# RÉDACTION N° 155



TITRE : LIVRE V - ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES
CHAPITRE II (ÉTAT 5)
ENSEMBLES CONVEXES ET ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 53

NOMBRE DE FEUILLES : 53

LIVRE V. - ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

CHAPITRE II (Etat 5).

ENSEMBLES CONVEXES et ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

Commentaires.

Les modifications par rapport à l'Etat 4 sont, outre des changements de détail, les suivantes :

A) Modifications conformes aux décisions du Congrès :

1) Les points internes, cônes convexes maximaux, facettes sont vidés. Les espaces tonnelés et bornologiques sont rejetés au Chap.III.

2) Les limites inductives sont outrageusement développées.

3) Echange général des lignes et des colonnes.

B) Modification prouvant le libre arbitre du rédacteur, concernant Krein-Milman. L'état 4 utilisait les facettes et les variétés d'appui. Le congrès vidait les facettes et conservait les variétés d'appui. La démonstration d'Artin n'utilise que les faces (dont j'ignore si elles sont identiques aux facettes de DIEUDONNE). La présente démonstration est à peut près celle d'Artin, mais : 1) on l'abrège quelque peu par usage des hyperplans d'appui, dont il faut parler de toutes façons 2) les faces ici introduites ne sont pas convexes, contrairement à celles d'Artin - ceci afin d'obtenir le renforcement de Krein-Milman désiré par le Congrès. L'état actuel me paraît avoir la briéveté maximum.

Dans tout ce chapitre, Appendice excepté, il ne sera question que d'espaces vectoriels et d'espaces affines sur le corps R des nombres réels. Quand on parlera d'un espace vectoriel (ou d'un espace affine) sans préciser son corps des scalaires, il sera sous-entendu que ce corps est le corps R .

Rappelons (Alg., chap.IX) qu'un espace affine E peut être défini comme espace homogène (Alg.,chap.I, §7,n°6) d'un espace vectoriel T , tel que 0 soit le *seul* opérateur de T laissant invariants tous les points de E . On dit que T est l'*espace des translations* de E ; le transformé d'un point $a \in E$ par une translation $t \in T$ se note $a+t$ , ou $t+a$ ; si a et b sont deux points quelconques de E , il existe une translation et une seule transformant a en b, qu'on note $b-a$ ; on a $a-a=0$ , $a-b=-(b-a)$ . Etant donné un point $a \in E$ , l'application $x \to x-a$ est une application biunivoque de E sur T ; quand on identifie E à T par cette application, on dit qu'on considère E comme espace vectoriel *en prenant une origine* a dans E . Inversement, tout espace vectoriel T peut être identifié à l'espace affine E correspondant au sous-groupe $\{0\}$ de T (Alg., chap. I, § 7, n°6). Lorsqu'on fait une telle identification, les *variétés linéaires affines* non vides de E sont identifiées aux points de T obtenues par translation à partir des sous-espaces vectoriels de T (appelés encore alors variétés linéaires homogènes). Soit T' un autre espace vectoriel, identifié à l'espace affine E' correspondant au sous-groupe $\{0\}$ de T' ; les *applications linéaires affines* de E dans E' sont identifiées aux applications de T dans T' qui sont composées d'une application linéaire de T dans T' et d'une translation dans T' .

Etant donnée une famille $(x_\iota)$ de points de E , et une famille $(\lambda_\iota)$ de scalaires nuls sauf pour un nombre fini d'indices, et tels que $\sum_\iota \lambda_\iota = 1$ on pose $\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota = a + \sum_\iota \lambda_\iota (x_\iota - a)$, point qui ne dépend pas de $a \in E$ ; on dit que ce point est le *barycentre* de la famille $(x_\iota)$ lorsque chaque $x_\iota$ est *affecté de la masse* (positive ou négative) $\lambda_\iota$ . L'ensemble de tous ces barycentres (pour tous les choix possibles des $\lambda_\iota$ tels que $\sum_\iota \lambda_\iota = 1$) est identique à la variété linéaire affine engendrée par les $x_\iota$ .

Rappelons encore que si a est un point de E , t un vecteur $\neq 0$ de T , l'ensemble des points $a+\lambda t$ , où $\lambda \geqslant 0$ (resp. $\lambda > 0$) est appelé *demi-droite fermée* (resp. *demi-droite ouverte*) *d'origine* a et de *vecteur directeur* t . Si x et y sont deux points de E , l'ensemble des points $\lambda x+\mu y$ où $\lambda \geqslant 0$ , $\mu \geqslant 0$ et $\lambda+\mu=1$ (resp. $\lambda>0$, $\mu>0$ et $\lambda+\mu=1$ lorsque $x \neq y$) est appelé *segment fermé* (resp. *segment ouvert*) d'extrémités x et y et noté parfois xy ; il est rédu-it à un point lorsque x=y . ~~Enfin, si x≠x~~ . Enfin, si $x \neq y$ , le *segment ouvert en* x , *fermé en* y est l'ensemble des points $\lambda x+\mu y$ où $\lambda+\mu=1$ , $\lambda \geqslant 0$ , $\mu > 0$ .

## § 1. Ensembles convexes.

1. *Définition d'un ensemble convexe*. *Définition 1*. *Dans un espace affine* E *sur* R , *on dit qu'un ensemble* A *est convexe si, quels que soient les points* x,y *de* A , *le segment fermé d'extrémités* x *et* y *est contenu dans* A .

Comme $(1-\lambda)a+\lambda x = a+\lambda(x-a)$, cette définition équivaut à la suivante : A est convexe si, pour tout point $a \in A$ , A est stable pour les homothéties de centre a et de rapport $\lambda$ tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ .

*Exemples*.- 1. Toute variété linéaire affine de E est convexe.

2. Les seules parties convexes non vides de R sont les *intervalles* (Top.gén.,chap.IV, § 2,prop.1).

3. Soit E un espace vectoriel, et $\|x\|$ une *norme* sur E ; la boule fermée B , formée des points x tels que $\|x\| \leqslant 1$ est convexe, car les relations $\|x\| \leqslant 1$ , $\|y\| \leqslant 1$ entraînent, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ,
$\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\| \leqslant \lambda+(1-\lambda)=1$ .

*Proposition 1*.- *Soit* $(x_i)$ *une famille de points d'un ensemble convexe* A ; *tout barycentre* $\sum_i \lambda_i x_i$ *des* $x_i$ *affectés de masses positives* $\lambda_i$ *(telles que* $\sum_i \lambda_i=1$) *appartient à* A .

On peut évidemment se borner au cas où l'ensemble d'indices est un intervalle fini $[1,p]$ de N , et où $\lambda_i>0$ pour tout indice i ; la proposition est triviale pour p=1 ; démontrons-la par récurrence sur p .

Posons $\mu = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i > 0$ , et $y = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i$ ; l'hypothèse de récurrence entraîne que $y \in A$ . Comme $\lambda_p = 1-\mu$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \mu y + (1-\mu) x_p$ , le point $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ appartient à A d'après la définition 1 .

Proposition 2.- Soient E et F deux espaces affines, f une application linéaire affine de E dans F ; l'image par f de toute partie convexe de E et l'image réciproque par f de toute partie convexe de F sont convexes.

La première partie résulte de ce que l'image par f du segment fermé d'extrémités x,y est le segment fermé d'extrémités f(x), f(y). On déduit de là que l'image réciproque par f d'un segment fermé de F contient le segment fermé ayant pour extrémités deux quelconques de ses points, d'où la seconde partie de la proposition 2.

En particulier, le transformé d'un ensemble convexe par une homothétie ou une translation est convexe.

Soit H un hyperplan de l'espace affine E , $g(x)=0$ une équation de H (g application linéaire affine de E dans R) ; on sait (Alg., chap. IX) que les demi-espaces algèbriquement fermés (resp. ouverts) définis par H sont les parties de E définies par l'une des deux relations $g(x) \geqslant 0$ , $g(x) \leqslant 0$ (resp. $g(x) > 0$ , $g(x) < 0$) . Comme ce sont les images réciproques de demi-droites par une application linéaire affine, on voit que :

Proposition 3.- Les demi-espaces algèbriquement fermés (resp. ouverts) définis par un hyperplan sont des ensembles convexes.

Rappelons qu'une partie d'un espace affine est dite d'un même côté (resp. strictement d'un même côté) d'un hyperplan H si elle est contenue dans un demi-espace algèbriquement fermé (resp. ouvert) défini par H .

Proposition 4.- Soit H un hyperplan dans E . Pour qu'une partie convexe A de E soit strictement d'un même côté de H , il faut et il suffit que A ne rencontre pas H .

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons-la remplie, et soit $g(x)=0$ une équation de $H$ ($g$ application linéaire affine de $E$ dans $R$). L'ensemble $g(A)$ est convexe dans $R$, donc est un intervalle, et $0 \notin g(A)$. Donc $g(x)$ a un signe constant quand $x$ parcourt $A$.

2. <u>Intersections d'ensembles convexes</u>. <u>Produits d'ensembles convexes</u>.

<u>Proposition 5</u>. <u>L'intersection d'une famille d'ensembles convexes de E est convexe</u>.

La proposition est évidente à partir de la définition 1.

<u>Proposition 6</u>.- <u>Soit</u> $(E_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille d'espaces affines, et pour chaque</u> $\iota \in I$, <u>soit</u> $A_\iota$ <u>une partie non vide</u> $E_\iota$. <u>Pour que l'ensemble</u> $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ <u>soit convexe dans</u> $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$, <u>il faut et il suffit que, pour tout</u> $\iota \in I$, $A_\iota$ <u>soit convexe dans</u> $E_\iota$.

En effet, chacune des projections $pr_\iota$ est une application linéaire affine, et on a $A_\iota = pr_\iota A$, et $A = \bigcap_{\iota \in I} \overset{-1}{pr_\iota}(A_\iota)$ ; la prop. résulte donc des prop. 2 et 5.

<u>Corollaire</u>.- <u>Dans l'espace</u> $R^n$, <u>tout parallélotope</u> (<u>Top. gén.</u>, <u>chap.</u> VI, § 1, n°3) <u>est un ensemble convexe</u>.

En effet, c'est l'image d'un pavé par une application linéaire affine, et un pavé de $R^n$ est convexe en vertu de la prop. 6.

<u>Proposition 7</u>.- <u>Soient</u> $E$ <u>un espace vectoriel</u>, $A$ <u>et</u> $B$ <u>deux parties convexes de</u> $E$. <u>Quels que soient les nombres réels</u> $\alpha$ <u>et</u> $\beta$, <u>l'ensemble</u> $\alpha A + \beta B$ (ensemble des $\alpha x + \beta y$, où $x$ parcourt $A$ et $y$ parcourt $B$) <u>est convexe</u>.

En effet, $\alpha A + \beta B$ est l'image de l'ensemble convexe $A \times B$ de $E \times E$ par l'application linéaire $(x,y) \to \alpha x + \beta y$ de $E \times E$ dans $E$.

3. *Enveloppe convexe d'un ensemble*.- *Définition 2*.- *Etant donnée une partie quelconque* A *d'un espace affine* E , *on appelle enveloppe convexe de* A *l'intersection des ensembles convexes contenant* A , *c'est-à-dire* (prop.3) *le plus petit ensemble convexe contenant* A .

*Proposition 8*.- *Soit* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *une famille de parties convexes d'un espace affine* E ; *l'enveloppe convexe de* $\bigcup_{\iota\in I} A_\iota$ *est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires* $\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota x_\iota$ , *où* $x_\iota\in A$ et $\lambda_\iota \geqslant 0$ *pour tout* $\iota\in I$ ($\lambda_\iota=0$ *sauf pour un nombre fini d'indices*) *et* $\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota = 1$ .

En effet, l'ensemble C de ces combinaisons est évidemment contenu dans tout ensemble convexe contenant les $A_\iota$ (prop.1), et d'autre part, on a $A_\iota \subset C$ pour tout $\iota$ ; tout revient à rpouver que C est convexe. Soient $x = \sum_\iota \lambda_\iota x_\iota$, $y = \sum_\iota \mu_\iota y_\iota$ deux points de C , et $\alpha$ un nombre tel que $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ ; posons $\gamma_\iota = \alpha\lambda_\iota + (1-\alpha)\mu_\iota$ pour tout $\iota$ , et soit J la partie (finie) de I formée des indices $\iota$ tels que $\gamma_\iota \neq 0$ ; on peut écrire $\alpha x + (1-\alpha)y = \sum_{\iota\in J}\gamma_\iota z_\iota$ , où $z_\iota = \gamma_\iota^{-1}\left[\alpha\lambda_\iota x_\iota + (1-\alpha)\mu_\iota y_\iota\right]$ appartient à $A_\iota$ pour tout $\iota\in J$ ; comme $\sum_{\iota\in J}\gamma_\iota = \alpha\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota + (1-\alpha)\sum_{\iota\in I}\mu_\iota = 1$, le point $\alpha x + (1-\alpha)y$ appartient à C .

*Corollaire*.- *L'enveloppe convexe d'une partie* A *de* E *est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires* $\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota$ , *où* $(x_\iota)$ *est une famille finie quelconque de points de* A , $\lambda_\iota > 0$ *pour tout* $\iota$ , *et* $\sum_\iota \lambda_\iota = 1$ .

La dimension de la variété linéaire affine engendrée par un ensemble convexe A , lorsqu'elle est finie (autrement dit (Alg.,chap.IX) le *rang affine* de A) est encore appelée la *dimension* de A . Si B est une partie quelconque de E , le rang affine de B (lorsqu'il est défini) est égal à la dimension de l'enveloppe convexe de B .

4. Cônes convexes.- Définition 3.- On dit qu'une partie C d'un espace affine E sur R est un cône de sommet $x_o$ si C est stable par les homothéties de centre $x_o$ et de rapport $>0$ .

Nous supposerons dans ce n° et dans le suivant qu'on a choisi comme origine dans E le sommet du cône que l'on considère ; autrement dit, nous supposerons que E est un espace vectoriel, et quand nous parlerons de cônes, il sera sous-entendu que leur sommet est au point O .

Un cône C de sommet O est dit pointé si $O \in C$ , épointé dans le cas contraire. Un cône pointé est, ou bien réduit au point O, ou bien réunion d'une famille non vide de demi-droites fermées d'origine O. Un cône épointé est réunion d'une famille (éventuellement vide) de demi-droites ouvertes d'origine O. Si C est un cône épointé, $C \cup \{O\}$ est un cône pointé. Si C est un cône pointé, $C \cap \complement\{O\}$ est un cône épointé. Si C est un cône convexe épointé, $C \cup \{O\}$ est un cône convexe pointé. Par contre, si C est un cône convexe pointé, $C \cap \complement\{O\}$ n'est pas nécessairement convexe. Disons qu'un cône convexe pointé est saillant s'il ne contient aucune droite passant par O . Alors :

Proposition 9.- Pour qu'un cône convexe pointé C soit saillant, il faut et il suffit que le cône épointé C' complément de O par rapport à C soit convexe.

Si C contient une droite passant par O, il est évident que C' est non convexe. Supposons maintenant C saillant. Soient x et y deux points de C'. Le segment xy est contenu dans C . Si ce segment contenait O , on aurait $\lambda x + (1-\lambda)y = 0$ pour un $\lambda$ tel que $0 < \lambda < 1$ , donc $x = \mu y$ avec $\mu < 0$ , de sorte que C contiendrait la droite passant par O et x contrairement à l'hypothèse.

<u>Proposition 10.- Pour qu'un ensemble</u> $C \subset E$ <u>soit un cône convexe, il faut et il suffit que l'on ait</u> $C+C \subset C$ et $\lambda C \subset C$ <u>pour tout</u> $\lambda > 0$ .

En effet, la condition $\lambda C \subset C$ pour tout $\lambda > 0$ caractérise les cônes. Si C est convexe, on a $C+C = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} C \subset C$ . Inversement, si le cône C est tel que $C+C \subset C$ , on a, pour $0 < \lambda < 1$ , $\lambda C+(1-\lambda)C = C+C \subset C$ , ce qui prouve que C est convexe.

<u>Corollaire 1.- Si</u> C <u>est un cône convexe non vide, le sous-espace vectoriel engendré par</u> C <u>est l'ensemble</u> $C-C$ (ensemble des $x-y$ , où x et y parcourent C).

En effet, si $V = C-C$ , V est non vide ; on a $\lambda V=V$ pour tout $\lambda \neq 0$ , et $V+V = C+C-(C+C) \subset C-C = V$ , ce qui montre que V est un sous-espace vectoriel. Tout sous-espace vectoriel contenant C contient évidemment V .

<u>Corollaire 2.- Si</u> C <u>est un cône convexe pointé, le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans</u> C <u>est l'ensemble</u> $C \cap (-C)$ .

En effet, si $W = C \cap (-C)$, W est non vide ; on a $\lambda W = W$ pour tout $\lambda \neq 0$, et $W+W \subset (C+C) \cap (-(C+C)) \subset C \cap (-C) = W$ , ce qui montre que W est un sous-espace vectoriel. Tout sous-espace vectoriel contenu dans C est évidemment contenu dans W .

Il est clair que si f est une application linéaire homogène de E dans un espace vectoriel F , l'image f(C) de tout cône convexe C dans E est un cône convexe dans F . Toute intersection de cônes convexes (de sommet 0) est un cône convexe. Pour tout ensemble $A \subset E$ , l'intersection de tous les cônes convexes contenant A (il en existe, ne serait-ce que E lui-même) est donc le plus petit cône convexe contenant A ; on dit que c'est le cône convexe <u>engendré</u> par A .

Proposition 11.- Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de cônes convexes dans $E$ ; le cône convexe engendré par la réunion des $C_i$ est identique à l'ensemble des sommes $\sum_{i\in J} x_i$ , où $J$ est une partie finie non vide quelconque de $I$ , et où $x_i \in C_i$ pour tout $i \in I$ .

En effet, l'ensemble $C$ de ces sommes est évidemment un cône convexe contenant la réunion des $C_i$ et contenu dans tout cône convexe contenant les $C_i$ .

Corollaire.- Soit $A$ une partie de $E$ ; le cône convexe engendré par $A$ est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i\in J} \lambda_i x_i$ , où $(x_i)_{i\in J}$ est une famille finie non vide quelconque de points de $A$ et où $\lambda_i > 0$ pour tout $i$ .

Il suffit de remarquer que si un cône convexe contient un point $x \in A$ , il contient l'ensemble des $\lambda x$ , $\lambda > 0$, ensemble qui est un cône convexe.

Proposition 12.- Soit $A$ une partie convexe de $E$ . Le cône convexe engendré par $A$ est identique à $C = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A$ .

L'ensemble $C$ est évidemment un cône ; montrons que $C$ est convexe. Soient $\lambda x$ et $\mu y$ deux points de $C$ $(\lambda > 0,\ \mu > 0,\ x \in A\ ,\ y \in A)$ . Soient $\lambda' > 0$ ; $\mu' > 0$ tels que $\lambda' + \mu' = 1$ . On a :
$\lambda' \lambda x + \mu' \mu y = (\lambda' \lambda + \mu' \mu) z$ , avec $z \in A$ , et $\lambda' \lambda + \mu' \mu > 0$ .
Donc $\lambda' \lambda x + \mu' \mu y \in C$ .

Remarques.- 1. Si $0 \notin A$ , $C$ est épointé, donc $C \cup \{0\}$ est saillant.

2. Soit $A$ un ensemble convexe quelconque dans $E$ ; considérons, dans l'espace $F = E \times R$ , l'ensemble convexe $A_1 = A \times \{1\}$ et le cône convexe $C$ de sommet $0$ engendré par $A_1$ . La prop.12 prouve que $A_1$ est l'intersection de $C$ et de l'hyperplan $E \times \{1\}$ dans $F$ . Tout ensemble convexe

dans E peut donc être considéré comme la projection sur E de l'intersection d'un cône convexe de sommet O dans F et de l'hyperplan $E \times \{1\}$.

5. <u>Espaces vectoriels ordonnés</u>.- Soit E un espace vectoriel sur R ; on dit qu'une structure d'ordre sur E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E si elle satisfait aux deux axiomes suivants :

($EO_I$) La relation $x \leq y$ entraîne $x+z \leq y+z$ quel que soit $z \in E$.

($EO_{II}$) La relation $x \geq 0$ entraîne $\lambda x \geq 0$ pour tout scalaire $\lambda \geq 0$.

L'ensemble E, muni de ces deux structures, est appelé <u>espace vectoriel ordonné</u>.

On notera que l'axiome ($EO_I$) signifie que la structure d'ordre et la structure de groupe additif de E sont compatibles, autrement dit que E, muni de ces deux structures, est un <u>groupe ordonné</u> (Alg., chap. VI, § 1).

Il résulte en particulier de la théorie des groupes ordonnés que les relations $x \leq y$ et $x+z \leq y+z$ sont équivalentes. De même, on déduit de ($EO_{II}$) que les relations $x \leq y$ et $\lambda x \leq \lambda y$ sont équivalentes pour tout scalaire $\lambda > 0$ : en effet, la relation $\lambda x \leq \lambda y$ est équivalente à $\lambda(y-x) \geq 0$, donc entraîne $\lambda^{-1}\lambda(y-x) \geq 0$ qui est équivalente à $x \leq y$. Si $\lambda < 0$, la relation $x \leq y$ est équivalente à $-\lambda x \leq -\lambda y$, donc à $\lambda y \leq \lambda x$.

<u>Proposition 13</u>.- <u>Si</u> E <u>est un espace vectoriel ordonné, l'ensemble</u> P <u>des éléments</u> $\geq 0$ <u>de</u> E <u>est un cône convexe pointé saillant. Inversement, soit</u> P <u>un cône convexe pointé saillant dans un espace vectoriel</u> E ; <u>il existe alors une relation d'ordre et une seule (la relation</u> $y-x \in P$) <u>compatible avec la structure d'espace vectoriel de</u> E , <u>et pour laquelle l'ensemble des éléments positifs soit identique à</u> P .

Si E est un espace vectoriel ordonné, les axiomes $(EO_I)$ et $(EO_{II})$ entraînent $P+P\subset P$ et $\lambda P\subset P$ pour tout $\lambda \geqslant 0$ ; en outre, si $x\in P$ et $-x\in P$, on a $x\geqslant 0$ et $x\leqslant 0$, donc $x=0$, de sorte que P est un cône convexe pointé saillant. Réciproquement, si P est un cône convexe pointé saillant, les relations $P+P\subset P$ et $P\cap(-P)=\{0\}$ entraînent que la relation $y-x\in P$ dans E est une relation d'ordre compatible avec la structure de groupe additif de E ; et la relation $\lambda P\subset P$ pour $\lambda\geqslant 0$ signifie que l'axiome $(E\,O_{II})$ est vérifié.

Si P est un cône convexe pointé quelconque dans un espace vectoriel E sur R, $P\cap(-P)$ est un sous-espace vectoriel H de E (cor.2 de la prop.10). L'image canonique $P'$ de P dans $E/H$ est un cône convexe, et l'image réciproque de $P'$ dans E est P. Donc on a $P'\cap(-P')=\{0\}$, et $P'$ définit dans $E/H$ une structure d'ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel.

On dit qu'une forme linéaire f sur un espace vectoriel ordonné E est <u>positive</u> si pour tout $x\geqslant 0$ dans E, on a $f(x)\geqslant 0$. Il revient au même de dire que le cône convexe P des éléments $\geqslant 0$ de E est contenu dans l'ensemble des x tels que $f(x)\geqslant 0$. Il est clair que, dans le dual algèbrique $E^*$ de E, les formes linéaires positives forment un cône convexe (cf. chap.III, § ).

6. <u>Ensembles convexes dans les espaces vectoriels topologiques.</u>

<u>Proposition 14.</u>- <u>Dans un espace vectoriel topologique</u> E <u>sur</u> R, <u>l'adhérence d'un ensemble convexe</u> (<u>resp. d'un cône convexe</u>) <u>est un ensemble convexe</u> (<u>resp. un cône convexe de même sommet</u>).

En effet, soit A un ensemble convexe ; pour tout $\lambda$ tel que $0<\lambda<1$, l'application $(x,y)\longrightarrow \lambda x+(1-\lambda)y$ est continue dans $E\times E$ et applique $A\times A$ dans A, donc (Top.gén., chap.I, § 4, prop.1) elle applique $\bar{A} \times \bar{A}$ dans $\bar{A}$ , ce qui démontre que $\bar{A}$ est convexe. On prouve de même que, si C est un cône convexe de sommet O, on a $\bar{C} + \bar{C} \subset \bar{C}$ et $\lambda \bar{C} \subset \bar{C}$ pour tout $\lambda > 0$ .

Définition 4.- *Etant donnée une partie quelconque* A *d'un espace affine* E , *on appelle enveloppe fermée convexe de* A *l'intersection des ensembles fermés convexes contenant* A , *c'est-à-dire le plus petit ensemble fermé convexe contenant* A .

D'après la prop.14, l'enveloppe fermée convexe de A est l'adhérence de l'enveloppe convexe de A .

Proposition 15.- *Dans un espace vectoriel topologique* E , *l'intérieur d'un ensemble convexe* (*resp. d'un cône convexe*) *est un ensemble convexe* (resp. *un cône convexe de même sommet*).

En effet, soient A un ensemble convexe, x et y deux points intérieurs de A . Soient $\lambda$ tel que $0 < \lambda < 1$ , et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ . Soit V un voisinage de O tel que $x+V \subset A$ , $y+V \subset A$ . Si $t \in V$ , on a
$z+t = \lambda(x+t)+(1-\lambda)(y+t) \in \lambda(x+V)+(1-\lambda)(y+V) \subset \lambda A + (1-\lambda)A \subset A$ .
Donc $z+V \subset A$ , ce qui prouve que z est point intérieur de A . Si maintenant C est un cône convexe, l'intérieur de C est convexe d'après ce qui précède, et est évidemment un cône .

Proposition 16.- *Dans un espace vectoriel topologique* E , *soient* A *un ensemble convexe admettant au moins un point intérieur, et situé d'un même côté d'un hyperplan* H . *Alors* H *est fermé, l'intérieur* $\mathring{A}$ *de* A *est situé strictement d'un même côté de* H , *et l'adhérence* $\bar{A}$ *de* A *est situé d'un même côté de* H.

Soit $f(x)=a$ une équation de H (f forme linéaire), et supposons par exemple $f(x) \geq a$ pour $x \in A$ . Soit y un point tel que $f(y) < a$ . S'il existait un point $x \in H \cap \mathring{A}$ , on aurait $f(z) < a$ pour tout point z du segment ouvert xy , donc il existerait des points $z \in \mathring{A}$ tels que

$f(z) < a$ , ce qui est absurde. Donc $\mathring{A}$ ne rencontre pas $H$ . Par suite (chap.I, §2, cor. de la prop.1) $H$ est fermé. Donc $f$ est continue. L'ensemble défini par $f(x) \geq a$ est fermé et contient $A$ , donc contient $\bar{A}$ .

Proposition 17.- Dans un espace vectoriel topologique $E$ , soit $A$ un ensemble convexe ayant au moins un point intérieur $x_0$ . Si $x \in \bar{A}$ , tout point du segment ouvert $x_0 x$ est point intérieur de $A$ .

En effet, soit $y$ point de ce segment, et soit $f$ l'homothétie de centre $y$ et de rapport $\lambda < 0$ qui transforme $x_0$ en $x$ ; si $V$ est un voisinage ouvert de $x_0$ contenu dans $A$ , $f(V)$ est un voisinage de $x$ , donc contient un point $f(z) \in A$ ; on a $f(z)-y = \lambda(z-y) = \lambda(z-f(z)) + \lambda(f(z)-y)$ , donc $y-f(z) = \frac{\lambda}{\lambda-1}(z-f(z))$, de sorte que $y$ est transformé de $z$ par l'homothétie $g$ de centre $f(z)$ et de rapport $\mu = \frac{\lambda}{\lambda-1}$ ; comme $0 < \mu < 1$ ; $g$ transforme $V$ en un voisinage de $y$ contenu dans $A$ , d'où la proposition.

Corollaire.- Si $A$ est un ensemble convexe contenant des points intérieurs, l'intérieur de $A$ est identique à l'intérieur de $\bar{A}$ , l'adhérence de $A$ est identique à l'adhérence de $\mathring{A}$ .

Tout point de $\bar{A}$ est adhérent à $\mathring{A}$ d'après la prop.17. D'autre part, soit $x$ un point intérieur de $\bar{A}$ , et montrons que $x \in \mathring{A}$ . On peut supposer $x=0$. Soit $V$ un voisinage symétrique de $0$ contenu dans $\bar{A}$ , et soit $y \in \mathring{A} \cap V$ . On a $-y \in \bar{A}$ , donc $0 \in \mathring{A}$ d'après la prop. 17 .

Définition 5.- Dans un espace vectoriel topologique sur $R$ , on appelle corps convexe un ensemble convexe fermé ayant au moins un point intérieur.

7. Espaces localement convexes.- Définition 6.- On dit qu'un espace vectoriel topologique $E$ sur le corps $R$ est localement convexe s'il existe un système fondamental de voisinages de $0$ dans $E$ formé d'ensembles convexes. La topologie d'un tel espace est dite localement convexe.

Etant donné un ensemble $A$ dans un espace vectoriel $E$ sur $R$, on dit qu'un point $x_0 \in A$ est point <u>interne</u> de $A$ si pour tout $x \in E$ distinct de $x_0$, l'intersection de $A$ et de la droite passant par $x_0$ et $x$ contient un segment ouvert auquel appartient $x_0$. Ceci posé, soit $E$ un espace vectoriel topologique localement convexe. Les ensembles de la forme $V \cap (-V)$, où $V$ est un voisinage convexe quelconque de $0$, forment un système fondamental invariant par homothétie de voisinages de $0$ convexes et symétriques (?), admettant $0$ pour point interne. (Un ensemble $A$ convexe et symétrique est d'ailleurs équilibré ; car, si $x \in A$ et $|\lambda| \leqslant 1$, on a $\lambda x = \frac{1+\lambda}{2}x + \frac{1-\lambda}{2}(-x) \in A$). Réciproquement :

<u>Proposition 18</u>.- <u>Soit</u> $E$ <u>un espace vectoriel sur</u> $R$. <u>Soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>une base de filtre sur</u> $E$, <u>invariante par homothétie</u>, <u>formée d'ensembles convexes</u>, <u>symétriques</u>, (<u>donc équilibrés</u>) <u>admettant</u> $0$ <u>pour point interne</u>. <u>Il existe alors une topologie</u> (<u>et une seule</u>) <u>sur</u> $E$, <u>compatible avec la structure d'espace vectoriel de</u> $E$ ; <u>pour laquelle</u> $\mathfrak{S}$ <u>est un système fondamental de voisinages de</u> $0$ ; <u>cette topologie est localement convexe</u>.

Les conditions $(EV_I)$, $(EV_{II})$ et $(EV_{III})$ de la prop.3 du chap.I, § 1, sont satisfaites par hypothèse. D'autre part, $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subset V$ parce que $V$ est convexe, ce qui, compte-tenu de $(EV_{III})$, prouve que la condition $(EV_{IV})$ est satisfaite.

<u>Exemples</u>.- 1. Un espace normé sur $R$ est localement convexe. En effet, les boules de centre $0$ forment un système fondamental de voisinages convexes de $0$. En particulier, comme la topologie de $R^n$ peut être définie par une norme, $R^n$ est un espace localement convexe.

2. Soit $E$ un espace vectoriel sur $R$, et soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble de tous les ensembles convexes symétriques admettant $0$ pour point interne.

Il est immédiat que $\mathfrak{S}$ est une base de filtre vérifiant les conditions de la prop.18 . Donc, $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie localement convexe, qui est évidemment la plus fine de toutes les topologies localement convexes sur E (cf. chap.I, §1, exerc.4) Cette topologie est séparée ; en effet, soit $x \neq 0$ un élément de E ; soit $(e_\iota)$ une base de E à laquelle x appartient ; l'ensemble des $y = \sum_\iota y_\iota e_\iota$ tels que $\sum_\iota |y_\iota| < 1$ est un ensemble de $\mathfrak{S}$ auquel x n'appartient pas .

3. Soit G un espace topologique séparé, $\mathscr{C}(G,R) = E$ l'espace des fonctions numériques continues dans G , muni de la topologie de la convergence compacte (chap.I, § 1, n°1, exemple 4). L'espace E est localement convexe. En effet, soient $A \subset G$ un ensemble compact, $\varepsilon$ un nombre $> 0$ . L'ensemble C des fonctions $u \in E$ telles que $|u(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \in A$ est évidemment convexe.

Il est clair que tout sous-espace vectoriel V d'un espace localement convexe E sur R est un espace localement convexe. D'autre part, soit $\varphi$ l'application canonique de E sur $E/V$ ; pour tout voisinage convexe U de 0 dans E , $\varphi(U)$ est un ensemble convexe dans $E/V$ (prop.2) ; comme les ensembles $\varphi(U)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $E/V$ , $E/V$ est localement convexe. En particulier, si N est l'adhérence de 0 dans E , l'espace séparé $E/N$ associé à E est localement convexe.

Si $(E_\iota)$ est une famille d'espaces localement convexes, la prop.6 entraîne aussitôt que $\prod_\iota E_\iota$ est localement convexe.

La borne supérieure d'une famille de topologie localement convexes sur un espace vectoriel est une topologie localement convexe.

Le complété $\hat{E}$ de l'espace localement convexe E est localement convexe. En effet, on obtient un système fondamental de voisinages de 0 dans $\hat{E}$ en prenant les adhérences dans $\hat{E}$ d'un système fondamental de voisinages de 0 dans E .

8. <u>Limites inductives d'espaces localement convexes</u>.- Soit E un espace vectoriel sur R , et soit $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille filtrante croissante de sous-espaces vectoriels de E , telle que E soit réunion des $E_\alpha$ . Soit $\mathcal{T}_\alpha$ une topologie localement convexe sur $E_\alpha$ ; on suppose que, si $E_\alpha \subset E_\beta$ , la topologie induite sur $E_\alpha$ par $\mathcal{T}_\beta$ est <u>moins fine</u> que $\mathcal{T}_\alpha$ . Considérons les topologies localement convexes sur E qui, sur chaque $E_\alpha$ , induisent une topologie moins fine que $\mathcal{T}_\alpha$ (il en existe, par exemple la topologie la moins fine sur E) . Leur borne supérieure $\mathcal{T}$ possède la même propriété et est donc la plus fine des topologies localement convexes qui, sur chaque $E_\alpha$ , induisent une topologie moins fine que $\mathcal{T}_\alpha$ . On dit que E , muni de la topologie $\mathcal{T}$ , est la limite inductive des $E_\alpha$ , et que $\mathcal{T}$ est la limite inductive des $\mathcal{T}_\alpha$ .

Considérons dans E les ensembles V convexes symétriques tels que, pour tout $\alpha$ , $V \cap E_\alpha$ soit un voisinage de O pour $\mathcal{T}_\alpha$ . Il est clair que ces ensembles constituent une base de filtre invariante par homothétie, et admettent O pour point interne. Ils forment donc (prop.18) un système fondamental de voisinages pour une topologie localement convexe $\mathcal{T}$ sur E . Tout voisinage convexe symétrique de O pour $\mathcal{T}$ est évidemment un ensemble V , donc $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$ . D'autre part, $\mathcal{T}'$ induit sur chaque $E_\alpha$ une topologie moins fine que $\mathcal{T}_\alpha$ . Donc $\mathcal{T}'$ est identique à $\mathcal{T}$ . Il en résulte que les voisinages convexes de O pour $\mathcal{T}$ ne sont autres que les ensembles convexes W dans E tels que, pour tout $\alpha$ , $W \cap E_\alpha$ soit un voisinage de O pour $\mathcal{T}_\alpha$ .

<u>Exemples</u>.- 1. Soit E un espace vectoriel sur R , $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille filtrante croissante des sous-espaces de dimension finie de E , $\mathcal{T}_\alpha$ l'unique topologie séparée (localement convexe) compatible avec la structure d'espace vectoriel de $E_\alpha$ . Si $E_\alpha \subset E_\beta$ , la topologie induite par $\mathcal{T}_\beta$ sur $E_\alpha$ est $\mathcal{T}_\alpha$ . Soit $\mathcal{T}$ la limite inductive des $\mathcal{T}_\alpha$ . Les voisinages

convexes symétriques de 0 dans $\mathcal{T}$ sont les ensembles convexes symétriques C tels que, pour tout $\alpha \in A$, $C \cap E_\alpha$ soit un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_\alpha$ ; ce sont donc les ensembles convexes symétriques C qui admettent 0 pour point interne. Autrement dit, $\mathcal{T}$ est la topologie localement convexe la plus fine sur E .

2. Soit $(F_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque d'espaces vectoriels localement convexes, E l'espace vectoriel somme directe des $F_\iota$ . Soit $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille filtrante croissante des sommes d'un nombre fini d'espaces $F_\iota$ , et soit $\mathcal{T}_\alpha$ la topologie sur $E_\alpha$ somme directe des topologies des $F_\iota$ correspondants. Soit $\mathcal{T}$ la limite inductive des $\mathcal{T}_\alpha$ . Il est évident que la topologie $\mathcal{T}'$ somme directe des topologies $\mathcal{T}_\alpha$ est moins fine que $\mathcal{T}$ . En outre, si I est dénombrable, on va montrer que $\mathcal{T}$ est identique à $\mathcal{T}'$ . On peut évidemment se borner au cas où il s'agit d'une suite $F_1, F_2, \ldots$ d'espaces localement convexes. Soit V un voisinage convexe de 0 pour $\mathcal{T}$ . Pour tout entier $i > 0$ , l'ensemble $V \cap F_i = V_i$ est un voisinage de 0 dans $F_i$ . Soit $W_i = 2^{-i} V_i$ , et soit W l'ensemble des éléments $x=(x_1,x_2,\ldots)$ de E (où $x_i=0$ sauf pour un nombre fini d'indices i) tels que $x_i \in W_i$ pour tout i . On va montrer que $W \subset V$ , ce qui achèvera la démonstration. Supposons $x_i=0$ pour $i > n$ . On a $x_i = 2^{-i} y_i$ , avec $y_i \in V_i \subset V$ pour $i \leq n$ . Donc
$x = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} y_i = (\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}) y$ avec $y \in V$ , donc $x \in V$ .

3. Soit S un espace localement compact, E l'espace vectoriel des fonctions continues sur S à support compact. Pour tout ensemble compact $K \subset S$ , soit $E_K \subset E$ l'espace des fonctions numériques continues sur S à support contenu dans K . La famille $(E_K)$ est filtrante croissante et a pour réunion E . Soit $\mathcal{T}_K$ la topologie de la convergence uniforme sur $E_K$ . Si $K \subset K'$, la topologie induite par $\mathcal{T}_{K'}$ dans $E_K$ est

est identique à $\mathcal{C}_K$ . Soit $\mathcal{C}$ la limite inductive des $\mathcal{C}_K$ . Soit d'autre part $\mathcal{C}'$ la topologie localement convexe sur E pour laquelle un système fondamental de voisinages convexes V de 0 s'obtient comme suit : on prend une fonction numérique continue f sur S telle que $f(x) > 0$ pour tout x ; l'ensemble $V = V_f$ est alors l'ensemble des fonctions $g \in E$ telles que $|g(x)| \leqslant f(x)$ pour tout x . Il est immédiat que $V_f$ est un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}$ , donc que $\mathcal{C}'$ est moins fine que $\mathcal{C}$ . En outre, si S est dénombrable à l'infini, on va montrer que $\mathcal{C}'$ est identique à $\mathcal{C}$ . Soit $K_1, K_2, \ldots$ une suite d'ensembles compacts de réunion S tels que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ . Soit W un voisinage convexe symétrique de 0 pour $\mathcal{C}$ ; il faut montrer que W contient un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}'$ . Or, $W \cap E_{K_n}$ est un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}_{K_n}$ ; autrement dit, pour tout entier $n > 0$, il existe un $\varepsilon_n > 0$ tel que toutes les fonctions continues nulles hors de $K_n$ et majorées en valeur absolue par $\varepsilon_n$ sur $K_n$ soient dans V . Soit f une fonction continue $> 0$ sur S telle que $f(x) \leqslant 2^{-n}\varepsilon_{n+1}$ pour $x \in K_n \cap \complement K_{n-1}$ (on pose $K_0 = \emptyset$) . On va montrer que $V_f \subset W$ . Soit donc $g \in V_f$ . Il existe une suite $h_1, h_2, \ldots$ de fonctions $\geqslant 0$ telles que : 1. le support de $h_n$ est contenu dans $\mathring{K}_{n+1} \cap \complement K_{n-1}$ ; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} h_n = 1$ . Posons $k_n = 2^n g h_n$ . Les fonctions $k_n$ sont identiquement nulles dès que n est supérieur à un certain entier N . Le support de $k_n$ est contenu dans $\mathring{K}_{n+1} \cap \complement K_{n-1}$ , et $|k_n(x)| \leqslant 2^n f(x)$ pour tout x , donc $|k_n(x)| \leqslant \varepsilon_{n+1}$ pour tout x . D'où $k_n \in W$ . Or, $g = \sum_1^N 2^{-n} k_n$ , d'où $g \in W$ parce que $\sum_1^N 2^{-n} < 1$ et parce que W est convexe symétrique.

*Proposition 19.* - *Soit* E *un espace vectoriel sur* R , *et soit* $(E_n)$ *une suite croissante de sous-espaces de* E , *telle que* E *soit réunion des* $E_n$ . *Soit* $\mathcal{C}_n$ *une topologie localement convexe séparée sur* $E_n$, *telle que* $\mathcal{C}_n$ *soit identique à la topologie induite sur* $E_n$ *par* $\mathcal{C}_{n+1}$ . *Soit* $\mathcal{C}$ *la limite*

 20



<u>inductive des $\mathcal{C}_n$. La topologie induite par $\mathcal{C}$ sur $E_n$ est identique à $\mathcal{C}_n$. En outre, si chaque $E_n$ est complet pour $\mathcal{C}_n$, $E$ est complet pour $\mathcal{C}$.</u>

Soit $\mathcal{C}'_n$ la topologie induite par $\mathcal{C}$ sur $E_n$. Par définition de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'_n$ est moins fine que $\mathcal{C}_n$. Montrons que $\mathcal{C}'_n$ est plus fine que $\mathcal{C}_n$. Pour cela, soit $V_n$ un voisinage convexe de 0 dans $E_n$ pour $\mathcal{C}_n$ ; nous allons construire une suite d'ensembles convexes croissants $V_{n+p}$ tels que $V_{n+p}$ soit un voisinage de 0 dans $E_{n+p}$ pour $\mathcal{C}_{n+p}$, et tels que $V_{n+p} \cap E_n = V_n$. Alors, $V = \bigcup_{p \geq 0} V_{n+p}$ sera un ensemble convexe qui coupe chaque $E_i$ suivant un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}_i$, donc un voisinage de 0 dans E pour $\mathcal{C}$, et on aura $V \cap E_n = V_n$, de sorte que $\mathcal{C}'_n$ sera bien plus fine que $\mathcal{C}_n$.

Procédant par récurrence sur p, supposons $V_{n+p}$ construit, et construisons $V_{n+p+1}$. Soit U un voisinage convexe de 0 dans $E_{n+p+1}$ tel que $U \cap E_{n+p} \subset V_{n+p}$. Soit $V_{n+p+1}$ l'enveloppe convexe de U et de $V_{n+p}$. On a $V_{n+p} \subset V_{n+p+1}$, et $V_{n+p+1}$ est un voisinage de 0 dans $E_{n+p+1}$ pour $\mathcal{C}_{n+p+1}$. D'autre part, un élément z de $V_{n+p+1}$ est de la forme $\lambda x + (1-\lambda) y$ avec $x \in V_{n+p}$, $y \in U$, $0 \leq \lambda \leq 1$ (prop.8) ; si de plus $z \in E_{n+p}$, on a nécessairement $y \in E_{n+p}$ si $\lambda \neq 1$, donc $y \in V_{n+p}$, donc $z \in V_{n+p}$ ; la conclusion subsiste si $\lambda = 1$ ; donc $V_{n+p+1} \cap E_{n+p} = V_{n+p}$, et, d'après l'hypothèse de récurrence, ceci entraîne $V_{n+p+1} \cap E_n = V_n$.

Supposons maintenant que chaque $E_n$ est complet pour $\mathcal{C}_n$ et montrons que E est complet pour $\mathcal{C}$. Le rédacteur, qui pense que çà sera vidé, n'a pas le courage d'écrire la démonstration qui prend une page.

21



## § 2. Séparation des ensembles convexes.

1. Le théorème de Minkowski (?).- Théorème 1 (Minkowski).- Soient $E$ un espace vectoriel topologique sur $R$, $A$ un ensemble ouvert convexe non vide dans $E$, $V$ une variété linéaire ne rencontrant pas $A$. Il existe un hyperplan fermé $H$ contenant $V$ et ne rencontrant pas $A$.

On peut se borner au cas où $V$ contient l'origine. Comme l'adhérence $\overline{V}$ de $V$ ne rencontre pas $A$, on peut également supposer que $V$ est fermée. Si $\varphi$ est l'application canonique de $E$ sur $E/V$, $\varphi(A)$ est non vide ouvert convexe dans $E/V$, et ne contient pas $0$ ; si $H'$ est un hyperplan fermé dans $E/V$ passant par $0$ et ne rencontrant pas $\varphi(A)$, $H = \overset{-1}{\varphi}(H')$ répondra à la question. On peut donc se ramener au cas où $V$ est réduite à $0$, et fermée, de sorte que $E$ est séparé.

Commençons par le cas où $E$ est de dimension 2, donc isomorphe à $R^2$. Soit $C = \bigcup_{\lambda>0} \lambda A$ le cône convexe de sommet $0$ engendré par $A$ (§ 1, prop.10) ; $C$ est épointé, et ouvert dans $E$. Il suffit de prouver qu'il existe $x \neq 0$ dans $E$ tel que la droite passant par $0$ et $x$ ne rencontre pas $C$ ; pour cela, il suffit que l'on ait $x \notin C$ et $-x \notin C$. Or, le complémentaire $G$ de $0$ par rapport à $E$ est connexe (Top.gén., chap.VI, § 2, prop.5) ; comme $C$ est non vide, et non identique à $G$ (car $C = G$ entraînerait $0 \in C$), il existe un point frontière $x$ de $C$ par rapport à $G$ tel que $x \notin C$. On a $x \neq 0$ puisque $x \in G$. Si on avait $-x \in C$, on aurait $0 \in C$ d'après la prop.15 du § 1. Donc $-x \notin C$, et le théorème est démontré dans ce cas.

Passons au cas général où $E$ est quelconque. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels ne rencontrant pas $A$ ; il est clair que $\mathfrak{M}$ est inductif ; soit $H$ un élément maximal de $\mathfrak{M}$ ; $H$ est évidemment fermé. Montrons que $H$ est un hyperplan.

Supposons le contraire, et soit a un point de A, et V le sous-espace vectoriel engendré par a et H ; dans cet espace, H admet pour supplémentaire la droite D passant par O et a . Comme par hypothèse $V \neq E$ , il existe une droite D' passant par O et non contenu dans V ; soit F le sous-espace vectoriel $V+D'$ . Dans F , H est fermé, a pour supplémentaire le plan $P = D+D'$ , et $A'=A\cap F$ est un ensemble ouvert convexe non vide ne rencontrant pas H . L'espace quotient $F/H$ est séparé et de dimension 2 ; si $\varphi$ est l'application canonique de F sur $F/H$ , $\varphi(A')$ est un ensemble convexe ouvert non vide dans $F/H$ , qui ne contient pas l'origine. Il existe donc dans $E/H$ une droite $\Delta$ passant par O et ne rencontrant pas $\varphi(A')$. Dans F , $H_1=H+\overset{-1}{\varphi}(\Delta)$ est donc un sous-espace vectoriel distinct de H , contenant H , et ne rencontrant pas A', donc ne rencontrant pas A . Ainsi, $H_1$ appartient à $\mathfrak{M}$ , ce qui est absurde. Le théorème est donc démontré.

Rappelons (Alg.,chap.IX) que deux parties non vides A, B d'un espace vectoriel réel E sont dites <u>séparées</u> (resp. <u>strictement séparées</u>) par un hyperplan H , si A est contenu dans l'un des demi-espaces algèbriquement fermés (resp. ouverts) définis par H , et B dans l'autre.

<u>Proposition 1</u>.- <u>Dans un espace vectoriel topologique</u> E <u>sur</u> R , <u>soient</u> A <u>un ensemble ouvert convexe non vide</u>, <u>et</u> B <u>un ensemble convexe non vide ne rencontrant pas</u> A ; <u>il existe alors un hyperplan fermé</u> H <u>séparant</u> A <u>et</u> B .

En effet, l'ensemble convexe $C = A-B$ est ouvert, et $0 \notin C$ ; il existe par suite (th.1, et prop.4 du § 1) un hyperplan fermé H' passant par O et tel que C soit tout entier d'un même côté de H'. Soit $f(x)=0$ une équation de H' (f forme linéaire continue $\neq 0$) et supposons par exemple que $f(x) \geqslant 0$ dans C . Alors, pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$ , on a $f(x) \geqslant f(y)$ . Posons $\alpha = \inf_{x\in A} f(x)$ ; $\alpha$ est fini, et on a $f(x) \geqslant \alpha$ pour tout $x \in A$ ,

 



$f(y) \leq \alpha$ pour tout $y \in B$ ; l'hyperplan fermé $H$ d'équation $f(x) = \alpha$ sépare par suite $A$ et $B$.

Remarque.- Même si les adhérences $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont point commun, il n'existe pas toujours d'hyperplan fermé qui sépare strictement $A$ et $B$ (exerc.4).

Définition 1.- Dans un espace vectoriel $E$ sur $R$, on appelle hyperplan d'appui d'une partie non vide $A$ de $E$ un hyperplan $H$ contenant au moins un point de $A$ et tel que $A$ soit tout entier d'un même côté de $H$.

Proposition 2.- Soit $A$ un corps convexe (§ 1,n°6,déf.5) dans un espace vectoriel topologique $E$ sur $R$. Tout hyperplan d'appui de $A$ est fermé et tout point frontière de $A$ appartient à un hyperplan d'appui au moins.

Tout hyperplan d'appui de $A$ est fermé en vertu de la prop.16 du § 1. Soit d'autre part $x$ un point frontière de $A$. D'après le th.1, il existe un hyperplan $H$ passant par $x$ et ne rencontrant pas $\mathring{A}$. Comme $A$ est l'adhérence de $\mathring{A}$ (§ 1,cor. de la prop.17), $H$ est un hyperplan d'appui de $A$ d'après la prop.16 du § 1.

2. Cas des espaces localement convexes.- Proposition 3.- Soient $E$ un espace localement convexe, $A$ un ensemble convexe fermé dans $E$, $x_0$ un point de $E$ n'appartenant pas à $A$. Il existe alors un hyperplan fermé $H$ séparant strictement $x_0$ et $A$.

En effet, il existe un voisinage ouvert convexe $B$ de $x_0$ ne rencontrant pas $A$ ; la prop.1 montre qu'il existe un hyperplan fermé $H'$ séparant $A$ et $B$ ; si $f(x)=a$ est une équation de $H'$ ($f$ forme linéaire continue $\neq 0$), on a par exemple $a = \inf_{x \in A} f(x) \geqslant \sup_{x \in B} f(x) > f(x_0) = b$ : alors l'hyperplan $H$ d'équation $f(x) = \frac{1}{2}(a+b)$ sépare strictement $x_0$ et $A$.

Remarque.- Si $A$ et $B$ sont deux ensembles convexes fermés sans point commun dans un espace localement convexe $E$, il n'existe pas toujours d'hyperplan fermé séparant $A$ et $B$ (chap.III, § 2, exerc. 2).

24



Corollaire 1.- Dans un espace localement convexe, tout ensemble convexe ~~kum~~ fermé A est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

En effet, pour tout $x_0 \notin A$, il existe un demi-espace fermé contenant A et ne contenant pas $x_0$.

Corollaire 2.- Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies localement convexes sur un même espace vectoriel E. Pour que les ensembles convexes fermés soient les mêmes relativement à $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, il faut et il suffit que les formes linéaires continues pour $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ soient identiques.

Cela résulte aussitôt du cor.1, et du th.1 du chap.I, § 2.

Corollaire 3.- Dans un espace localement convexe, toute variété linéaire fermée M est l'intersection des hyperplans fermés qui la contiennent.

En effet, pour tout $x_0 \notin M$, soit H' un hyperplan fermé séparant strictement $x_0$ et M : M est donc parallèle à H' ; l'hyperplan fermé H contenant M et parallèle à H' ne contient pasc $x_0$, d'où le corollaire.

Corollaire 4.- Soient E un espace localement convexe séparé, M un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Il existe un sous-espace fermé N supplémentaire topologique de M.

Il suffit de prouver qu'il existe un sous-espace fermé supplémentaire de M (chap.I, § 2,prop.3). Le corollaire résulte du cor.3 si M est de dimension 1. Si M est de dimension n, raisonnons par récurrence sur n. Soit $a \neq 0$ un point de M, H un hyperplan fermé supplémentaire de la droite passant par 0 et a ; $H \cap M$ est de dimension n-1, donc, dans l'espace localement convexe séparé H, il existe un supplémentaire fermé N de $H \cap M$ : il est clair que N est fermé dans E et supplémentaire de M dans E

2 Un sous-espace fermé M de dimension *infinie* d'un espace localement convexe séparé n'admet pas nécessairement de supplémentaire topologique (chap.I, exerc.?, et chap.III, exerc. ?).

Corollaire 5.- Soient E un espace localement convexe, A un ensemble convexe fermé dans E , $x_0$ un point de E n'appartenant pas à A . Il existe un hyperplan fermé passant par $x_0$ et ne rencontrant pas A .

Si H est un hyperplan fermé séparant strictement $x_0$ et A , l'hyperplan fermé passant par $x_0$ et parallèle à H répond à la question.

Corollaire 6.- Soient E un espace localement convexe, M un sous-espace de E , f une forme linéaire continue définie dans M ; il existe une forme linéaire continue $\bar{f}$ définie dans E et prolongeant f .

Si $f=0$, on peut prendre $\bar{f}=0$ . Si $f\neq 0$ , soit V la variété linéaire des $x \in M$ tels que $f(x)=1$ . L'adhérence $\overline{V}$ de V dans E ne contient pas O puisque f est continue. Soit H un hyperplan fermé de E contenant $\overline{V}$ et ne contenant pas O , et $\bar{f}(x)=1$ une équation de H ($\bar{f}$, forme linéaire continue). Si $x \in M$ , les équations $f(x)=1$ et $\bar{f}(x)=1$ sont équivalentes, donc $\bar{f}$ prolonge f .

3. Formes linéaires positives dans un espace vectoriel ordonné.-

Proposition 4.- Soient E un espace localement convexe réel séparé, P un cône convexe pointé saillant dans E , ayant au moins un point intérieur. Alors toute forme linéaire $f\neq 0$ sur E , positive pour la structure d'ordre déterminée par P (§ 1, n°5) est continue. En outre, on a $f(x)>0$ lorsque x appartient à l'intérieur de P , et $f(x)\geqslant 0$ quand x appartient à l'adhérence de P .

Ceci résulte aussitôt de la prop.16 du §1, appliquée à l'ensemble convexe P et à l'hyperplan d'équation $f(x)=0$ .

Proposition 5.- Soient E un espace localement convexe séparé, P un cône convexe pointé saillant dans E , ayant au moins un point intérieur. Soit M un sous-espace vectoriel de E contenant un point intérieur $x_0$ de P .

Alors, pour toute forme linéaire $f$ positive dans $M$ (pour la structure d'ordre définie par $P \cap M$) il existe une forme linéaire $\bar{f}$ positive dans $E$ (pour la structure d'ordre définie par $P$) et prolongeant $f$ .

On peut supposer $f \neq 0$ . Soit $N$ l'hyperplan fermé dans $M$ d'équation $f(x)=0$ ; il ne contient aucun point intérieur à $P \cap M$ (prop.4) donc a fortiori aucun point intérieur à $P$ dans $E$ . Le th.1 prouve qu'il existe un hyperplan fermé $H$ contenant $N$ et ne rencontrant pas l'intérieur $\mathring{P}$ de $P$ ; comme $x_0 \in M$ , on ne peut avoir $M \subset H$ , donc on a $M \cap H = N$ . Si $\bar{f}(x)=0$ est une équation de $H$ , et si $f_1$ est la restriction de $\bar{f}$ à $M$ , $f_1(x)=0$ est une équation de $N$ dans $M$ , et par suite il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ tel que $\alpha f = f_1$ ; en multipliant $\bar{f}$ par $1/\alpha$ , on peut donc supposer que $f$ est la restriction de $\bar{f}$ à $M$ . Cela étant, on a $f(x_0) > 0$, donc $\bar{f}(x_0) > 0$, donc $\bar{f}(x) > 0$ lorsque $x \in \mathring{P}$ , donc $\bar{f}(x) \geqslant 0$ lorsque $x \in P$ : ceci montre que $\bar{f}$ est une forme linéaire positive.

Remarque.- Si on ne suppose pas que $M$ contient un point intérieur de $P$ , la prop. tombe en défaut, même si $E$ est de dimension finie et si $P \cap M$ contient des points intérieurs par rapport à $M$ (exerc. 12) .

4. Application : dérivées des fonctions à valeurs dans un espace localement convexe (en petits caractères).-

Au Livre IV, chap.I, §2, nous avons démontré le théorème des accroissements finis pour des fonctions définies dans un intervalle de $R$ et prenant leurs valeurs dans un espace normé sur $R$ ; le théorème s'étend comme suit aux fonctions prenant leurs valeurs dans un espace localement convexe séparé quelconque :

Proposition 6.- Soit $f$ une fonction définie et continue dans un intervalle $I$ de $R$, prenant ses valeurs dans un espace localement convexe séparé $E$. On suppose que $f$ admet une dérivée en tous les points du complémentaire par rapport à $I$ d'une partie dénombrable $A$ de cet intervalle, et qu'en chacun de ces points $f'(x)$ appartient à un ensemble fermé convexe $D \subset E$. Dans ces conditions, pour tout couple de points distincts $a,b$ de $I$, $\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))$ appartient à $D$.

En effet, soit $u$ une forme linéaire continue quelconque dans $E$, telle que $D$ soit contenu dans le demi-espace fermé $S$ défini par la relation $u(x) \geqslant \alpha$. La fonction numérique continue $u(f(x)) = g(x)$ est dérivable en tous les points de $I$ n'appartenant pas à $A$, et en chacun de ces points, on a $g'(x)= u(f'(x))$ (Fonct.var. réelle, chap.I, §1,n° ), donc $g'(x) \geqslant \alpha$ par hypothèse ; en vertu du th. des accroissements finis pour les fonctions numériques, on a donc $\frac{1}{b-a}(g(b)-g(a)) \geqslant \alpha$ ; en d'autres termes, le point $\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))$ est dans $S$. Comme $D$ est intersection des demi-espaces tels que $S$ (cor. 1 de la prop.3), la proposition est démontrée.

Corollaire.- Si $D$ est un corps convexe et si $\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))=c$ est un point frontière de $D$, pour tout hyperplan d'appui $H$ de $D$ au point $c$, $f'(x)$ appartient à $H \cap D$ en tout point $x$ de $[a,b]$ où cette dérivée est définie.

En effet, si $u(z)=\alpha$ est une équation de $H$, et si $u(z) \geqslant \alpha$ dans $D$, il résulte de la démonstration de la prop.6 (en posant $g = u \circ f$) qu'on ne peut avoir $g(b)-g(a) = \alpha(b-a)$ que si $g'(x)=\alpha$ en tout point de $[a,b]$ n'appartenant pas à $A$ ; ce qui signifie que $f'(x)$ appartient à $H$ en ces points.

## § 3. Ensembles compacts dans les espaces vectoriels topologiques

### 1. Enveloppes convexes des ensembles compacts.-

Proposition 1.- Soient $A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ un nombre fini d'ensembles convexes compacts dans un espace vectoriel topologique séparé $E$ . Alors, l'enveloppe convexe de la réunion des $A_i$ est compacte .

En effet, c'est l'image, par l'application continue

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

de l'ensemble $B \times \prod_{i=1}^{n} A_i$ dans $R^n \times E^n$ , $B$ désignant la partie de $R^n$ définie par $\lambda_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ; la proposition résulte de ce que $B$ et les $A_i$ sont compacts.

Proposition 2.- Dans un espace localement convexe séparé, l'enveloppe convexe d'un ensemble précompact est un ensemble précompact.

En effet, soit $A$ un ensemble précompact ; pour tout voisinage convexe $V$ de $0$ dans $E$ , il existe un nombre fini de points $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que $A$ soit contenu dans la réunion $S$ des voisinages $a_i + V$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. L'enveloppe convexe $B$ de $A$ est donc contenue dans l'enveloppe convexe de $S$ ; mais cette dernière n'est autre que $C+V$ , où $C$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble fini formé des $n$ points $a_i$ (§ 1, prop.8). Or $C$ est compacte (prop.1). Il existe par suite un nombre fini de points $b_k \in C$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ tels que $C$ soit contenue dans la réunion des voisinages $b_k + V$ . Alors, $B$ est contenue dans la réunion des voisinages $b_k + V + V$ , ce qui achève la démonstration.

On notera que l'enveloppe convexe d'un ensemble compact n'est pas nécessairement fermée (exerc.3) .

Corollaire.- Dans un espace localement convexe séparé et complet $E$ , l'enveloppe fermée convexe d'un ensemble compact est un ensemble compact.

 



Par contre, dans un espace non complet, l'enveloppe fermée convexe d'un ensemble compact peut être non compacte (exerc.3) .

2. Hyperplans d'appui des ensembles compacts.-

Proposition 3.- Soient $E$ un espace vectoriel topologique séparé sur $R$, $A$ un ensemble compact non vide dans $E$, $H_o$ un hyperplan fermé, $x_o$ un point quelconque de $A$. Il existe un hyperplan d'appui $H$ de $A$, parallèle à $H_o$ et tel que $x_o$ et $H$ soient d'un même côté de $H_o$.

En effet, soit $g$ une forme linéaire continue dans $E$ telle que $g(x)=a$ soit une équation de $H_o$ ; supposons par exemple que $g(x_o) \geqslant a$. Soit alors $b$ la borne supérieure de $g$ dans $A$ ; il existe un point $z \in A$ tel que $g(z)=b$ (Top.gén.,chap.IV, § 6,th.1) ; il est clair que l'hyperplan $H$ d'équation $g(x)=b$ répond à la question.

Corollaire 1.- Soit $A$ un ensemble compact dans un espace localement convexe séparé $E$. Si $A$ est contenu dans ses hyperplans d'appui fermés, $A$ se réduit à un point.

En effet, supposons que $A$ contienne deux points distincts $x_1$ et $x_2$. Soit $H_o$ un hyperplan fermé séparant strictement $x_1$ et $x_2$. Il existe un hyperplan d'appui de $A$ parallèle à $H_o$, tel que $x_2$ et $H$ soient d'un même côté de $H_o$. Alors, $H$ ne contient pas $x_1$, d'où contradiction.

Corollaire 2.- Dans un espace localement convexe séparé $E$, tout ensemble convexe compact $A$ est intersection de demi-espaces fermés définis par des hyperplans d'appui de $A$.

En effet, pour tout point $x_o \notin A$, il existe un hyperplan fermé $H_o$ qui sépare strictement $x_o$ et $A$ (§ 2,prop.3). Soit $H$ un hyperplan d'appui de $A$, parallèle à $H_o$, tel que $A$ et $H$ soient du même côté de $H_o$. Le demi-espace fermé défini par $H$ qui contient $A$ ne contient pas $x_o$, ce qui démontre le corollaire.

On notera que cette propriété, qui précise le cor.1 de la prop.3 du § 2 dans le cas des ensembles convexes compacts, est aussi valable pour tout <u>corps convexe</u> (comme il résulte aisément de la prop.2 du § 2). On ignore si elle est encore vraie pour un ensemble convexe fermé quelconque.

3. <u>Points extrémaux des ensembles compacts</u>.- <u>Définition 1</u>.- <u>Soit</u> $A$ <u>un ensemble non vide dans un espace vectoriel</u> $E$ <u>sur</u> $R$ . <u>Un sous-ensemble non vide</u> $A'$ <u>de</u> $A$ <u>est appelé face de</u> $A$ <u>si tout segment ouvert contenu dans</u> $A$ <u>et rencontrant</u> $A'$ <u>est tout entier contenu dans</u> $A'$ . <u>Si</u> $x \in A$ <u>est tel que</u> $\{x\}$ <u>soit une face de</u> $A$ , <u>on dit que</u> $x$ <u>est point extrémal de</u> $A$ .

Dire que $x$ est point extrémal de $A$ revient donc à dire qu'il n'existe aucun segment ouvert contenant $x$ et contenu dans $A$ . D'autre part, si $H$ est un hyperplan d'appui de $A$ , $H \cap A$ est évidemment une face de $A$ .

<u>Lemme 1</u>.- <u>Toute intersection non vide de faces de</u> $A$ <u>est une face de</u> $A$ .

En effet, soit $(A_\alpha)$ une famille de faces de $A$ . Supposons $A' = \bigcap_\alpha A_\alpha$ non vide. Soient $x$ un élément de $A'$ $y_1$ et $y_2$ des éléments de $A$ , avec $x = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$, $0 < \lambda < 1$ . On a $x \in A_\alpha$ , donc $y_1 \in A_\alpha$ , $y_2 \in A_\alpha$ pour tout $\alpha$ , et par suite $y_1 \in A'$ , $y_2 \in A'$ .

<u>Lemme 2</u>.- <u>Si</u> $A_1$ <u>est une face de</u> $A$ <u>de</u> $A_2$ <u>une face de</u> $A_1$ , <u>alors</u> $A_2$ <u>est une face de</u> $A$ .

Soient $x$ un élément de $A_2$ , $y_1$ et $y_2$ des éléments de $A$ , avec $x = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$, $0 < \lambda < 1$ . On a $y_1 \in A_1$ , $y_2 \in A_1$ parce que $A_1$ est face de $A$ , puis $y_1 \in A_2$ , $y_2 \in A_2$ parce que $A_2$ est face de $A_1$ .

*Lemme 3.- Soit* A *un ensemble compact dans un espace vectoriel localement convexe séparé* E *. Toute face fermée* A' *de* A *contient au moins un point extrémal de* A .

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des faces fermées de A contenues dans A', ordonné par inclusion. Soit $(A_\alpha)$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{F}$. Les $A_\alpha$ sont compacts, donc leur intersection A'' est non vide, compacte, contenue dans A', et est une face de A d'après le lemme 1 . L'ensemble A'' est donc la borne inférieure de $(A_\alpha)$, de sorte que $\mathcal{F}$ est inductif. Soit B un élément minimal de $\mathcal{F}$ . Tout hyperplan d'appui fermé H de B coupe B suivant une face fermée de B donc de A (lemme 2), donc H contient B puisque B est minimal dans $\mathcal{F}$ . Donc (cor.1 de la prop.3) B est réduit à un point, ce qui achève la démonstration.

*Théorème 1 (Krein-Milman).- Dans un espace localement convexe séparé* E , *tout ensemble convexe compact* A *est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.*

En fait, on va démontrer le résultat plus fort que voici :

*Proposition 4.- Soit* A *un ensemble compact dans un espace localement convexe séparé* E . *Soient* S *l'ensemble des points extrémaux de* A , A' *(resp.* S') *l'enveloppe convexe fermé de* A *(resp.*S). *On a* A'=S' .

En effet, $S' \subset A'$ est évident. Supposons qu'il existe un point x de A n'appartenant pas à S' . Soient $H_o$ un hyperplan fermé séparant strictement x et S' , H un hyperplan d'appui de A parallèle à $H_o$, tel que H et x soient d'un même côté de $H_o$ . L'hyperplan H ne rencontre pas S' et pourtant contient un point extrémal de A (lemme 3), d'où contradiction. Donc $A \subset S'$ , ce qui entraîne aussitôt $A' \subset S'$ .

 



Remarques.- 1. Même dans un espace E de dimension finie, l'ensemble des points extrémaux d'un ensemble convexe compact n'est pas nécessairement fermé.

2. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux topologies localement convexes sur un même espace vectoriel E , admettant les mêmes formes linéaires continues. Comme les ensembles convexes fermés de E sont les mêmes pour $\mathcal{C}_2$ et pour $\mathcal{C}_2$ , un ensemble convexe compact pour $\mathcal{C}_1$ est l'enveloppe convexe fermée pour $\mathcal{C}_2$ de ses points extrémaux, même s'il n'est pas compact pour $\mathcal{C}_2$ .

4. Génératrices extrémales des cônes convexes.- Dans ce n°, quand nous parlerons de cônes dans un espace vectoriel, il s'agira toujours de cônes de sommet l'origine. Soit C un cône pointé. Un point $x \neq 0$ appartenant à C n'est jamais extrémal pour C , puisque C contient la demi-droite D fermée d'origine O passant par x . Si les seuls segments ouverts contenant x et contenus dans C sont portés par D , tous les points de D possèdent la même propriété. On dit alors que D est une génératrice extrémale de C . On observera que seuls les cônes saillants peuvent possèder des génératrices extrémales.

Proposition 5.- Soient E un espace vectoriel ordonné, P le cône pointé saillant des éléments positifs. Pour qu'un élément $x > 0$ de E appartienne à une génératrice extrémale de P , il faut et il suffit que tout élément positif majoré par x soit proportionnel à x .

En effet, supposons d'abord que x majore un élément $y \geqslant 0$ non proportionnel à x . On a $x-y > 0$, donc $x+\lambda y \in P$ pour $\lambda \geqslant -1$ , de sorte qu'il existe un segment ouvert contenu dans P , contenant x , et non porté par la demi-droite D d'origine O passant par x : D n'est pas extrémale. Réciproquement, si D n'est pas extrémale, il existe un segment fermé $y_1y_2$ contenu dans P , non porté par D , avec $x = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ , et $0 < \lambda < 1$ . On a $\lambda y_1 \geqslant 0$, $(1-\lambda)y_2 \geqslant 0$ , donc x majore $\lambda y_1$ qui n'est pas proportionnel à x .

Proposition 6.- Soient E un espace localement convexe séparé, A un ensemble compact ne contenant pas l'origine ; alors le cône pointé C engendré par A est fermé dans E .

En effet, soit $a \neq 0$ un point adhérent à C ; la trace sur C du filtre des voisinages de a est alors une base de filtre $\mathfrak{B}$ . Pour tout ensemble $V \in \mathfrak{B}$ , soit C(V) le cône engendré par V ; l'intersection A C(V) n'est pas vide. Lorsque V parcourt $\mathfrak{B}$ , les ensembles $A \cap C(V)$ forment donc une base de filtre sur A , et l'hypothèse que A est compact entraîne que cette base de filtre a un point adhérent b dans A . Comme $0 \notin A$ , on a $b \neq 0$. Si $a \notin C$ , les points a et b ne peuvent être sur une même droite passant par O, donc la droite D passant par O et le point $\frac{1}{2}(a+b)$ ne contient ni a ni b . Il existe par suite un hyperplan fermé H contenant D et séparant strictement a et b (§ 2, cor.3 de la prop.3). Si U est le demi-espace ouvert défini par H et contenant a , b n'est pas adhérent à U . Mais, en posant $V = U \cap C$ , on a $V \in \mathfrak{B}$ , et $C(V) \subset U$ , donc b ne peut être adhérent à C(V), ce qui est absurde et montre qu'on a $a \in C$ .

On notera que si $0 \in A$ , le cône engendré par A n'est pas nécessairement fermé. Par exemple, dans le plan $R^2$, le cône engendré par l'ensemble compact défini par l'inégalité $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$ est formé du point O et du demi-plan ouvert $x > 0$, donc n'est pas fermé.

Proposition 7.- Soient E un espace localement convexe séparé, A un ensemble convexe compact dans E , ne contenant pas l'origine, C le cône (convexe) pointé engendré par A , S l'ensemble de ses génératrices extrémales. Alors C est l'enveloppe fermée convexe de S .

En effet, l'enveloppe fermée convexe $S'$ de $S$ est évidemment contenue dans $C$ , en vertu de la prop.6. Montrons maintenant que $C \subset S'$ . Soit $H$ un hyperplan fermé séparant strictement $A$ et $O$, et soit $f(x)=\alpha$ une équation de $H$ ($f$, forme linéaire continue). On a $\alpha \neq 0$ et par exemple $\alpha > 0$ . Alors, $f(x) > \alpha$ pour $x \in A$ . Pour tout $x \in A$ , la droite passant par $O$ et $x$ coupe $H$ en un point unique $\varphi(x) = \lambda x$ ; on a $\alpha = f(\varphi(x)) = \lambda f(x)$, d'où $\varphi(x) = \alpha [f(x)]^{-1} x$ ; l'application $x \to \varphi(x)$ est donc continue, de sorte que $\varphi(A)$ est compact. D'ailleurs, $\varphi(A)=C \cap H$ , donc $\varphi(A)$ est convexe. Ceci posé, soit $x \neq 0$ un point de $C$ , et montrons que $x \in S'$ . Par homothétie, on peut supposer $x \in H$ , donc $x \in \varphi(A)$ .

D'après le th.1 appliqué à $\varphi(A)$, $x$ appartient à l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble des points extrémaux de $\varphi(A)$. Il suffit alors d'observer que, si $y$ est un point extrémal de $\varphi(A)$, la demi-droite fermée $D$ d'origine $O$ passant par $y$ est une génératrice extrémale de $C$ ; en effet, s'il existait un segment ouvert non porté par $D$ , contenu dans $C$ et contenant $y$ , il existerait un segment ouvert contenu dans $\varphi(A)$ et contenant $y$ , ce qui est absurde.

5. <u>Points fixes des ensembles convexes compacts</u>.

<u>Théorème 2.- Soient</u> $E$ <u>un espace vectoriel topologique séparé sur</u> $R$ , $K$ <u>un ensemble convexe compact dans</u> $E$ , $\Gamma$ <u>un ensemble d'applications linéaires affines de</u> $E$ <u>dans lui-même, dont les restrictions à</u> $K$ <u>sont continues, deux à deux permutables, et telles que</u> $u(K) \subset K$ <u>pour tout</u> $u \in \Gamma$ . <u>Alors, il existe un point</u> $x_0 \in K$ <u>tel que</u> $u(x_0)=x_0$ <u>pour tout</u> $u \in \Gamma$ .

Désignant par e l'application identique de E sur lui-même, nous poserons, pour tout $u \in \Gamma$ et tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{1}{n}(e+u+\ldots+u^{n-1})$ .
Il est clair que $u_n$ est une application linéaire affine de E dans lui-même comme K est convexe et $u(K) \subset K$ , on a $u_n(K) \subset K$ et $u_n$ est continue dans K . Soit $\Gamma_1$ l'ensemble des produits d'un nombre fini d'applications de la forme $u_n$ , où $u \in \Gamma$ et n est un entier $> 0$ ; il est clair que $\Gamma_1$ est, comme $\Gamma$, un ensemble d'applications linéaires affines de E dans lui-même, dont les restrictions à K sont continues, deux à deux permutables, et telles que $v(K) \subset K$ pour tout $v \in \Gamma_1$ . L'ensemble $\mathfrak{B}$ des ensembles $v(K)$, où v parcourt $\Gamma_1$ , est une <u>base de filtre</u> ; en effet, si $v \in \Gamma_1$ et $w \in \Gamma_1$ , on a, en posant $u = vw = wv$ ,
$u(K) = v(w(K)) \subset v(K)$ et de la même manière $u(K) \subset w(K)$. Les ensembles de $\mathfrak{B}$ sont <u>compacts</u>, donc leur intersection A est <u>non vide</u>. On va montrer que, pour tout $x \in A$ et tout $u \in \Gamma$ , on a $u(x)=x$ , ce qui établira le théorème. Quel que soit l'entier $n > 0$ , on a $x \in u_n(K)$ , donc
$x = \frac{1}{n}(e+u+\ldots+u^{n-1})y$ avec un $y \in K)$ . D'où :

$$u(x)-x = \frac{1}{n}(u+u^2+\ldots+u^n)y - \frac{1}{n}(e+u+\ldots+u^{n-1})y = \frac{1}{n}(u^n(y)-y) \in \frac{1}{n}(K-K) .$$

Soient V un voisinage équilibré de O dans E , et W un voisinage équilibré de O tel que $W+W$   $V$ . Comme $K-K=K'$ est compact, il existe un nombre fini de points $a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que K' soit contenu dans la réunion des voisinages $a_i+W$ . Puis, il existe un scalaire $\alpha$ tel que $0 < |\alpha| \leqslant 1$ et $\alpha a_i \in W$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ . Alors $\alpha K' \subset W + \alpha W \subset V$ . Donc, si $n \geqslant \alpha^{-1}$ , on a $u(x)-x \in V$ . Comme E est séparé, il en résulte que $u(x)=x$ .

<u>Corollaire</u>.- <u>Soient</u> K <u>un ensemble convexe compact dans</u> E , $\Gamma$ <u>un groupe résoluble</u> (?) <u>d'applications linéaires affines continues de</u> E <u>sur lui-même, tel que</u> $u(K) \subset K$ <u>pour tout</u> $u \in \Gamma$ . <u>Alors, il existe un point</u> $x_0 \in K$ <u>tel que</u> $u(x_0)=x_0$ <u>pour tout</u> $u \in \Gamma$ .

Supposons le corollaire démontré pour lesgroupes qui admettent une suite de compositi on dé n éléments au plus à quotients abéliens. Soit $\Gamma$ un groupe admettant une suite de composition $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ à quotients abéliens ($\Gamma = G_1$, $G_i \supset G_{i+1}$), et démontrons le corollaire pour $\Gamma$. Ceci, compte-tenu du th.2, démontrera le corollaire par récurrence sur n. Or, par hypothèse, l'ensemble A des points $x \in K$ tels que $v(x)=x$ pour tout $v \in G_2$ n'est pas vide. En outre, cet ensemble est évidemment convexe et fermé dans K , donc compact. Soit u quelconque dans $\Gamma$ ; pour tout $v \in G_2$ , on a $u^{-1}vu \in G_2$ , donc $v(u(x)) = u(x)$ pour tout $x \in A$ , et par définition de A , cela prouve que $u(A) \subset A$ ; enfin, si $u_1$ et $u_2$ sont deux transformations de $\Gamma$ , on a $u_1^{-1}u_2^{-1}u_1u_2 \in G_2$ parce que $\Gamma/G_2$ est abélien, donc $u_1^{-1}u_2^{-1}u_1u_2(x)=x$ pour $x \in A$ , c'est-à-dire $u_1u_2(x) = u_2u_1(x)$ . Le théorème 2, appliqué à $\Gamma$ et A , prouve alors le corollaire.

## § 4. Semi-normes.

1. Définition d'une fonction convexe.- Soit A une partie d'un ensemble E , f une fonction numérique finie définie dans A , G le graphe ou ensemble représentatif de la fonction f dans l'ensemble produit $E \times R$ , formé des points $M_x = (x, f(x))$, où x parcourt A . Généralisant les définitions données pour les fonctions d'une variable réelle (Fonct.var.réelle, chap.I, § 4) nous dirons qu'un point (a,b) de $E \times R$ tel que $a \in A$ est au-dessus (resp. strictement au-dessus, au-dessous, strictement au-dessous) de G si on a $b \geqslant f(a)$ (resp. $b > f(a)$, $b \leqslant f(a)$, $b < f(a)$ ).

Définition 1.- Etant donnée une partie convexe H d'un espace affine E sur R , on dit qu'une fonction numérique finie f , définie dans H , est convexe (resp. strictement convexe) dans H si, quels que soient les points x, x' de H, tout point du segment ouvert $M_xM_{x'}$, est au-dessus (resp. <u>strictement au-dessus</u>) <u>du graphe de</u> $f$ .

Autrement dit, la condition pour que $f$ soit convexe (resp. strictement convexe) dans $H$ est que l'on ait l'inégalité

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x')$$

(resp. $\quad f(\lambda x+(1-\lambda)x') < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(x') \quad$ )

pour tout couple de points distincts $x, x'$ de $H$ et tout $\lambda$ tel que $0 < \lambda < 1$ .

La déf.1 montre que, pour que $f$ soit convexe (resp. strictement convexe) dans $H$ , il faut et il suffit que, pour toute droite $D \subset E$ , la <u>restriction</u> de $f$ à $H \cap D$ soit convexe (resp. strictement convexe) dans cet ensemble. Soit $t \to at+b$ une représentation paramètrique de $D$ , la variable $t$ décrivant $R$ ; si $I$ est la partie convexe de $R$ correspondant à $H \cap D$ dans cette représentation paramètrique, il revient au même de dire que la fonction $t \to f(at+b)$ est convexe (resp. strictement convexe) dans $I$ .

Pour qu'une fonction $f$ soit convexe dans une partie convexe $H$ de $E$ , il faut et il suffit que l'ensemble des points de $E \times R$ situés au-dessus du graphe de $f$ soit convexe : on peut, dans cet énoncé, remplacer les mots "au-dessus" par "strictement au-dessus". La démonstration est tout à fait analogue à celle de la prop. correspondante pour les fonctions d'une variable réelle (Fonct.var.réelle, chap.I, § 4,n° ) : nous laissons au lecteur le soin de la développer.

De même, compte-tenu de la prop.1 du § 1 , on démontre, comme pour les fonctions d'une variable réelle, la proposition suivante :

<u>Proposition 1.- Soit $f$ une fonction convexe</u> (<u>resp. strictement convexe</u>) <u>dans une partie convexe</u> $H$ <u>de</u> $E$ . <u>Pour toute famille finie</u> $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ <u>de</u> $p \geqslant 2$ <u>points distincts de</u> $H$ , <u>et toute famille</u> $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ <u>de</u> $p$ <u>nombres réels tels que</u> $0 < \lambda_i < 1$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ , <u>on a</u>

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

(resp. $$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) < \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$ )

En d'autres termes, l'image par l'application $x \rightarrow (x,f(x))$ de tout barycentre des points $x_i$ affectés de masses $\lambda_i > 0$, est au-dessous (resp. strictement au-dessous) du barycentre des points $(x_i,f(x_i))$ affectés des mêmes masses.

Nous laissons enfin au lecteur le soin de vérifier que les prop. 2, 3 et 4 de Fonct.var.réelle, chap.I, §4, sont encore valables pour des fonctions convexes définies dans une partie convexe d'un espace vectoriel quelconque sur R .

2. Semi-normes.-

Définition 2. On dit qu'une fonction numérique finie $p$, définie dans un espace vectoriel $E$ sur $R$, est positivement homogène si, pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \geqslant 0$, on a $p(\lambda x)=\lambda p(x)$ (ce qui entraîne $p(0)=0$) .

Il revient au même de dire que le graphe de la fonction $p$ dans l'espace $E \times R$ est un cône pointé de sommet $0$ .

Pour une fonction positivement homogène $p$ , dire que $p$ est convexe revient à dire que l'inégalité $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ est satisfaite pour tout couple de points $x,y$ de $E$ .

Définition 3.- On dit qu'une fonction numérique finie $p$, définie dans un espace vectoriel $E$ sur $R$ , est une semi-norme si elle satisfait aux axiomes suivants :

($SN_I$) Quels que soient $x \in E$ et $\lambda \in R$ , $p(\lambda x)=|\lambda| p(x)$

($SN_{II}$) Quels que soient $x \in E$ et $y \in E$ , $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$

Ces axiomes entraînent aussitôt que $p$ est positive. Car, pour tout $x \in E$ , on a : $0 = p(0) \leqslant p(x) + p(-x) = 2p(x)$ .

Une semi-norme est une fonction convexe et positivement homogène. Une norme sur E peut être caractérisée comme une semi-norme telle que la relation $p(x)=0$ entraîne $x=0$.

Proposition 2.- Soit p une semi-norme définie dans E. L'ensemble A des points $x \in E$ tels que $p(x)<1$ est un ensemble non vide convexe symétrique, dont tous les points sont internes. Réciproquement, soit A un ensemble non vide convexe symétrique dont tous les points sont internes ; il existe alors une semi-norme p et une seule telle que A soit identique à l'ensemble des $x \in E$ tpour lesquels $p(x)<1$.

1° La semi-norme p étant donnée, on a $0 \in A$, donc A est non vide, et évidemment symétrique. Soient $x \in A$ et $y \in A$. On a $p(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda p(x)+(1-\lambda)p(y)<\lambda+(1-\lambda)=1$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$, donc A est convexe. Enfin, soient $x \in A$ et $z \in E$. On a $p(x+\mu z) \leq p(x)+|\mu| p(z)$ quel que soit $\mu \in R$, donc $p(x+\mu z)<1$ pour $|\mu|$ assez petit, de sorte que x est point interne de A.

2° Soit A un ensemble convexe possédant les propriétés de l'énoncé. Pour tout x dans E, on a $\rho x \in A$ lorsque $\rho$ appartient à un certain intervalle de R non vide et symétrique par rapport à 0 ; posons $p(x) = 1/\sup_{\rho x \in A} \rho$ (avec la convention $1/+\infty=0$). On a aussitôt $p(\lambda x)=|\lambda| p(x)$ pour tout $\lambda \in R$. Si $p(x)<1$, on a $\sup_{\rho x \in A} \rho>1$, donc $x \in A$ ; réciproquement, si $x \in A$, il existe un $\rho>1$ tel que $\rho x \in A$ parce que x est point interne de A, donc $p(x)<1$ : ainsi, A est bien l'ensemble des x tels que $p(x)<1$. Soient d'autre part x et y deux points de E ; soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres $>0$ tels que $\alpha x \in A$, $\beta y \in A$ ; posant $\gamma=\frac{\alpha \beta}{\alpha+\beta}$ et $\rho=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ on a $\gamma(x+y)=\rho \alpha x+(1-\rho) \beta y$, et $0 \leq \rho \leq 1$, donc, puisque A est convexe, $\gamma(x+y) \in A$, et par suite $p(x+y)<\gamma^{-1}=\alpha^{-1}+\beta^{-1}$.

Ces relations ayant lieu quels que soient $\alpha < 1/p(x)$ et $\beta < 1/p(y)$ , on en déduit $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ , ce qui achève de prouver que p est une semi-norme.

Soit enfin p' une autre semi-norme telle que A soit l'ensemble des $x \in E$ pour lesquels $p'(x) < 1$ . Pour tout $x \in E$ , l'ensemble des $\rho > 0$ tels que $\rho x \in A$ est l'intervalle $[0, 1/p'(x)[$ . On en déduit aussitôt que $p(x) = p'(x)$ , et la proposition est démontrée.

On dit que, pour une semi-norme p définie dans E , l'ensemble A des $x \in E$ tels que $p(x) < 1$ est l'<u>indicateur</u> de p, et que p est la <u>jauge</u> de A .

## 3. <u>Semi-normes dans les espaces localement convexes</u>.-

Soit E un espace vectoriel sur R, et soit $\Gamma$ un ensemble de semi-normes sur E . Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des ensembles convexes symétriques dont chacun est défini par une relation de la forme $p(x) < \lambda$ , p parcourant $\Gamma$ et $\lambda$ l'ensemble des nombres $> 0$ . Alors, l'ensemble $\mathfrak{G}$ des intersections finies d'ensembles de $\mathfrak{S}$ satisfait évidemment aux conditions de la prop.18 du § 1 . Il existe donc une topologie (et une seule) compatible avec la structure d'espace vectoriel de E pour laquelle $\mathfrak{G}$ est un système fondamental de voisinages de 0 . Cette topologie est localement convexe.

<u>Définition 4</u>.- <u>La topologie précédente est appelée la topologie définie par l'ensemble $\Gamma$ de semi-normes</u>.

<u>Exemples</u>.- 1. La topologie d'un espace <u>normé</u> sur R est la topologie définie par <u>une seule norme</u>.

2. Soit $(\mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de topologies localement convexes compatibles avec la structure d'un espace vectoriel E , $\mathcal{T}_\iota$ étant définie par un ensemble $\Gamma_\iota$ de semi-normes (pour chaque $\iota \in I$).

Si $\mathcal{T}$ est la topologie localement convexe définie par l'ensemble de semi-normes $\Gamma = \bigcup_{\iota \in I} \Gamma_\iota$, il résulte aussitôt de la déf.4 que $\mathcal{T}$ est la borne supérieure des topologies $\mathcal{T}_\iota$. En particulier, soit $\mathcal{T}_0$ une topologie localement convexe définie par un ensemble $\Gamma_0$ de semi-normes ; pour chaque $p \in \Gamma_0$, soit $\mathcal{T}_p$ la topologie localement convexe définie par la <u>seule</u> semi-norme p ; alors $\mathcal{T}_0$ est la borne supérieure des $\mathcal{T}_p$ lorsque p parcourt $\Gamma$.

3. Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur R. Soit $f \in \mathcal{E}$. Pour tout couple d'entiers positifs n, m, posons $p_{n,m}(f) = \sup_{-m \leqslant x \leqslant m} |f^{(n)}(x)|$. Les semi-normes $p_{n,m}$ définissent sur $\mathcal{E}$ une topologie localement convexe que nous étudierons plus tard.

L'intérêt de la déf.4 provient de la proposition suivante :

<u>Proposition 3.- Toute topologie localement convexe $\mathcal{T}$ sur un espace vectoriel réel E peut être définie par un ensemble de semi-normes.</u>

En effet, soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des voisinages ouverts convexes symétriques de 0 pour $\mathcal{T}$ ; cet ensemble est un système fondamental de voisinages de 0. Soit $\Gamma$ l'ensemble des jauges des ensembles de $\mathfrak{S}$ (prop.2). Les intersections finies des ensembles définis par les relations $p(x) < \lambda$ ($p \in \Gamma$, $\lambda \in R$) sont évidemment les ensembles de $\mathfrak{S}$. La topologie définie par $\Gamma$ est donc la topologie $\mathcal{T}$.

<u>Remarques</u>.- 1. Soit $\Gamma$ un ensemble de semi-normes, $\mathcal{T}$ la topologie qu'il définit. Si, pour toute semi-norme $p \in \Gamma$ et tout $\alpha > 0$, on a $\alpha p \in \Gamma$ (auquel cas nous dirons que $\Gamma$ est <u>invariant par homothétie</u>), on obtient un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{T}$ en considérant les ensembles définis par un nombre fini de relations $p_i(x) < 1$, où $p_i \in \Gamma$ ($1 \leqslant i \leqslant n$).

2. La borne supérieure d'une famille finie de semi-normes est une semi-norme. Si $\Gamma$ est un ensemble de semi-normes sur un espace vectoriel E , on dit que $\Gamma$ est <u>saturé</u> si la borne supérieure de toute famille finie de semi-normes appartenant à $\Gamma$ appartient à $\Gamma$. Si $\Gamma$ est quelconque, le plus petit ensemble saturé de semi-normes contenant $\Gamma$ est l'ensemble $\Gamma'$ des semi-normes $\sup_{p \in H} p(x)$ , où H parcourt l'ensemble des parties finies de $\Gamma$ ; on dit que $\Gamma'$ s'obtient en saturant $\Gamma$. Il est immédiat que $\Gamma$ et $\Gamma'$ définissent la même topologie localement convexe. On peut donc se borner aux topologies localement convexes définies par des familles saturées de semi-normes.

<u>Proposition 4.- Soit $\Gamma$ un ensemble de semi-normes sur un espace vectoriel E. Pour que la topologie définie par $\Gamma$ soit séparée, il faut et il suffit que, pour tout</u> $x \in E$ , <u>il existe une semi-norme</u> $p \in \Gamma$ <u>telle que</u> $p(x) \neq 0$.

Cette proposition est évidente à partir des définitions.

<u>Proposition 5.- Pour qu'un espace localement convexe E soit métrisable, il faut et il suffit qu'il soit séparé et que sa topologie puisse être définie par une famille dénombrable de semi-normes</u>.

C'est évident puisqu'un espace vectoriel localement convexe séparé est métrisable si et seulement si il existe un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts convexes symétriques de O .

Soit E un espace localement convexe, défini par un ensemble $\Gamma$ de semi-normes. Comme $p(x-z) \leqslant p(x-y)+p(y-z)$ pour toute semi-norme $p \in \Gamma$ , la fonction $p(x-y)$ est un <u>écart</u> sur E , et il résulte aussitôt des définition que cet ensemble d'écarts définit sur E la structure uniforme de cet espace vectoriel topologique. En particulier :

Proposition 6.- Si la topologie d'un espace localement convexe $E$ est définie par un ensemble $\Gamma$ de semi-normes, toute semi-norme $p \in \Gamma$ est uniformément continue dans $E$.

Il en résulte que l'ensemble des semi-continues sur un espace localement convexe définit la topologie de cet espace.

Corollaire.- Pour toute semi-norme $p \in \Gamma$ et tout nombre $\alpha > 0$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x) \leq \alpha$ est l'adhérence du voisinage ouvert $V$ de $0$ formé des $x$ tels que $p(x) < \alpha$.

En effet, l'ensemble considéré est fermé en vertu de la prop.6, et, si $p(x) = \alpha$, tout point $y$ du segment ouvert d'extrémités $0$ et $x$ est tel que $p(x) < \alpha$, donc $x$ est adhérent à $V$.

Supposons maintenant que $E$ soit séparé ; en vertu de la prop.6, les fonctions $p \in \Gamma$ se prolongent par continuité au complété $\hat{E}$ de $E$ (Top.gén.,chap.II, § 3, th.1) ; soit $\hat{\Gamma}$ l'ensemble de ces fonctions prolongées. D'après le principe de prolongement des inégalités (Top.gén., chap.IV, § 5), les fonctions de $\hat{\Gamma}$ sont des semi-normes sur $\hat{E}$ ; en outre, si, pour toute fonction $p \in \Gamma$, on désigne par $\hat{p}$ son prolongement à $\hat{E}$, les fonctions $\hat{p}(x-y)$ forment un système d'écarts définissant la structure uniforme de $\hat{E}$ (Top.gén., chap.IX, § 1, n°5). Les fonctions de $\hat{\Gamma}$ définissent donc la topologie de $\hat{E}$.

Si $\Gamma$ est un ensemble de semi-normes définissant la topologie de $E$, les restrictions des semi-normes de $\Gamma$ à un sous-espace vectoriel $V$ de $E$ définissent la topologie de $E$. Soit $\varphi$ l'application canonique de $E$ sur $E/V$. Soit $U$ un voisinage ouvert symétrique et convexe de $0$ dans $E$. Si $p$ est la jauge de $U$, pour tout $z \in E/V$, l'ensemble des $\lambda > 0$ tels que $\lambda z \in \varphi(U)$ est identique à l'ensemble des $\lambda > 0$ tels qu'il existe un $x \in E$ pour lequel $\lambda x \in U$, $\varphi(x) = z$ ; il en résulte que la jauge $\dot{p}$ de $\varphi(U)$ est donnée par la formule :

$$\mathring{p}(z) = \inf_{\varphi(x) \in z} p(x) \quad ;$$

la topologie de $E/V$ est donc définie par la famille des semi-normes $\mathring{p}$ lorsque $p$ parcourt $\Gamma$.

En particulier, considérons un espace localement convexe $E$ défini par la donnée d'une seule semi-norme $p$ ; pour que $E$ soit séparé, il faut et il suffit que $p$ soit une norme (prop.4). Si $p$ n'est pas une norme, l'adhérence $N$ de $0$ dans $E$ est le sous-espace vectoriel $\overset{-1}{p}(0)$ ; l'espace séparé associé $E/N$ est alors un espace normé défini par la norme $\mathring{p}$ correspondant à $p$ : on a ici $\mathring{p}(\mathring{x}) = p(x)$ pour tout $x$ appartenant à la classe $\mathring{x}$ modulo $N$.

## 4. Applications multilinéaires continues d'un espace localement convexe dans un espace localement convexe.

Proposition 7.- Soient $E_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et $F$ des espaces localement convexes. Soit $\Gamma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ un ensemble saturé de semi-normes définissant la topologie de $E_i$, ~~et $\Gamma'_i$ un ensemble de semi-normes définissant la topologie de $E_i$~~, et $\Gamma$ un ensemble de semi-normes définissant la topologie de $F$. Pour qu'une application multilinéaire $u$ de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans $F$ soit continue, il faut et il suffit que pour toute semi-norme $q \in \Gamma$, il existe une semi-norme $p_i \in \Gamma_i$ pour chaque ~~indice~~ indice $i$, ainsi qu'un nombre $a > 0$ tels que l'on ait identiquement

$$(1) \qquad q(u(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqslant a\, p_1(x_1)\, p_2(x_2) \ldots p_n(x_n)$$

La condition est nécessaire. En effet, par hypothèse, pour toute semi-norme $q \in \Gamma$ et tout nombre $\beta > 0$, il existe $n$ nombres $\alpha_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et, pour chaque indice $i$, une semi-norme $p_i \in \Gamma_i$, tels que les relations $p_i(x_i) \leqslant \alpha_i$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) entraînent

$q(u(x_1,x_2,\dots,x_n)) \leq \beta$ . Soit alors $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ un point quelconque de $\prod_{i=1}^{n} E_i$, et, pour chaque indice i , soit $\lambda_i$ un nombre $>0$ tel que $\lambda_i p_i(x_i) \leq \alpha_i$ ; comme ces relations s'écrivent $p_i(\lambda_i x_i) \leq \alpha_i$ , on a $q(u(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2,\dots,\lambda_n x_n)) \leq \beta$ , c'est-à-dire $q(u(x_1,x_2,\dots,x_n)) \leq \frac{\beta}{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$ . Cela étant, si $p_i(x_i)=0$, pour un indice i au moins, on peut prendre $\lambda_i$ arbitrairement grand, donc $q(u(x_1,x_2,\dots,x_n))=0$. Si au contraire tous les $p_i(x_i)$ sont $\neq 0$, on peut prendre $\lambda_i = \alpha_i/p_i(x_i)$, et dans tous les cas on obtient l'inégalité (1) avec $a = \frac{\beta}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ .

Réciproquement, si la condition de l'énoncé est vérifiée, u est évidemment continue au point $(0,0,\dots,0)$, donc partout (chap.I, ? ).

Corollaire 1.- Pour que u soit continue, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme $q \in \Gamma$ , la fonction $q(u(x_1,x_2,\dots,x_n))$ soit bornée dans un voisinage de 0 de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ .

La condition est évidemment nécessaire, et la démonstration précédente montre qu'elle entraîne l'inégalité (1), donc la continuité de u .

Proposition 8.- Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux topologies localement convexes compatibles avec la structure d'espace vectoriel de E , et définies respectivement par deux ensembles saturés $\Gamma$, $\Gamma'$ de semi-normes. Pour que $\mathcal{C}$ soit moins fine que $\mathcal{C}'$ , il faut et il suffit que, pour toute semi-norme $p \in \Gamma$ , il existe une semi-norme $q \in \Gamma'$ et un nombre $a > 0$ tels que l'on ait identiquement $p(x) \leq aq(x)$ .

En effet, cela exprime que l'application identique de E , muni de la topologie $\mathcal{C}'$ , sur E , muni de la topologie $\mathcal{C}$ , est continue.

5. Théorème de Hahn-Banach.- Théorème 1 (Hahn-Banach). Soit $p$ une semi-norme sur un espace vectoriel réel $E$. Soit $M$ un sous-espace vectoriel de $E$, et soit $f$ une forme linéaire définie dans $M$, telle que $|f(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de $M$. Il existe alors une forme linéaire $\bar{f}$ définie dans $E$, prolongeant $f$, et telle que $|\bar{f}(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de $E$.

On peut supposer $f \neq 0$, sans quoi le théorème est trivial. Considérons sur $E$ la topologie localement convexe définie par l'unique semi-norme $p$ ; l'ensemble convexe $A$ indicateur de la semi-norme $p$ est alors ouvert dans $E$. Soit $V$ la variété linéaire de $E$, hyperplan de $M$, définie par la relation $f(x)=1$ ; on a $p(x) \geqslant 1$ en tout point de $V$, donc $V$ ne rencontre pas $A$. Le th.1 du § 2 montre qu'il existe un hyperplan $H$ dans $E$, contenant $V$ et ne rencontrant pas $A$. Soit $\bar{f}$ la forme linéaire définie dans $E$ et telle que $\bar{f}(x)=1$ dans $H$ ; comme $V$ est un hyperplan dans $M$ sur lequel les restrictions de $f$ et $\bar{f}$ sont égales, on a $f(x)=\bar{f}(x)$ dans $M$ ; enfin, comme $0$ appartient au demi-espace ouvert défini par $\bar{f}(x) < 1$, ce dernier-espace contient $A$, et par suite la relation $\bar{f}(x)=1$ entraîne $p(x) \geqslant 1$. En vertu de l'homogénéité de $\bar{f}$ et de $p$, on a donc $|\bar{f}(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de $E$, et le théorème est démontré.

Corollaire 1.- Soient $E$ un espace normé, $M$ un sous-espace vectoriel de $E$, $f$ une forme linéaire continue définie dans $M$ ; il existe une forme linéaire continue $\bar{f}$ définie dans $E$, prolongeant $f$ et telle que $\|\bar{f}\| = \|f\|$.

Il suffit d'appliquer le th.1 en prenant $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$, ce qui donne $\|\bar{f}\| \leqslant \|f\|$ ; d'autre part, comme $\|\bar{f}\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\bar{f}(x)|$, on a évidemment $\|\bar{f}\| \geqslant \|f\|$, d'où le corollaire.

 



Corollaire 2.- Soient E un espace localement convexe, $x_0 \neq 0$ un point de E , p une semi-norme continue dans E ; il existe une forme linéaire continue f dans E , telle que $f(x_0)=p(x_0)$ et que $|f(x)| \leqslant p(x)$ dans E .

Il suffit d'appliquer le th.1 à la droite M passant par O et $x_0$ et à la forme linéaire $\lambda x_0 \to \lambda p(x_0)$ définie dans M .

## 6. Fonctions convexes dans un espace de dimension finie.-

Proposition 9.- Soit E un espace vectoriel topologique séparé, C un cône épointé convexe et ouvert de sommet $x_0$ , V un ensemble ouvert convexe $x_0$, et soit $S = C \cap V$ . Si f est une fonction convexe et majorée S , f(x) tend vers une limite finie lorsque x tend vers $x_0$ en restant dans S .

Pour simplifier l'écriture, nous pouvons supposer que $x_0=0$ . Posons $\beta = \limsup_{x \in S,\, x \to 0} f(x)$, nombre qui est fini par hypothèse ; nous allons raisonner par l'absurde, en supposant qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que, dans chaque voisinage de O, il existe un point $y \in S$ tel que $f(y) \leqslant \beta - \alpha$ . Soit U un voisinage de O contenu dans V tel que $\sup_{z \in U \cap S} f(z) \leqslant \beta + \frac{\alpha}{6}$ ; soit $a \in (\frac{1}{2} U) \cap S$ tel que $f(a) \geqslant \beta - \frac{\alpha}{6}$ . On a : $2a \in U \subset V$ , et $2a \in C$ , donc $2a \in U \cap S$ , donc $f(2a) \leqslant \beta + \frac{\alpha}{6}$ . Comme la fonction f est convexe dans le segment ouvert d'extrémités O et 2a , on a, pour tout $\rho$ tel que $0 < \rho \leqslant 1$ , $(2-\rho)(\beta - \frac{\alpha}{6}) \leqslant (2-\rho)f(a) \leqslant$ $\leqslant f(\rho a) + (1-\rho)f(2a) \leqslant f(\rho a) + (1-\rho)(\beta + \frac{\alpha}{6})$, donc $f(\rho a) \geqslant \beta - \frac{\alpha}{3}$ . Cela étant, lorsque y tend vers O en restant dans S , le point $x = y + \frac{1}{\rho}(\rho a - y)$ tend vers $a \in S$ , donc appartient à S dès que y est assez voisin de O dans S . Mais, comme $\rho a$ appartient au segment ouvert d'extrémités x et y , et que f est convexe dans ce segment, on a $f(x)-f(y) \geqslant \frac{1}{\rho}(f(\rho a)-f(y))$, ou encore

$$f(x) \geqslant f(\rho a)+(\frac{1}{\rho}-1)(f(\rho a)-f(y)) .$$

Par hypothèse, il existe dans tout voisinage de O un point y tel que $f(y) \leqslant \beta - \alpha$, d'où, comme $f(\rho a) \geqslant \beta - \frac{\alpha}{2}$, $f(\rho a) - f(y) \geqslant \frac{\alpha}{2}$, et par suite $f(x) \geqslant f(\rho a) + (\frac{1}{\rho} - 1)\frac{\alpha}{2} \geqslant \beta - \frac{\alpha}{2} + (\frac{1}{\rho} - 1)\frac{\alpha}{2}$ ; or, le dernier membre de cette inégalité est arbitrairement grand en prenant $\rho$ assez petit. Nous obtenons donc une contradiction.

On notera que la proposition devient inexacte si on ne suppose plus $f$ majorée dans S , ou si on remplace V par un ensemble ouvert convexe dans E , auquel $x_0$ est adhérent, mais n'appartient plus.

<u>Proposition 10</u>.- <u>Toute fonction convexe définie dans une partie convexe ouverte</u> H <u>d'un espace affine</u> E <u>de dimension finie est continue dans</u> H .

Soit $x_0 \in H$ . Montrons que $f(x)$ tend vers une limite lorsque x tend vers $x_0$ en restant $\neq x_0$ ; on peut appliquer la prop.9 , avec $O = \complement\{x_0\}$, si on prouve qu'il existe un voisinage convexe $V \subset H$ de $x_0$ tel que $f$ soit <u>majorée</u> dans V .

Prenons $x_0$ pour origine dans E , et soit $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une base de E ; pour chaque k , la fonction $t \to f(te_k)$ est convexe dans un voisinage de O dans R , donc continue dans ce voisinage ; il existe donc n nombres $\alpha_k > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ tels que $f(te_k)$ soit majoré dans l'intervalle $|t_k| \leqslant \alpha_k$ ; si V est l'ensemble des points $\sum_{k=1}^{n} t_k e_k$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \frac{|t_k|}{\alpha_k} \leqslant 1$ , V est un voisinage convexe de $x_0$ dans lequel f est majorée en vertu de la prop.1, ce qui établit notre assertion.

Enfin, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $x_0$ en restant $\neq x_0$ est égale à $f(x_0)$, puisque pour toute droite D passant par $x_0$, la restriction de f à $D \cap H$ est convexe, donc continue au point $x_0$ qui appartient à un segment ouvert contenu dans $D \cap H$ .

Une forme linéaire non continue sur un espace vectoriel topologique de dimension infinie donne un exemple de fonction convexe non continue dans un tel espace.

## Appendice. Espaces localement convexes complexes.

Soit E un espace vectoriel topologique sur le corps C des nombres complexes ; rappelons que la topologie de E est aussi compatible avec la structure d'espace vectoriel *réel* de E obtenue en restreignant à R le corps des scalaires. Nous désignerons par $E_o$ l'espace vectoriel topologique réel ainsi obtenu, et nous dirons que cet espace est *associé* à E. On notera que dans $E_o$, l'application $x \longrightarrow ix$ (qui n'est plus une homothétie) est un *automorphisme* (topologique) u de $E_o$ tel que $u^2(x)=-x$.

Inversement, soit $F_o$ un espace vectoriel topologique sur R et supposons qu'il existe un automorphisme u (topologique) de $F_o$ tel que $u^2(x)=-x$ ; on sait (*Alg.*, chap. VIII) qu'on peut alors définir sur $F_o$ une structure d'espace vectoriel sur C en posant, pour tout $\lambda=\alpha+i\beta$ et tout $x\in F_o$, $\lambda x=\alpha x+\beta u(x)$. En outre, l'application $(\alpha,\beta,x) \longrightarrow \alpha x+\beta u(x)$ de $R^2\times F_o$ dans $F_o$ étant continue, la topologie de $F_o$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel sur C ainsi définie ; si on désigne par F l'espace vectoriel topologique sur C qu'on définit de cette manière, $F_o$ est l'espace vectoriel réel associé à F.

On notera qu'il n'existe pas toujours un automorphisme u de $F_o$ tel que $u^2(x)=-x$ ; par exemple, on ne peut pas définir de structure d'espace vectoriel complexe sur un espace vectoriel réel de dimension *impaire* sur R.

Soit $E$ un espace vectoriel topologique complexe. Toute variété linéaire $M$ dans $E$ est aussi une variété linéaire dans $E_0$, la réciproque étant inexacte. Pour éviter toute confusion, on dira qu'une variété linéaire dans $E$ (resp. dans $E_0$) est une variété linéaire <u>complexe</u> (resp. <u>réelle</u>). Une variété linéaire complexe de dimension finie $n$ (resp. de codimension finie $n$) est une variété linéaire réelle de dimension $2n$ (resp. de codimension $2n$).

Soit $f$ une forme linéaire sur $E$ (prenant donc des valeurs complexes) il est clair que $g = \mathcal{R}f$ et $h = \mathcal{I}f$ sont des formes linéaires sur $E_0$ ; en outre, la relation $f(ix)=if(x)$ entraîne l'identité $h(x)=-g(ix)$. Inversement, si $g$ est une forme linéaire (réelle) sur $E_0$, $f(x)=g(x)-ig(ix)$ est une forme linéaire (complexe) sur $E$ telle que $\mathcal{R}f=g$ ; il est clair que, pour que $f$ soit <u>continue</u>, il faut et il suffit que $g$ le soit.

Soit maintenant $H$ un <u>hyperplan complexe</u> dans $E$, d'équation $f(x)=\alpha+i\beta$, $f$ désignant une forme linéaire complexe sur $E$ ; en posant $g = \mathcal{R}f$, on voit que $H$ est l'intersection de deux <u>hyperplans réels</u> $H_1$, $H_2$, d'équations respectives $g(x)=\alpha$, et $g(ix)=-\beta$ ; si $H$ est <u>fermé</u>, il en est de même de $H_1$ et $H_2$ (chap. I, § 2, th. 1). Inversement, soit $H_0$ un hyperplan <u>réel</u> homogène, d'équation $g(x)=0$ ($g$ forme linéaire réelle sur $E_0$) ; l'intersection $H$ de $H_0$ et de $iH_0$ est un <u>hyperplan complexe</u> homogène, car si $f$ est la forme linéaire complexe) sur $E$ telle que $\mathcal{R}f=g$, $H$ est l'hyperplan d'équation $f(x)=0$ ; si $H_0$ est fermé, il en est de même de $H$.

Soit $A$ un ensemble quelconque dans $E$. On dit que $A$ est convexe s'il est convexe dans $E_0$. On dit que $x \in E$ est point interne de $A$ si $x$ est point interne de $A$ dans $E_0$. On dit que $A$ est <u>cerclé</u> si $A = e^{i\theta} A$

pour tout réel. Si A est convexe et cerclé, A est équilibré ; car soient $x \in A$ et $\lambda \in C$ tel que $|\lambda| \leqslant 1$ ; on a $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ et $\theta$ réel, et $\lambda x = e^{i\theta}(\frac{1+\rho}{2} x + \frac{1-\rho}{2} e^{i\pi} x)$ . On appelle <u>enveloppe convexe cerclée</u> (resp. <u>fermée convexe cerclée</u>) de $A \subset E$ l'intersection des ensembles convexes cerclés (resp. fermés convexes cerclés) contenant A , c'est-à-dire le plus petit ensemble convexe cerclé (resp. fermé convexe cerclé) contenant A . C'est aussi l'enveloppe convexe (resp. fermée convexe) de la réunion des ensembles $e^{i\theta} A$ . On peut donc la définir comme l'ensemble des points $\sum \lambda_i x_i$ où $x_i \in A$ et $\sum_i |\lambda_i| = 1$ (resp. l'adhérence de cet ensemble). On en déduit aussitôt que cette enveloppe est contenue dans l'enveloppe convexe (resp. l'enveloppe fermée convexe) de la réunion des ensembles 2A , -2A , 2iA , -2iA ; la prop.2 du § 2 montre donc qu'elle est précompacte lorsque A est précompact.

Nous dirons qu'un espace vectoriel topologique complexe E est <u>localement convexe</u> si l'espace vectoriel topologique réel associé $E_0$ est localement convexe, c'est-à-dire si tout voisinage de 0 contient un voisinage convexe de 0.

<u>Proposition 1.-</u> <u>Si</u> E <u>est un espace vectoriel localement convexe sur</u> C , <u>les voisinages de</u> 0 <u>convexes et équilibrés forment un système fondamental de voisinages de</u> 0 <u>invariant par homothétie</u>.

<u>Réciproquement, soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>une base de filtre sur un espace vectoriel complexe</u> E , <u>invariante par homothétie</u>, <u>formée d'ensembles convexes, cerclés, admettant</u> 0 <u>pour point interne</u>. <u>Il existe alors une topologie et une seule compatible avec la structure d'espace vectoriel complexe de</u> E , <u>pour laquelle</u> $\mathfrak{S}$ <u>est un système fondamental de voisinages de</u> 0 ; <u>cette topologie est localement convexe</u>.

En effet, supposons d'abord que E soit un espace vectoriel complexe localement convexe. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble, invariant par homothétie, des voisinages de O convexes et équilibrés. Montrons que $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de O. Soit U un voisinage quelconque de O Soient V un voisinage convexe de O contenu dans U, et W un voisinage équilibré de O contenu dans V. L'enveloppe convexe de W est évidemment équilibré, et est contenue dans V, donc est un voisinage de O convexe équilibré contenu dans U.

Réciproquement, si $\mathfrak{S}$ est une base de filtre sur E (espace vectoriel complexe) invariante par homothétie, formée d'ensembles convexes, cerclés (donc équilibrés) admettant O pour point interne, $\mathfrak{S}$ satisfait aux conditions $(EV_I)$, $(EV_{II})$ et $(EV_{III})$ de la prop.3 du chap.I, § 1. La condition $(EV_{IV})$ est aussi satisfaite, car, si $V \in \mathfrak{S}$, on a $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subset V$.

<u>Proposition 2.</u>- <u>Dans un espace localement convexe complexe</u> E, <u>toute variété linéaire complexe fermée</u> M <u>est l'intersection des hyperplans complexes fermés qui la contiennent.</u>

Il suffit (par translation) de considérer le cas où M est un sous-espace vectoriel de E. Alors, M est l'intersection des hyperplans <u>réels</u> fermés qui la contiennent (cor.3 de la prop.3, § 2) ; or, si $H_0$ est un hyperplan réel fermé contenant M, on a aussi $M = iM \subset iH_0$ ; donc M est contenue dans l'hyperplan complexe fermé $H = H_0 \cap (iH_0)$ ; d'où résulte que l'intersection des hyperplans complexes fermés contenant M est contenue dans M et par suite identique à M.

Comme au § 2, on en déduit les corollaires suivants :

Corollaire 1.- Soient E un espace localement convexe complexe séparé, M un sous-espace vectoriel (complexe) de E de dimension finie. Il existe un sous-espace (complexe) fermé N supplémentaire topologique de M .

Corollaire 2.- Soient E un espace localement convexe complexe, M un sous-espace de E , f une forme linéaire continue définie dans M ; il existe une forme linéaire continue $\bar{f}$ définie dans E et prolongeant f .

Une fonction numérique finie p , définie dans un espace vectoriel complexe E , est une semi-norme si elle satisfait à l'axiome $(SN_{II})$ du § 4, n°2 , et à l'axiome suivant :

$(SN'_I)$ Quels que soient $x \in E$ et $\lambda \in C$ , $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ .

Une semi-norme sur E est donc une semi-norme sur $E_o$ .

Proposition 3.- Soit p une semi-norme sur un espace vectoriel complexe E. Soit M un sous-espace vectoriel de E , et soit f une forme linéaire (complexe) définie dans M et telle que $|f(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de M . Il existe alors une forme linéaire (complexe) $f_1$ définie dans E , prolongeant f et telle que $|f_1(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de E .

En effet, $g = \mathcal{R} f$ est une forme linéaire réelle définie dans M et telle que $|g(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de M ; il existe donc une forme linéaire réelle $g_1$ définie dans E , prolongeant g et telle que $|g_1(x)| \leqslant p(x)$ dans E (§ 4,th.1). Soit $f_1(x)=g_1(x)-ig_1(ix)$ la forme linéaire complexe sur E , dont $g_1$ est la partie réelle. Pour tout $\theta$ réel, on a $|\mathcal{R}(e^{i\theta} f_1(x)| = |\mathcal{R}(f_1(e^{i\theta} x))| = |g_1(e^{i\theta} x)| \leqslant p(e^{i\theta}x) = p(x)$ , et en particulier $|f_1(x)| \leqslant p(x)$, ce qui démontre la proposition.

Comme au § 4, on en déduit le

Corollaire.- Soient E un espace normé complexe, M un sous-espace vectoriel complexe de E , f une forme linéaire continue définie dans M ; il existe une forme linéaire continue $f_1$ définie dans E , prolongeant f et telle que $\|f\| = \|f_1\|$ .

-------------------