologiques.

PROPOSITION 2.- Soit $(F_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'espaces bornologiques et pour chaque $\iota \in I$, soit f_ι une application linéaire de F_ι dans un espace vectoriel E. L'espace E muni de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues toutes les fonctions f_ι (chap.II, § 2), est un espace bornologique.

En effet, soit A un ensemble convexe dans E, absorbant les parties bornées de E. Si B_ι est un ensemble borné dans F_ι, $f_\iota(B_\iota)$ est borné dans E, donc il existe $\mu > 0$ tel que $f_\iota(B_\iota) \subset \mu A$, ce qui entraîne $B_\iota \subset \mu f_\iota^{-1}(A)$; en d'autres termes, $f_\iota^{-1}(A)$ absorbe toutes les parties bornées de F_ι. Comme F_ι est bornologique, $f_\iota^{-1}(A)$ est un voisinage de 0 dans F_ι pour tout $\iota \in I$; mais d'après la définition de la topologie de E, cela signifie que A est un voisinage de 0 dans E, d'où la proposition.

COROLLAIRE 1.- Tout espace quotient d'un espace bornologique est bornologique.

COROLLAIRE 2.- Toute limite inductive d'espaces bornologiques est bornologique.

En particulier, si E est un espace vectoriel, la topologie localement convexe la plus fine sur E, qui est limite inductive des topologies des sous-espaces de dimension finie de E (chap.II, § 2) est une topologie d'espace bornologique. On voit donc qu'il existe des espaces vectoriels bornologiques non métrisables (§ 1, exerc. 5).

Un sous-espace fermé d'un espace bornologique n'est pas nécessairement bornologique (chap.IV, § , exerc.). On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 3.- Soit E un espace localement convexe, somme directe topologique de deux sous-espaces vectoriels M et N . Pour que E soit bornologique, il faut et il suffit que M et N le soient.

La condition est nécessaire, puisque M est isomorphe à E/N (cor.1 de la prop.2). Supposons inversement que M et N soient des espaces bornologiques, et soit A un ensemble convexe dans E absorbant toutes les parties bornées ; les ensembles $V=A\cap M$ et $W=A\cap N$ ont respectivement la même propriété dans M et N , donc sont des voisinages par hypothèse ; comme A contient $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}W$, qui est un voisinage de 0 dans E , la proposition est démontrée.

COROLLAIRE.- Tout produit d'un nombre fini d'espaces bornologiques est bornologique.

On peut démontrer que tout produit d'une famille dénombrable d'espaces bornologiques est bornologique (exerc.1).

La propriété la plus importante des espaces bornologiques est la suivante :

THÉORÈME 1.- Pour qu'un espace localement convexe E soit bornologique, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante : toute application linéaire u de E dans un espace localement convexe F , qui transforme les parties bornées de E en parties bornées de F , est continue.

La condition est nécessaire. En effet, si E est bornologique et si V est un voisinage quelconque de 0 dans F , $u^{-1}(V)$ absorbe toute partie bornée B de E , car u(B) étant borné dans F par hypothèse, est absorbé par V ; il en résulte que $u^{-1}(V)$ est un voisinage de 0 dans E , donc que u est continue.

La condition est suffisante. En effet, considérons dans E la base de filtre $\mathcal{B}$ formée des ensembles convexes équilibrés qui absorbent les parties bornées de E . Les ensembles de $\mathcal{B}$ étant absorbants, $\mathcal{B}$ est un

un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie $\mathscr{C}_1$ localement convexe plus fine que la topologie $\mathscr{C}$ de E , et compatible avec la structure d'espace vectoriel de E (chap.II, §2, n°) ; soit E_1 l'espace localement convexe obtenu en munissant E de la topologie $\mathscr{C}_1$. Soit u l'application identique de E sur E_1 ; comme toute partie bornée de E est par définition bornée dans E_1 , u transforme les parties bornées de E en parties bornées de E_1 , donc est continue par hypothèse. Mais son application réciproque est continue, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ sont identiques, ce qui signifie que E est bornologique.

COROLLAIRE.- Soient E un espace bornologique, F un espace localement convexe, u une application linéaire de E dans F ; si, pour toute suite (x_n) de points de E tendant vers 0 , l'ensemble des points de la suite (x_n) est borné, u est continue dans E .

En effet, si V est un voisinage de 0 dans E , $u^{-1}(V)$ absorbe l'ensemble des x_n , pour toute suite (x_n) tendant vers 0 , $u^{-1}(V)$ absorbe donc toute partie bornée de E (n°1, Remarque 3), d'où la conclusion.

On notera que si E et F sont deux espaces bornologiques, une application bilinéaire u de $E \times F$ dans un espace localement convexe G , qui transforme toute partie bornée de $E \times F$ en une partie bornée de G , n'est pas nécessairement continue (exerc.2).

Exercices.- 1) Montrer que tout produit d'une suite (E_n) d'espaces bornologiques est bornologique. (Si $E = \prod_n E_n$, montrer que, pour une partie convexe A de E absorbant tous les ensembles bornés, il ne peut exister dans $\complement A$ une suite (x_n) telle que x_n ait ses $n-1$ premières coordonnées nulles mais au moins une coordonnée d'indice $\geqslant n$ non nulle).

NBR 058 17

2) Soit E l'espace somme directe $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ muni de la topologie localement convexe la plus fine ; soit F l'espace produit $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$; E et F sont bornologiques (exerc.1). A tout couple $(x,y) \in E \times F$, où $x=(\xi_n)$, $y=(\eta_n)$, on associe le nombre $f(x,y)=\sum_n \xi_n \eta_n$. Montrer que la forme bilinéaire f transforme tout ensemble borné dans $E \times F$ en un ensemble borné dans $\mathbf{R}$, mais n'est pas continue dans $E \times F$ (cf. §5 exerc.2).

3) Soit E un espace vectoriel localement convexe. Pour tout ensemble convexe borné et équilibré B dans E , soit E_B le sous-espace vectoriel de E engendré par B , et muni de la topologie pour laquelle les Γ_B forment un système fondamental de voisinages de 0 . Soit f_B l'application canonique de E_B dans E ; pour que E soit bornologique, il faut et il suffit que la topologie de E soit la topologie localement convexe la plus fine rendant continues toutes les applications f_B .

4) Soit E un espace vectoriel métrisable sur un corps valué non discret K . Montrer que toute partie équilibrée de E qui absorbe toutes les suites qui convergent vers 0 dans E est un voisinage de 0 dans E . En déduire que si u est une application linéaire de E dans un espace vectoriel topologique F sur K , qui transforme tout ensemble borné en un ensemble borné, u est continue dans E .

5) Soient E un espace vectoriel topologique séparé sur un corps valué non discret K , F un espace vectoriel métrisable sur K . Si u est une application linéaire continue de E dans F telle que, pour toute partie bornée B de F , $u^{-1}(B)$ soit borné dans E , montrer que u est un isomorphisme de E dans F .

§ 3. Espaces tonnelés.

1. Définition d'un espace tonnelé.

DÉFINITION 1.- Dans un espace localement convexe E, on appelle tonneau un ensemble convexe, équilibré, absorbant et fermé dans E.

Soit p la jauge d'un tonneau T (chap.II, § 5) de sorte que T soit l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x) \leqslant 1$; dire que T est fermé signifie que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x) \leqslant \alpha$ est fermé, c'est-à-dire que p est semi-continue inférieurement (Top.gén., chap.IV, § 6, prop.1).

Il est clair que tout voisinage convexe fermé et équilibré de 0 dans E est un tonneau ; mais un tonneau n'est pas nécessairement un voisinage de 0 (exerc.2).

DÉFINITION 2.- On dit qu'un espace localement convexe E est tonnelé si tout tonneau dans E est un voisinage de 0.

Il revient donc au même de dire que toute semi-norme semi-continue inférieurement dans E est continue.

PROPOSITION 1.- Tout espace localement convexe E qui est un espace de Baire est tonnelé.

En effet, soit T un tonneau dans E ; comme T est absorbant, E est réunion des ensembles fermés nT (n entier >0) ; en vertu du th. de Baire, un au moins de ces ensembles admet un point intérieur, donc T admet un point intérieur x_0. Si $x_0=0$, on conclut que T est un voisinage de 0 ; sinon, comme $-x_0 \in T$ et que 0 est un point du segment ouvert d'extrémités x_0 et $-x_0$, 0 est point intérieur de T (chap.II, § 1, prop.15), et la même conclusion subsiste.

COROLLAIRE.- Tout espace localement convexe métrisable et complet est tonnelé.

Il y a des espaces tonnelés qui ne sont pas des espaces de Baire (cf.cor.2 de la prop.2). Un espace métrisable non complet n'est pas nécessairement tonneló (exerc.2) ; un espace localement convexe complet non métrisable n'est pas nécessairement tonneló (exerc.3) ; enfin, un espace tonneló n'est pas nécessairement complet (exerc.4).

2. Propriétés des espaces tonnelés.

PROPOSITION 2.- *Soit* $(E_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille d'espaces tonnelés, et pour chaque* $\iota \in I$, *soit* f_ι *une application linéaire de* E_ι *dans un espace vectoriel* E . *L'espace* E *muni de la topologie localement convexe la plus plus rendant continues toutes les fonctions* f_ι *est un espace tonneló.*

En effet, soit T un tonneau dans E . Comme f_ι est continue, $f_\iota^{-1}(T)$ est un ensemble convexe fermé dans E_ι, équilibré et absorbant, autrement dit un tonneau dans E_ι ; comme E_ι est tonneló, $f_\iota^{-1}(T)$ est un voisinage de 0 dans E_ι pour tout ι, ce qui signifie que T est un voisinage de 0 dans E.

COROLLAIRE 1.- *Tout espace quotient d'un espace tonneló est tonneló.*

COROLLAIRE 2.- *Toute limite inductive d'espaces tonnelés est un espace tonneló.*

En particulier, la topologie localement convexe *la plus fine* sur un espace vectoriel E est une topologie d'espace tonneló. On voit ainsi qu'il existe des espaces tonnelés qui ne sont pas des espaces métrisables (§ 1, exerc.5) ni des espaces de Baire (chap.I, § 1, exerc.7 et chap.II, § 2, exerc.6).

Un sous-espace fermé d'un espace tonneló n'est pas nécessairement tonneló (chap.IV, § , exerc.). On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 3.- *Soit* E *un espace localement convexe, somme directe topologique de deux sous-espaces vectoriels* M *et* N . *Pour que* E *soit tonneló, il faut et il suffit que* M *et* N *le soient.*

NBR 058 20

La condition est nécessaire, puisque M est isomorphe à E/N (cor.1 de la prop.2). Supposons inversement que M et N soient des espaces tonnelés, et soit T un tonneau dans E . Alors il est clair que $V=T\cap M$ et $W=T\cap N$ sont des tonneaux dans M et N respectivement, donc des voisinages de 0 dans ces espaces ; comme T contient l'ensemble $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}W$, qui est un voisinage de 0 dans E , la proposition est démontrée.

On peut démontrer que tout produit d'une famille quelconque d'espaces tonnelés est un espace tonneló (chap.IV, § , exerc.).

3. Application : Position respective de deux ensembles convexes.

THÉORÈME 1.- Soient E un espace localement convexe séparé, A un ensemble convexe, équilibré, borné et complet dans E . Alors A est absorbé par tout tonneau T de E .

En considérant le sous-espace vectoriel M engendré par A , et le tonneau $M\cap T$ dans M , on peut se ramener au cas où A est absorbant, autrement dit, un tonneau complet et borné. Soit p la jauge de A ; comme, pour tout $x\neq 0$ dans E il existe un voisinage U de 0 ne contenant pas x , et un nombre $\alpha>0$ tel que $\alpha A\subset U$ (puisque A est borné), on a $p(x)\neq 0$, autrement dit, p est une norme sur E ; comme l'intersection de A et de toute droite passant par 0 est fermée, A est l'ensemble des x tels que $p(x)\leqslant 1$.

Désignons par E_0 l'espace normé obtenu en munissant E de la norme p ; les ensembles λA (pour $\lambda>0$) forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E_0 , donc, comme A est borné dans E , la topologie $\mathcal{C}_0$ de E_0 est plus fine que la topologie $\mathcal{C}$ de E . Montrons que E_0 est un espace de Banach. En effet les voisinages λA de 0 pour $\mathcal{C}_0$ sont fermés pour $\mathcal{C}$, donc A , qui est complet pour $\mathcal{C}$, est aussi complet pour $\mathcal{C}_0$ (chap.I, § 1, prop.8). En d'autres termes, l'espace normé E_0 est quasi-complet, et par suite complet (§ 1, n°5).

Cela étant, T étant fermé dans E , est aussi fermé dans E_0 donc est un tonneau dans E_0 ; mais comme E_0 est tonnelé (prop.1), T est un voisinage de 0 dans E_0 , ce qui signifie qu'il absorbe A .

La démonstration ne fait en réalité usage que du fait qu'une suite de Cauchy dans A converge vers un point de A , ce qui n'entraîne pas nécessairement que A soit complet lorsque A n'est pas métrisable.

En particulier, si dans E toute suite de Cauchy est convergente, le th.1 s'applique en supposant seulement que A soit fermé, au lieu de complet.

COROLLAIRE 1.- Dans un espace localement convexe séparé E , tout tonneau absorbe toute partie convexe et compacte de E .

En effet, si A est convexe et compact dans E , son enveloppe convexe équilibrée est compacte, donc complète dans E , d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2.- Tout espace bornologique quasi-complet est tonnelé.

En effet, l'enveloppe fermée convexe et équilibrée de toute partie bornée est bornée, donc complète par hypothèse ; il résulte alors du th.1 que tout tonneau absorbe toutes les parties bornées de E , donc est un voisinage par hypothèse.

Il y a des espaces bornologiques non tonnelés (exerc.2), mais on ne connaît jusqu'ici aucun exemple d'espace tonnelé non bornologique.

Exercices.- 1) Montrer que le complété d'un espace tonnelé séparé est tonnelé.

2) Dans l'espace métrisable $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit E le sous-espace $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ somme directe des facteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie induite par la topologie produit). Montrer que E est un espace métrisable non tonnelé (considérer les traces sur E des cubes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

3) Soit I un ensemble non dénombrable ; soit E l'espace $\mathbf{R}^{(I)}$ muni de la topologie (localement convexe) $\mathcal{C}_0$ définie dans l'ex.7 du chap.I, § 1. Montrer que E , qui est complet pour $\mathcal{C}_0$, n'est pas tonnelé (considérer l'ensemble des $x=(\xi_\iota)\in E$ tels que $\sum_{\iota\in I} |\xi_\iota| \leqslant 1$, et montrer que cet ensemble est un tonneau ; puis utiliser l'exerc.7 du chap.II, § 2).

4) Soit E_0 un espace de Banach dans lequel existe une famille (algébriquement)libre (a_n) qui soit totale dans E_0. Soit B une base de E_0 contenant les a_n ; on sait (chap.II, § 3, exerc.17) que B est non dénombrable. Soit (e_n) une suite d'éléments de B , distincts des a_n , et soit C le complémentaire dans B de l'ensemble des e_n . Soit F_n le sous-espace vectoriel de E_0 engendré par C et les e_k d'indice $k \leqslant n$; E_0 est réunion des F_n . Soit S la boule $\|x\| \leqslant 1$ dans E_0 ; montrer qu'il existe un indice n tel que $S \cap F_n$ soit non maigre dans E_0 . En déduire que pour cette valeur de n , F_n est un espace de Baire métrisable et non complet.

5) Montrer que tout produit $E = \prod_{\iota\in I} E_\iota$ d'espaces de Fréchet est un espace de Baire. (Remarquer que si (A_n) est une suite d'ensembles élémentaires dans E (Top.gén., chap.I, § 8, n°1) telle que $A_{n+1} \subset A_n$, il existe une partie dénombrable J de I telle que chacun des A_n soit de la forme $B_n \times \prod_{\iota\notin J} E_\iota$, où $B_n \subset \prod_{\iota\in J} E_\iota$. En déduire que si on choisit la suite (A_n) de sorte que le diamètre de $\mathrm{pr}_\iota(A_n)$ pour chacun des indices $\iota\in J$ tende vers 0 , l'intersection de la suite (A_n) n'est pas vide) .

WSK 058 83

§ 4. Espaces d'applications linéaires continues.

1. Les espaces $\mathcal{L}(E,F)$.

Dans tout ce qui suit, pour tout couple d'espaces localement convexes E,F (sur le même corps de scalaires K, égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), nous désignerons par $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel sur K (non topologique) formé des applications linéaires continues de E dans F.

Si F_1, F_2 sont deux espaces localement convexes, φ une application linéaire continue de F_1 dans F_2, $u \to \varphi \circ u$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E,F_1)$ dans $\mathcal{L}(E,F_2)$; si φ est un isomorphisme de F_1 dans F_2, $u \to \varphi \circ u$ est biunivoque et l'image de $\mathcal{L}(E,F_1)$ par cette application est identique au sous-espace des applications linéaires continues v de E dans F_2 telles que $v(E) \subset \varphi(F_1)$.

Si E_1, E_2 sont deux espaces localement convexes, ψ une application linéaire continue de E_1 dans E_2, $u \to u \circ \psi$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E_2,F)$ dans $\mathcal{L}(E_1,F)$; si ψ est un homomorphisme de E_1 sur E_2, $u \to u \circ \psi$ est biunivoque, et l'image de $\mathcal{L}(E_2,F)$ par cette application est identique au sous-espace des applications linéaires continues w de E_1 dans F qui s'annulent dans le sous-espace $\psi^{-1}(0)$.

Enfin, soient E un espace localement convexe séparé, F un espace localement convexe séparé et complet. Comme toute application linéaire continue de E dans F se prolonge par continuité d'une seule manière au complété $\hat{E}$ de E, l'application $u \to \bar{u}$ qui, à tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ fait correspondre son prolongement par continuité $\bar{u}$ à $\hat{E}$, est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ sur celle de $\mathcal{L}(\hat{E},F)$.

2. Parties équicontinues de $\mathcal{L}(E,F)$.

On a vu (chap. I, § 1, prop. 7) que, pour qu'une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ soit équicontinue, il faut et il suffit qu'elle soit équicontinue à l'origine de E ; en outre, elle est alors uniformément équicontinue (chap. I, § 1, n° 5).

PROPOSITION 1.- Si F est séparé, pour toute partie équicontinue H de $\mathcal{L}(E,F)$, l'adhérence $\overline{H}$ de H dans l'espace produit F^E (espace de toutes les applications de E dans F, muni de la topologie de la convergence simple) est contenue dans $\mathcal{L}(E,F)$ et est équicontinue.

On sait que $\overline{H}$ est équicontinu (Top.gén., chap.X, § 3, prop.7) ; tout revient à démontrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est fermé dans l'espace F^E. Or toute application $u \to u(x)$ de F^E dans F est continue ; pour tout couple de points x,y de E, la relation $u(x+y)-u(x)-u(y)=0$, vraie pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, est vraie aussi lorsque u est adhérent à $\mathcal{L}(E,F)$ dans F^E ; on voit de même qu'on a aussi $u(\lambda x)=\lambda u(x)$, d'où la conclusion.

D'une façon imagée, on peut dire que toute limite simple d'applications linéaires continues appartenant à H est encore une application linéaire continue de E dans F.

THÉORÈME 1.- Sur toute partie équicontinue H de $\mathcal{L}(E,F)$, la topologie de la convergence simple dans E, la topologie de la convergence simple dans une partie partout dense de E, et la topologie de la convergence uniforme dans les parties précompactes de E, sont identiques.

L'identité des deux premières topologies est une propriété générale des ensembles équicontinus (Top.gén., chap.X, § 3, n°2, prop.3). D'autre part, soit A une partie précompacte de E ; comme H est uniformément équicontinu, pour tout voisinage convexe équilibré V de 0 dans F, il existe un voisinage convexe équilibré U de 0 dans E tel que les relations $x-y \in U$ entraînent $u(x)-u(y) \in V$ pour tout $u \in H$. Mais comme A est précompact, il existe un nombre fini de points $x_i \in A$ tels que les ensembles x_i+U forment un recouvrement de A ; si u et v appartiennent à H et sont telles que $u(x_i)-v(x_i) \in V$ pour tout indice i, on aura $u(x)-v(x) \in 3V$ pour tout $x \in A$, ce qui achève de démontrer le théorème.

COROLLAIRE 1.- Si un filtre Φ sur H converge simplement vers $u_0 \in \mathcal{L}(E,F)$ dans une partie partout dense de E, Φ converge uniformément vers u_0 dans toute partie précompacte de E .

COROLLAIRE 2.- Si F est complet, et si un filtre Φ sur H converge simplement, en tous les points d'une partie partout dense M de E , vers une application u_0 de M dans F , u_0 se prolonge en une application linéaire continue $\bar{u}_0$ de E dans F , et Φ converge uniformément vers $\bar{u}_0$ dans toute partie précompacte de E .

En effet, un tel filtre est un filtre de Cauchy pour la structure uniforme de la convergence simple dans E , en vertu du th.1 ; comme F est complet, Φ converge en tout point de E ; le reste du corollaire est alors conséquence de la prop.1 et du th.1 .

COROLLAIRE 3.- Si F est métrisable, et s'il existe une partie dénombrable partout dense dans E , la structure uniforme (sur H) de la convergence simple dans E est métrisable.

En effet, soit A une partie dénombrable partout dense dans E , dont nous supposerons les éléments rangés en une suite (a_n). Soit d'autre part (p_n) une famille dénombrable de semi-normes définissant la topologie de F . Sur $\mathcal{L}(E,F)$, la structure uniforme de la convergence simple dans A est définie par la famille dénombrable d'écarts $p_n(u(a_m)-v(a_m))$ (m et n arbitraires) ; elle est donc métrisable, d'où le corollaire, puisque la structure uniforme qu'elle induit sur H est identique à la structure uniforme de la convergence simple dans E .

Remarque.- Dans les énoncés du th.1 et de ses corollaires, on peut remplacer les mots "partie partout dense" par "ensemble total" . En effet, soit N un ensemble total dans E et M le sous-espace vectoriel (partout dense) engendré par N ; sur l'ensemble équicontinu H ,

NBR 058 26

la topologie de la convergence simple dans H est identique à la topologie de la convergence simple dans M . En effet, si x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des points quelconques de A , et V un voisinage convexe et équilibré de 0 dans F , les relations $u(x_i) \in V$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $u \in H$, entraînent $u(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i) \in (\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|)V$, ce qui établit notre assertion.

Exemple.- *Soit $\mathcal{L}^1$ l'espace des fonctions numériques finies définies dans $\mathbb{R}$ et intégrables pour la mesure de Lebesgue (Intégr., chap.IV) ; pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$,et tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2i\pi xy} dy$$

("transformation de Fourier"). On a $|\hat{f}(x)| \leqslant N_1(f)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et par suite, lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, l'ensemble des formes linéaires $f \to \hat{f}(x)$ est équicontinu. Soit $\mathcal{D}^{(1)}$ le sous-espaces de $\mathcal{L}^1$ formé des fonctions continûment différentiables et à support compact ; pour une telle fonction f , f' est intégrable, et par suite on a , en intégrant par parties

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2i\pi x} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(y) e^{-2i\pi xy} dy$$

ce qui montre aussitôt que, lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\hat{f}(x)$ tend vers 0 . Or, le sous-espace $\mathcal{D}^{(1)}$ est densé dans $\mathcal{L}^1$; la conclusion précédente reste donc valable pour toute fonction intégrable f ("théorème de Lebesgue").*

3. Les $\mathfrak{S}$-topologies sur les espaces $\mathcal{L}(E,F)$.

Soit A un ensemble quelconque, F un espace localement convexe ; l'ensemble $\mathcal{F}(A,F)$ de toutes les applications de A dans F est un espace vectoriel (non topologique) sur le corps de scalaires de F .

PROPOSITION 2. - Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de A . Pour que, sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de $\mathcal{F}(A,F)$, la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ soit compatible avec la structure

d'espace vectoriel de $\mathscr{H}$, il faut et il suffit que, pour tout $u \in \mathscr{H}$ et tout ensemble $M \in \mathfrak{S}$, $u(M)$ soit un ensemble borné dans F. Cette topologie est alors localement convexe.

Montrons d'abord que, sans aucune condition sur $\mathfrak{S}$, la topologie $\mathscr{T}_{\mathfrak{S}}$ est compatible avec la structure de groupe additif de $\mathscr{F}(A,F)$. En effet, un système fondamental d'entourages de la structure uniforme $\mathscr{U}_{\mathfrak{S}}$ de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ est constitué par les ensembles $W(M,V)$ définis comme suit : pour toute partie $M \in \mathfrak{S}$ et tout voisinage V de 0 dans F, $W(M,V)$ est l'ensemble des couples (u,v) tels que $u(x)-v(x) \in V$ pour tout $x \in M$. Il suffit de prouver que $(u,v) \to u-v$ est uniformément continue dans $\mathscr{F}(A,F) \times \mathscr{F}(A,F)$ pour $\mathscr{U}_{\mathfrak{S}}$: en effet, si U est un voisinage symétrique de 0 dans F tel que $U+U \subset V$, les relations $u(x)-u'(x) \in U$ et $v(x)-v'(x) \in U$ pour tout $x \in M$ entraînent $(u(x)-v(x))-(u'(x)-v'(x)) = (u(x)-u'(x))-(v(x)-v'(x)) \in U+U \subset V$ pour tout $x \in M$, ce qui établit notre assertion. Un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathscr{F}(A,F)$ pour la topologie $\mathscr{T}_{\mathfrak{S}}$, est formé des ensembles $T(M,V)$ définis comme suit ; pour toute partie $M \in \mathfrak{S}$ et tout voisinage convexe équilibré V de 0 dans F, $T(M,V)$ est l'ensemble des $u \in \mathscr{F}(A,F)$ tels que $u(x) \in V$ pour tout $x \in M$. On observera d'ailleurs que la structure uniforme déduite de cette topologie de groupe est identique à la structure uniforme $\mathscr{U}_{\mathfrak{S}}$.

Cela étant, il est clair que les ensembles $T(M,V)$ sont convexes et équilibrés et on a $T(M,\lambda V)=\lambda T(M,V)$ pour tout scalaire λ ; pour que $\mathscr{T}_{\mathfrak{S}}$ induise sur $\mathscr{H}$ une topologie localement convexe compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathscr{H}$, il faut et il suffit que les ensembles $\mathscr{H} \cap T(M,V)$ soient absorbants (chap. II, § 2, n° 1). Cela signifie que, pour tout $u \in \mathscr{H}$, tout ensemble $M \in \mathfrak{S}$ et tout voisinage convexe et

et équilibré V de 0 dans F , il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda u \in \mathcal{T}(M,V)$, autrement dit $\lambda u(M) \subset V$; mais cela veut dire par définition que u(M) est borné dans F (§ 1, déf. 1), ce qui achève la démonstration.

La condition de la prop. 2 est vérifiée dans les cas importants suivants:

1° $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathcal{F}(A,F)$, $\mathfrak{S}$ un ensemble quelconque de parties finies de A . (Lorsque $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties finies de A , la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ n'est autre que la topologie de la convergence simple dans A).

2° $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}(A,F)$ des applications bornées de A dans F (c'est-à-dire les applications u telles que u(A) soit borné dans F), et $\mathfrak{S}$ un ensemble quelconque de parties de A . Si on prend en particulier $\mathfrak{S} = \{A\}$, $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ est la topologie de la convergence uniforme dans A .

En particulier, si F est un espace normé, la topologie de la convergence uniforme dans A n'est autre, sur l'espace $\mathcal{B}(A,F)$, que la topologie définie par la norme $\|u\| = \sup_{x \in A} \|u(x)\|$ (Top. gén., chap. X, § 1, n° 6).

3° A est un espace topologique séparé, F un espace localement convexe séparé, $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}(A,F)$ des applications continues de A dans F , et $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties relativement compactes de E ; pour tout $M \in \mathfrak{S}$ et toute application continue u de A dans F , u(A) est alors relativement compacte dans F , donc bornée (§ 1, prop. 3).

On notera par contre que si A n'est pas compact, la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(A,F)$ n'est pas nécessairement compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{C}(A,F)$. Par exemple, si $A=F=\mathbb{R}$, le voisinage W de 0 dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

NBR 058 29

pour la topologie de la convergence uniforme, formé des fonctions continues u telles que $|u(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, n'est pas un ensemble absorbant, puisqu'il existe dans $\mathbb{R}$ des fonctions continues non bornées.

La plus importante application que nous ferons de la prop.2 est relative aux espaces $\mathscr{L}(E,F)$, où E et F sont deux espaces localement convexes quelconques. La prop.2 montre que la topologie $\mathscr{T}_{\mathfrak{S}}$ (qu'on appelle encore la $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathscr{L}(E,F)$) est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ lorsque $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de E ; en effet, pour toute partie bornée B de E, on sait que u(B) est bornée dans F pour toute application linéaire continue u de E dans F (§ 1, prop.5).

On peut montrer que cette condition suffisante sur $\mathfrak{S}$ est aussi nécessaire pour que la $\mathfrak{S}$-topologie soit compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ (chap.IV, § , exerc.)

Nous nous bornerons dans ce qui suit au cas où E et F sont des espaces localement convexes séparés. Les $\mathfrak{S}$-topologies les plus importantes sont alors les suivantes :

1° la topologie de la convergence simple dans E, correspondant au cas où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties finies de E ;

2° la topologie de la convergence compacte, correspondant au cas où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties compactes de E ;

3° la topologie correspondant au cas où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de E, topologie qu'on appellera encore topologie de la convergence bornée sur $\mathscr{L}(E,F)$. Il est clair que cette topologie est la plus fine des $\mathfrak{S}$-topologies sur $\mathscr{L}(E,F)$.

Soit Γ un ensemble de semi-normes définissant la topologie de F.

Pour une semi-norme $p \in \Gamma$, soit V le voisinage de 0 dans F défini par $p(y) \leqslant 1$. Avec les notations ci-dessus, la relation $\lambda u \in \mathcal{T}(M,V)$ est équivalente à $\lambda u(x) \in V$ pour tout $x \in M$, c'est-à-dire à $|\lambda| p(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in M$; cela prouve que la $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathscr{L}(E,F)$ est définie par la famille de semi-normes

$$u \longrightarrow \sup_{x \in M} p(u(x))$$

où p parcourt Γ et M parcourt $\mathfrak{S}$ (ou seulement une partie $\mathfrak{S}_0$ de $\mathfrak{S}$ telle que tout ensemble de $\mathfrak{S}$ soit contenu dans un homothétique d'un ensemble de $\mathfrak{S}_0$).

En particulier, si E et F sont des espaces normés, la topologie de la convergence bornée sur $\mathscr{L}(E,F)$ est définie par la norme

$$\| u \| = \sup_{\| u \| \leqslant 1} \| u(x) \|$$

(cf. Top. gén., chap. X, § 2, n° 2).

4. Propriétés des $\mathfrak{S}$-topologies.

PROPOSITION 3.- Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, et $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E . Pour que la $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathscr{L}(E,F)$ soit séparée, il faut et il suffit que la réunion A des ensembles de $\mathfrak{S}$ soit un ensemble total dans E .

La condition est suffisante. En effet, supposons-la vérifiée, et soit $u_0 \neq 0$ un élément de $\mathscr{L}(E,F)$; il existe alors un point $x_0 \in A$ tel que $u_0(x_0) \neq 0$, et par suite un voisinage V de 0 dans F tel que $u_0(x_0) \notin V$; pour tout ensemble $M \in \mathfrak{S}$ tel que $x_0 \in M$, on aura $u_0 \notin \mathcal{T}(M,V)$.

La condition est nécessaire. Supposons en effet que le sous-espace vectoriel fermé N engendré par A ne soit pas identique à E . Il existe alors une forme linéaire continue f sur E , non nulle et telle que $f(x) = 0$ dans N (chap. II, § 3, prop.) ; soit $y_0 \neq 0$ un point de F ;

l'application linéaire continue u de E dans F définie par $u(x)=f(x)y_0$ est $\neq 0$, mais on a $u \in \mathcal{T}(M,V)$ quels que soient l'ensemble $M \in \mathfrak{S}$ et le voisinage V de 0 dans F .

On ne change pas une $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathcal{L}(E,F)$ si on remplace $\mathfrak{S}$ par l'un quelconque des ensembles de parties suivants :

1° l'ensemble des parties de E dont chacune est contenue dans un ensemble de $\mathfrak{S}$;

2° l'ensemble des réunions finies de parties de $\mathfrak{S}$; on a en effet $\mathcal{T}(M_1 \cup M_2, V) = \mathcal{T}(M_1, V) \cap \mathcal{T}(M_2, V)$;

3° l'ensemble des enveloppes convexes, équilibrées et fermées des parties de $\mathfrak{S}$; en effet, comme u est linéaire et continue, la relation $u(x) \in V$ pour tout $x \in M$ (V étant un voisinage fermé, équilibré et convexe) entraîne $u(y) \in V$ pour tout point y de l'enveloppe convexe, équilibrée et fermée de M ;

4° l'ensemble des homothétiques des ensembles de M ; en effet, la relation $u(x) \in V$ pour tout $x \in M$ entraîne $u(x) \in \lambda V$ pour tout $x \in \lambda M$.

On dit qu'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties de E est saturé s'il ne change pas par l'une quelconque des quatre opérations précédentes. Par exemple, l'ensemble des parties bornées de E est saturé ; il en est de même de l'ensemble des parties bornées de dimension finie, et de l'ensemble des parties précompactes de E.

En général, si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de E , le plus petit ensemble saturé de parties bornées de E qui contient $\mathfrak{S}$ est appelé le <u>saturé</u> $\overline{\mathfrak{S}}$ de $\mathfrak{S}$; soit $\mathfrak{S}_1$ l'ensemble des réunions finies d'ensembles de $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_2$ l'ensemble des enveloppes convexes équilibrées et fermées des ensembles de $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_3$ l'ensemble des homothétiques des ensembles de $\mathfrak{S}_2$; on vérifie aisément que $\overline{\mathfrak{S}}$ est l'ensemble des parties des ensembles de $\mathfrak{S}_3$.

NBR058 32

Supposons que $\mathfrak{S}$ soit saturé, et soit $\mathfrak{S}_0$ un sous-ensemble de $\mathfrak{S}$ formé de parties bornées, convexes, équilibrées et fermées, et tel que tout ensemble de $\mathfrak{S}$ soit contenu dans un homothétique d'un ensemble de $\mathfrak{S}_0$. Soit d'autre part $\mathfrak{V}$ une base de filtre formée de voisinages de 0 dans F, telle que tout voisinage de 0 dans F contienne un homothétique d'un ensemble de $\mathfrak{V}$. Alors, les homothétiques des ensembles $T(M,V)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{L}(E,F)$ pour la $\mathfrak{S}$-topologie, lorsque M parcourt $\mathfrak{S}_0$ et que V parcourt $\mathfrak{V}$.

Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble saturé de parties bornées de E. Alors, si $\mathfrak{S}'$ est un ensemble de parties bornées de E tel que $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$ et $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}'$, la $\mathfrak{S}'$-topologie est <u>strictement plus fine</u> que la $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathcal{L}(E,F)$. On peut en effet supposer que $\mathfrak{S}'$ est aussi saturé. Il existe alors un ensemble $M \in \mathfrak{S}'$, convexe, équilibré et fermé, et qui n'est contenu dans aucun ensemble de $\mathfrak{S}$. Soit V un voisinage convexe, équilibré et fermé de 0 dans F, distinct de F ; nous allons montrer que l'ensemble $T(M,V)$ ne contient aucun des ensembles $T(M,W)$, quels que soient le voisinage W de 0 dans F et l'ensemble $M \in \mathfrak{S}$, convexe, équilibré et fermé. En effet, soit y_0 un point frontière de V, et soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha y_0 \in W$; comme M n'est pas contenu dans $\frac{1}{\alpha} M$, il existe $x_0 \in M$ tel que $x_0 \notin \frac{1}{\alpha} M$. En vertu du th. de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue f sur E, telle que $|f(x)| \leqslant 1$ dans M et $f(x_0) > \frac{1}{\alpha}$. Considérons alors l'application linéaire continue u de E dans F, définie par $u(x) = \alpha f(x) y_0$; on a, par construction, $u(M) \subset W$, mais comme $\alpha f(x_0) > 1$, $u(x_0) \notin V$, ce qui démontre notre assertion.

Supposons F complet, et soit $\hat{E}$ le complété de E . Nous avons vu qu'on peut identifier les espaces vectoriels non topologiques $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(\hat{E},F)$; lorsqu'on fait cette identification, les $\mathfrak{S}$-topologies sur $\mathcal{L}(E,F)$ et sur $\mathcal{L}(\hat{E},F)$ sont alors identiques. En vertu de ce qui précède, on peut dire aussi que, si $\hat{\mathfrak{S}}$ désigne l'ensemble des adhérences, dans $\hat{E}$, des ensembles de $\mathfrak{S}$, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$, muni de la $\mathfrak{S}$-topologie, est identifié à l'espace $\mathcal{L}(\hat{E},F)$, muni de la $\hat{\mathfrak{S}}$-topologie.

On aura soin de noter qu'en général, une partie bornée (resp. relativement compacte) de $\hat{E}$ n'est pas nécessairement contenue dans l'adhérence d'une partie bornée (resp. précompacte) de E (chap.IV, § ,exerc.). Il faut donc prendre garde d'identifier les espaces $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(\hat{E},F)$ lorsqu'on les munit tous deux de la topologie de la convergence bornée (resp. de la topologie de la convergence compacte) ; la topologie sur $\mathcal{L}(\hat{E},F)$ peut-être <u>strictement plus fine</u> en général que celle sur $\mathcal{L}(E,F)$.

On notera toutefois que si E est un espace <u>normé</u>, tout ensemble borné dans $\hat{E}$ est contenu dans l'adhérence d'un ensemble borné dans E , savoir une boule. De même, si E est <u>métrisable</u>, tout ensemble compact K dans $\hat{E}$ est contenu dans l'adhérence d'un ensemble précompact dans E ; en effet, soit d une distance sur $\hat{E}$, et pour tout entier n , soit A_n une partie finie de K telle que tout point de K soit à une distance $\leqslant 1/n$ de A_n ; si B_n est une partie finie de E telle que tout point de A_n soit à une distance $\leqslant 1/n$ de B_n , il est clair que K est contenu dans l'adhérence de la réunion H des B_n ; et d'autre part H est précompact, car on voit aussitôt que tout point de la réunion des B_p d'indice $\geqslant n$ est à une distance $\leqslant 2/n$ de B_n .

On notera que même si E est métrisable (mais non normé), il peut y avoir des ensembles bornés de $\hat{E}$ non contenus dans l'adhérence d'un ensemble borné de E (chap. IV, § , exerc.).

Soient F_1, F_2 deux espaces localement convexes, φ une application linéaire continue de F_1 dans F_2 ; alors $u \to \varphi \circ u$ est une application linéaire continue de ~~F_1 dans F_2 ; alors~~ $\mathcal{L}(E, F_1)$, muni de la $\mathfrak{S}$-topologie, dans $\mathcal{L}(E, F_2)$, muni de la $\mathfrak{S}$-topologie : en effet, pour tout voisinage V de 0 dans F_2, la relation $u(M) \subset \overset{-1}{\varphi}(V)$ entraîne $\varphi(u(M)) \subset V$.

Soient E_1, E_2 deux espaces localement convexes, ψ une application linéaire continue de E_1 dans E_2, $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble de parties bornées de E_1 (resp. E_2) tel que $\mathfrak{S}_2 \supset \psi(\mathfrak{S}_1)$. Alors $u \to u \circ \psi$ est une application linéaire continue de $\mathcal{L}(E_2, F)$ muni de la $\mathfrak{S}_2$-topologie, dans $\mathcal{L}(E_1, F)$, muni de la $\mathfrak{S}_1$-topologie : en effet, pour tout voisinage convexe symétrique V de 0 dans F et tout ensemble $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, il existe par hypothèse $M_2 \in \mathfrak{S}_2$ tel que $\psi(M_1) \subset M_2$; la relation $u(y) \in V$ pour tout $y \in M_2$ entraîne donc $u(\psi(x)) \in V$ pour tout $x \in M_1$.

En particulier, soit M un sous-espace vectoriel de E, ψ l'application canonique de E sur E/M, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. L'application $u \to u \circ \psi$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E/M, F)$, muni de la $\psi(\mathfrak{S})$-topologie, sur le sous-espace de $\mathcal{L}(E, F)$ (muni de la $\mathfrak{S}$-topologie) formé des applications linéaires continues v de E dans F telles que $v(x) = 0$ dans M.

Soient E un espace localement convexe, $\mathfrak{S}$ un ensemble saturé de parties bornées de E, $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'espaces localement convexes, F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et pour chaque $\iota \in I$, soit g_ι une application linéaire de F dans G_ι. Munissons F de la topologie

localement convexe la moins fine rendant continues les g_ι . Alors la $\mathfrak{S}$ -topologie sur $\mathscr{L}(E,F)$ est la topologie la moins fine rendant continues les applications linéaires $u \to g_\iota \circ u$ de $\mathscr{L}(E,F)$ dans les espaces $\mathscr{L}(E,G_\iota)$ munis chacun de la $\mathfrak{S}$-topologie. En effet, soit H une partie finie de I , V_ι un voisinage de 0 dans G_ι pour tout $\iota \in H$, V le voisinage de 0 dans F défini par les relations $g_\iota(y) \in V_\iota$ pour $\iota \in H$; pour tout $M \in \mathfrak{S}$, la relation $u(M) \subset V$ équivaut à "$g_\iota(u(M)) \subset V_\iota$ pour tout $\iota \in H$", et inversement, la relation "$g_\iota(u(M_\iota)) \subset V_\iota$ pour tout $\iota \in H$" est entraînée par $u(M) \subset V$, si on pose $M = \bigcup_{\iota \in H} M_\iota$.

En particulier, si $F = \prod_{\iota \in I} G_\iota$, $\mathscr{L}(E,F)$, muni de la $\mathfrak{S}$ -topologie, s'identifie à l'espace produit $\prod_{\iota \in I} \mathscr{L}(E,G_\iota)$, où chacun des facteurs est muni de la $\mathfrak{S}$-topologie.

Soient maintenant $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces localement convexes E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et pour chaque $\alpha \in A$, soit h_α une application linéaire de E_α dans E . Munissons E de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les h_α . D'autre part, pour tout $\alpha \in A$, soit $\mathfrak{S}_\alpha$ un ensemble de parties bornées de E_α , et soit $\mathfrak{S}$ la réunion dans $\mathscr{P}(E)$ des ensembles $h_\alpha(\mathfrak{S}_\alpha)$ de parties bornées de E . Dans ces conditions, la $\mathfrak{S}$ -topologie sur $\mathscr{L}(E,F)$ est identique à la topologie la moins fine rendant continues les applications linéaires $u \to u \circ h_\alpha$ de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{L}(E_\alpha,F)$ muni de la $\mathfrak{S}_\alpha$ -topologie. En effet, si V est un voisinage de 0 dans F et $M = h_\alpha(M_\alpha)$ un ensemble de $\mathfrak{S}$, la relation $u(M) \subset V$ est équivalente à $u(h_\alpha(M_\alpha)) \subset V$; d'autre part, si B est une partie finie de A , et pour tout $\alpha \in B$, V_α un voisinage de 0 dans F et M_α un ensemble de $\mathfrak{S}_\alpha$, la relation "pour tout $\alpha \in B$, $u(h_\alpha(M_\alpha)) \subset V_\alpha$ " est entraînée par $u(M) \subset V = \bigcap_{\alpha \in B} V_\alpha$, où on a posé $M = \bigcup_{\alpha \in B} h_\alpha(M_\alpha)$.

En particulier, si E est somme directe topologique de la famille $(E_\iota)_{\iota\in I}$, l'espace $\mathscr{L}(E,F)$ s'identifie avec l'espace produit $\prod_{\iota\in I}\mathscr{L}(E_\iota,F)$, quand on munit $\mathscr{L}(E_\iota,F)$ de la $\mathfrak{S}_\iota$-topologie, et $\mathscr{L}(E,F)$ de la $\mathfrak{S}$-topologie, où $\mathfrak{S}$ désigne la réunion, dans $\mathscr{P}(E)$, des ensembles $\mathfrak{S}_\iota$.

5. Parties bornées de $\mathscr{L}(E,F)$.

PROPOSITION 4.- Soient E et F deux espaces localement convexes, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E . Pour qu'une partie H de $\mathscr{L}(E,F)$ soit bornée pour la $\mathfrak{S}$-topologie, il faut et il suffit que pour tout ensemble $M\in\mathfrak{S}$, la réunion des ensembles u(M), où u parcourt H , soit bornée dans F .

En effet, écrire que $H\subset\lambda T(M,V)$ signifie que $u(M)\subset\lambda V$ pour tout $u\in H$, d'où la proposition.

Soient $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ deux ensembles de parties bornées de E tels que $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{S}'$. Il est clair que toute partie de $\mathscr{L}(E,F)$, qui est bornée pour la $\mathfrak{S}'$-topologie, est aussi bornée pour la $\mathfrak{S}$-topologie (qui est moins fine). En particulier, toute partie de $\mathscr{L}(E,F)$, qui est bornée pour la topologie de la convergence bornée, est bornée pour toute $\mathfrak{S}$-topologie. Si $\mathfrak{S}$ est tel que la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$ engendre E , toute partie de $\mathscr{L}(E,F)$ bornée pour la $\mathfrak{S}$-topologie, est bornée pour la topologie de la convergence simple.

Une partie de $\mathscr{L}(E,F)$, bornée pour la topologie de la convergence simple, n'est pas nécessairement bornée pour la topologie de la convergence bornée (exerc.2). Mais on a la propriété suivante :

PROPOSITION 5.- Soient E et F deux ensembles localement convexes séparés, et soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties de E convexes, équilibrées, bornées et

NBR 058 37

complètes. Alors, toute partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ qui est bornée pour la topologie de la convergence simple est bornée pour la $\mathfrak{S}$-topologie.

En effet, soit M un ensemble de $\mathfrak{S}$, V un voisinage de 0 dans F, convexe, équilibré et fermé ; tout revient à montrer que, si T est l'intersection des ensembles $u^{-1}(V)$, où u parcourt H, il existe $\lambda > 0$ tel que $M \subset \lambda T$ (prop.4). Or T est évidemment équilibré convexe et fermé dans E ; si nous montrons que T est absorbant, T sera un tonneau, et la proposition sera conséquence du th.1 du §3. Mais par hypothèse, pour tout $x \in E$, l'ensemble des $u(x)$, où u parcourt H, est borné dans F ; il existe donc $\mu > 0$ tel que $u(x) \in \mu V$ pour tout $u \in H$, ce qui signifie que $x \in \mu T$, et achève la démonstration.

COROLLAIRE.- Si E est quasi-complet, les parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$ sont les mêmes pour toutes les $\mathfrak{S}$-topologies pour lesquelles la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}$ engendre E.

En effet, $\mathfrak{S}$ est alors l'ensemble des parties convexes, équilibrées, bornées et fermées de E, donc toute partie de $\mathcal{L}(E,F)$ bornée pour la topologie de la convergence simple est aussi bornée pour la topologie de la convergence bornée.

Lorsque E est quasi-complet, on parlera donc de parties bornées dans $\mathcal{L}(E,F)$ sans mentionner pour quelle $\mathfrak{S}$-topologie, étant entendu qu'il s'agit d'un ensemble $\mathfrak{S}$ dont la réunion engendre E, sauf mention expresse du contraire.

PROPOSITION 6.- Soient E et F deux espaces localement convexes. Si E est bornologique et F quasi-complet, $\mathcal{L}(E,F)$ est quasi-complet pour la topologie de la convergence bornée.

Soit H une partie de $\mathscr{L}(E,F)$, fermée et bornée pour la topologie de la convergence bornée. Il faut prouver que, si Φ est un filtre de Cauchy sur H pour cette topologie, il converge vers un point de H. Pour tout $x \in E$, $\Phi(x)$ est évidemment une base de filtre de Cauchy sur l'ensemble $H(x) \in F$; comme H(x) est borné par hypothèse, $\overline{H(x)}$ est complet, et par suite $\Phi(x)$ converge vers un point $u_0(x) \in F$. En outre, si x et y sont deux points quelconques de E, u(x+y) (resp. u(x),u(y)) tend vers $u_0(x+y)$ (resp. $u_0(x),u_0(y)$) suivant Φ, donc $u_0(x+y)=u_0(x)+u_0(y)$, et on montre de même que $u_0(\lambda x)=\lambda u_0(x)$ pour tout scalaire λ, autrement dit, u_0 est une application linéaire de E dans F. En raison des hypothèses, le filtre Φ converge uniformément vers u_0 dans toute partie bornée de E (Top.gén., chap.X, § 1, prop.4) ; reste à démontrer que $u_0 \in \mathscr{L}(E,F)$, c'est-à-dire que u_0 est continue dans E. Comme E est bornologique, il suffit de prouver que pour tout ensemble borné A dans E, $u_0(A)$ est borné dans F. On peut supposer que A est convexe et équilibré ; la restriction de u_0 à A, limite uniforme de fonctions continues, est continue ; pour tout voisinage V de 0 dans F, il existe donc un voisinage U de 0 dans E tel que $u_0(U \cap A) \subset V$. Mais comme A est borné, il existe $\lambda > 1$ tel que $A \subset \lambda U$; pour tout $x \in A$, on a donc $\frac{1}{\lambda} x \in U \cap A$, d'où $u_0(x) \in \lambda V$ et par suite $u_0(A) \subset \lambda V$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- Soient E un espace normé, F un espace de Banach. L'espace $\mathscr{L}(E,F)$, muni de la topologie de la convergence bornée, est un espace de Banach.

En effet, $\mathscr{L}(E,F)$ est normé (n°3) et quasi-complet en vertu de la prop.6, donc complet (§ 1, n°5).

6. Relations entre parties bornées et parties équicontinues de $\mathscr{L}(E,F)$.

PROPOSITION 7.- *Soient E et F deux espaces localement convexes. Toute partie équicontinue H de $\mathscr{L}(E,F)$ est bornée pour toutes les $\mathfrak{S}$-topologies sur $\mathscr{L}(E,F)$.*

En effet, pour tout voisinage V de 0 dans F, il existe par hypothèse un voisinage W de 0 dans E tel que $u(W) \subset V$ pour tout $u \in H$. Si A est une partie bornée de E, il existe $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda W$, d'où $u(A) \subset \lambda V$ pour tout $u \in H$, ce qui montre que la réunion des $u(A)$ pour $u \in H$ est bornée dans F, d'où la proposition (prop.4).

Inversement, une partie de $\mathscr{L}(E,F)$, qui est bornée pour la topologie de la convergence bornée (et a fortiori pour toute $\mathfrak{S}$-topologie) n'est pas nécessairement équicontinue (chap.IV, § , exerc.). Mais on a le résultat suivant :

PROPOSITION 8.- *Soient E un espace tonnelé, F un espace localement convexe quelconque. Toute partie H de $\mathscr{L}(E,F)$, qui est bornée pour la topologie de la convergence simple, est équicontinue* (et par suite bornée pour toutes les $\mathfrak{S}$-topologies).

En effet, soit V un voisinage de 0 dans F, convexe, équilibré et fermé, et soit T l'intersection des ensembles $u^{-1}(V)$, où u parcourt H. L'hypothèse que H est bornée pour la topologie de la convergence simple entraîne que T est un tonneau, d'après le raisonnement de la prop.5 ; comme E est tonnelé, T est un voisinage, et comme $u(T) \subset V$ pour tout $u \in H$, H est équicontinue.

Lorsque E est tonnelé, on peut donc encore parler de parties *bornées* de $\mathscr{L}(E,F)$ sans spécifier pour quelle $\mathfrak{S}$-topologie, et les parties bornées sont identiques aux parties équicontinues.

On dit qu'un filtre sur un espace localement convexe est <u>borné</u> si un de ses ensembles est borné.

THÉORÈME 2 (Banach-Steinhaus).- <u>Soient</u> E <u>un espace tonnelé</u>, F <u>un espace localement convexe séparé</u>. <u>Si</u> Φ <u>est un filtre borné ou ayant une base dénombrable sur</u> $\mathcal{L}(E,F)$, <u>qui converge simplement dans</u> E <u>vers une fonction</u> u_0, <u>alors</u> u_0 <u>est une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F, <u>et</u> Φ <u>converge vers</u> u_0 <u>uniformément dans toute partie précompacte de</u> E.

Si Φ est un filtre borné, il existe dans Φ un ensemble H borné dans $\mathcal{L}(E,F)$, donc équicontinu (prop.8) ; le théorème résulte alors de la prop.1 et du th.1.

Supposons en second lieu que Φ soit le filtre élémentaire associé à une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, la suite des $u_n(x)$ est convergente dans F vers $u_0(x)$ pour tout $x\in E$; la suite (u_n) est donc <u>bornée</u> dans $\mathcal{L}(E,F)$, et nous sommes ramenés au premier cas.

Soit enfin Φ un filtre sur $\mathcal{L}(E,F)$ ayant une base dénombrable (H_n), qu'on peut supposer décroissante. Soit u_n un élément de H_n ; la suite (u_n) converge simplement vers u_0, donc u_0 est une application linéaire continue de E dans F, en vertu de ce qui précède. Pour démontrer la dernière partie du théorème, nous devons prouver que, si K est un ensemble précompact dans E et V un voisinage de 0 dans F, on a, pour n assez grand et pour tout $u\in H_n$, $v(K)\subset V$, en posant $v=u-u_0$. Or, s'il n'en était pas ainsi, il existerait pour tout entier n une application $w_n\in H_n$ telle que, en posant $v_n=w_n-u_0$, on ait $v_n(K)\not\subset V$; mais cette conclusion est absurde, car la suite (w_n) converge simplement vers u_0 dans E.

On se gardera de croire qu'un filtre sur $\mathcal{L}(E,F)$ qui converge simplement et admet une base dénombrable, soit nécessairement un filtre borné. Par exemple, si E est un espace de Banach, F un espace

de Fréchet dans lequel aucun voisinage de 0 n'est borné (§ 1, exerc. 2), alors $\mathscr{L}(E,F)$, muni de la topologie de la convergence bornée, est métrisable, et aucun voisinage de 0 dans $\mathscr{L}(E,F)$ n'est borné ; toutefois le filtre des voisinages de 0 dans $\mathscr{L}(E,F)$ admet alors une base dénombrable.

Exemple.- Comme application du th. de Banach-Steinhaus, nous allons démontrer le résultat suivant :

Si une suite (α_n) de nombres complexes est telle que, pour toute suite (ξ_n) telle que $\sum_n |\xi_n| < +\infty$, on ait $\sum_n |\alpha_n \xi_n| < +\infty$, elle est bornée.

Considérons en effet l'application linéaire u de l'espace de Banach $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ des suites sommables $x=(\xi_n)$ de nombres complexes définie par $u(x)=(\alpha_n\xi_n)$; u est limite simple de la suite d'applications linéaires continues u_k de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ dans lui-même, définie par $u_k(x)=(\alpha_n^{(k)}\xi_n)$, où $\alpha_n^{(k)}=\alpha_n$ pour $n \leqslant k$ $\alpha_n^{(k)}=0$ pour $n>k$. D'après le th. 2, u est continue ; soit b sa norme : on a donc pour tout $x=(\xi_n)\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$,

$$\|u(x)\| = \sum_n |\alpha_n\xi_n| \leqslant b \cdot \|x\| = b \cdot \sum_n |\xi_n| .$$

Si on applique cette inégalité au cas où $\xi_n=1$, $\xi_m=0$ pour $m\neq n$, il vient $|\alpha_n| \leqslant b$, d'où la proposition.

Exercices.- 1) Soit $(E_\iota)_{\iota\in I}$ une famille quelconque d'espaces localement convexes séparés, non réduits à 0, et soit F un espace normé.

a) Montrer que si u est une application linéaire continue de l'espace produit $E = \prod_{\iota\in I} E_\iota$ dans F, il existe un ensemble fini $H \subset I$ tel que $u^{-1}(0)$ contienne le produit des E_ι d'indice $\iota \notin H$.

b) En déduire qu'il existe un isomorphisme canonique de l'espace $\mathscr{L}(E,F)$, muni de la topologie de la convergence bornée (resp. de la topologie de la convergence simple, de la topologie de la convergence uniforme dans les parties précompactes de E) sur l'espace somme directe

NBIC 058 42

topologique des espaces $\mathscr{L}(E_\iota,F)$, dont chacun est muni de la topologie de la convergence bornée (resp. de la topologie de la convergence simple, de la topologie de la convergence uniforme dans les parties préconpactes de E_ι).

2) Soit E le sous-espace de l'espace normé $L^1(\mathcal{N})$ des suites absolument sommables $x=(\xi_n)$ de nombres réels (muni de la norme $\|x\| = \sum_n |\xi_n|$) formé des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes $\neq 0$.

a) Montrer que toute forme linéaire continue u sur E s'écrit $(\xi_n) \to \sum_n \alpha_n \xi_n$, où $\|u\| = \sup_n |\alpha_n| < +\infty$.

b) Dans l'espace $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur E, soit (u_n) la suite de formes linéaires définies par $u_n(x) = \sum_m \alpha_{mn}\xi_n$, avec $\alpha_{mn} = \inf(m,n)$. Montrer que l'ensemble des u_n est borné pour la topologie de la convergence simple, mais non pour la topologie de la convergence bornée.

3) Soient E un espace bornologique, F un espace localement convexe séparé et complet. Montrer que l'espace $\mathscr{L}(E,F)$, muni de la topologie de la convergence bornée, est complet.

§ 5. Applications bilinéaires hypocontinues.

1. Définition d'une application bilinéaire hypocontinue.

DÉFINITION 1.- Soient E_1, E_2, F trois espaces localement convexes. On dit qu'une application bilinéaire u de $E_1 \times E_2$ dans F est séparément continue si, pour tout $x \in E_1$, l'application $y \to u(x,y)$ est continue, et si, pour tout $y \in E_2$, l'application $x \to u(x,y)$ est continue.

Pour tout $x \in E_1$ (resp. $y \in E_2$), désignons par u_x (resp. u_y) l'application linéaire $y \to u(x,y)$ de E_2 dans F (resp. l'application $x \to u(x,y)$ de E_1 dans F), et remarquons que l'application $x \to u_x$ est une application

linéaire de E_1 dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}_0(E_2,F)$ de toutes les applications linéaires de E_2 dans F . On sait d'ailleurs que réciproquement, pour toute application linéaire v de E_1 dans $\mathcal{L}_0(E_2,F)$, il existe une application bilinéaire et une seule u de $E_1 \times E_2$ dans F telle que $v(x)=u_x$ pour tout $x \in E_1$ (Alg., chap.III, § 1, prop.1).

PROPOSITION 1.- Pour qu'une application bilinéaire u de $E_1 \times E_2$ dans F soit séparément continue, il faut et il suffit que, pour tout $x \in E_1$, u_x soit une application linéaire continue de E_2 dans F et que l'application linéaire $x \to u_x$ soit continue quand on munit $\mathcal{L}(E_2,F)$ de la topologie de la convergence simple.

La proposition est évidente à partir des définitions.

DÉFINITION 2.- Soient E_1, E_2, F trois espaces localement convexes, $\mathfrak{S}_1$ un ensemble de parties bornées de E_1 . On dit qu'une application bilinéaire séparément continue u de $E_1 \times E_2$ est hypocontinue par rapport à $\mathfrak{S}_1$ (ou $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue) si, pour toute partie $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, l'ensemble des applications u_x lorsque x parcourt M_1 (autrement dit, l'image de M_1 par $x \to u_x$) est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E_2,F)$.

Dire que u est $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue signifie donc que, pour tout voisinage W de 0 dans F et tout ensemble $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, il existe un voisinage V_2 de 0 dans E_2 tel que les relations $x \in M_1$, $y \in V_2$ entraînent $u(x,y) \in W$.

On notera que toute application bilinéaire séparément continue est $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue, en prenant pour $\mathfrak{S}_1$ l'ensemble des parties finies de E_1 .

PROPOSITION 2.- Pour qu'une application bilinéaire séparément continue de $E_1 \times E_2$ dans F soit $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue, il faut et il suffit que l'application $y \to u_y$ de E_2 dans $\mathcal{L}(E_1,F)$ soit continue quand on munit $\mathcal{L}(E_1,F)$ de la $\mathfrak{S}_1$-topologie.

Cela résulte aussitôt de la remarque qui précède.

Si $\mathfrak{S}_2$ est un ensemble de parties bornées de E_2, on définit de la même façon la notion de fonction bilinéaire $\mathfrak{S}_2$-hypocontinue en permutant dans la déf.2 les rôles de E_1 et de E_2. On dit que u est ($\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$)-hypocontinue (ou hypocontinue par rapport à $\mathfrak{S}_1$ et à $\mathfrak{S}_2$) si u est à la fois $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue et $\mathfrak{S}_2$-hypocontinue.

Une application $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue peut être considérée comme ($\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$)-hypocontinue, en prenant pour $\mathfrak{S}_2$ l'ensemble des parties finies de E_2.

Exemple.- Soient E et F deux espaces localement convexes, et considérons l'application bilinéaire $(x,u) \to u(x)$ de $E \times \mathcal{L}(E,F)$ dans F ; si on désigne par f cette application, f_u est identique à u, et f_x est l'application $u \to u(x)$ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans F ; f est donc séparément continue quand on munit $\mathcal{L}(E,F)$ d'une topologie localement convexe $\mathfrak{T}$ plus fine que la topologie de la convergence simple. Soient $\mathfrak{S}_1$ un ensemble de parties bornées de E, $\mathfrak{S}_2$ un ensemble de parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$ (pour $\mathfrak{T}$). On voit aussitôt que dire que f est $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue signifie que $\mathfrak{T}$ est plus fine que la $\mathfrak{S}_1$-topologie sur $\mathcal{L}(E,F)$; et dire que f est $\mathfrak{S}_2$-hypocontinue signifie que les ensembles de $\mathfrak{S}_2$ sont des parties équicontinues de $\mathcal{L}(E,F)$.

DEFINITION 3.- *Soient E_1, E_2, F trois espaces localement convexes, $\mathfrak{S}_1$ un ensemble de parties bornées de E_1. On dit qu'un ensemble H d'applications bilinéaires séparément continues de $E_1 \times E_2$ est équihypocontinu par rapport à $\mathfrak{S}_1$ (ou $\mathfrak{S}_1$-équihypocontinu) si, pour toute partie $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, l'ensemble des applications u_x lorsque x parcourt M_1 et que u parcourt H, est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E_2,F)$.*

Il revient au même de dire que, pour tout voisinage W de 0 dans F et tout ensemble $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, il existe un voisinage V_2 de 0 dans E_2 tel que les relations $x \in M_1$, $y \in V_2$ et $u \in H$ entraînent $u(x,y) \in W$. Cela signifie encore que, lorsque u parcourt H , l'ensemble des applications $y \to u_y$ de E_2 dans $\mathcal{L}(E_1,F)$ est <u>équicontinu</u> lorsque $\mathcal{L}(E_1,F)$ est muni de la $\mathfrak{S}_1$-topologie.

Si $\mathfrak{S}_2$ est un ensemble de parties bornées de E_2 , on définit de même la notion d'ensemble $\mathfrak{S}_2$-<u>équihypocontinu</u>, et la notion d'ensemble $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-<u>équihypocontinu</u> d'applications bilinéaires.

Lorsque $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont les ensembles de parties <u>finies</u> de E_1 et E_2 , un ensemble $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-équihypocontinu est encore appelé ensemble <u>séparément équicontinu</u>.

Soient $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_1$ deux ensembles de parties bornées de E_1 ; si $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{T}_1$, il est clair que toute application $\mathfrak{T}_1$-hypocontinue est aussi $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue ; mais la prop.2 montre qu'on ne change pas la notion d'application $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue quand on remplace l'ensemble de parties $\mathfrak{S}_1$ par son <u>saturé</u> $\overline{\mathfrak{S}_1}$ (§ 4, n°4). On a des remarques analogues pour les autres notions introduites ci-dessus.

Si $\mathfrak{S}_1$ n'est pas identique à l'ensemble des parties finies de E_1 , une application bilinéaire séparément continue de $E_1 \times E_2$ dans F n'est pas nécessairement $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue. Toutefois, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3.- <u>Soit E_2 un espace tonnelé. Alors, pour tout ensemble $\mathfrak{S}_1$ de parties bornées de E_1 , toute application bilinéaire séparément continue u de $E_1 \times E_2$ dans F est $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue ; tout ensemble séparément équicontinu d'applications bilinéaires de $E_1 \times E_2$ dans F est $\mathfrak{S}_1$-équihypocontinu.</u>

En effet, soit H un ensemble séparément équicontinu d'applications bilinéaires de $E_1 \times E_2$ dans F ; il faut prouver que lorsque u parcourt H et x un ensemble $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, l'ensemble des applications linéaires u_x de E_2 dans F est équicontinu. Comme E_2 est tonnelé, il suffit pour cela de montrer que pour tout $y \in E_2$, l'ensemble des $u_x(y)$ est borné dans F (§ 4, prop. 8). Or, par hypothèse, l'ensemble des u_y, où u parcourt H (y fixe dans E_2) est équicontinu dans $\mathcal{L}(E_1, F)$; pour tout voisinage W de 0 dans F, il existe donc un voisinage V_1 de 0 dans E_1 tel que $u_y(V_1) \subset W$ pour tout $u \in H$; par ailleurs, comme M_1 est borné, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda M_1 \subset V_1$. On a donc $\lambda u_y(M_1) \subset W$ pour tout $u \in H$, ce qui prouve notre assertion.

On peut étendre les définitions précédentes aux applications multilinéaires. Une application multilinéaire u de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F (E_i et F espaces localement convexes) est dite <u>séparément continue</u> si chacune des applications partielles

$$x_i \to u(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

est continue, quels que soient les a_k d'indice $\neq i$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, soit $\mathfrak{S}_i$ un ensemble de parties bornées de E_i ; on dira que u est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{n-1})$-hypocontinue si, pour tout voisinage W de 0 dans F et toute suite de n-1 ensembles $M_i \in \mathfrak{S}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, il existe un voisinage V_n de 0 dans E_n tel que les relations $x_i \in M_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $x_n \in V_n$ entraîne $u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in W$. On définit de la même manière l'équihypocontinuité par rapport aux $\mathfrak{S}_i$.

NBR 058 47

2. Continuité et hypocontinuité.

PROPOSITION 4.- *Toute application bilinéaire continue u d'un produit $E_1 \times E_2$ de deux espaces localement convexes dans un espace localement convexe F, est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue pour tout ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E_1 et tout ensemble $\mathfrak{S}_2$ de parties bornées de E_2.*

En effet, étant donné un voisinage W de 0 dans F, il existe par hypothèse un voisinage V_1 de 0 dans E_1 et un voisinage V_2 de 0 dans E_2 tels que $u(x,y) \in W$ pour $x \in V_1$ et $y \in V_2$. Si M_1 est borné dans E_1, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda M_1 \subset V_1$; pour $x \in M_1$ et $y \in \lambda V_2$, on a alors $u(x,y) = u(\lambda x, \lambda^{-1} y) \subset W$ puisque $\lambda x \in V_1$. On montre de même que u est $\mathfrak{S}_2$-hypocontinue.

Dire que u est continue signifie encore qu'il existe un voisinage V_1 de 0 dans E_1 tel que l'image de V_1 par l'application $x \to u_x$ est un ensemble équicontinu dans $\mathcal{L}(E_2, F)$.

En général, une application bilinéaire hypocontinue par rapport à l'ensemble de toutes les parties bornées de E_1 et à l'ensemble de toutes les parties bornées de E_2 n'est pas nécessairement continue dans $E_1 \times E_2$ (exerc.2). On a seulement les propriétés générales suivantes :

PROPOSITION 5.- *Soit u une application bilinéaire $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue de $E_1 \times E_2$ dans F. Pour tout couple d'ensembles $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, $M_2 \in \mathfrak{S}_2$, u est continue dans les ensembles $M_1 \times E_2$ et $E_1 \times M_2$, et uniformément continue dans $M_1 \times M_2$, et $u(M_1 \times M_2)$ est borné dans F.*

Soit $x_0 \in M_1$, $y_0 \in E_2$. On peut écrire

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = u_{y_0}(x - x_0) + u_x(y - y_0) .$$

Or l'ensemble des u_x est équicontinu lorsque x parcourt M_1 ; donc, pour tout voisinage W de 0 dans F, il existe un voisinage V_2 de 0 dans E_2

tel que les relations $x \in M_1$, $y-y_0 \in V_2$ entraînent $u_x(y-y_0) \in W$. D'autre part u_{y_0} est continue dans E_1 , donc il existe un voisinage V_1 de 0 dans E_1 tel que la relation $x-x_0 \in V_1$ entraîne $u_{y_0}(x-x_0) \in W$. Cela prouve la continuité de u dans $M_1 \in E_2$, et on prouve de même que u est continue dans $E_1 \times M_2$. Enfin, comme l'ensemble des u_{y_0} est équicontinu lorsque y_0 parcourt M_2, il existe un voisinage U_1 de 0 dans E_1 tel que les relations $y_0 \in M_2$, $x-x_0 \in U_1$ entraînent $u_{y_0}(x-x_0) \in W$, ce qui prouve que u est uniformément continue dans $M_1 \times M_2$.

Enfin, avec les notations précédentes, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda M_2 \subset V_2$; on a donc $\lambda u_x(M_2) \subset W$ pour tout $x \in M_1$, c'est-à-dire $\lambda u(M_1 \times M_2) \subset W$, ce qui prouve que $u(M_1 \times M_2)$ est borné dans F .

On observera que ce dernier résultat est valable lorsque u est seulement supposée $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue et que M_2 est une partie bornée quelconque de E_2 .

PROPOSITION 6.- <u>Soit</u> H <u>un ensemble</u> ($\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$)-<u>équihypocontinu d'applications bilinéaires de</u> $E_1 \times E_2$ <u>dans</u> F . <u>Pour tout couple d'ensembles</u> $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, $M_2 \in \mathfrak{S}_2$, H <u>est équicontinu dans</u> $M_1 \times E_2$ <u>et</u> $E_1 \times M_2$, <u>et uniformément équicontinu dans</u> $M_1 \times M_2$.

Il suffit de remarquer que dans la démonstration de la prop.5, une fois W donné, les voisinages V_1, V_2 et U_2 peuvent par hypothèse être pris <u>indépendants de</u> $u \in H$.

Il y a un cas important dans lequel les notions d'hypocontinuité et de continuité coïncident. Nous allons en effet démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.- Soient T un espace topologique métrisable, E un espace localement convexe métrisable et tonnelé, F un espace localement convexe. Soit f une application de $E \times T$ dans F telle que : 1° pour tout $t_0 \in T$, $x \to f(x,t_0)$ soit une application linéaire continue de E dans F ; 2° pour tout $x_0 \in E$, $t \to f(x_0,t)$ est une application continue de T dans F. Dans ces conditions, f est une application continue de $E \times T$ dans F.

Il suffit de prouver que pour toute suite (x_n,t_n) de points de l'espace métrisable $E \times T$ qui converge vers (x_0,t_0), $f(x_n,t_n)$ tend vers $f(x_0,t_0)$. En effet, supposons cette condition remplie et soit (V_n) un système fondamental de voisinages de (x_0,t_0) dans $E \times T$; si f n'était pas continue au point (x_0,t_0), il existerait un voisinage W de 0 dans F et, pour tout n, un point $(x_n,t_n) \in V_n$ tel que $f(x_n,t_n) \notin f(x_0,t_0)+W$; comme la suite (x_n,t_n) tend vers (x_0,t_0), cela contredit l'hypothèse que $f(x_n,t_n)$ tend vers $f(x_0,t_0)$.

Soit donc f_{t_n} l'application partielle $x \to f(x,t_n)$ de E dans F. Par hypothèse, f_{t_n} est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$; en outre, pour tout $x \in E$, $f_{t_n}(x)$ tend vers $f_{t_0}(x)$ lorsque t_n tend vers t_0. Cela signifie que la suite (f_{t_n}) converge vers f_{t_0} pour la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble des f_{t_n} est donc équicontinu, puisque E est tonnelé (§ 4, prop. 8). Cela entraîne que, pour tout voisinage W de 0 dans F, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $f_{t_n}(x-x_0) \in W$ pour tout indice n et pour $x-x_0 \in V$; en particulier, il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $f_{t_n}(x_n-x_0) \in W$. Comme $t \to f(x_0,t)$ est continue au point t_0, on peut supposer n_0 assez grand pour qu'on ait aussi $f(x_0,t_n)-f(x_0,t_0) \in W$ pour $n \geqslant n_0$, d'où $f(x_n,t_n)-f(x_0,t_0) \in W+W$ pour $n \geqslant n_0$, ce qui démontre le théorème.

On peut démontrer que la conclusion du th.1 subsiste quand, dans les hypothèses, on suppose que E est un espace de Baire (localement convexe), au lieu de supposer que E est métrisable et tonnelé (exerc.3). Aucune de ces deux propriétés n'implique d'ailleurs l'autre, car il y a des espaces métrisables et tonnelés qui ne sont pas des espaces de Baire (chap. V, § , exerc.), et aussi des espaces localement convexes qui sont des espaces de Baire et ne sont pas métrisables (§ 3, exerc.5).

Notons enfin que la conclusion du th.1 ne subsiste plus si on suppose seulement que E est tonnelé (exerc.2).

COROLLAIRE.- Soient E_1, E_2, F trois espaces localement convexes. Si E_1 est métrisable, E_2 métrisable et tonnelé, toute application bilinéaire séparément continue de $E_1 \times E_2$ dans F est continue.

PROPOSITION 7.- Soient E_1, E_2, F trois espaces localement convexes. Si E_1 est métrisable, E_2 métrisable et tonnelé, tout ensemble H d'applications bilinéaires de $E_1 \times E_2$ dans F, séparément équicontinu, est équicontinu dans $E_1 \times E_2$.

Il suffit de prouver que H est équicontinu au point (0,0) (chap. I, § 1, prop.7). Soit (x_n) une suite de points de E_1 tendant vers 0 ; pour tout $y \in E_2$, l'ensemble des applications linéaires f_y de E_1 dans F est par hypothèse équicontinu lorsque f parcourt H ; cela signifie que pour tout voisinage W de 0 dans F, il existe un voisinage U de 0 dans E_1 tel que $f_y(x) \in W$ quels que soient $f \in H$ et $x \in U$; on en déduit que l'ensemble des $f_{x_n}(y)$ est borné dans F (pour un y fixe), lorsque n parcourt $\mathcal{N}$ et que f parcourt H. En effet, il existe n_0 tel que $x_n \in U$, donc $f_{x_n}(y) \in W$ pour $n \geqslant n_0$ et $f \in H$; d'autre part, si $m < n_0$, l'ensemble des applications f_{x_m}, où f parcourt H, est par hypothèse

NBR 058

équicontinu ; il existe donc un voisinage V_m de 0 dans F tel que $f_{x_m}(z) \in W$ pour tout $z \in V_m$ et tout $f \in H$; si $\lambda_m > 0$ est tel que $\lambda_m y \in V_m$, on aura donc $f_{x_m}(\lambda_m y) \in W$ pour tout $f \in H$, ce qui s'écrit $\lambda_m f_{x_m}(y) \in W$; en prenant pour λ le minimum des nombres λ_m ($m < n_0$) et 1, on a bien $\lambda f_{x_n}(y) \in W$ pour tout n et tout $f \in H$, ce qui prouve notre assertion. Puisque E_2 est tonnelé, l'ensemble des f_{x_n} est donc équicontinu lorsque n parcourt $\mathcal{N}$ et que f parcourt H (§ 4, prop. 8).

Supposons que H ne soit pas équicontinu au point (0,0) ; désignant par (T_n) un système fondamental de voisinages de (0,0) dans $E_1 \times E_2$, il existerait alors un voisinage W de 0 dans F, et pour tout n, une fonction $f_n \in H$ et un point $(x_n, y_n) \in T_n$ tels que $f_n(x_n, y_n) \notin W$. Or, l'ensemble des applications $y \to f_n(x_n, y)$ est équicontinu en vertu de ce qui précède ; il existe donc un voisinage V de 0 dans E_2 tel que $f_n(x_n, y) \in W$ pour tout $y \in V$ et tout indice n ; mais cela est contraire à l'hypothèse, puisque $y_n \in V$ à partir d'un certain rang.

Ici encore, on peut démontrer la conclusion de la prop. 7 en remplaçant l'hypothèse que E_2 est métrisable et tonnelé par l'hypothèse que E_2 est un espace de Baire (exerc. 4).

3. Prolongement d'une application bilinéaire hypocontinue.

PROPOSITION 8.- Soient E_1, E_2, F trois espaces localement convexes séparés, F étant supposé quasi-complet. Soient G_1 (resp. G_2) un sous-espace vectoriel partout dense de E_1 (resp. E_2), $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble saturé de parties bornées de G_1 (resp. G_2) tel que tout point de E_1 (resp. E_2) soit adhérent à un ensemble de $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$). Soit $\overline{\mathfrak{S}}_1$ (resp. $\overline{\mathfrak{S}}_2$) l'ensemble des adhérences dans E_1 (resp. E_2) des ensembles de $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$)

Alors toute application bilinéaire $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue u de $G_1 \times G_2$ dans F se prolonge d'une seule manière en une application bilinéaire $\bar{u}$ séparément continue de $E_1 \times E_2$ dans F, et cette application est $(\bar{\mathfrak{S}}_1, \bar{\mathfrak{S}}_2)$-hypocontinue.

Soient $M_1 \in \mathfrak{S}_1$ et $M_2 \in \mathfrak{S}_2$; comme u est uniformément continue dans $M_1 \times M_2$ (prop.5), elle se prolonge d'une seule manière en une application uniformément continue u_{M_1,M_2} de $\bar{M}_1 \times \bar{M}_2$ dans le complété $\hat{F}$ de F (Top.gén., chap.II, § 3, th.1) ; en outre, comme $u(M_1 \times M_2)$ est un ensemble borné dans F, son adhérence dans F est un sous-espace complet par hypothèse, donc u_{M_1,M_2} prend ses valeurs dans F. Il est clair en outre que si $M_1 \subset N_1$ et $M_2 \subset N_2$, où $N_1 \in \mathfrak{S}_1$ et $N_2 \in \mathfrak{S}_2$, le prolongement u_{M_1,M_2} est la restriction à $\bar{M}_1 \times \bar{M}_2$ du prolongement u_{N_1,N_2}. Comme tout point de $E_1 \times E_2$ est adhérent à un ensemble de la forme $M_1 \times M_2$ ($M_1 \in \mathfrak{S}_1$, $M_2 \in \mathfrak{S}_2$), on définit ainsi une application $\bar{u}$ de $E_1 \times E_2$ dans F ; si $x \in E_1$, $y \in E_2$, $y' \in E_2$, et si $M_1 \in \mathfrak{S}_1$ est un ensemble auquel x est adhérent, $M_2 \in \mathfrak{S}_2$ un ensemble contenant 0 et auquel y, y' sont adhérents, l'ensemble $N_2 = M_2 + M_2$ appartient à $\mathfrak{S}_2$; si s (resp. t, t') tend vers x (resp. y, y') en restant dans M_1 (resp. M_2), $t+t'$ tend vers $y+y'$ en restant dans N_2, d'où, en passant à la limite dans la relation $u(s,t+t') = u(s,t)+u(s,t')$, la relation $\bar{u}(x,y+y') = \bar{u}(x,y)+\bar{u}(x,y')$. On voit ainsi que $\bar{u}$ est une application bilinéaire. Nous allons montrer que $\bar{u}$ est $(\bar{\mathfrak{S}}_1, \bar{\mathfrak{S}}_2)$-hypocontinue, et a fortiori séparément continue ; comme G_1 (resp. G_2) est partout dense dans E_1 (resp. E_2), $\bar{u}$ sera bien la seule application bilinéaire séparément continue prolongeant u.

Soit $M_1 \in \mathfrak{S}_1$; par hypothèse, pour tout voisinage fermé W de 0 dans F, il existe un voisinage V de 0 dans G_2, fermé dans G_2 et tel que,

pour $x \in M_1$ et $y \in V$, on ait $u(x,y) \in W$. L'adhérence $\overline{V}$ de V dans E_2 est un voisinage de 0 dans E_2 ; soit U un voisinage de 0 dans E_2 tel que $U+U \subset \overline{V}$, et soit $a \in \overline{M}_1$, $b \in U$. Par hypothèse, b est adhérent à un ensemble $M_2 \in \mathfrak{S}_2$, donc aussi à $M_2 \cap (b+U)$; mais cet ensemble est contenu dans $\mathfrak{S}_2 \cap (U+U)$, donc dans V ; comme $\overline{u}(a,b)$ est adhérent à l'ensemble des $u(x,y)$, où $x \in M_1$ et $y \in M_2 \cap (b+U)$, on a bien $\overline{u}(a,b) \in W$, ce qui prouve que $\overline{u}$ est $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue ; on montre de même que $\overline{u}$ est $\overline{\mathfrak{S}}_2$-hypocontinue.

4. La $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-topologie.

Soient E_1, E_2, F trois espaces localement convexes, $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble de parties bornées de E_1 (resp. E_2). Nous désignerons par $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}(E_1,E_2;F)$ l'ensemble des applications bilinéaires $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinues de $E_1 \times E_2$ dans F ; il est clair que c'est un espace vectoriel. Nous appellerons $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-topologie sur $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}(E_1,E_2;F)$ la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de la forme $M_1 \times M_2$, où $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, $M_2 \in \mathfrak{S}_2$.

PROPOSITION 9.- La $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-topologie est une topologie localement convexe sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}(E_1,E_2;F)$.

Pour tout couple d'ensembles $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, $M_2 \in \mathfrak{S}_2$ et tout voisinage convexe équilibré de 0 dans F, soit $\mathcal{T}(M_1,M_2;W)$ l'ensemble des applications $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinues u de $E_1 \times E_2$ dans F telles que $u(M_1 \times M_2) \subset W$. Il est clair que les ensembles $\mathcal{T}(M_1,M_2;W)$ sont convexes et équilibrés, et forment un système fondamental de voisinages de 0 pour la $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-topologie. Pour démontrer la proposition, on voit, comme dans la prop.2 du § 4, qu'il suffit de prouver que les ensembles $\mathcal{T}(M_1,M_2;W)$ sont absorbants ; mais cela résulte immédiatement du fait que les ensembles $u(M_1 \times M_2)$ sont bornés dans F (prop.5).

Comme on l'a remarqué plus haut, $u(M_1 \times M_2)$ est borné dès qu'on suppose seulement u $\mathfrak{S}_1$-hypocontinue et M_2 borné dans E_2 ; la $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-topologie est donc compatible avec la structure d'espace vectoriel de l'espace $\mathscr{H}_{\mathfrak{S}_1}(E_1, E_2; F)$ des applications bilinéaires $\mathfrak{S}_1$-hypocontinues, pour tout ensemble $\mathfrak{S}_2$ de parties bornées de E_2

Les espaces E_1, E_2 et F étant supposés séparés, si la réunion A_1 des ensembles de $\mathfrak{S}_1$ est un ensemble total dans E_1, et si E_2 est la réunion des ensembles de $\mathfrak{S}_2$, la $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-topologie est <u>séparée</u>. En effet, si $u_0 \neq 0$ est une application $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue de $E_1 \times E_2$ dans F, il existe $(x_0, y_0) \in E_1 \times E_2$ tel que $u_0(x_0, y_0) \neq 0$; en outre, comme u_{y_0} est continue dans E_1, il existe $x_1 \in A_1$ tel que $u_0(x_1, y_0) \neq 0$; en prenant $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, $M_2 \in \mathfrak{S}_2$ et le voisinage W de 0 dans F tels que $x_1 \in M_1$, $y_0 \in M_2$ et $u_0(x_1, y_0) \notin W$, on a $u_0 \notin T(M_1, M_2; W)$.

Quand nous parlerons dans ce qui suit de l'espace $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}(E_1, E_2; F)$ comme d'un espace vectoriel topologique, il sera sous-entendu qu'il est muni de la $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-topologie.

Désignons de même par $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}_2}(E_2, F)$ l'espace $\mathscr{L}(E_2, F)$ muni de la $\mathfrak{S}_2$-topologie, et par $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}_1}(E_1, \mathscr{L}_{\mathfrak{S}_2}(E_2, F))$ l'espace $\mathscr{L}(E_1, \mathscr{L}_{\mathfrak{S}_2}(E_2, F))$ muni de la $\mathfrak{S}_1$-topologie. Dans ces conditions, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 10.- <u>Pour toute application bilinéaire $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue u de $E_1 \times E_2$ dans F, soit $\tilde{u}$ l'application linéaire continue $x \to u_x$ de E_1 dans $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}_2}(E_2, F)$; l'application $u \to \tilde{u}$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}(E_1, E_2; F)$ sur un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}_1}(E_1, \mathscr{L}_{\mathfrak{S}_2}(E_2, F))$.</u>

Plus généralement, $u \to \tilde{u}$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{H}_{\mathfrak{S}_2}(E_1, E_2; F)$ des applications $\mathfrak{S}_2$-hypocontinues, muni de la

NBR05 55

$(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-topologie, sur $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_1}(E_1, \mathcal{L}_{\mathfrak{S}_2}(E_2,F))$; en effet, si $M_1 \in \mathfrak{S}_1$, $M_2 \in \mathfrak{S}_2$ et si W est un voisinage de 0 dans F ; la relation $u(M_1 \times M_2) \subset W$ équivaut à $u_x(M_2) \subset W$ pour tout $x \in M_1$.

Lorsque E_1, E_2 et F sont des espaces normés, on retrouve ainsi en particulier (compte-tenu du th.1) l'isomorphie des espaces normés $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2,F))$ et $\mathcal{L}(E_1,E_2;F)$ (qui est alors une isométrie ; cf. Top.gén., chap.X, §2, cor.1 de la prop.4).

5. Application : hypocontinuité de l'application $(u,v) \to v \circ u$.

Soient E,F,G trois espaces localement convexes ; il est clair que l'application $(u,v) \to v \circ u$ de $\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est bilinéaire.

PROPOSITION 11.- Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E ; si on munit $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E,G)$ de la $\mathfrak{S}$-topologie, l'ensemble des applications $u \to v \circ u$ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est équicontinu lorsque v parcourt une partie équicontinue H de $\mathcal{L}(F,G)$.

En effet, soit $M \in \mathfrak{S}$ et soit W un voisinage de 0 dans G ; par hypothèse il existe un voisinage V de 0 dans F tel que pour tout $v \in H$, on ait $v(V) \subset W$; si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est tel que $u(M) \subset V$, on aura donc $v(u(M)) \subset W$ pour tout $v \in H$, d'où la proposition.

PROPOSITION 12.- Pour toute application $u_0 \in \mathcal{L}(E,F)$, l'application $v \to v \circ u_0$ de $\mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est continue quand on munit $\mathcal{L}(F,G)$ et $\mathcal{L}(E,G)$ de la topologie de la convergence simple.

En effet, soit A une partie finie de E, et W un voisinage de 0 dans G ; si $B = u_0(A)$, la relation $v(B) \subset W$ équivaut à $v(u_0(A)) \subset W$.

PROPOSITION 13.- Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E , et H une partie de $\mathcal{L}(E,F)$, bornée pour la $\mathfrak{S}$-topologie. Si on munit $\mathcal{L}(F,G)$ de la topologie de la convergence bornée, et $\mathcal{L}(E,G)$ de la $\mathfrak{S}$-topologie, l'ensemble des applications $v \to v \circ u$ de $\mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est équicontinu lorsque u parcourt H .

En effet, soit $M \in \mathfrak{S}$ et soit W un voisinage de 0 dans G ; lorsque u parcourt H , la réunion N des ensembles u(M) est bornée dans F (§ 4, prop.4). La relation $v(N) \subset W$ entraîne alors $v(u(M)) \subset W$ pour tout $u \in H$, d'où la proposition.

Les prop.11, 12 et 13 entraînent en particulier les propositions suivantes :

PROPOSITION 14.- Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E . Les espaces $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E,G)$ étant munis de la $\mathfrak{S}$-topologie, et $\mathcal{L}(F,G)$ de la topologie de la convergence bornée, l'application $(u,v) \to v \circ u$ de $\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-hypocontinue, $\mathfrak{T}_1$ désignant l'ensemble des parties bornées de $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathfrak{T}_2$ l'ensemble des parties équicontinues de $\mathcal{L}(F,G)$.

PROPOSITION 15.- Les espaces $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(F,G)$ et $\mathcal{L}(E,G)$ étant munis de la topologie de la convergence simple, l'application $(u,v) \to v \circ u$ est $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-hypocontinue, $\mathfrak{T}_1$ désignant l'ensemble des parties finies de $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathfrak{T}_2$ l'ensemble des parties équicontinues de $\mathcal{L}(F,G)$.

Exercices.- 1) Soient E_1, E_2, F trois espaces localement convexes, $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble de parties bornées de E_1 (resp. E_2) , $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de l'espace $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}(E_1, E_2; F)$. Montrer que l'application trilinéaire $(x,y,u) \to u(x,y)$ de $E_1 \times E_2 \times \mathcal{L}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}(E_1, E_2; F)$ dans W est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue ; pour qu'elle soit $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1)$-hypocontinue, il faut et il suffit que tout ensemble $H \in \mathfrak{S}$ soit $\mathfrak{S}_1$-équihypocontinu.

2) Soient E et F les deux espaces localement convexes séparés définis dans l'exerc.2 du § 2 , qui sont tonnelés ; montrer que la forme bilinéaire f définie dans cet exercice est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-hypocontinue, $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) désignant l'ensemble des parties bornées de E (resp. F).

3) Soient T un espace topologique métrisable, E un espace localement convexe de Baire, F un espace localement convexe.

Soit f une application de $E \times T$ dans F satisfaisant aux conditions du th.1 ; montrer que f est continue dans $E \times T$ (cf. Top.gén., chap.IX, § 5, exerc.20).

4) Soient E_1, E_2, F trois espaces localement convexes. Si E_1 est métrisable, et E_2 un espace de Baire, tout ensemble séparément équicontinu d'applications bilinéaires de $E_1 \times E_2$ dans F est équicontinu dans $E_1 \times E_2$ (cf. Top.gén., chap.X, § 3, exerc.17).

5) Soient E,F,G trois espaces localement convexes séparés. On suppose les trois espaces $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(F,G)$ et $\mathcal{L}(E,G)$ munis de la topologie de la convergence compacte. Soient $\mathfrak{T}_1$ l'ensemble des parties compactes de $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathfrak{T}_2$ l'ensemble des parties équicontinues de $\mathcal{L}(F,G)$. Montrer que l'application bilinéaire $(u,v) \longrightarrow v \circ u$ de $\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-hypocontinue (appliquer le th. d'Ascoli).